

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE FERHAT ABBAS – SETIF
UFAS (ALGERIE)**

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département d'Electronique

Pour l'obtention du Diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Filière : Electronique

Par

MR : Abdellah KACHA

Thème

ANALYSE DES SIGNAUX DANS LE DOMAINE TEMPS-FREQUENCE

Soutenu le :devant la commission d'examen :

PR : A. Khellaf	Prof à l'université de Sétif	Président
PR : F. Boudjema	Prof à l'ENP d'Alger	Examineur
PR : N. Doghmane	Prof à l'université d'Annaba	Examineur
PR : T. Mohammadi	Prof à l'université de Sétif	Examineur
PR : K. Benmahammed	Prof à l'université de Sétif	Rapporteur

Remerciements

J'exprime mes vifs remerciements à mon promoteur le Professeur K. Benmahammed tant pour son aide et sa disponibilité que pour les précieux conseils scientifiques qui n'a cessé de me les fournir durant toute la période de réalisation de ce travail.

Une partie de ce travail a été réalisée au Service Ondes et Signaux de l'Université Libre de Bruxelles sous la supervision du Professeur F. Grenez et du Docteur P. De Doncker. Qu'ils trouvent ici mes vifs remerciements pour m'avoir accueilli dans leur équipe, pour leurs conseils ainsi que pour leur disponibilité.

Je remercie vivement les membres du jury de la thèse : les Professeurs A. Khellaf, N. Doghmane, N. Bouguechal et T. Mohammadi qui ont accepté de consacrer une partie de leur temps précieux à la lecture cette thèse.

Je remercie vivement mes amis F. Annani, N. Belkhir et M. Mansouri pour leur aide et leur soutien moral.

Mes remerciements vont à tous qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Ma profonde gratitude s'adresse à mes parents et mes frères et sœurs pour leur aide et leur soutien permanent.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1 : Distributions temps-fréquence	4
1.1. Introduction	4
1.2. Distributions temps fréquence Linéaires	4
1.2.1. Transformée de Fourier à court terme	5
1.2.1.1. Interprétation de la transformée de Fourier à court terme en terme de filtrage.....	6
1.2.1.2. Résolution temps-fréquence	7
1.2.1.3. Décomposition temps-fréquence	7
1.2.1.4. Discrétisation de la transformée de Fourier à court terme.....	8
1.2.2. Expansion de Gabor	9
1.3. Distributions temps-fréquence quadratiques	10
1.3.1. Distribution de Wigner-Ville.....	11
1.3.1.1. Définition et propriétés.....	11
1.3.1.2. Discrétisation de la distribution de Wigner-Ville.....	13
1.3.2. Fonction d'ambiguïté.....	15
1.3.3. Classe de Cohen	16
1.3.4. Propriétés désirables des représentations temps-fréquence.....	17
1.3.5. Distribution de Wigner-Ville lissée.....	19
1.3.5.1. Distribution de Choi-Williams	20
1.3.5.2. Distribution temps-fréquence à noyau en cône	23
1.3.5.3. Spectrogramme	24
1.3.5.4. Distribution de Pseudo Wigner-Ville	24
1.3.5.5. Autres distributions de la classe de Cohen	25
1.3.6. Représentations temps-fréquence basées sur les fonctions gaussiennes adaptatives	25
1.3.6.1. Expansion dans la base gaussienne adaptative	25
1.3.6.2. Représentations temps-fréquence à interférences supprimées	27
1.3.6.3. Spectrogramme adaptatif.....	28
1.3.7. Distributions de la classe affine.....	28
1.3.8. Discussion.....	29
1.4. Estimation de la fréquence instantanée	30
1.4.1. Concept de fréquence instantanée des signaux non stationnaires	30
1.4.2. Fréquence instantanée discrète	30
1.4.3. Méthodes d'estimation de la fréquence instantanée discrète.....	31
1.4.3.1. Version lissée de l'estimateur à différence de phase.....	31

1.4.3.2. Estimation basée sur le nombre de passages par zéro	31
1.4.3.3. Estimation adaptative de la fréquence instantanée	32
1.4.3.4. Estimation de la fréquence instantanée basée sur les moments des distributions temps-fréquence.....	33
1.4.3.5. Estimation de la fréquence instantanée basée sur les pics des distributions temps-fréquence.....	33
1.5. Conclusion.....	34
Chapitre 2 : Analyse en ondelettes	35
2.1. Introduction	35
2.2. Transformée en ondelettes continue	35
2.3. Interprétation de la transformée en ondelettes en terme de filtrage et résolution temps-fréquence.....	37
2.4. Détection des singularités avec les ondelettes.....	40
2.4.1. Régularité au sens de Lipschitz	40
2.4.2. Ondelettes à moments nuls	41
2.4.3. Opérateur de dérivation multi-échelles	41
2.4.4. Mesure de la régularité avec les ondelettes	42
2.4.5. Détection des singularités.....	43
2.5. Transformée en ondelettes discrète	44
2.6. Analyse multirésolution.....	45
2.7. Propriétés des ondelettes	47
2.7.1. Orthogonalité	47
2.7.2. Relations à deux échelles.....	48
2.8. Représentation d'un signal dans les espaces d'approximation et d'ondelette.....	49
2.9. Algorithme de décomposition	50
2.10. Algorithme de reconstruction	52
2.11. Exemples de bases d'ondelettes	53
2.11.1. Ondelette de Haar	53
2.11.2. Ondelette de Shannon.....	55
2.11.3. Ondelettes à support compact (Daubechies)	57
2.12. Seuillage des coefficients d'ondelettes.....	57
2.12.1. seuillage dur.....	57
2.12.2. Seuillage tendre	58
2.12.3. Seuillage par pourcentage.....	58
2.13. Conclusion.....	59
Chapitre 3 : Les signaux d'interférences électromagnétiques.....	60
3.1. Introduction	60
3.2. Interférence et couplage électromagnétiques	60
3.3. Interférences dans une ligne à trois conducteurs.....	61
3.4. Equations de la ligne de transmission.....	63
3.5. Analyse fréquentielle des interférences électromagnétiques.....	66
3.5.1. Solution générale	67
3.5.2. Couplage inductif et couplage capacitif	68
3.5.3. Couplage dû à l'impédance commune.....	70
3.6. Analyse temporelle des interférences électromagnétiques.....	71

3.6.1 Couplage inductif et couplage capacitif	71
3.6.2. Couplage dû à l'impédance commune.....	72
3.7. Simulation des interférences.....	73

Chapitre 4 : Analyse en ondelettes des signaux d'interférences sur circuits imprimés 76

4.1. Introduction	76
4.2. Configuration du circuit imprimé	77
4.3. Détection des interférences.....	78
4.4. Estimation de la fréquence du signal perturbateur	85
4.4.1. Procédure d'estimation	85
4.4.2. Résultats et discussion	87
4.5. Détermination de la distance de séparation	93
4.5.1. Procédure de calcul.....	93
4.5.2. Résultats et discussion	95
4.6. Réduction des interférences.....	99
4.7. Conclusion.....	100

Chapitre 5 : Analyse temps-fréquence par modélisation autorégressive 101

5.1. Introduction	101
5.2. Analyse temps-fréquence basée sur le modèle AR non stationnaire.....	102
5.2.1. Modélisation AR non stationnaire.....	102
5.2.2. Méthodes d'estimation par bloc	104
5.2.3. Méthodes d'estimation récursives	105
5.2.4. Distribution temps-fréquence à base de modèle AR temps-variant	107
5.3. Analyse temps-fréquence à base de modèle de prédiction linéaire bilatérale temps-variant.....	108
5.3.1. Modèle AR bilatéral temps-invariant	108
5.3.2. Modèle de prédiction linéaire bilatérale non stationnaire	109
5.3.3. Méthodes d'estimation par bloc	110
5.3.4. Méthodes d'estimation récursives	110
5.4. Estimateur de la fréquence instantanée à base de prédiction linéaire bilatérale....	111
5.5. Exemples numériques.....	113
5.6. Complexité arithmétique	119
5.7. Extension aux signaux vectoriels	121
5.7.1. Modélisation autorégressive vectorielle temps-variant.....	122
5.7.2. Analyse temps-fréquence multicanaux basée sur le modèle autorégressif bilatéral	123
5.7.2.1. Distribution temps-fréquence	123
5.7.2.2. Estimation des paramètres multidimensionnels	123
5.7.3. Exemples numériques.....	126
5.7.4. Complexité arithmétique	134
5.8. Conclusion.....	134

Conclusion	135
Annexe : Algorithme des moindres carrés récursif	137
A.1. Algorithme des moindres carrés récursif (RLS) à pondération exponentielle	137
A.2. Adaptation du vecteur des coefficients.....	140
A.3 Initialisation de l'algorithme des moindres carrés récursif.....	140
A.4. Comportement de l'algorithme RLS dans un environnement non stationnaire	141
Références	142

Introduction

La plupart des signaux rencontrés en pratique sont de nature non stationnaires caractérisés par un contenu spectral temps-variant. Les méthodes conventionnelles basées sur une représentation temporelle ou fréquentielle sont inadéquates pour l'analyse et le traitement de ces signaux. La solution alternative consiste à combiner la représentation temporelle et la représentation fréquentielle en une seule représentation conjointe temps-fréquence capable de suivre l'évolution du contenu spectral du signal au cours du temps. Une telle représentation fait correspondre à un signal unidimensionnel, fonction du temps, une fonction bidimensionnelle du temps et de la fréquence. Conceptuellement, une représentation temps-fréquence peut être rapprochée à la représentation d'une composition musicale qui associe à une pièce musicale une séquence de notes où chaque note consiste en un nombre de composantes de différentes fréquences. Ces composantes sont présentes pendant un intervalle de temps bien défini et leurs amplitudes peuvent varier durant cet intervalle.

Les recherches dans le domaine de l'analyse temps-fréquence concernent le développement de nouvelles représentations temps-fréquence ainsi que l'application de ces représentations. De nombreuses distributions temps-fréquence ont été développées durant les deux dernières décades. Cependant, il n'existe pas une représentation temps-fréquence unique qui convient à toutes les catégories de signaux. Une représentation temps-fréquence peut être appliquée avec succès à un problème mais pas à un autre. La connaissance des caractéristiques des différentes représentations temps-fréquence permet d'établir le choix adéquat pour l'application envisagée.

Les représentations temps-fréquence sont appliquées dans des domaines très variés pour le traitement et l'analyse des signaux non stationnaires. Leur utilisation dans les différentes applications varie de la simple représentation graphique des résultats, en vue de mieux révéler les caractéristiques du signal, à leur manipulation sophistiquée. Parmi les applications de l'analyse temps-fréquence on peut citer les télécommunications [Ami97], les radars et sonars [Kim00, Boa90], l'analyse des signaux sismiques [Rou05], l'analyse des signaux biomédicaux [Boa01, MonA02], etc.

Les représentations temps-fréquence peuvent être divisées en représentations linéaires et quadratiques [Hla92]. Les représentations temps-fréquence quadratiques ont une interprétation en terme de corrélation ou d'énergie. Par rapport aux représentations linéaires, les distributions quadratiques sont caractérisées par une plus grande résolution temps-fréquence. Il est toujours souhaitable que ces représentations soient munies de certaines propriétés mathématiques choisies par référence aux propriétés des représentations temporelles et fréquentielles. Parmi les représentations temps-fréquence quadratiques, la distribution de Wigner-Ville satisfait le plus grand nombre de propriétés

mathématiques désirables. Cependant, un inconvénient majeur qui limite l'intérêt pratique de la distribution de Wigner-Ville est la présence des termes d'interférences lors de l'analyse des signaux multi-composantes.

En regroupant les représentations qui partagent des propriétés communes, différentes classes peuvent être distinguées au sein de la catégorie des distributions temps-fréquence quadratiques. La classe de Cohen comprend toutes les représentations quadratiques énergétiques invariantes par translation temporelle et fréquentielle. Quant à la classe affine, elle comprend toutes les représentations quadratiques énergétiques invariantes par translation temporelle et changement d'échelle. La classe corrélative est une classe duale de la classe de Cohen par transformation de Fourier bidimensionnelle. Les différentes classes ne s'excluent pas mutuellement dans le sens qu'une représentation temps-fréquence peut appartenir à deux classes différentes.

Les représentations temps-fréquence dites paramétriques sont obtenues en représentant le signal par un modèle paramétrique. Une fois les paramètres du modèle sont calculés, ils sont utilisés dans le calcul de la distribution temps-fréquence. L'approche paramétrique suppose implicitement une connaissance a priori de la structure du signal à analyser et la qualité de la représentation temps-fréquence dépend de la précision du modèle adopté. Le modèle autorégressif (AR) évolutif dont les paramètres varient au cours du temps est souvent utilisé.

Cette thèse se focalise aussi bien sur le développement théorique que l'application des méthodes d'analyse temps-fréquence. Les objectifs de ce travail peuvent être résumés comme suit :

(i) Illustrer les caractéristiques et les propriétés des différentes représentations temps-fréquence développées dans la littérature.

(ii) En considérant le problème des interférences électromagnétiques dans les circuits imprimés, proposer une méthode d'analyse à base d'ondelettes pour identifier la ligne source de perturbations électromagnétiques en ne disposant que du signal perturbé. Les lignes du circuit imprimé sont supposées véhiculer des signaux logiques. Le problème de détection et d'identification des sources d'interférence générées dans les pistes de circuits imprimés présente une grande importance lors de la conception des systèmes électroniques et devient de plus en plus complexe avec la croissance de la vitesse de commutation des composants électroniques.

(iii) Développer une représentation temps-fréquence quadratique sans termes d'interférences basée sur un modèle de prédiction linéaire bilatérale temps-variant et appliquer cette distribution à l'estimation de la fréquence instantanée.

(iv) Étendre la distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR bilatéral temps-variant aux signaux vectoriels ou multicanaux non stationnaires issus de plusieurs capteurs. L'analyse des signaux vectoriels ou multicanaux a reçu beaucoup d'attention dans le cas stationnaire. Cependant, les travaux de recherche ayant traité le cas non stationnaire sont rares.

Organisation de la thèse

La suite de la thèse est organisée comme suit :

Le premier chapitre présente les distributions temps-fréquence linéaires et quadratiques développées dans la littérature. Il a pour objectif d'illustrer les propriétés des différentes distributions temps-fréquence. Dans la classe des représentations linéaires, on présente la transformée de Fourier à court terme et la transformée de Gabor. Dans la classe des représentations temps-fréquence quadratiques, on s'intéresse à la classe de Cohen en développant quelques distributions temps-fréquence populaires telles que la distribution de Choi-Williams et la distribution à noyau en cône. Un concept étroitement lié à l'analyse temps-fréquence est celui de la fréquence instantanée. Les différentes méthodes d'estimation de la fréquence instantanée seront présentées dans ce chapitre.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse en ondelettes. On se focalisera plus particulièrement sur l'application des ondelettes à la détection des singularités dans les signaux. Le chapitre développe également l'algorithme dyadique d'analyse et de synthèse des signaux discrets et présente quelques exemples d'ondelettes qui seront utilisées par la suite dans le problème de l'analyse des signaux d'interférences sur circuits imprimés. A la fin du chapitre, on présente le principe de débruitage des signaux au moyen de l'analyse en ondelettes.

Le troisième chapitre a pour objectif d'illustrer le phénomène des interférences électromagnétiques sur les circuits imprimés en présentant l'aspect théorique du problème de couplage électromagnétique des lignes. Le problème de couplage électromagnétique est traité dans les domaines temporel et fréquentiel. Le chapitre présente également l'approche de simulation des signaux d'interférences basée sur la méthode des différences finies dans le domaine temporel.

Le quatrième chapitre traite le problème des interférences électromagnétiques sur les circuits imprimés. Les signaux d'interférences peuvent causer un sérieux problème d'intégrité du signal, particulièrement entre les longues lignes parallèles. Une méthode originale basée sur l'analyse en ondelettes est proposée pour détecter les signaux d'interférences et localiser la ligne ayant généré ce signal perturbateur en ne disposant que du signal perturbé.

Le cinquième chapitre présente les méthodes d'analyse temps-fréquence basées sur la modélisation autorégressive. Dans ce chapitre on propose une distribution temps-fréquence basée sur un prédicteur linéaire bilatéral temps-variant. Le modèle de prédiction linéaire bilatéral temps-variant est utilisé comme alternative pour améliorer les performances du prédicteur linéaire unilatéral conventionnel en terme de résolution temps-fréquence. Dans la deuxième partie du chapitre, la distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR bilatéral est étendue aux signaux vectoriels ou multicanaux.

En conclusion de cette thèse, nous résumons les principales contributions de ce travail et nous suggérons les perspectives de recherche future.

Chapitre 1

Distributions temps-fréquence

1.1. Introduction

L'analyse conjointe temps-fréquence s'est imposée depuis deux décennies comme alternative à l'analyse conventionnelle basée sur une représentation temporelle ou fréquentielle confrontée à plusieurs limitations aussi bien au niveau de son interprétation physique qu'au niveau de son domaine d'application. Le besoin d'une représentation bidimensionnelle temps-fréquence devient crucial lors de l'analyse des signaux non stationnaires caractérisés par un contenu spectral temps-variant.

Bien qu'il existe un grand nombre de représentations temps-fréquence, un problème qui se pose est le choix de la représentation adéquate pour l'application envisagée. Ce choix ne peut se faire sans connaître les caractéristiques des différentes distributions temps-fréquence. Ce chapitre a pour objectif de présenter deux classes importantes de représentations temps-fréquence et de discuter de leurs caractéristiques. La première partie du chapitre présente la classe des représentations temps-fréquence linéaires de type transformée de Fourier à court terme et transformée de Gabor. La deuxième partie du chapitre présente les représentations temps-fréquence quadratiques regroupées sous le nom de la classe de Cohen. Quelques représentations temps-fréquence quadratiques basées sur un modèle paramétrique composé d'une combinaison linéaire de fonctions gaussiennes concentrées dans le plan temps-fréquence sont aussi présentées. Le concept de la fréquence instantanée est étroitement lié à l'analyse temps-fréquence et présente une importance capitale dans la caractérisation des signaux non stationnaires. La dernière partie du chapitre résume les différentes méthodes d'estimation de la fréquence instantanée.

1.2. Distributions temps fréquence Linéaires

Une représentation temps-fréquence linéaire s'obtient en corrélant le signal avec une famille de fonctions, appelées atomes temps-fréquence, localisées en temps et en fréquence. Soit $x(t)$ un signal à énergie finie,

$$\|x\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.1)$$

L'ensemble des signaux satisfaisant (1.1) forme l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ dans lequel on définit le produit scalaire entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ par

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (1.2)$$

où le symbole * dénote le complexe conjugué.

Considérons l'ensemble des atomes temps-fréquence $\{\phi_\gamma\}$, où ϕ_γ est une fonction normée de l'espace de Hilbert dépendante d'un indice multiple γ . La forme générale de la représentation temps-fréquence linéaire associée à $x(t)$ s'écrit comme [Hla92]

$$T_x(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \phi_\gamma^*(\tau) d\tau = \langle x, \phi_\gamma \rangle \quad (1.3)$$

Les propriétés d'une représentation temps-fréquence sont déterminées par la famille des atomes temps-fréquence ϕ_γ intervenant la construction de la distribution.

1.2.1. Transformée de Fourier à court terme

Un inconvénient majeur lié à l'analyse de Fourier classique est qu'elle ne permette pas la localisation temporelle des composantes fréquentielles. La transformée de Fourier à court terme a été proposée comme alternative pour introduire la localisation temporelle en pondérant le signal par une fenêtre glissante appropriée [Rab78, All77a,b, Por80]. Les atomes de Fourier à court terme sont construits par translation et modulation d'une fonction $h(t)$

$$\phi_\gamma(\tau) = h_{t,f}(\tau) = e^{j2\pi f\tau} h(\tau - t) \quad (1.4)$$

La transformée de Fourier à court terme prend la forme suivante

$$S_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h^*(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.5)$$

La transformée de Fourier à court terme à l'instant t n'est autre que la transformée de Fourier du signal $x(\tau)$ pondéré par une fenêtre analysante $h^*(\tau - t)$ centrée autour de t . Le résultat de l'analyse de Fourier à court terme dépend de la fenêtre de pondération utilisée.

La résolution temps-fréquence de ϕ_γ est représentée symboliquement dans le plan temps-fréquence par un rectangle de largeur temporelle Δt et de largeur fréquentielle Δf comme illustré sur la figure 1.1. L'aire des atomes d'information ne dépend pas de leur position dans le plan temps-fréquence. L'inégalité, dite d'Heisenberg-Gabor, exprimée par [Fla93]

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (1.6)$$

limite la résolution conjointe en temps et en fréquence de ϕ_γ .

La transformée de Fourier à court terme présente quelques propriétés intéressantes. En particulier, elle préserve la propriété de translation fréquentielle ainsi que la propriété de translation temporelle. Une expression de la transformée de Fourier à court terme dans le domaine fréquentiel, duale à celle définie dans le domaine temporel, est donnée par [Hla92]

$$S_x(t, f) = e^{-j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) H^*(\nu - f) e^{j2\pi \nu t} d\nu \quad (1.7)$$

où $X(f)$ et $H(f)$ sont les transformées de Fourier du signal $x(t)$ et de la fenêtre temporelle $h(t)$, respectivement.

A part l'existence du facteur de phase $e^{-j2\pi ft}$, l'expression (1.7) est analogue à l'expression (1.5). Elle montre que la transformée de Fourier à court terme peut être interprétée comme la transformée de Fourier inverse du spectre pondéré $X(v)H^*(v-f)$.

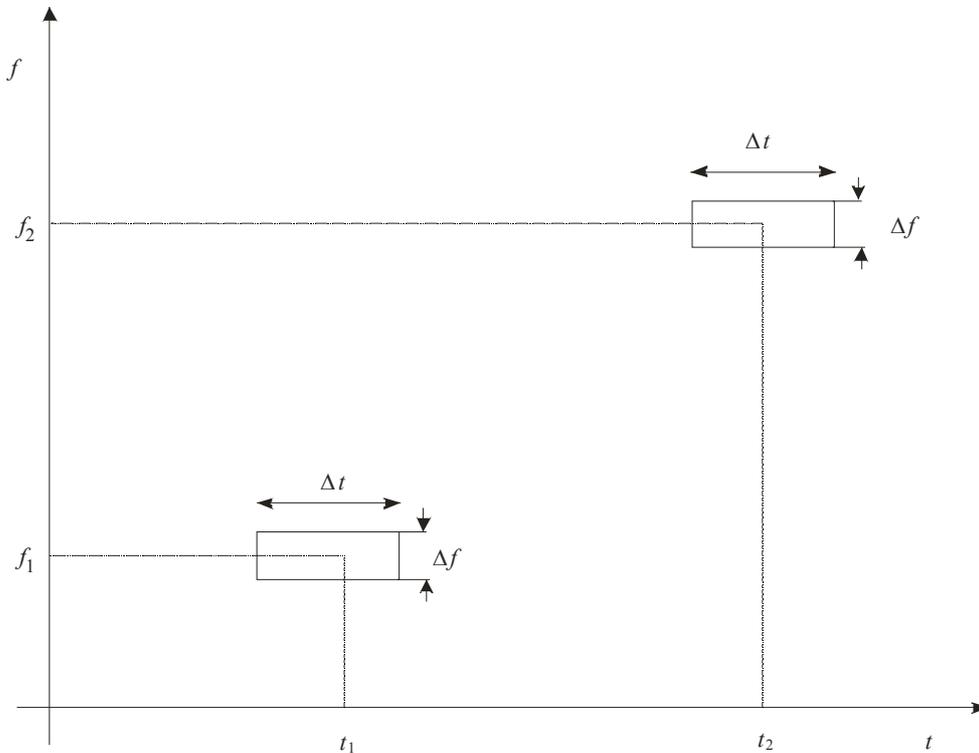


Figure 1.1 : Représentation symbolique de la résolution temps-fréquence des atomes de Gabor. Le produit $\Delta t \Delta f$ est constant quelle que soit la position de la fenêtre glissante.

1.2.1.1. Interprétation de la transformée de Fourier à court terme en terme de filtrage

La transformée de Fourier inverse du spectre pondéré $X(v)H^*(v-f)$ peut être interprétée comme le résultat de filtrage du signal $x(t)$ par un filtre de réponse fréquentielle $H^*(v-f)$. Le filtre est de type passe bande centré autour de la fréquence d'analyse f . La figure 1.2 illustre l'opération de filtrage permettant d'obtenir la transformée de Fourier à court terme.

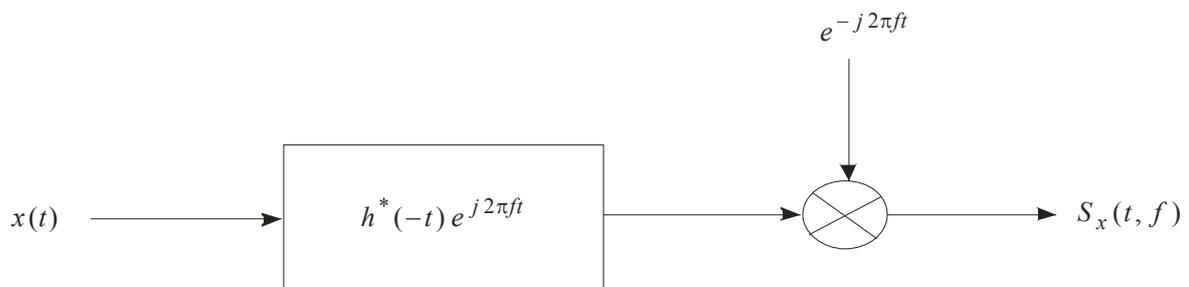


Figure 1.2 : Définition de la transformée de Fourier à court terme comme une opération de filtrage.

Cette formulation montre que la transformée de Fourier à court terme n'est autre qu'une analyse par banc de filtres uniformes. La réponse en fréquence d'un filtre se déduit d'une réponse fréquentielle unique par une translation fréquentielle (Figure 1.3).

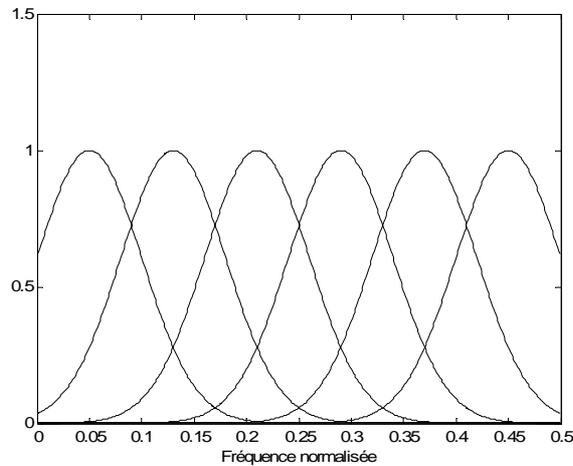


Figure 1.3 : Interprétation de la transformée de Fourier à court terme comme une analyse par banc de filtres.

1.2.1.2. Résolution temps-fréquence

L'expression (1.5) montre qu'une bonne résolution temporelle de la transformée de Fourier à court terme nécessite une fenêtre $h(t)$ de courte durée. De même, l'expression (1.7) montre que la transformée de Fourier à court terme évaluée à une fréquence f est le résultat de filtrage du signal $x(t)$ par un filtre passe bande de réponse fréquentielle $H^*(\nu - f)$ et, par conséquent, une bonne résolution fréquentielle de la transformée de Fourier à court terme nécessite un filtre à bande étroite, soit donc une fenêtre d'analyse $h(t)$ de longue durée. Or, le principe d'incertitude sur la résolution temps-fréquence ne permet pas l'existence d'une fenêtre de durée arbitrairement courte et de bande de fréquence arbitrairement étroite. La résolution temps-fréquence se trouve alors limitée.

L'amélioration de la résolution temporelle s'obtient au détriment d'une dégradation de la résolution fréquentielle et vice versa. Le compromis de la résolution temps-fréquence peut être illustré en considérant deux cas extrêmes. Si une fenêtre d'analyse infiniment courte (impulsion de Dirac) est utilisée, la transformée de Fourier à court terme se réduit au signal $x(t)$ lui-même préservant ainsi toutes les variations temporelles mais ne fournissant aucune résolution fréquentielle. Contrairement, si une fenêtre d'analyse constante est utilisée, la transformée de Fourier à court terme se réduit à la transformée de Fourier perdant ainsi toute localisation temporelle.

1.2.1.3. Décomposition temps-fréquence

Le signal $x(t)$ peut être considéré comme la superposition de versions translatées en temps et en fréquence d'un signal élémentaire $g(t)$,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_x(\tau, \nu) \left[g(t - \tau) e^{j2\pi\nu t} \right] d\tau d\nu \quad (1.8)$$

Si $g(t)$ est centré dans le domaine temporel autour de $t = 0$ et dans le domaine fréquentiel autour de $f = 0$ alors $g(t - \tau) e^{j2\pi \nu t}$ est centré autour de (τ, ν) dans le plan temps-fréquence. La fonction $T_x(t, f)$ renseigne sur le degré de contribution du voisinage du point (t, f) à la construction du signal $x(t)$. La transformée de Fourier à court terme peut être substituée à $T_x(t, f)$ si la fenêtre analysante $h(t)$ satisfait la condition suivante [Hla92]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) h^*(t) dt = 1 \quad (1.9)$$

Donc, il vient

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\tau, \nu) g(t - \tau) e^{j2\pi \nu t} d\tau d\nu \quad (1.10)$$

L'expression (1.10) permet de reconstruire le signal $x(t)$ à partir de la transformée de Fourier à court terme. Étant donnée une fenêtre d'analyse $h(t)$, il existe une infinité de choix pour la fenêtre $g(t)$ satisfaisant la condition (1.9). Un choix possible est $g(t) = h(t)$.

1.2.1.4. Discrétisation de la transformée de Fourier à court terme

En pratique, la transformée de Fourier à court terme est évaluée en des points temps-fréquence (nT, kF) équidistants, où n et k sont des entiers

$$S_x(nT, kF) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h^*(\tau - nT) e^{-j2\pi(kF)\tau} d\tau \quad (1.11)$$

La version discrète de l'équation de reconstruction est donnée par

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_x(nT, kF) g(t - nT) e^{j2\pi(kF)t} \quad (1.12a)$$

La relation (1.12a) reste valable tant que les pas d'échantillonnage T et F , la fenêtre analysante $h(t)$ et la fenêtre de synthèse $g(t)$ vérifient la relation

$$\frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g\left(t + k \frac{1}{F} - nT\right) h^*(t - nT) = \delta(k) \quad \text{pour tout } t \quad (1.12b)$$

avec $\delta(0) = 1$ et $\delta(k) = 0$ pour $k \neq 0$.

Les versions discrètes des équations d'analyse et de synthèse peuvent être implémentées en utilisant des méthodes basées sur la transformée de Fourier rapide ou au moyen d'un banc de filtres [All77a].

1.2.2. Expansion de Gabor

La relation de synthèse (1.12a) peut être interprétée comme une expansion du signal $x(t)$ en versions translatées $g_{n,k}(t)$ de fonctions élémentaires $g(t)$. La représentation qui en résulte est l'expansion de Gabor exprimée par [Gab46, Baa80a, Hel66, MonL67, Wex90]

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{n,k} g_{n,k}(t) \quad (1.13a)$$

où les coefficients $C_{n,k}$ sont les coefficients de Gabor et les fonctions élémentaires $\{g_{n,k}(t)\}$ sont données par

$$g_{n,k}(t) = g(t - nT) e^{j2\pi(kF)t} \quad (1.13b)$$

Les paramètres T et F sont les pas d'échantillonnage en temps et en fréquence, respectivement. Le produit $T.F$ détermine la densité d'échantillonnage de la grille. Dans la version originale de l'expansion de Gabor, les fonctions élémentaires $g_{n,k}(t)$ n'étaient autres que des fonctions gaussiennes translatées en temps et en fréquence parce que les signaux gaussiens sont caractérisés par une localisation conjointe temps-fréquence optimale en terme de principe d'incertitude. Les coefficients de Gabor $C_{n,k}$ donnent une indication sur le contenu temps-fréquence du signal autour du point (n, k) . La forme analytique de la fenêtre gaussienne est donnée par

$$g(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2} \quad (1.14)$$

Les résolutions temporelle et fréquentielle peuvent être ajustées avec le paramètre α . La résolution fréquentielle est d'autant meilleure (résolution temporelle mauvaise) que α est petit et vice versa.

Pour qu'un signal à énergie finie puisse être représenté par une combinaison linéaire de fonctions de base de Gabor, cette dernière doit être complète. Une condition nécessaire permettant de garantir une base complète est $T.F \leq 1$ [Jan81, Dau91]. Cette condition constitue une borne sur le pas d'échantillonnage temps-fréquence utilisé. L'échantillonnage critique correspond à $T.F = 1$. Dans ce cas, les coefficients de Gabor ne sont pas redondants. Un pas d'échantillonnage $T.F < 1$ introduit une redondance dans les coefficients de Gabor et, par conséquent, les signaux de la base de Gabor ne seront pas linéairement indépendants. Il convient de signaler qu'une base de Gabor avec une bonne résolution temps-fréquence peut ne pas être orthogonale. Si la base de Gabor est complète, la condition de bi-orthogonalité est exprimée par [Bas80, Dau92]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n,k}(t) h_{n',k'}^*(t) dt = \delta(n - n') \delta(k - k') \quad (1.15)$$

ou, de manière équivalente, par

$$S_g(nT, kF) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) h^*(\tau - nT) e^{-j2\pi(kF)\tau} d\tau = \delta(n)\delta(k) \quad (1.16)$$

La condition d'orthogonalité est suffisante pour la reconstruction parfaite du signal. La construction d'une fenêtre analysante est basée sur la théorie des frames [Dau92, Aus91].

1.3. Distributions temps-fréquence quadratiques

Les distributions temps-fréquence linéaires sont désirables pour leur simplicité et leurs propriétés élégantes. Cependant, lorsque on veut interpréter la représentation temps-fréquence du signal comme une distribution d'énergie en fonction du temps et de la fréquence, il est préférable de passer à des distributions temps-fréquence quadratiques. Etant donné un signal $x(t)$ à énergie finie, son énergie s'exprime par

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.17)$$

Les quantités $|x(t)|^2$ et $|X(f)|^2$ constituent des densités d'énergie temporelle et spectrale du signal $x(t)$, respectivement. Une distribution temps-fréquence énergétique $T_x(t, f)$ combine les densités d'énergie temporelle et spectrale en une seule distribution d'énergie conjointe. Cette interprétation énergétique est exprimée par les propriétés marginales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_x(t, f) df = p_x(t) = |x(t)|^2 \quad (1.18a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_x(t, f) dt = P_x(f) = |X(f)|^2 \quad (1.18b)$$

Ces relations expriment que les densités d'énergie unidimensionnelles $p_x(t)$ et $P_x(f)$ sont des densités marginales de la distribution temps-fréquence $T_x(t, f)$ et que l'énergie du signal est obtenue en intégrant $T_x(t, f)$ sur le plan temps-fréquence entier [Coh89].

Plusieurs représentations temps-fréquence quadratiques peuvent être interprétées en terme de l'énergie du signal bien qu'elles ne satisfont pas les propriétés de marginalité. Un exemple de telles représentations est le spectrogramme défini par [Rab78]

$$SP_x(t, f) = |S_x(t, f)|^2 \quad (1.19)$$

où $S_x(t, f)$ est la transformée de Fourier à court terme de $x(t)$.

Les représentations temps-fréquence quadratiques possèdent aussi une deuxième interprétation en terme de la fonction de corrélation. Une représentation temps-fréquence corrélative combine la fonction de corrélation temporelle $r_x(\tau)$ et la fonction de corrélation fréquentielle $R_x(\nu)$ [Hla91, Hla92]. Les propriétés marginales dans ce cas s'expriment comme suit :

$$T_x(\tau, 0) = r_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt \quad (1.20a)$$

$$T_x(0, \nu) = R_x(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f + \nu)X^*(f)df \quad (1.20b)$$

Les variables τ et ν dénotent le délai temporel et le décalage fréquentiel, respectivement.

1.3.1. Distribution de Wigner-Ville

1.3.1.1. Définition et propriétés

La distribution de Wigner-Ville a été développée en mécanique quantique en 1932 par E. P. Wigner et introduite en traitement du signal par J. Ville en 1948 [Vil48]. Elle est exprimée par [ClaT80a,c]

$$WVD_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (1.21)$$

La distribution de Wigner-Ville peut être exprimée comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation temporelle instantanée $q_x(t, \tau)$ ou comme la transformée de Fourier inverse de la fonction de corrélation spectrale $Q_x(f, \nu)$

$$WVD_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_x(t, \tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_x(f, \nu)e^{j2\pi\nu t}d\nu \quad (1.22a)$$

où

$$q_x(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (1.22b)$$

$$Q_x(f, \nu) = X\left(f + \frac{\nu}{2}\right)X^*\left(f - \frac{\nu}{2}\right) \quad (1.22c)$$

Parmi toutes les représentations temps-fréquence énergétiques, la distribution de Wigner-Ville satisfait un grand nombre de propriétés mathématiques désirables et possède des performances supérieures à celles du spectrogramme [ClaT80a,c, Coh89, Hla92]. Cependant, elle peut prendre des valeurs négatives et, par conséquent, elle ne satisfait pas une propriété fondamentale de la densité spectrale d'énergie qui est la positivité [Jan85, Mou85]. Les signaux gaussiens sont les seuls signaux à avoir une distribution de Wigner-Ville positive. Pour obtenir des distributions d'énergie positives pour tous les signaux, il est nécessaire de faire une opération de moyennage sur la distribution de Wigner-Ville ce qui entraîne une dégradation de la résolution temps-fréquence.

La distribution de Wigner-Ville est caractérisée par une grande concentration temps-fréquence [Jon92, Jan82, ClaT84]. Cependant, elle présente un inconvénient majeur lié à sa nature quadratique. La distribution de Wigner-Ville des signaux multi-composantes présente des termes d'interférences appelés aussi cross-termes ou artéfacts qui rendent

difficile son interprétation. Le problème des termes d'interférences peut être illustré en considérant l'exemple d'un signal $x(t)$ contenant deux composantes $x_1(t)$ et $x_2(t)$,

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (1.23)$$

La distribution de Wigner-Ville correspondante s'écrit comme

$$\begin{aligned} WVD_x(t, f) &= WVD_{x_1}(t, f) + WVD_{x_2}(t, f) + WVD_{x_1, x_2}(t, f) + WVD_{x_2, x_1}(t, f) \\ &= WVD_{x_1}(t, f) + WVD_{x_2}(t, f) + 2 \operatorname{Re}\{WVD_{x_1, x_2}(t, f)\} \end{aligned} \quad (1.24)$$

où $WVD_{x_1, x_2}(t, f)$ désigne la distribution de cross Wigner-Ville définie par

$$WVD_{x_1, x_2}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_2^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.25)$$

La distribution de Wigner-Ville du signal à deux composantes apparaît comme la somme de trois distributions. Deux distributions, appelées auto-termes ou termes propres, sont associées aux composantes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ formant le signal et une distribution appelée cross-terme ou terme d'interférence est le résultat d'interaction entre les deux composantes. Le terme d'interférence est le résultat de la transformation non linéaire caractérisant la distribution de Wigner-Ville. La figure 1.4 montre, comme exemple, la distribution de Wigner-Ville du signal composé de deux atomes de Gabor exprimé par

$$x(t) = (\pi\sigma^2)^{-0.25} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} e^{j2\pi f_0 t} + (\pi\sigma^2)^{-0.25} e^{-\frac{(t-t_1)^2}{2\sigma^2}} e^{j2\pi f_1 t} \quad (1.26)$$

où $t_0 = 0.05$ s, $t_1 = 0.16$ s, $f_0 = 200$ Hz, $f_1 = 100$ Hz, $\sigma = 0.01$. Le signal de durée 0.25 s est échantillonné à 1 kHz.

Sur la figure 1.4b, on peut facilement identifier les termes propres aux fréquences 100 Hz et 200 Hz et le terme d'interférence localisé entre les deux termes propres. En général, la distribution de Wigner-Ville d'un signal à K composantes est composée de K auto-termes et de $C_K^2 = K(K-1)/2$ termes d'interférences [Fla84]. Les termes d'interférences de la distribution de Wigner-Ville apparaissent entre chaque deux composantes et sont reconnus par leur caractère oscillatoire. Les termes d'interférences rendent difficile l'interprétation du diagramme temps-fréquence limitant ainsi l'intérêt pratique de la distribution de Wigner-Ville.

Les termes d'interférences peuvent être réduits en utilisant le signal analytique (signal complexe). Le signal analytique associé à un signal réel est obtenue en annulant la partie négative du spectre et en doublant la partie positive pour préserver l'énergie.

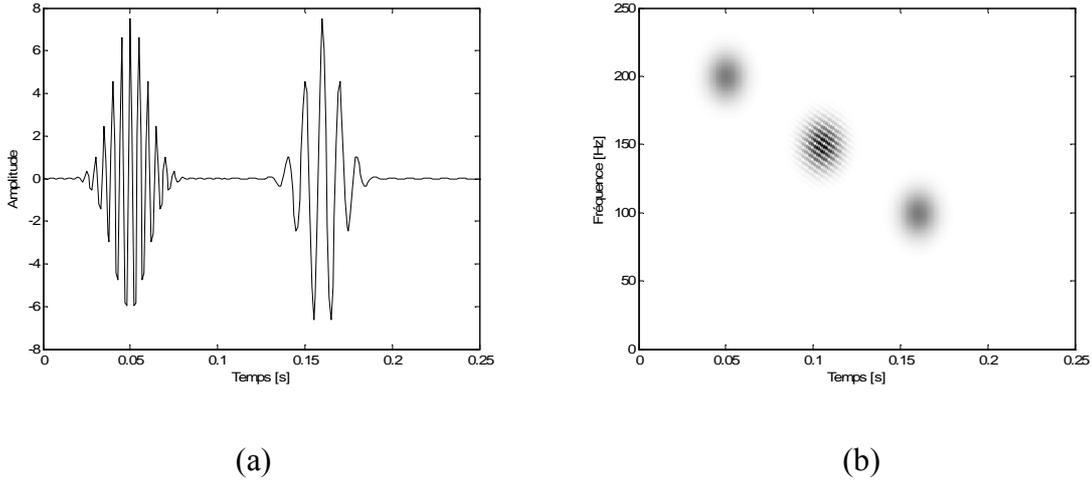


Figure 1.4 : Représentation temporelle du signal composé de deux atomes de Gabor (a) et sa distribution de Wigner-Ville (b). Comme observé sur la figure, la distribution de Wigner-Ville est composée de deux termes propres associés aux composantes contenues dans le signal et d'un terme d'interférence situé entre les deux termes propres.

1.3.1.2. Discrétisation de la distribution de Wigner-Ville

Le processus de discrétisation ne permet pas de préserver toutes les propriétés de la distributions de Wigner-Ville continue. De nombreuses définitions de la distribution de Wigner-Ville discrète ont été proposées dans la littérature [ClaT80b, ClaT83, Pey86]. En changeant la variable d'intégration dans (1.21) à $\theta = \frac{\tau}{2}$, la distribution de Wigner-Ville s'écrit comme

$$WVD_x(t, f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \theta) x^*(t - \theta) e^{-j4\pi f \theta} d\theta \quad (2.27)$$

En supposant que le signal est échantillonné à une fréquence f_s , l'évaluation de (2.27) aux instants discrets n/f_s donne la distribution de Wigner-Ville à temps discret

$$WVD_x\left(\frac{n}{f_s}, f\right) = 2 \sum_{|m| < N/2} x\left(\frac{n+m}{f_s}\right) x^*\left(\frac{n-m}{f_s}\right) e^{-j4\pi m f / f_s}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (2.28)$$

où n et m sont les variables discrètes correspondantes aux variables continues t et τ , respectivement.

A partir de (2.28), on observe que $WVD_x(n/f_s, f)$ est périodique en f de période $f_s/2$. D'autre part le spectre discret de $x(n)$, noté $X(f)$, est périodique de période f_s . Si le signal à temps continu est échantillonné à une fréquence f_s égale à la fréquence de Nyquist, alors les contributions dans la distribution de Wigner-Ville du signal à temps continu dans l'intervalle $f_s/4 \leq |f| \leq f_s/2$ sont repliées vers l'intervalle $|f| < f_s/4$ de la distribution de Wigner-Ville à temps discret résultant en une distorsion de l'information. Pour éviter cette distorsion causée par le repliement spectral, le signal doit être suréchantillonné au moins

d'un facteur de 2. En posant $f_s = 1$, l'évaluation de (2.27) aux fréquences $k/2N$ conduit à la définition de la distribution de Wigner-Ville discrète suivante [ClaT80b,83, ChaD82]

$$WVD_x(n, k) = 2 \sum_{|m| < N/2} x(n+m)x^*(n-m)e^{-j2\pi mk/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq N-1 \quad (2.29)$$

Une définition de la distribution de Wigner-Ville discrète peut être obtenue en discrétisant la forme donnée par (2.21), ce qui conduit à

$$WVD_x(n, k) = \sum_{m=-N}^{N-1} x\left(n + \frac{m}{2}\right)x^*\left(n - \frac{m}{2}\right)e^{-j2\pi mk/N} \quad (1.30)$$

Lorsque m est impair, le calcul nécessite la connaissance des valeurs du signal aux instants non entiers. Ces valeurs sont calculées par interpolation du signal en ajoutant des zéros à sa transformée de Fourier, ce qui permet d'éviter le problème de repliement. La version interpolée de $x(n)$, notée $\tilde{x}(n)$, est un signal de longueur $2N$ ayant pour transformée de Fourier $\tilde{X}(f)$ définie à partir de la transformée de Fourier de $x(n)$ par [Mal98]

$$\tilde{X}(k) = \begin{cases} 2X(k) & \text{si } 0 \leq k < N/2 \\ 0 & \text{si } N/2 < k < 3N/2 \\ 2X(k-N) & \text{si } 3N/2 < k < 2N \\ X(N/2) & \text{si } k = N/2, 3N/2 \end{cases} \quad (1.31)$$

Le calcul de la transformée de Fourier inverse montre que $\tilde{x}(2n) = x(n)$ pour $0 \leq n \leq N-1$. Pour n n'appartenant pas à l'intervalle $[0, 2N-1]$, $\tilde{x}(n)$ est posé égal à 0. La version discrète de la distribution de Wigner-Ville prend la forme suivante

$$\begin{aligned} WVD_x(n, k) &= \sum_{m=-N}^N \tilde{x}(2n+m)\tilde{x}^*(2n-m)e^{-j2\pi km/N} \\ &= \sum_{m=0}^{2N-1} \tilde{x}(2n+m-N)\tilde{x}^*(2n-m+N)e^{-j2\pi(2k)m/2N} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Pour un intervalle $0 \leq n \leq N-1$, la distribution de Wigner-Ville discrète est la transformée de Fourier discrète du signal $y(m) = \tilde{x}(2n+m-N)\tilde{x}^*(2n-m+N)$ évaluée aux fréquences $2k$.

Une autre forme de la distribution de Wigner-Ville discrète a été proposée dans [Pey86]. Dans cette approche, la discrétisation est considérée dans les domaines temporel et fréquentiel, chacun à part, puis simultanément. Dans les domaines temporel et fréquentiel. Dans chacun des cas, le problème de repliement spectral a été étudié et une formule de reconstruction de la distribution de Wigner-Ville a été proposée. L'expression de la version discrète en temps et en fréquence de la distribution de Wigner-Ville a été

obtenue en échantillonnant le signal continu à un pas d'échantillonnage T sur tout l'intervalle NT puis en le rendant périodique de période NT . La distribution de Wigner-Ville discrète en temps et en fréquence qui en résulte est de la forme

$$WVD_x(n, k) = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)x^*(n-m) e^{\frac{-j\pi k}{N}(2m-n)}, \quad 0 \leq n \leq 2N-1, 0 \leq k \leq 2N-1 \quad (1.33)$$

Pour éviter le phénomène de repliement spectral, un suréchantillonnage d'un facteur 2 du signal original est nécessaire.

Notons que le repliement spectral causé par la discrétisation de Wigner-Ville peut également être évité sans avoir recours au processus de suréchantillonnage en analysant le signal analytique de $x(n)$ [Boa88].

1.3.2. Fonction d'ambiguïté

La fonction d'ambiguïté est une représentation temps-fréquence corrélative définie par [Coh85a,b, Aus85]

$$AF_x(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (1.34)$$

où τ est le délai temporel et ν est son dual dans le domaine fréquentiel appelé Doppler. En utilisant les fonctions de corrélation temporelle et spectrale, il vient

$$AF_x(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_x(t, \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_x(f, \nu) e^{j2\pi f\tau} df \quad (1.35)$$

où $q_x(t, \tau)$ et $Q_x(f, \nu)$ sont les fonctions de corrélation temporelle et spectrale données respectivement par (1.22b) et (1.22c).

La fonction d'ambiguïté satisfait les propriétés marginales corrélatives et elle maximale à l'origine et sa valeur maximale est égale à l'énergie du signal

$$|AF_x(\tau, \nu)| \leq A_x(0,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.36)$$

La distribution de Wigner-Ville et la fonction d'ambiguïté sont duales dans le sens qu'elles sont des paires de transformées de Fourier [ClaT80c, Szu84]

$$AF_x(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} WVD_x(t, f) e^{-j2\pi(\nu t - \tau f)} dt df \quad (1.37)$$

Les termes d'interférences de la fonction d'ambiguïté sont situés de part et d'autre de l'origine dans le plan (τ, ν) [Jan82, Fla84]. La figure 1.5 montre, comme exemple, la

fonction d'ambiguïté du signal composé de deux atomes de Gabor. La composante centrée sur l'origine correspond au terme propre alors que les composantes situées de part et d'autre de l'origine sont associées au terme d'interférence.

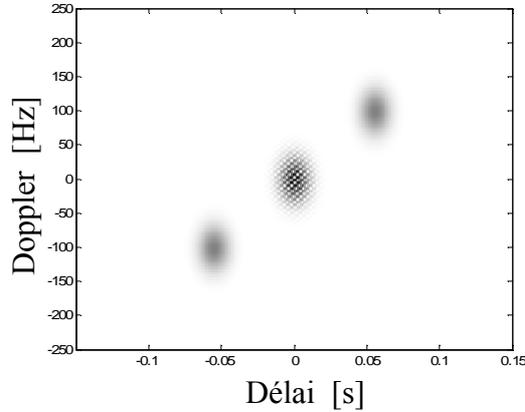


Figure 1.5 : Fonction d'ambiguïté du signal composé de deux atomes de Gabor. La composante centrée sur l'origine correspond aux termes propres alors que les composantes situées de part et d'autre de l'origine sont associées aux termes d'interférences.

1.3.3. Classe de Cohen

En introduisant une fonction paramètre $\varphi_C(\tau, \nu)$ appelée noyau, les différentes distributions temps-fréquence peuvent être regroupées dans une forme générale unique connue sous le nom de la classe de Cohen [Fla80, Coh89, Hla91]. La classe de Cohen comprend toutes les distributions temps-fréquence présentant une dépendance d'ordre 2 du signal. Chaque distribution temps-fréquence est caractérisée par une fonction noyau bidimensionnelle qui détermine ses propriétés. Une représentation temps-fréquence membre de la classe de Cohen est définie par [Coh89]

$$C_x(t, f; \varphi_C) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(-\nu\tau - f + \nu u)} \varphi_C(\tau, \nu) x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) d\nu d\tau du \quad (1.38)$$

En introduisant une fonction noyau, il est possible de développer une distribution temps-fréquence avec certaines propriétés en imposant des contraintes à la fonction noyau et non à la distribution elle-même. Le spectrogramme et la distribution de Wigner-Ville apparaissent comme des membres de la classe de Cohen.

Chaque membre de la classe de Cohen peut être interprété comme une version filtrée bidimensionnelle de la distribution de Wigner-Ville. Toutes les distributions de la classe de Cohen satisfont la propriété de translation temporelle et fréquentielle [Hla92],

$$\tilde{x}(t) = x(t - t_0) e^{j2\pi f_0 t} \quad \Rightarrow \quad T_{\tilde{x}}(t, f) = T_x(t - t_0, f - f_0) \quad (1.39)$$

Une distribution peut être étudiée dans quatre domaines différents qui peuvent être mis en évidence en exprimant la classe de Cohen en fonction de la distribution de Wigner-Ville ou de la fonction d'ambiguïté [Jeo92, Coh85a,b]

$$\begin{aligned}
C_x(t, f; \varphi_C) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} AF_x(\tau, \nu) \varphi_C(\tau, \nu) e^{j2\pi(\nu t - f\tau)} d\tau d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} WVD_x(u, \xi) \Phi_C(t - u, f - \xi) du d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q_x(u, \tau) \psi_C(t - u, \tau) e^{-j2\pi f\tau} du d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_x(\xi, \nu) \Psi_C(f - \xi, \nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu d\xi \tag{1.40}
\end{aligned}$$

où $\varphi_C(\tau, \nu)$, $\Phi_C(t, f)$, $\psi_C(t, \tau)$ et $\Psi_C(f, \nu)$ sont les fonctions noyaux bidimensionnelles dans les différents domaines.

La figure 1.6 montre les relations entre les quatre domaines des distributions de la classe de Cohen ainsi que les fonctions noyaux correspondantes. Les quatre domaines sont reliés par la transformation de Fourier. La fonction noyau a pour objet d'altérer le domaine correspondant afin de préserver les propriétés désirées et supprimer les propriétés non désirées.

La distribution de Wigner-Ville est fondamentale pour la classe de Cohen. En effet, toutes les autres distributions sont générées par une convolution bidimensionnelle de la distribution de Wigner-Ville avec une fonction noyau. Néanmoins, toute autre distribution peut être utilisée à la place de la distribution de Wigner-Ville. Cette dernière apparaît comme une distribution de la classe de Cohen caractérisée par la fonction noyau $\varphi_C(\tau, \nu) = 1$. Notons qu'une approche pour l'implémentation pratique des membres de la classe de Cohen a été proposée dans [Jeo92b].

1.3.4. Propriétés désirables des représentations temps-fréquence

Les propriétés d'une certaine distribution temps-fréquence dépendent de la fonction noyau $\varphi_C(\tau, \nu)$ qu'elle utilise. Ces propriétés peuvent être exprimées comme contraintes imposées à la fonction noyau. Le tableau 1.1 montre les propriétés désirables des représentations temps-fréquence et les contraintes que la fonction noyau (ou sa transformée de Fourier en temps, en fréquence ou en temps et en fréquence) doit satisfaire [Lou93].

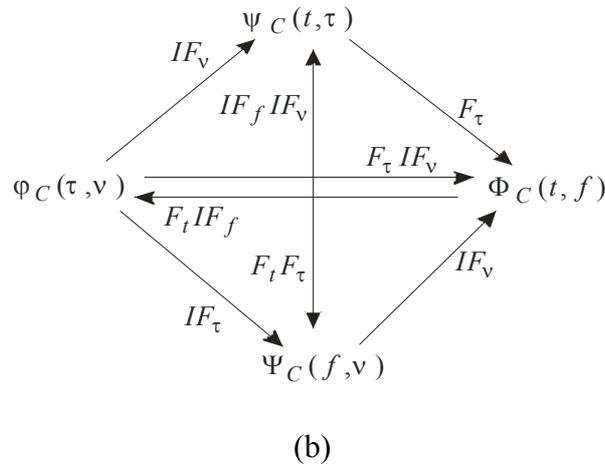
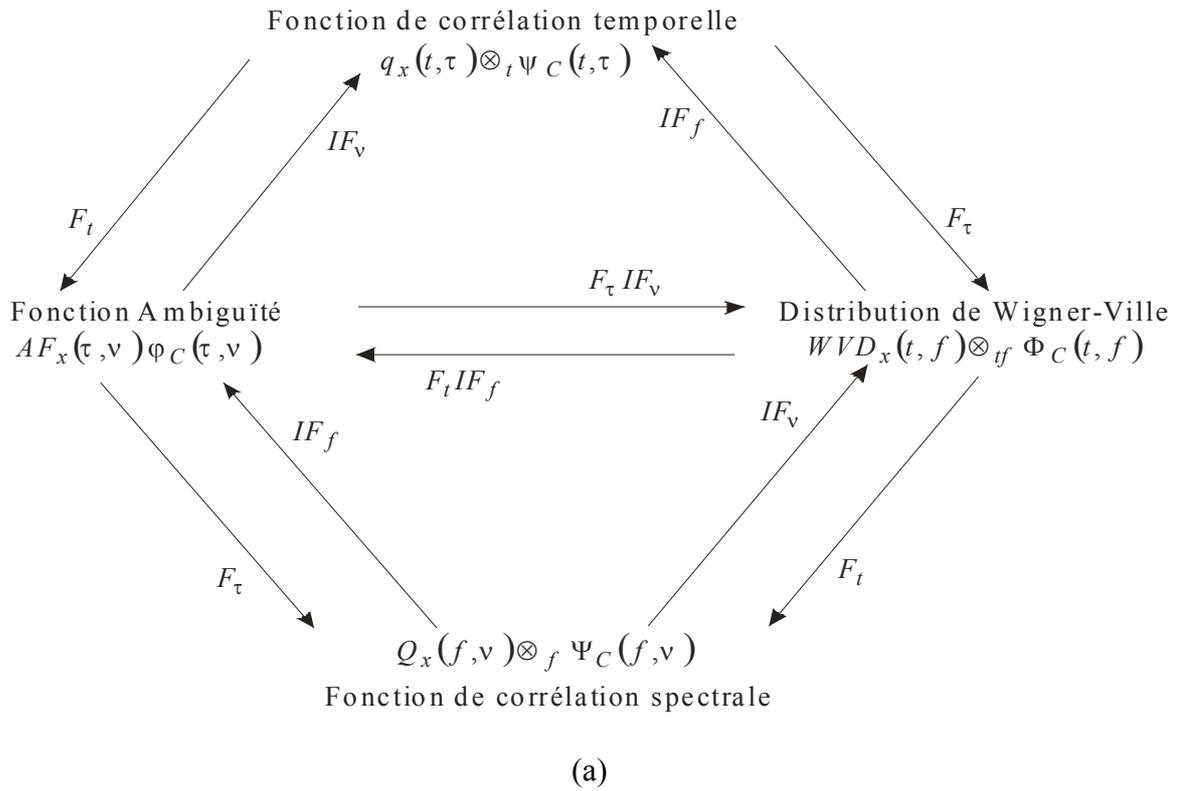


Figure 1.6 : Relation entre les différentes représentation temps-fréquence et les fonctions noyaux dans les différents domaines. Les symboles F et IF désignent les transformées de Fourier directe et inverse, respectivement et \otimes dénote l'opération de convolution. (a) Relation entre les représentations temps-fréquence. (b) Relation entre les fonctions noyaux.

Propriété	Contrainte
Invariance à la translation temporelle	$\varphi_C(\tau, \nu)$ est indépendant du temps t
Invariance à la translation fréquentielle	$\varphi_C(\tau, \nu)$ est indépendant de la fréquence f
Energie	$\varphi_C(0, 0) = 1$
Marginalité temporelle	$\varphi_C(0, \nu) = 1, \quad \forall \nu$
Marginalité fréquentielle	$\varphi_C(\tau, 0) = 1, \quad \forall \tau$
Réalité	$\varphi_C(\tau, \nu) = \varphi_C^*(-\tau, -\nu)$
Fréquence instantanée à partir de la fréquence moyenne	$\varphi_C(0, \nu) = 1$ et $\frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi_C(\tau, \nu)]_{\tau=0} = 0, \quad \forall \nu$
Retard de groupe à partir du temps moyen	$\varphi_C(\tau, 0) = 1$ et $\frac{\partial}{\partial \nu} [\varphi_C(\tau, \nu)]_{\nu=0} = 0, \quad \forall \tau$
Support temporel fini	$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_C(\tau, \nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu = 0, \quad t > \frac{ \tau }{2}$
Support fréquentiel fini	$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_C(\tau, \nu) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = 0, \quad f > \frac{ \nu }{2}$
Unitarité	$\varphi_C(\tau, \nu) = 1, \quad \forall \nu, \tau$

Tableau 1.1 : Propriétés désirables des représentations temps-fréquence et les contraintes imposées à la fonction noyau.

1.3.5. Distribution de Wigner-Ville lissée

La distribution de Wigner-Ville est très attractive du point de vue des propriétés mathématiques. Cependant, la présence de termes d'interférences limite son intérêt pratique. Plusieurs fonctions noyaux ont été proposées pour réduire les termes d'interférences. Ces derniers ont un caractère oscillatoire et, par conséquent, ils peuvent être atténués par une opération de lissage (filtrage passe bas). Sachant que toute distribution de la classe de Cohen peut être obtenue au moyen d'une opération de convolution bidimensionnelle de la distribution de Wigner-Ville avec une fonction noyau, cette dernière doit avoir la propriété d'un filtre passe bas afin de permettre un lissage de la distribution de Wigner-Ville. Une telle fonction noyau est qualifiée de fonction de lissage.

Le passage au domaine d'ambiguïté permet d'illustrer l'opération de lissage. En effet, dans le domaine de Wigner-Ville, les auto-termes et les termes d'interférences sont mélangés et, par conséquent, il n'est pas possible de distinguer la région qui correspond aux auto-termes de celle associée aux termes d'interférences alors que ceci devient possible en passant au domaine d'ambiguïté. Dans le domaine de Wigner-Ville, les termes d'interférences sont situés entre les auto-termes alors que dans le domaine d'ambiguïté, les termes d'interférences sont situés de part et d'autre de l'origine. Les distributions à noyau ont pour but de transférer la distribution de Wigner-Ville à la fonction d'ambiguïté, multiplier la fonction d'ambiguïté par une fonction noyau passe bas concentrée autour de l'origine dans le plan (τ, ν) afin d'atténuer les termes d'interférences et enfin retourner au plan temps-fréquence (t, f) .

Bien que l'opération de lissage permette d'atténuer les termes d'interférences, elle conduit à une diminution de la résolution temps-fréquence d'où l'existence d'un compromis entre une forte atténuation des termes d'interférences et une bonne concentration temps-fréquence. Une fonction noyau ayant un support étalé dans le domaine de Wigner-Ville (correspondant à une fonction passe bas étroite dans le domaine d'ambiguïté) conduit à une forte atténuation des termes d'interférences mais elle résulte en une mauvaise concentration temps-fréquence. Contrairement, une fonction de lissage ayant un support étroit dans le domaine de Wigner-Ville (correspondant à une fonction de support étalé dans le domaine d'ambiguïté) est caractérisée par une faible atténuation des termes d'interférences et une bonne concentration temps-fréquence. Deux distributions à noyau très populaires sont la distribution de Choi-Williams et la distribution à noyau en cône appelée aussi distribution de Zhao.

1.3.5.1. Distribution de Choi-Williams

La distribution de Choi-Williams [ChoH89] est particulièrement intéressante pour l'analyse de signaux multi-composantes. Elle utilise un noyau qui a pour effet de réduire les termes d'interférences causés par la nature non linéaire de la transformation. Considérons un signal $x(t)$ à K composantes $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, K$

$$x(t) = \sum_{i=1}^K x_i(t) \quad (1.41)$$

Le développement du terme $x\left(u + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right)$ qui figure dans l'expression (1.38) définissant les distributions de la classe de Cohen donne

$$x\left(u + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) = \sum_{i=1}^K x_i\left(u + \frac{\tau}{2}\right)x_i^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) + \sum_{i \neq j} x_i\left(u + \frac{\tau}{2}\right)x_j^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right)$$

La distribution temps-fréquence s'écrit comme

$$C_x(t, f; \varphi_C) = \sum_{i=1}^K C_{x_i x_i}(t, f; \varphi_C) + \sum_{i \neq j} C_{x_i x_j}(t, f; \varphi_C) \quad (1.42)$$

où

$$C_{x_i, x_j}(t, f; \varphi_C) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(-\nu - \mathcal{F} + \nu u)} \varphi_C(\tau, \nu) x_i\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x_j^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) d\nu d\tau du \quad (1.43)$$

Une distribution temps-fréquence de la classe de Cohen d'un signal multi-composantes est composée des distributions de chaque composante et des termes d'interférences résultant de l'interaction entre les différentes composantes.

Il s'en suit de (1.43) que l'amplitude et la forme des termes d'interférences sont déterminées par la fonction noyau $\varphi_C(\tau, \nu)$. D'une part, les termes causent des problèmes

d'interprétation et peuvent affecter le processus de traitement ultérieur et, d'autre part, ils font partie de la distribution temps-fréquence.

La distribution de Choi-Williams est un membre de la classe de Cohen obtenue en prenant pour fonction noyau la fonction donnée par [Fla93, ChoH89]

$$\varphi_{CW}(\tau, \nu) = e^{-\frac{(\pi\nu\tau)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.44)$$

où $\sigma > 0$ est un facteur d'échelle.

En substituant la fonction noyau $\varphi_{CW}(\tau, \nu)$ donnée par (1.44) dans (1.38), la distribution de Choi-Williams s'écrit comme

$$CW_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma}{|\tau|} e^{-2\sigma^2(u-t)^2/\tau^2} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du \right] d\tau \quad (1.45)$$

L'effet du noyau de Choi-Williams sur les termes d'interférences apparaît clairement en examinant la fonction d'ambiguïté qui s'écrit comme

$$AF_x(\tau, \nu; \varphi_C) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(t, f; \varphi_C) e^{j2\pi(\nu t + \tau f)} dt df \quad (1.46)$$

En combinant (1.38) et (1.46), il vient

$$AF_x(\tau, \nu; \varphi_C) = \varphi_C(\tau, \nu) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu u} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du \quad (1.47)$$

La fonction d'ambiguïté d'un signal composé de K composantes prend la forme suivante

$$AF_x(\tau, \nu; \varphi_C) = \sum_{i=1}^K AF_{x_i, x_i}(\tau, \nu; \varphi_C) + \sum_{i \neq j} AF_{x_i, x_j}(\tau, \nu; \varphi_C) \quad (1.47a)$$

où

$$AF_{x_i, x_i}(\tau, \nu; \varphi_C) = \varphi_C(\tau, \nu) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu u} x_i\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x_i^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du \quad (1.47b)$$

$$AF_{x_i, x_j}(\tau, \nu; \varphi_C) = \varphi_C(\tau, \nu) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu u} x_i\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x_j^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du, \quad i \neq j \quad (1.47c)$$

La fonction d'ambiguïté du signal multi-composantes apparaît comme la somme des auto-termes associés aux différentes composantes et des termes d'interférences associés aux paires de composantes. Les auto-termes sont donnés par (1.47b) et les termes d'interférences sont exprimés par (1.47c). Une caractéristique des auto-termes donnés par

(1.47b) est qu'ils passent par l'origine alors que les termes d'interférences sont situés de part et d'autre de l'origine. Par conséquent, les auto-termes sont renforcés et les termes d'interférences sont atténués si une forte pondération est appliquée aux régions (τ, ν) proches de l'origine et une faible pondération est appliquée aux régions (τ, ν) loin de l'origine. Le noyau exponentiel donné par (1.44) remplit bien cette fonction. La figure 1.7 montre la distribution de la fonction noyau de Choi-Williams dans le domaine d'ambiguïté pour $\sigma = 1$ et $\sigma = 10$. Le facteur d'échelle σ permet de réaliser un compromis entre la résolution temps-fréquence et l'atténuation de l'amplitude des termes d'interférences. Une grande valeur de σ a pour effet d'augmenter la concentration des auto-termes et donc la résolution temps-fréquence de la distribution mais elle a pour effet d'atténuer faiblement les termes d'interférences. Inversement, une petite valeur de σ permet d'atténuer fortement les termes d'interférences mais elle conduit à une faible résolution temps-fréquence. La figure 1.8 montre la distribution de Choi-Williams du signal composé de deux atomes de Gabor donné par (1.26) pour trois valeurs différentes du paramètre σ .

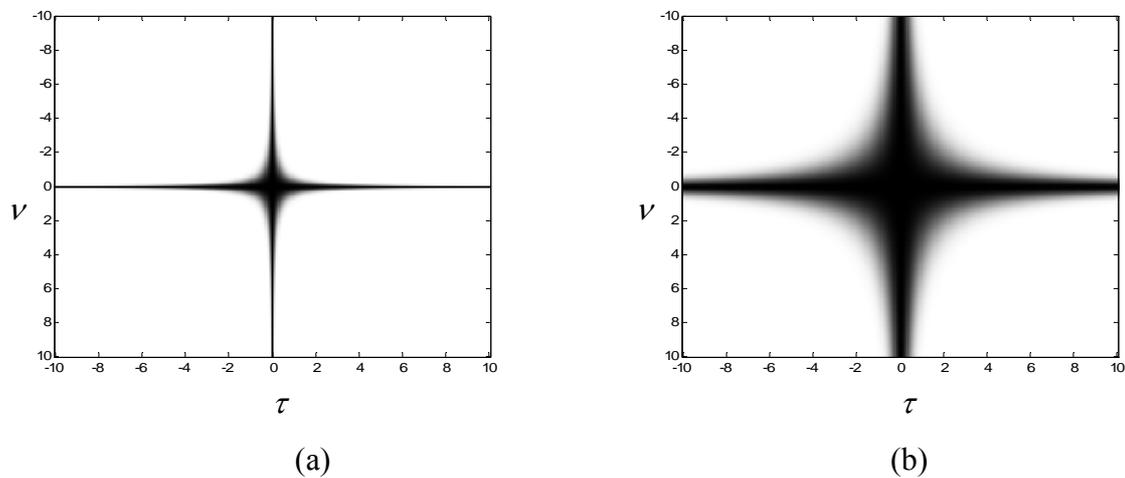


Figure 1.7 : Noyau de Choi-Williams pour $\sigma = 1$ (a) et $\sigma = 10$ (b).

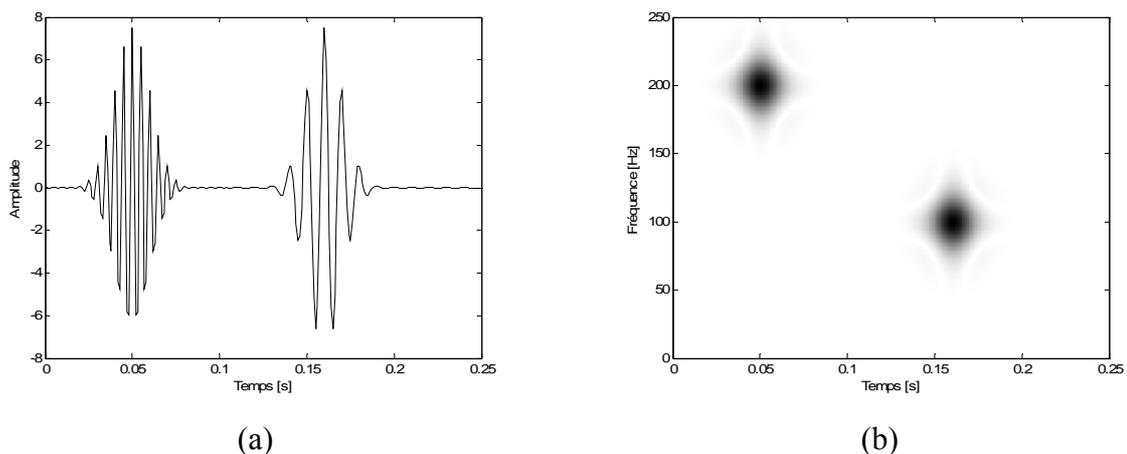


Figure 1.8 : Illustration de la distribution de Choi-Williams du signal composé de deux atomes de Gabor pour différentes valeurs du paramètre σ . (a) Représentation temporelle du signal. (b) Distribution de Choi-Williams pour $\sigma = 0.05$. (c) Distribution de Choi-Williams pour $\sigma = 1$. (d) Distribution de Choi-Williams pour $\sigma = 10$.

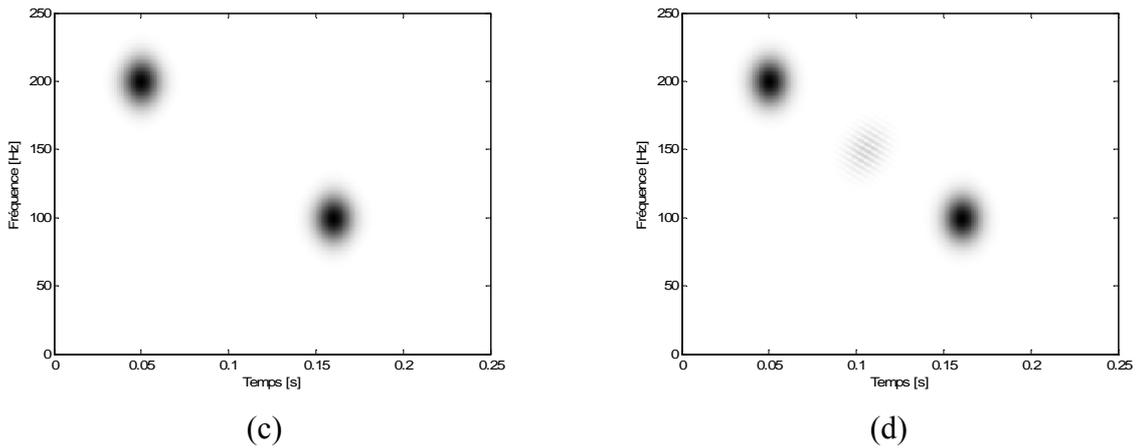


Figure 1.8 (suite)

Les représentations temps-fréquence développées dans [Jeo92c] sont basées sur la même idée que celle utilisée dans le développement de la distribution de Choi-Williams mais en incorporant des propriétés désirables à la fonction noyau. Ces distributions sont à interférences réduites et possèdent un plus grand nombre de propriétés désirables que la distribution de Choi-Williams.

1.3.5.2. Distribution temps-fréquence à noyau en cône

La fonction noyau en cône proposée dans [Zha90] est localisée uniquement autour de l'origine et sur l'axe τ . Elle est exprimée par

$$\varphi_{\text{cône}}(\tau, \nu) = e^{-\sigma\tau^2} \frac{\sin \pi\nu\tau}{\pi\nu\tau} \tag{1.48}$$

Le noyau en cône permet de supprimer les cross-termes situés dans la même région que les termes propres mais au prix d'une perte de la propriété de marginalité fréquentielle. La figure 1.9 illustre la fonction noyau en cône pour deux valeurs de σ .

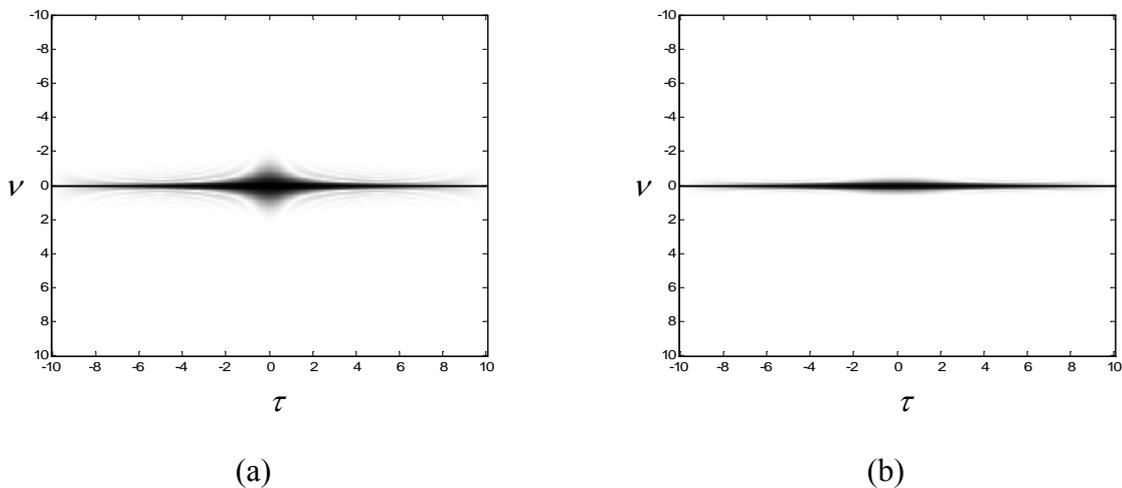


Figure 1.9 : Fonction noyau en cône pour $\sigma = 1$ (a) et $\sigma = 10$.

1.3.5.3. Spectrogramme

Le spectrogramme peut être exprimé par [ClaT80c]

$$SP_x^{(h)}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} WVD_h(u-t, \xi-f) WVD_x(u, \xi) du d\xi \quad (1.49)$$

Le spectrogramme apparaît comme une version lissée de la distribution de Wigner-Ville. L'opération de lissage agit comme un filtre passe-bas sur les termes d'interférences de caractère oscillatoire réduisant ainsi leur prééminence. La fonction de lissage $\Phi_{SP}(t, f)$ n'est autre que la distribution de Wigner-Ville de la fenêtre d'analyse $h(t)$ avec retournement des axes

$$\Phi_{SP}(t, f) = WVD_h(-t, -f) \quad (1.50)$$

Le lissage dans le spectrogramme est intense ce qui conduit non seulement à une forte atténuation des termes d'interférences mais aussi à une dégradation importante de la résolution temps-fréquence [Jeo92a, Kad92b]. L'étalement temporel Δt et l'étalement fréquentiel Δf de la fonction de lissage $\Psi_{SP}(t, f)$ déterminent le compromis entre l'atténuation des interférences et la résolution temps-fréquence.

La quantité et le nombre de termes d'interférences dans le spectrogramme d'un signal multi-composantes dépendent de la structure de ce dernier. Si les supports temps-fréquence des transformées de Fourier à court terme de deux composantes ne se chevauchent pas alors le terme d'interférence correspondant est nul. Le nombre de termes d'interférences dans le spectrogramme d'un signal contenant K composantes peut varier entre 0 à C_K^2 termes d'interférences. Contrairement à la distribution de Wigner-Ville qui contient un nombre constant de C_K^2 termes d'interférences. Une autre différence entre le spectrogramme et la distribution de Wigner-Ville concerne la géométrie des termes d'interférences. Dans le spectrogramme, les termes d'interférences correspondants à chaque deux composantes sont situés dans la région de chevauchement de leurs supports temps-fréquence alors que dans la distribution de Wigner-Ville, ils sont situés entre les termes propres.

1.3.5.4. Distribution de Pseudo Wigner-Ville

La distribution de pseudo Wigner-Ville lissée permet d'ajuster les largeurs temporelle Δt et fréquentielle Δf librement et indépendamment l'une de l'autre [Jac83]. La distribution de pseudo Wigner-Ville lissée est définie par

$$PWVD_x^{(g,H)}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u) H(f-\xi) WVD_x(u, \xi) du d\xi \quad (1.51)$$

La distribution de pseudo Wigner-Ville est définie par une fonction de lissage séparable $\Phi_{PWVD}(t, f) = g(t) H(f)$, où $g(t)$ et $H(f)$ sont deux fonctions de pondération dont les longueurs effectives déterminent indépendamment les largeurs de lissage temporelle Δt et fréquentielle Δf , respectivement. Le découplage des opérations de lissage temporel et

fréquentiel permet une grande flexibilité. Le cas particulier correspondant au choix $g(t) = \delta(t)$ ($\Delta t = 0$) conduit à la distribution de Wigner-Ville.

1.3.5.5. Autres distributions de la classe de Cohen

L'analyse des signaux multi-composantes constitue jusqu'à présent un sujet de recherche actif. Il n'existe pas une distribution temps-fréquence unique qui donne des résultats satisfaisants pour tous les signaux. L'objectif de ces recherches consiste à améliorer les performances des distributions temps-fréquence en développant des distributions à termes d'interférences atténués tout en préservant les termes du signal et/ou les propriétés mathématiques désirables. Généralement, ceci s'obtient en concevant des fonctions noyaux appropriées. Des exemples de distributions temps-fréquence développées durant la dernière décade pour l'analyse des signaux multi-composantes sont la distribution exponentielle généralisée [Bou91], la distribution de Butterworth [Pap92]. Plus récemment, il a été montré que la distribution temps-fréquence utilisant la fonction noyau proposée dans [BarB01] possède des performances, en terme de résolution temps-fréquence et suppression des termes d'interférences, supérieures à celles de la distribution de Wigner-Ville et du spectrogramme.

1.3.6. Représentations temps-fréquence basées sur les fonctions gaussiennes adaptatives

Cette catégorie de représentations temps-fréquence repose sur une approche différente de celle développée dans les sections précédentes. L'approche consiste à substituer au signal à analyser un modèle paramétrique composé d'une combinaison linéaire de fonctions gaussiennes concentrées dans le plan temps-fréquence. Une fois calculés, les paramètres du modèle sont utilisés dans le calcul de la distribution temps-fréquence.

1.3.6.1. Expansion dans la base gaussienne adaptative

Le signal $x(t)$ est exprimé comme une combinaison linéaire de fonctions élémentaires $h_p(t)$ localisées en temps et en fréquence [Qia94b]

$$x(t) = \sum_{p=0}^{\infty} B_p h_p(t) \quad (1.52)$$

Pour mieux modéliser le comportement non stationnaire du signal, des fonctions élémentaires gaussiennes $h_p(t)$ caractérisées par une largeur α_p et un centre temps-fréquence (t_p, f_p) ajustables sont utilisées dans la décomposition (1.52)

$$h_p(t) = g_p(t - t_p) e^{j2\pi f_p t} \quad (1.53a)$$

où

$$g_p(t) = (\pi\alpha_p)^{-0.25} e^{-\frac{t^2}{2\alpha_p}}, \quad \alpha_p \in R^+, \quad t_p, f_p \in R \quad (1.53b)$$

Les fonctions gaussiennes $g_p(t)$ sont caractérisées par une résolution temps-fréquence optimale au sens du principe d'incertitude d'Heisenberg. Le paramètre α_p dans (1.53b) détermine le compromis entre les résolutions en temps et en fréquence. Les paramètres α_p , t_p et f_p sont choisis de manière à ce que $h_p(t)$ ressemble au mieux à $x(t)$.

Les fonctions gaussiennes utilisées dans l'expansion (1.52) ne constituent pas une base orthonormée et, par conséquent, les coefficients B_p ne sont pas, en général, uniques. La procédure de calcul des paramètres B_p , α_p , t_p et f_p se résume comme suit :

A chaque étape p (étape initiale $p = 0$), les paramètres α_p , t_p et f_p sont choisis tels que

$$|B_p|^2 = \max_{\alpha_p, t_p, f_p} |\Gamma_p|^2 = \max_{\alpha_p, t_p, f_p} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t) h_p^*(t) dt \right|^2, \quad \alpha_p \in \mathbb{R}^+, \quad t_p, f_p \in \mathbb{R} \quad (1.54)$$

A l'étape initiale, on pose $x_0(t) = x(t)$. Pour $p \geq 1$, $x_p(t)$ est la différence entre $x_{p-1}(t)$ et sa projection sur $h_{p-1}(t)$

$$x_p(t) = x_{p-1}(t) - B_{p-1} h_{p-1}(t)$$

Or, la fonction $h_p(t)$ est normalisée, ce qui permet d'écrire

$$\|x_p(t)\|^2 = \|x_{p-1}(t)\|^2 - |B_{p-1}|^2$$

où $\|\cdot\|$ dénote la norme Euclidienne.

Les coefficients B_p sont calculés en utilisant (1.54). Après Q étapes, il vient

$$x(t) = \sum_{p=0}^Q B_p h_p(t) + x_{Q+1}(t)$$

et

$$\|x(t)\|^2 = \sum_{p=0}^Q |B_p|^2 + \|x_{Q+1}(t)\|^2$$

où $x_{Q+1}(t)$ est une erreur (résidu) monotone décroissante qui tend vers zéro lorsque Q devient grand.

Lorsque Q tend vers l'infini, le signal reconstruit sans erreur s'écrit comme

$$x(t) = \sum_{p=0}^{\infty} B_p h_p(t)$$

où

$$B_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t) h_p^*(t) dt$$

et

$$x_p(t) = x_{p-1}(t) - B_{p-1} h_{p-1}(t)$$

La norme de l'erreur $x_{Q+1}(t)$ décroît lorsque le nombre de fonctions élémentaires utilisées dans la décomposition (1.52) augmente. L'erreur de reconstruction du signal $x(t)$ à l'étape Q peut être exprimée au moyen du rapport signal à bruit (RSB) donné par [Qia94b]

$$RSB = 10 \log \left[\frac{\|x(t)\|^2}{\|x_{Q+1}(t)\|^2} \right] \quad (1.55)$$

On montre que [Qia94b]

$$\|x_{Q+1}(t)\|^2 = \|x_0(t)\|^2 \prod_{p=1}^Q \|\sin \theta_p\|^2 \leq \|x(t)\|^2 (\sin \theta_{\max})^{2Q} \quad (1.56a)$$

où

$$\cos \theta_p = \frac{\langle x_p, h_p \rangle}{\|x_p\|} = \frac{B_p}{\|x_p\|} \quad (1.56b)$$

Une approche similaire appelée poursuite adaptative (Matching Pursuit) a été développée indépendamment dans [Mal93] et plusieurs algorithmes efficaces permettant d'estimer les paramètres intervenant dans la décomposition ont été proposés [Goo99, GriR01, GriR03].

1.3.6.2. Représentations temps-fréquence à interférences supprimées

Ces représentation temps-fréquence sont basées sur la décomposition du signal dans la base des fonctions gaussiennes. En prenant la distribution de Wigner-Ville des deux membres de l'équation (1.52), il vient [Qia94a,b]

$$WVD_x(t, f) = \sum_{p=0}^{\infty} |B_p|^2 WVD_{g_p}(t - t_p, f - f_p) + 2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q>p} \operatorname{Re} \left\{ |B_p B_q^*| WVD_{g_p g_q} \left(t - \frac{t_p + t_q}{2}, f - \frac{f_p + f_q}{2} \right) \right\} \quad (1.57)$$

La distribution de Wigner-Ville de $x(t)$ apparaît comme la somme de deux termes. Le premier terme est une combinaison linéaire de distributions de Wigner-Ville non négatives de fonctions gaussiennes décalées en temps et en fréquence et concentrées en (t_p, f_p) . Le second terme est la somme de distributions de cross Wigner-Ville de fonctions gaussiennes oscillatoires concentrées en $\left(\frac{1}{2}(t_p + t_q), \frac{1}{2}(f_p + f_q) \right)$. Si l'énergie contenue dans les

termes d'interférence est négligeable alors les auto-termes seules peuvent être utilisés pour représenter le signal. La représentation temps-fréquence qui en découle s'appelle distribution à termes d'interférences supprimés. Elle est non négative et ne comprend pas de termes d'interférences.

La représentation temps-fréquence à termes d'interférences supprimés peut être construite en utilisant la décomposition de Gabor de $x(t)$

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{m,n} g(t - m\Delta T) e^{j2\pi n\Delta F t} \quad (1.58a)$$

où

$$C_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) h^*(t - m\Delta T) e^{-j2\pi n\Delta F t} dt \quad (1.58b)$$

La fonction d'analyse $h(t)$ est telle que $h(t) = \beta g(t)$, où β est une constante réelle. En remplaçant t_p par $m\Delta T$ et f_p par $n\Delta F$ dans l'expression de la distribution à termes d'interférences supprimés, il vient

$$\begin{aligned} CDR(t, f) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_{m,n}|^2 WVD_g(t - m\Delta T, f - n\Delta F) \\ &= 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_{m,n}|^2 e^{-\frac{(t-m\Delta T)^2}{\sigma^2} - (2\pi\sigma)^2 (f-n\Delta F)^2} \end{aligned} \quad (1.59)$$

où l'égalité $\|WVD_g(t, f)\|^2 = \|g\|^2 = 1$ a été exploitée dans le développement.

1.3.6.3. Spectrogramme adaptatif

La représentation temps-fréquence appelée spectrogramme adaptatif est construite à partir de la décomposition dans la base des fonctions gaussiennes. En prenant la distribution de Wigner-Ville des deux membres de (1.52) et en supprimant les termes d'interférences, il vient [Qia94b]

$$ADS(t, f) = 2 \sum_{p=0}^{\infty} |B_p|^2 e^{-\frac{(t-t_p)^2}{\alpha_p} - (2\pi)^2 \alpha_p (f-f_p)^2}, \quad \alpha_p \in R^+, t_p \in R, f_p \in [0, \infty[\quad (1.60)$$

Il convient de noter que l'énergie contenue dans le spectrogramme adaptatif est égale à l'énergie contenue dans le signal $x(t)$:

$$\|ADS(t, f)\|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} |B_p|^2 \quad (1.61)$$

Le spectrogramme adaptatif est donc une distribution temps-fréquence énergétique non négative et sans termes d'interférences. Inspirée de la distribution présentée dans [Qia94a,b], une distribution temps-fréquence positive présentant des distributions marginales correspondantes à la puissance instantanée et le spectre instantané a été proposée dans [Ped99].

1.3.7. Distributions de la classe affine

Une autre classe de distributions quadratiques appelée classe affine comprend toutes les distributions quadratiques énergétiques qui préservent les propriétés de translation temporelle et d'échelonnement temporel [Ber88, Rio92, Hla92]

$$\tilde{x}(t) = \sqrt{|s|} x(s(t - t_0)) \Rightarrow T_{\tilde{x}}(t, f) = T_x\left(s(t - t_0), \frac{f}{s}\right) \quad (1.62)$$

Comme les représentations de la classe de Cohen, toute représentation temps-fréquence appartenant à la classe affine peut être obtenue à partir de la distribution de Wigner-Ville moyennant une transformation affine

$$T_x(t, f; \Pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(u, \xi) \Pi\left(f(t - u), \frac{\xi}{f}\right) du d\xi \quad (1.63)$$

où Π est une fonction noyau bidimensionnelle indépendante du signal $x(t)$.

Les représentations temps-fréquence de la classe affine permettent une analyse à des résolutions temporelle et fréquentielle variables. Elles sont particulièrement intéressantes pour l'analyse des signaux à modulation de fréquence hyperbolique.

1.3.8. Discussion

Les représentations temps-fréquence quadratiques présentées utilisent une fonction noyau caractérisée par une bande passante et une bande d'arrêt fixes, ce qui limite la classe des signaux pour lesquels une certaine distribution temps-fréquence possède des bonnes performances. En effet, quelle que soit la fonction noyau utilisée, il est toujours possible de trouver des signaux caractérisés par des termes d'interférences à grande énergie dans la bande passante ou par des auto-termes à grande énergie dans la bande d'arrêt de la fonction noyau [BarR93].

La fonction noyau exponentielle de Choi-Williams donnée par (1.44) possède une grande amplitude le long des axes ν et τ et, donc, la distribution de Choi-Williams possède des meilleures performances pour les signaux dont les auto-termes de la fonction d'ambiguïté sont situés sur ces axes. Pour ce type de signaux, les termes d'interférences ont été supprimés au prix d'un élargissement des auto-termes. Par contre, les performances de la distribution de Choi-Williams se dégradent pour les signaux dont les auto-termes de la fonction d'ambiguïté ne sont pas situés le long des axes ν et τ comme par exemple les signaux à forte modulation de fréquence.

La distribution temps-fréquence à noyau en cône possède des bonnes performances pour les signaux dont les auto-termes de la fonction d'ambiguïté sont situés près de l'axe ν mais elle est mal adaptée à certains signaux chirps.

Malgré que ces signaux diffèrent uniquement dans l'orientation dans le plan temps-fréquence, aucune distribution ne possède des bonnes performances pour les deux types de signaux. Il est bien clair qu'une distribution à noyau fixe possède des bonnes performances uniquement pour certaines configurations des auto-termes et des termes d'interférences de la fonction d'ambiguïté et, donc, elle ne permet l'analyse que d'une classe limitée de signaux. Puisque la configuration des auto-termes et des termes d'interférences dépend du signal à analyser, des bonnes performances peuvent être obtenues pour une large classe de signaux si des noyaux dépendant du signal sont utilisés. Un noyau dépendant du signal offre une meilleure représentation temps-fréquence en ajustant sa forme de façon à laisser

passer les auto-termes et supprimer les termes d'interférences quelle que soit leur orientation et leur forme [BarR93, Jon95].

1.4. Estimation de la fréquence instantanée

1.4.1. Concept de fréquence instantanée des signaux non stationnaires

La fréquence instantanée est un concept d'une grande importance dans l'analyse des signaux non stationnaires. Elle peut être considérée comme une généralisation de la fréquence traditionnelle des signaux sinusoïdaux et périodiques [Boa92a].

La fréquence instantanée est définie à partir de la phase du signal analytique et du moment d'ordre 1 d'une représentation temps-fréquence de la classe de Cohen [Lov93]. Dans le cas d'un signal réel non sinusoïdal $s(t)$, on peut lui associer le signal analytique $x(t)$ défini par

$$x(t) = s(t) + jH[s(t)] = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (1.64)$$

où $H[.]$ est la transformée de Hilbert définie par

$$H[s(t)] = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(t-\tau)}{\pi\tau} d\tau \quad (1.65)$$

v.p. désigne la valeur principale de Cauchy de l'intégrale.

La fréquence instantanée est définie par

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\arg x(t)] = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (1.66)$$

1.4.2. Fréquence instantanée discrète

Considérons un signal réel à temps discret $s(n)$. Le signal analytique $x(n)$ correspondant est exprimé par

$$x(n) = s(n) + jH_d[s(n)] = a(n)e^{j\phi(n)} \quad (1.67)$$

où $H_d[.]$ est la transformée de Hilbert à temps discret définie par [Boa92a]

$$H[s(n)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2s(n-m)}{m\pi} \quad (m \text{ impair}) \quad (1.68)$$

La discrétisation de l'opération de différenciation de la phase permet d'aboutir à deux estimateurs de la fréquence instantanée donnés, respectivement, par les différences finies directe et inverse [Boa92a]

$$\hat{f}_f(n) = \frac{f_s}{2\pi} (\phi(n+1) - \phi(n)) \quad (1.69a)$$

$$\hat{f}_b(n) = \frac{f_s}{2\pi} (\phi(n) - \phi(n-1)) \quad (1.69b)$$

où f_s est la fréquence d'échantillonnage.

Un autre estimateur de la fréquence instantanée discrète est donnée par la différence finie centrale

$$\hat{f}_i(n) = \frac{f_s}{4\pi} (\phi(n+1) - \phi(n-1)) \quad (1.70)$$

L'estimateur basé sur la différence finie centrale présente l'avantage d'être non biaisé pour les signaux à modulation de fréquence linéaire et il correspond aux moments du premier ordre de plusieurs distributions temps-fréquence.

1.4.3. Méthodes d'estimation de la fréquence instantanée discrète

Plusieurs méthodes d'estimation de la fréquences instantanée ont été proposées dans la littérature. Une revue de ces méthodes ainsi que des exemples d'application sont donnés dans [Boa92b]. D'autres méthodes d'estimation de la fréquence instantanée peuvent être également consultées dans [Gos04]. Cette section présente quelques estimateurs de la fréquence instantanée basés sur la définition de celle-ci ou utilisant les distributions temps-fréquence.

1.4.3.1. Version lissée de l'estimateur à différence de phase

L'estimateur de la fréquence instantanée basé sur la différence finie centrale est non biaisé pour les signaux à modulation de fréquence linéaire mais il est caractérisé par une très grande variance pour les signaux bruités. L'opération de lissage a pour objectif de réduire la variance de l'estimateur. Si la largeur de bande du signal est connue, le signal bruité est filtré puis un lissage est appliqué à l'estimateur pour réduire sa variance. Un exemple d'estimateur basé sur la différence de phase lissée a été proposé dans [Kay88a]. Il est donné par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-2} h(n) (\phi(n+1) - \phi(n)) \quad (1.71)$$

où $h(n)$ est la fenêtre de lissage définie par

$$h(n) = \frac{1.5N}{N^2 - 1} \left(1 - \left[\frac{n - (N/2 - 1)}{N/2} \right]^2 \right) \quad (1.72)$$

La réduction de la variance obtenue en utilisant la fenêtre de lissage est donnée par

$$\frac{\text{var}(\hat{f})_{\text{sans fen\^etre}}}{\text{var}(\hat{f})_{\text{avec fen\^etre}}} = \frac{N(N+1)}{6(N-1)} \approx \frac{N}{6} \quad (1.73)$$

1.4.3.2. Estimation basée sur le nombre de passages par zéro

La méthode du nombre de passages par zéro peut être utilisée pour estimer la fréquence locale d'un signal à bande étroite. Pour un signal sinusoïdal ou un signal localement stationnaire, la fréquence est définie comme l'inverse de la période ou comme la moitié de l'inverse de l'intervalle entre deux passages par zéro

$$f = \frac{1}{2T_Z}$$

ou encore

$$f = \frac{Z}{2} \quad (1.74)$$

où T_Z est l'intervalle entre deux passages par zéro, f est la fréquence et Z est le taux de passages par zéro. Puisque le signal est à temps discret, la valeur de T_Z est mesurée en nombre d'échantillons k entre deux passages par zéro. L'estimateur prend la forme suivante :

$$f = \frac{1}{2k} \quad (1.75)$$

Pour réduire la variance de l'estimateur, il a été proposé de prendre la moyenne du nombre de passages par zéro sur une fenêtre de longueur M [Rab78]. Pour les signaux non stationnaires modulés en fréquence, l'estimateur prend la forme suivante

$$\hat{f}_i(n) = \frac{Z(n)}{2} \quad (1.76a)$$

où $Z(n)$ est donné par

$$Z(n) = \sum_{m=-M}^M |\text{sgn}[x(m)] - \text{sgn}[x(m-1)]| h(n-m) \quad (1.76b)$$

où $h(n)$ est une fenêtre de pondération de longueur M définie par

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2M} & \text{pour } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.76c)$$

et $\text{sgn}(m)$ est la fonction signe définie par

$$\text{sgn}[x(n)] = \begin{cases} +1 & \text{pour } x(n) \geq 0 \\ -1 & \text{pour } x(n) < 0 \end{cases} \quad (1.76d)$$

L'estimateur basé sur le nombre de passages par zéro introduit un bruit de quantification dans le cas où l'intervalle entre deux passages par zéro n'est pas égal à un nombre entier de périodes d'échantillonnage. Le bruit de quantification peut être réduit en interpolant le signal.

1.4.3.3. Estimation adaptative de la fréquence instantanée

La formulation adaptative du problème d'estimation de la fréquence instantanée utilise un filtre prédicteur linéaire dont les coefficients sont mis à jour à chaque échantillon du signal [GriL75]. La fréquence instantanée est estimée à partir du pic de la densité spectrale de puissance :

$$\hat{f}_i(n) = \arg \max_f \frac{1}{\left| 1 + \sum_{k=1}^P a_k(n) e^{-j2\pi f k} \right|^2} \quad (1.77)$$

où p et $a_k(n)$, $k = 1, 2, \dots, p$ sont, respectivement, l'ordre et les coefficients du filtre prédicteur. Les paramètres du filtre prédicteur sont calculés en utilisant un algorithme adaptatif.

1.4.3.4. Estimation de la fréquence instantanée basée sur les moments des distributions temps-fréquence

Certaines distributions temps-fréquence telle que la distribution de Wigner-Ville permettent d'estimer la fréquence instantanée à partir de leurs moments du premier ordre [Lov93]. L'estimateur de la fréquence instantanée basé sur les moments du premier ordre de la distribution de Wigner-Ville est donné par

$$\hat{f}(n) = \frac{M}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{M-1} e^{j2k\pi} WVD_x(n, k) \right) \mod 2\pi \quad (1.78)$$

où $M = \frac{N-1}{2}$ et $WVD_x(n, k)$ est la distribution de Wigner-Ville discrète de $x(n)$.

Cette méthode nécessite un temps de calcul prohibitif et elle n'est pas, en général, statistiquement optimale. D'autres distributions temps-fréquence de la classe de Cohen fournissent une estimation de la fréquence instantanée à partir de leurs moments du premier ordre. Ces moments donnent approximativement une version lissée de l'estimateur de la fréquence instantanée basé sur la différence finie centrale

$$m_1(n) \approx \left[\hat{f}_c(n) \otimes \Phi_C(n, 1) \right] \mod \frac{f_s}{2} \quad (1.79)$$

où \otimes dénote l'opération de convolution, $\hat{f}_c(n)$ est l'estimateur de la fréquence instantanée basé sur la différence finie centrale et $\Phi_C(n, 1)$ est la version discrète de la fonction noyau utilisée dans la définition de la classe de Cohen évaluée en $k = 1$.

En général, ces méthodes sont d'une grande complexité en terme du nombre d'opérations arithmétiques mises en œuvre.

1.4.3.5. Estimation de la fréquence instantanée basée sur les pics des distributions temps-fréquence

Ce type d'estimateurs calcule la fréquence instantanée comme la fréquence qui correspond au pic d'une certaine distribution temps-fréquence. L'utilisation de la transformée de Fourier à court terme comme distribution temps-fréquence conduit à une bonne performance pour les signaux localement stationnaires. Cependant, la performance se dégrade dans le cas des signaux non stationnaires modulés en fréquence. La transformée de Fourier à court terme adaptative obtenue en utilisant différentes fenêtres d'analyse à différents instants a été proposée comme alternative pour améliorer la résolution de l'estimateur de la fréquence instantanée [Kwo00].

L'estimation de la fréquence instantanée en utilisant le pic de la distribution de Wigner-Ville a été également proposée [RaoP90]. En effet, la distribution de Wigner-Ville permet de localiser l'énergie le long de la loi de la fréquence instantanée. L'estimateur

basé sur le pic de la distribution de Wigner-Ville fournit une fréquence localisée le long de la loi théorique de la fréquence instantanée pour les signaux modulés linéairement en fréquence et à amplitude constante. La présence de non linéarités dans la loi de la fréquence instantanée introduit un biais au pic de la distribution temps-fréquence. Cependant, ce biais peut être réduit en ajustant la fenêtre d'analyse de sorte que les variations de la fréquence instantanée peuvent être considérées comme linéaires sur la longueur de la fenêtre.

L'estimateur de la fréquence instantanée basé sur le pic de la distribution de Wigner-Ville est optimal pour les signaux modulés linéairement en fréquence caractérisés par un rapport signal à bruit grand à modéré. La distribution de Wigner-Ville polynomiale [Boa93a, BarB99] et la distribution de cross Wigner-Ville [Boa93b] ont été proposées comme alternatives pour améliorer les performances de l'estimateur de la fréquence instantanée basé sur la distribution de Wigner-Ville. L'approche proposée dans [Kat98] consiste à utiliser la distribution de Wigner-Ville avec des fenêtres d'analyse dont la longueur est calculée de manière optimale en utilisant une formule de la variance de l'estimation. Une forme robuste de la distribution de Wigner-Ville a été également utilisée comme estimateur de la fréquence instantanée des signaux contaminés par un mélange de bruits impulsionnel et gaussien [Dju01].

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, différentes classes de méthodes d'analyse temps-fréquence ont été présentées. Les distributions temps-fréquence linéaires de type transformée de Fourier à court terme ont une résolution temps-fréquence limitée par la fenêtre d'analyse. Les distributions temps-fréquence quadratiques sont caractérisées par une grande concentration temps-fréquence et possèdent une interprétation énergétique ou corrélative. Parmi les distributions temps-fréquence quadratiques, la distribution de Wigner-Ville possède un grand nombre de propriétés désirables. Cependant, la présence des termes d'interférences dus à sa nature quadratique limite son intérêt pratique pour l'analyse des signaux multi-composantes. De même, la distribution de Wigner-Ville peut prendre des valeurs négatives et, donc, elle ne peut être interprétée comme une distribution d'énergie. Les distributions quadratiques utilisant une fonction noyau de lissage dans le but de réduire les termes d'interférences causés par la nature non linéaire de la transformation sont particulièrement intéressantes pour l'analyse des signaux multi-composantes. Néanmoins, la réduction ou la suppression des termes d'interférences se fait au détriment d'une diminution de la résolution temps-fréquence.

Une autre approche d'analyse temps-fréquence présentée dans ce chapitre est basée sur le modèle paramétrique composé de la combinaison linéaire de fonctions gaussiennes concentrées dans le plan temps-fréquence. Cette formulation permet de supprimer les termes d'interférences et conduit à des distributions temps-fréquence positives.

La fréquence instantanée d'un signal non stationnaire est étroitement liée à sa distribution temps-fréquence. En effet, la fréquence instantanée peut être calculée en utilisant les moments du premier ordre de certaines distributions temps-fréquence comme elle peut être estimée en recherchant les fréquences correspondantes aux pics de ces distributions.

Chapitre 2

Analyse en ondelettes

2.1. Introduction

Dans de nombreuses applications, les signaux à analyser sont composés de structures de différentes tailles nécessitant ainsi des distributions temps-fréquence qui utilisent des atomes caractérisés par des supports temporels variables pour une meilleure performance. La transformée en ondelettes présente un intérêt particulier pour cette classe de signaux. Ce chapitre a pour objectif de présenter l'analyse en ondelettes sans prétendre de décrire tous les aspects théoriques ou détailler les développements mathématiques. La détection des singularités au moyen de l'analyse en ondelettes qui est la base de plusieurs applications est également présentée dans ce chapitre. Le chapitre présente la version discrète de la transformée en ondelettes et développe l'algorithme d'analyse et de synthèse de Mallat. Enfin, on donne quelques exemples de bases d'ondelettes et le principe de débruitage avec seuillage des coefficients d'ondelettes.

2.2. Transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes a été introduite originalement comme une représentation temps-échelle. Elle permet de décomposer un signal à énergie finie sur des fonctions dilatées et translatées. Une ondelette est une fonction $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ de moyenne nulle [Chu92, Mal98]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.1)$$

Elle est normalisée et centrée au voisinage de $t = 0$. Une famille d'atomes temps-échelle est obtenue par échelonnement d'un facteur s et translation d'un facteur u de l'ondelette mère $\psi(t)$

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (2.2)$$

où $s > 0$ est le paramètre échelle et u est le paramètre de translation temporelle.

L'action du paramètre s sur ψ (qui doit être oscillatoire) est une dilatation si $s > 1$ ou une compression si $s < 1$. La forme de la fonction ψ reste inchangée. Le facteur $1/\sqrt{s}$ maintient une norme constante $\|\psi_{u,s}(t)\| = 1$.

La transformée en ondelettes continue d'un signal $x(t)$ est définie par [Chu92, Mal98]

$$W_x(u, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt \quad (2.3)$$

La formulation temps-fréquence de la transformée en ondelettes permet d'établir une comparaison de cette dernière avec la transformée de Fourier à court terme. En définissant l'échelle d'analyse par $s = f_0 / f$, où f_0 est la fréquence centrale de $\psi(t)$, la transformée en ondelettes prend la forme suivante [Rio91, Fla93]

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \sqrt{\left| \frac{f}{f_0} \right|} \psi^* \left(\frac{f}{f_0} (\tau - t) \right) d\tau \quad (2.4)$$

La transformée en ondelettes possède les propriétés de translation en temps et en échelle. Cependant, elle ne préserve pas la translation fréquentielle.

La fonction $\psi(t)$ est localisée dans les domaines spatial (temporel) et fréquentiel. Pour que la transformée en ondelette soit inversible, la fonction ondelette $\psi(t)$ doit vérifier la condition, dite d'admissibilité, exprimée par

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} |\Psi(f)|^2 \frac{df}{f} < \infty \quad (2.5)$$

où $\Psi(f)$ est la transformée de Fourier de $\psi(t)$. Dans la plupart des cas, la condition (2.5) se réduit au fait que l'ondelette $\psi(t)$ soit de moyenne nulle. La formule de reconstruction s'écrit comme [Dau92]

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \psi_{u,s}(t) W_x(u, s) \quad (2.6)$$

L'expression (2.6) montre que la transformée en ondelettes permet la représentation du signal comme une superposition linéaire d'ondelettes $\psi_{u,s}(t)$ pondérées par les coefficients $W_x(u, s)$.

La distribution d'énergie de la transformée en ondelettes appelée scalogramme et définie par $SC_x(u, s) = |W_x(u, s)|^2$ est un membre d'une classe quadratique de distributions appelée classe affine [Rio92]. Le scalogramme préserve les propriétés de translation temporelle et d'échelonnement temporel. Il est non linéaire de nature et, donc, il présente un comportement très similaire au spectrogramme (cf. § 1.3.5.3.) vis à vis des termes d'interférences et de leur géométrie [Kad92b]. Le chevauchement des supports temps-échelle des transformées en ondelettes de chaque paire de composantes d'un signal multi-composantes conduit à l'apparition d'un terme d'interférence dans le scalogramme. Par conséquent, le scalogramme d'un signal à K composantes peut contenir au minimum zéro terme d'interférence et au maximum C_K^2 termes d'interférences.

2.3. Interprétation de la transformée en ondelettes en terme de filtrage et résolution temps-fréquence

La transformée en ondelettes $W_x(u, s)$ peut être interprétée comme la convolution du signal $x(t)$ avec la version conjuguée et inversée dans le temps de l'ondelette notée $\bar{\psi}(t)$

$$W_x(u, s) = \bar{\psi}_s(u) \otimes x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(u-t)x(t)dt \quad (2.7a)$$

où

$$\bar{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(-\frac{t}{s} \right) \quad (2.7b)$$

Cela signifie que la transformée en ondelettes continue agit comme un filtre dont la réponse impulsionnelle est de moyenne nulle.

Une propriété fondamentale de la transformée en ondelettes est qu'elle permette une localisation des événements en temps et en fréquence. Le segment de $x(t)$ qui contribue à la valeur de $W_x(u, s)$ est celui qui coïncide avec l'intervalle de $\psi_{u,s}(t)$ caractérisé par la plus grande énergie. La sélectivité en fréquence de la transformée en ondelettes peut être expliquée en utilisant son interprétation comme un ensemble de filtres linéaires temps-invariant dont les réponses impulsionnelles sont les versions dilatées et translatées de l'ondelette mère inversée dans le temps.

Comme illustration de la sélectivité en fréquence de la transformée en ondelettes, considérons l'ondelette appelée chapeau Mexicain définie comme la seconde dérivée de la fonction gaussienne

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3}\sigma} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad (2.8)$$

où σ est un facteur d'échelle permettant d'ajuster le support temporel de l'ondelette.

La figure 2.1 montre l'évolution temporelle de l'ondelette chapeau Mexicain normalisée pour $\sigma = 1$ et son spectre d'énergie d'amplitude $|\Psi(f)|$ pour trois valeurs différentes du facteur d'échelle. La figure 2.1b montre que l'ondelette est de type passe bande. Le facteur Q défini comme le rapport de la fréquence centrale à la largeur de bande à 3 dB reste invariant vis à vis de la dilatation de l'ondelette.

Pour les grandes valeurs de l'échelle s , le filtre associé à l'ondelette possède une réponse fréquentielle centrée sur une fréquence de faible valeur et, donc, la transformée en ondelettes $W_x(u, s)$ capte le contenu fréquentiel de $x(t)$ autour de cette faible valeur de la fréquence. Pour les petites valeurs de s , la bande passante du filtre associé est plus décalée vers les hautes fréquences et, donc, la transformée en ondelettes capte l'information correspondante aux hautes fréquences de son spectre.

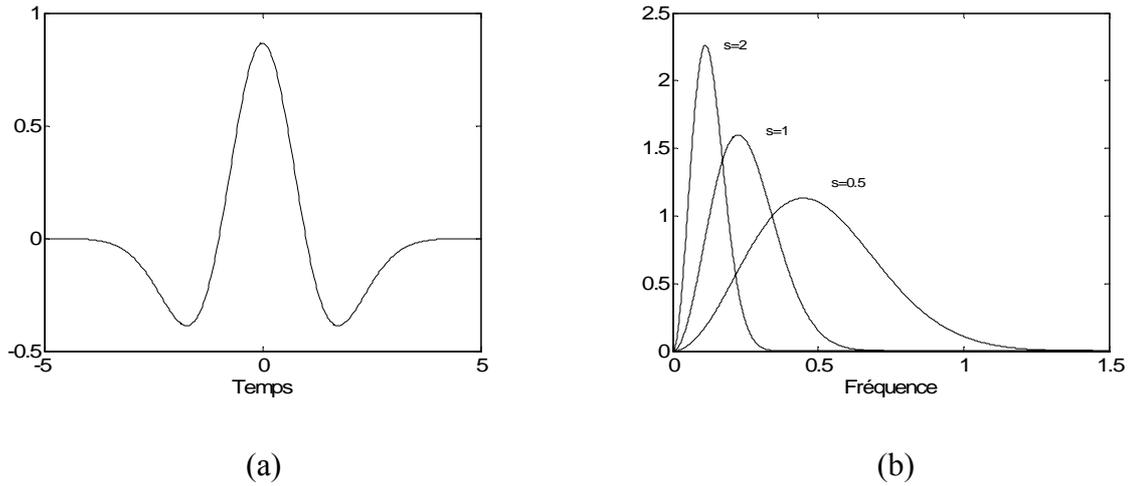


Figure 2.1 : Ondelette chapeau Mexicain normalisée. (a) Représentation temporelle pour $\sigma = 1$. (b) Spectre d'amplitude pour trois valeurs différentes du facteur d'échelle s .

Les mesures quantitatives de la résolution temps-fréquence sont basées sur la durée et la largeur de bande de l'ondelette mère. Le moment d'ordre 1 de l'ondelette $\psi(t)$ donné par [Bur98] :

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt} \quad (2.9a)$$

fournit une mesure du centre de $\psi(t)$. De manière similaire, on peut définir une mesure du centre de $|\Psi(f)|^2$, transformée de Fourier de $\psi(t)$, par le moment d'ordre 1 donné par

$$f_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f |\Psi(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(f)|^2 df} \quad (2.9b)$$

Les mesures de la durée de l'ondelette Δt et de sa largeur de bande Δf sont données par

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 |\psi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt}} \quad (2.10a)$$

$$\Delta f = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_0)^2 |\Psi(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(f)|^2 df}} \quad (2.10b)$$

Pour que les valeurs des intégrales dans les numérateurs des expressions (2.10a) et (2.10b) soient finies, l'ondelette doit être à décroissance rapide dans les domaines temporel et fréquentiel [Bur98]. Pour les fonctions dont la décroissance n'est pas suffisamment rapide, des mesures alternatives telles que la longueur de l'intervalle contenant une grande proportion de son énergie peuvent être utilisées.

Le produit de la durée de l'ondelette par sa largeur de bande est indépendant de la dilatation, ce qui se traduit par l'égalité suivante

$$\Delta t_{\psi}(s)\Delta f_{\psi}(s) = \Delta t_{\psi}\Delta f_{\psi} = c_{\psi} \quad (2.10c)$$

où c_{ψ} est une constante.

La transformée en ondelettes peut être considérée comme une représentation temps-fréquence à résolution variable. La variation de la résolution temps-fréquence en fonction du paramètre d'échelle s est illustrée graphiquement sur la figure 2.2.

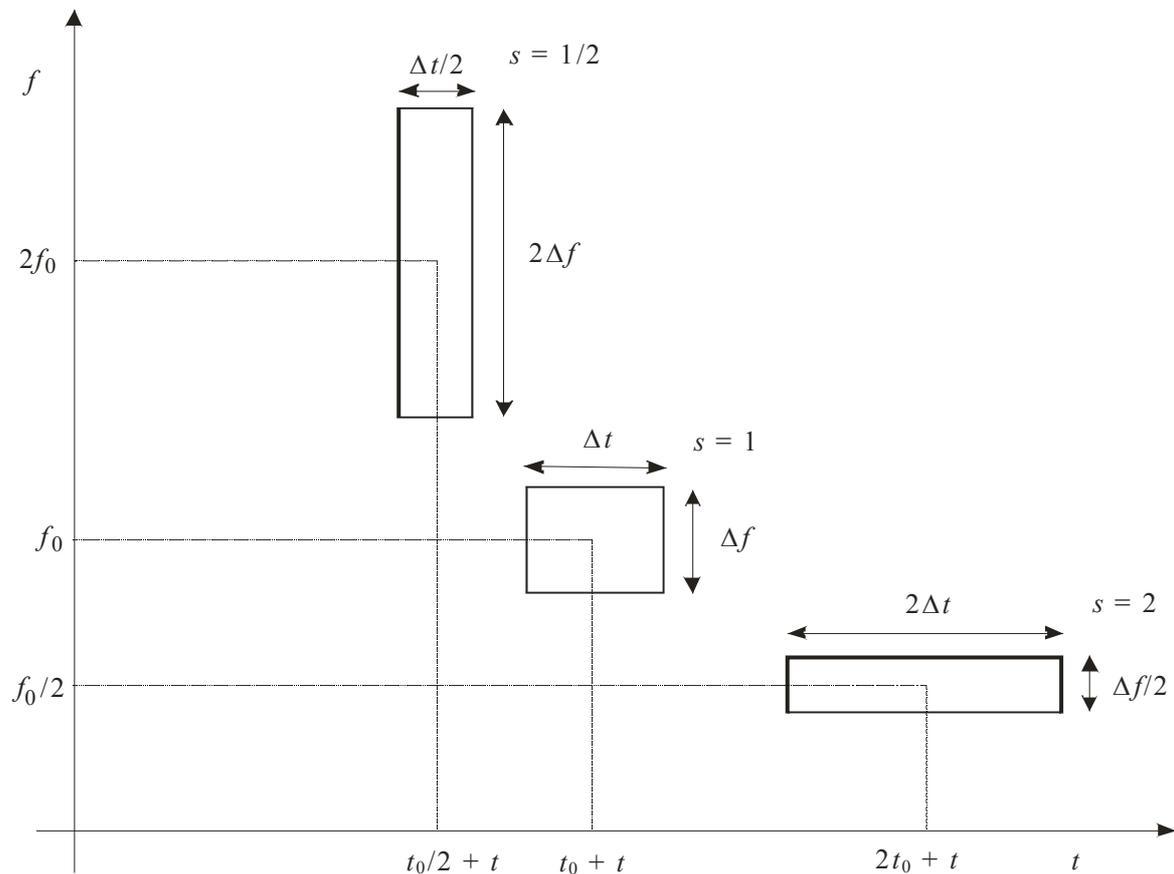


Figure 2.2 : Illustration de la résolution temps-fréquence en fonction du paramètre d'échelle. Une augmentation de la résolution fréquentielle entraîne une diminution de la résolution temporelle et vice versa. L'aire des atomes temps-fréquence est toujours constante.

2.4. Détection des singularités avec les ondelettes

Dans plusieurs applications, les signaux à analyser contiennent des transitions raides. Les irrégularités et les structures non stationnaires peuvent contenir une information d'un intérêt considérable [Cve95, Mal92a,b]. La régularité locale d'un signal peut être caractérisée par la décroissance de l'amplitude de la transformée en ondelettes le long des valeurs de l'échelle. Les singularités dans un signal peuvent être détectées en suivant les maximums locaux de la transformée en ondelettes aux échelles fines.

2.4.1. Régularité au sens de Lipschitz

Pour caractériser les structures singulières contenues dans un signal $x(t)$, on quantifie sa régularité locale. L'exposant de Lipschitz donne une mesure de la régularité uniforme en un point ou sur un intervalle [Mal92a,b Mal98]. Si $x(t)$ présente une singularité en un point t_i , donc non dérivable en ce point, alors ce comportement singulier est caractérisé par l'exposant de Lipschitz.

La formule de Taylor relie la dérivabilité d'un signal à son approximation polynomiale locale. Supposons que $x(t)$ soit m fois dérivable dans l'intervalle $I_\delta = [t_i - \delta, t_i + \delta]$ et soit $P_{t_i}(t)$ le polynôme de Taylor au voisinage de t_i

$$P_{t_i}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{(k)}(t_i)}{k!} (t - t_i)^k \quad (2.11)$$

La formule de Taylor montre que pour tout t appartenant à I_δ , l'erreur d'approximation $\varepsilon_{t_i}(t) = x(t) - P_{t_i}(t)$ satisfait la relation suivante :

$$\left| \varepsilon_{t_i}(t) \right| \leq \frac{|t - t_i|^m}{m!} \sup_{u \in [t_i - h, t_i + h]} \left| x^{(m)}(u) \right| \quad (2.12)$$

où $x^{(m)}(t)$ est la dérivée d'ordre m de $x(t)$. La dérivabilité d'ordre m de $x(t)$ au voisinage de t_i donne une borne supérieure de l'erreur $\varepsilon_{t_i}(t)$ lorsque t tend vers t_i . L'exposant de Lipschitz reformule cette borne supérieure en utilisant des exposants non entiers.

Le signal $x(t)$ est dit Lipschitz $\alpha \geq 0$ en t_i s'il existe un polynôme $P_{t_i}(t)$ de degré $m = \lfloor \alpha \rfloor$ qui satisfait pour tout t la relation suivante [Mal98]

$$\left| x(t) - P_{t_i}(t) \right| \leq K |t - t_i|^\alpha \quad (2.13)$$

où K est une constante indépendante de t_i et $\lfloor \alpha \rfloor$ dénote la partie entière de α .

Le signal $x(t)$ est uniformément Lipschitz α sur $[a, b]$ s'il satisfait (2.13) pour tout t_i appartenant à l'intervalle $[a, b]$. La régularité de Lipschitz de $x(t)$ en t_i ou sur $[a, b]$ est la borne supérieure de α telle que $x(t)$ soit Lipschitz α . On note qu'une fonction bornée mais discontinue en t_i est Lipschitz 0 en t_i . Si la régularité de Lipschitz α est inférieure à 1 en t_i alors $x(t)$ n'est pas dérivable en t_i et α caractérise le type de singularité.

2.4.2. Ondelettes à moments nuls

Pour mesurer la régularité locale d'un signal, il est important d'utiliser des ondelettes à moments nuls. L'ondelette $\psi(t)$ possède q moments nuls si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, q-1 \quad (2.14)$$

On montre que si l'ondelette possède q moments nuls alors la transformée en ondelettes peut être interprétée comme un opérateur de dérivation d'ordre q à différentes échelles [Mal98]. Ceci constitue une première relation entre la dérivabilité de $x(t)$ et la décroissance de l'amplitude de sa transformée aux échelles fines.

La propriété de Lipschitz (2.13) permet d'approximer le signal $x(t)$ au voisinage de t_i par un polynôme $P_{ii}(t)$

$$x(t) = P_{ii}(t) + \varepsilon_{t_i}(t) \quad (2.15a)$$

où

$$|\varepsilon_{t_i}(t)| \leq K|t - t_i|^\alpha \quad (2.15b)$$

Une transformée en ondelettes estime l'exposant α en ignorant le polynôme $P_{ii}(t)$. Pour cela, l'ondelette utilisée doit avoir $q > \alpha$ moments nuls. Une telle ondelette est orthogonale aux polynômes de degré $q - 1$. Puisque $\alpha < q$, le polynôme $P_{ii}(t)$ est au maximum de degré $q - 1$. En posant $t' = (t - u)/s$, on peut vérifier que

$$W_{P_{ii}}(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{ii}(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt = 0 \quad (2.16)$$

or, $x(t) = P_{ii}(t) + \varepsilon_{t_i}(t)$, ce qui conduit à

$$W_x(u, s) = W_{\varepsilon_{t_i}}(u, s) \quad (2.17)$$

Ceci montre que la transformée en ondelettes a pour effet de supprimer la partie polynomiale contenue dans $x(t)$ si le nombre des moments nuls de l'ondelette utilisée est supérieur ou égal au degré du polynôme.

2.4.3. Opérateur de dérivation multi-échelles

Une ondelette à q moments nuls peut être exprimée comme la dérivée d'ordre q d'une fonction $\theta(t)$. La transformée en ondelettes agit comme un opérateur de dérivation multi-échelles. Supposons que $\psi(t)$ soit à décroissance rapide, ce qui veut dire que pour un exposant de décroissance m , il existe une constante C_m telle que, pour tout t , on a

$$|\psi(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m} \quad (2.18)$$

Une ondelette $\psi(t)$ à décroissance rapide possède q moments nuls si on peut trouver une fonction $\theta(t)$ à décroissance rapide telle que [Mal92a]

$$\psi(t) = (-1)^q \frac{d^q \theta(t)}{dt^q} \quad (2.19)$$

Il en découle que

$$W_x(u, s) = s^q \frac{d}{du^q} (x(u) \otimes \bar{\theta}_s(u)) \quad (2.20a)$$

où

$$\bar{\theta}_s = s^{-1/2} \theta(-t/s) \quad (2.20b)$$

En outre, $\psi(t)$ ne possède pas plus de q moments nuls si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0 \quad (2.21)$$

2.4.4. Mesure de la régularité avec les ondelettes

La décroissance de l'amplitude de la transformée en ondelettes le long des valeurs de l'échelle est liée à la régularité du signal analysé. La mesure de cette décroissance asymptotique est équivalente au zoom de la structure du signal avec des échelles allant jusqu'à zéro. Supposons que l'ondelette $\psi(t)$ possède q moments nuls et qu'elle soit q fois continuellement dérivable (C^q) avec des dérivées à décroissance rapide. Pour tout $0 \leq k \leq q$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_m telle que, pour tout t , on a

$$|\psi^{(k)}(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m} \quad (2.22)$$

Si $x(t)$ est uniformément Lipschitz $\alpha \leq q$ sur un intervalle $[a, b]$ alors sa transformée en ondelettes satisfait la relation suivante pour tout $(u, s) \in [a, b] \times \mathbb{R}^+$ [Mal92b]:

$$|W_x(u, s)| \leq A s^{\alpha+1/2} \quad (2.23)$$

où A est une constante positive.

Cette relation relie la régularité uniforme de Lipschitz de $x(t)$ sur un intervalle à l'amplitude de sa transformée en ondelettes aux échelles fines. Inversement, si $x(t)$ est borné et $W_x(s, u)$ satisfait (2.23) pour un certain $\alpha < q$ non entier alors $x(t)$ est uniformément Lipschitz α sur $[a + \delta, b - \delta]$, pour $\delta > 0$.

Lorsque l'échelle s décroît, $W_x(u, s)$ mesure les variations fines au voisinage de u . La relation (2.23) montre que $|W_x(u, s)|$ décroît proportionnellement à $s^{\alpha+1/2}$ sur les intervalles où $x(t)$ est uniformément Lipschitz α .

Si $\psi(t)$ possède exactement q moments nuls alors la décroissance de la transformée en ondelettes ne donne aucune information sur la régularité de Lipschitz de $x(t)$ pour $\alpha > q$. Si le signal $x(t)$ est uniformément Lipschitz $\alpha > q$ alors il est q fois continuellement dérivable (C^q) et $|W_x(u, s)| \sim s^{\alpha+1/2}$ aux échelles fines montre la grande régularité de $x(t)$.

2.4.5. Détection des singularités

Les singularités d'un signal $x(t)$ peuvent être détectées en cherchant les lieux de convergence des maxima du module de la transformée en ondelettes aux échelles fines [Hwa92, Mal92a,b]. Pour mieux comprendre les propriétés de ces maximums, la transformée en ondelettes est exprimée comme un opérateur de dérivation multi-échelles. Comme mentionné précédemment, si $\psi(t)$ possède exactement q moments nuls et un support compact alors il existe une fonction $\theta(t)$ de support compact telle que

$$\psi(t) = (-1)^q \frac{d^q \theta(t)}{dt^q} \quad (2.24)$$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$.

La transformée en ondelettes peut être réécrite sous forme d'un opérateur de dérivation multi-échelles

$$W_x(u, s) = s^q \frac{d^q}{du^q} (x(u) \otimes \bar{\theta}_s(u)) \quad (2.25)$$

Si l'ondelette possède un seul moment nul, les maximums du module de la transformée en ondelettes sont les maximums de la première dérivée du signal $x(t)$ lissé par $\bar{\theta}_s(t)$. Ces maximums sont utilisés pour localiser les discontinuités et les contours d'images. Si l'ondelette possède deux moments nuls alors les maximums correspondent aux grandes courbures. Si $W_x(u, s)$ n'a aucun maximum aux échelles fines alors $x(t)$ est localement régulier.

Le signal $x(t)$ peut être singulier (non Lipschitz 1) en un point τ s'il existe une séquence de maximums du module de la transformée en ondelettes $W_x(u_p, s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge vers t_i aux échelles fines [Mal98]

$$\lim_{p \rightarrow \infty} u_p = t_i \text{ et } \lim_{p \rightarrow \infty} s_p = 0 \quad (2.26)$$

Ce résultat garantit que les singularités sont détectées en suivant les maximums du module de la transformée en ondelette aux échelles fines. La figure 2.3 montre, comme exemple, un signal rectangulaire où les singularités sont détectées en suivant les lignes des maximums du module de la transformée en ondelettes aux échelles fines.

Les maximums de l'amplitude de la transformée en ondelettes contiennent une information sur les transitions et les singularités du signal. Si on peut reconstruire le signal à partir de ces maximums, il serait possible de modifier les singularités du signal en procédant à un traitement de ces maximums. L'amplitude des singularités peut être modifiée en changeant l'amplitude des maximums et donc il est possible de supprimer certaines singularités en supprimant les maximums correspondants.

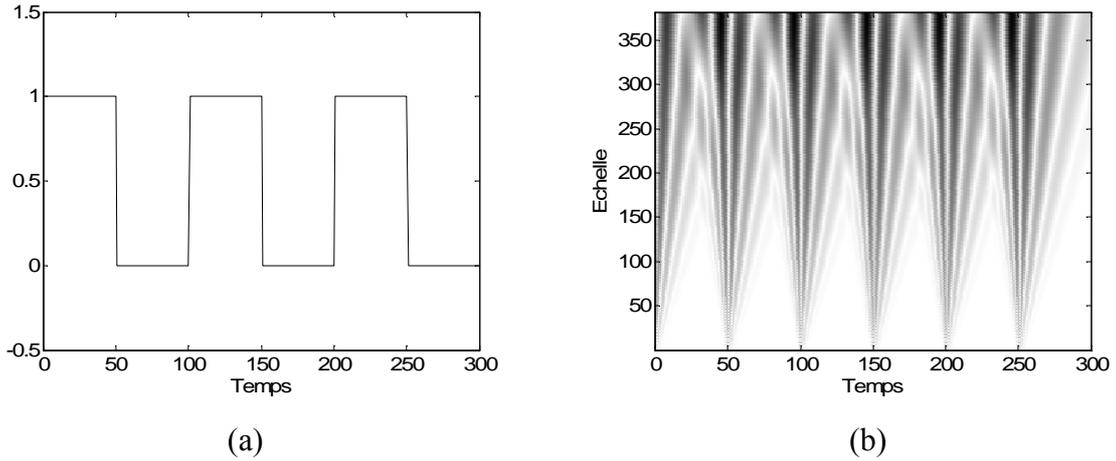


Figure 2.3 : Détection des singularités dans un signal rectangulaire en suivant les maximums de la transformée en ondelettes aux échelles fines. (a) Signal temporel. (b) Transformée en ondelettes.

2.5. Transformée en ondelettes discrète

La transformée en ondelettes continue d'un signal est redondante. En discrétisant les paramètres s et u , la transformation demeure inversible. Cependant, le pas d'échantillonnage qui permet de préserver toute l'information contenue dans le signal analysé ne peut dépasser le pas d'échantillonnage critique défini par [Dau92]

$$s = 2^j, u = k 2^j, \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.27)$$

L'échantillonnage critique fournit la base minimale nécessaire à la reconstruction du signal. Le choix d'un pas d'échantillonnage plus grand que le pas d'échantillonnage critique conduit à une perte d'information et donc le signal d'origine ne peut être parfaitement reconstruit. La base obtenue suite à un échantillonnage critique est donnée par $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k), j, k \in \mathbb{Z}\}$.

La décomposition d'un signal $x(t)$ à énergie finie dans la base d'ondelettes s'écrit comme

$$x(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2.28)$$

Pour un échantillonnage plus général exprimé par

$$s = s_0^j, u = k u_0 s_0^j, \quad j, k \in \mathbb{Z}, s_0 > 1, u_0 > 0 \quad (2.29)$$

il est toujours possible de reconstruire le signal original si la base $\{\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j}t - k u_0), j, k \in \mathbb{Z}\}$ constitue une frame [Gos99, Dau92]. La frame satisfait l'inégalité suivante :

$$0 < R_1 \leq \sum_k |\Psi(f+k)|^2 \leq R_2 < \infty \quad (2.30)$$

où $0 < R_1 \leq R_2 < \infty$ sont appelées les bornes de la frame. Pour l'échantillonnage défini par (2.29), l'ondelette s'exprime comme

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi\left(\frac{t - ku_0 s_0^j}{s_0^j}\right) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} t - ku_0) \quad (2.31)$$

La décomposition en ondelettes permet une localisation temps-fréquence du signal en le représentant par quelques coefficients. Elle présente un grand intérêt dans l'analyse d'une large classe de signaux. Les coefficients intervenant dans la décomposition décroissent rapidement lorsque j et k augmentent. Cette propriété est particulièrement utile dans les problèmes de compression des signaux et des images, le débruitage et la détection. La décomposition en ondelettes fournit une description plus précise et une séparation des caractéristiques du signal. En effet, un coefficient d'ondelette représente une composante qui est elle-même locale et facile à interpréter.

La théorie des ondelettes est étroitement liée au concept de l'analyse multirésolution. En effet, il est possible de construire des bases d'ondelettes orthonormées et développer des algorithmes rapides en utilisant la théorie de l'analyse multirésolution.

2.6. Analyse multirésolution

Une meilleure interprétation peut être donnée à l'analyse en ondelettes en utilisant l'analyse multirésolution [Bur98] dont la formulation nécessite deux fonctions de base étroitement liées : la fonction échelle notée $\varphi(t)$ et la fonction ondelette notée $\psi(t)$. L'analyse multirésolution consiste à décomposer une fonction compliquée en plusieurs fonctions plus simples qu'on analyse séparément. C'est le cas, par exemple, d'une fonction constituée d'un segment à variation rapide et d'un segment à variation lente. En utilisant une combinaison des fonctions échelle et ondelette, une large classe de signaux peut être décomposée sous forme

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j_0,k} \varphi(2^{-j_0} t - k) + \sum_{j=-\infty}^{j_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_{j,k} \psi(2^{-j} t - k) \quad (2.32)$$

où l'indice j_0 désigne un niveau d'approximation quelconque.

L'objectif d'une telle décomposition est de disposer de coefficients qui donnent une meilleure description du signal que celle offerte par la forme originale. En particulier, la description des discontinuités dans les signaux nécessite un grand nombre de composantes spectrales, alors que quelques types d'ondelettes sont appropriées pour représenter les signaux incluant les discontinuités.

Pour définir une analyse multirésolution, il faut avoir une fonction à énergie finie $\varphi(t)$ appelée fonction échelle qui génère une séquence emboîtée $\{A_j\}$ de sous espaces de L^2 telle que [Mal89, Mal98, Tru98]

$$\{0\} \leftarrow \dots \subset A_1 \subset A_0 \subset A_{-1} \subset \dots \rightarrow L^2(\mathbf{R}) \quad (2.33)$$

et satisfaisant les conditions suivantes

- (i) $\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} A_j = L^2(\mathbf{R})$
- (ii) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} A_j = \{0\}$
- (iii) $x(t) \in A_j \Leftrightarrow x(2^{-1}t) \in A_{j+1}$
- (iv) $x(t) \in A_0 \Leftrightarrow x(t-k) \in A_0$

Si ces conditions sont satisfaites, on montre qu'il existe une fonction appelée fonction échelle, notée $\varphi(t)$, qui par dilatation et translation engendre une base orthonormée de A_j . En combinant les conditions (iii) et (iv), on obtient une base orthonormée de la forme

$$\{\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k), j, k \in \mathbf{Z}\} \quad (2.34)$$

Chaque séquence A_j peut être interprétée comme un espace d'approximation : l'approximation de $x(t) \in L^2(\mathbf{R})$ à la résolution j est obtenue par sa projection sur A_j . La résolution est d'autant plus fine que j est petit. Les détails additionnels nécessaires pour passer de la résolution j à $j - 1$ sont obtenus par projection de s sur l'espace W_j complémentaire de A_j dans A_{j-1} :

$$A_j \oplus W_j = A_{j-1}, \quad j \in \mathbf{Z} \quad (2.35)$$

où le symbole \oplus dénote la somme directe. La figure 2.4 illustre le principe de l'analyse multirésolution.

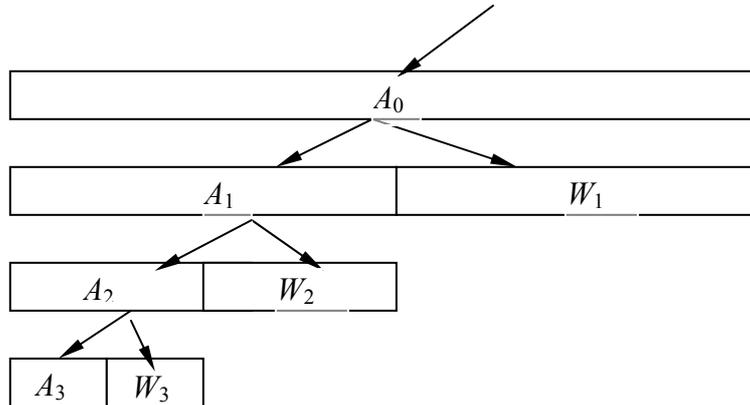


Figure 2.4 : Principe de l'analyse multirésolution.

En fixant un certain niveau de résolution j_0 , on peut écrire les deux relations suivantes :

$$A_{j_0} = \bigoplus_{l=j_0+1}^{\infty} W_l \quad (2.36a)$$

$$L^2(\mathbb{R}) = A_{j_0} \oplus \left(\bigoplus_{j \leq j_0} W_j \right) \quad (2.36b)$$

L'ensemble des sous espaces W_j est généré par une fonction $\psi(t)$ appelée ondelette mère calculée explicitement à partir de $\varphi(t)$ telle que $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k), j, k \in \mathbb{Z}\}$ constitue une base de $L^2(\mathbb{R})$.

2.7. Propriétés des ondelettes

2.7.1. Orthogonalité

Lorsqu'on parle de bases d'ondelettes orthogonales cela sous-entend que les ondelettes sont orthogonales par rapport à l'échelle et par rapport à la translation pour une échelle donnée. Par contre, l'orthogonalité de la fonction échelle implique que les fonctions échelle sont orthogonales uniquement par rapport à la translation pour une échelle donnée et non par rapport aux différentes échelles puisque les sous espaces d'approximation sont emboîtés. La condition permettant d'assurer l'orthogonalité de la fonction échelle et qui est très utilisée pour construire le filtre associé est exprimée dans le domaine fréquentiel par [Gos99]

$$\sum_n |\Phi(f+n)|^2 = 1 \quad (2.37)$$

où $\Phi(f)$ est la transformée de Fourier de la fonction échelle et f dénote la fréquence normalisée.

Le sous espace W_j est complémentaire de A_j dans A_{j-1} . Si en plus, on impose l'orthogonalité entre W_j et A_j ($W_j \perp A_j$), la décomposition est dite orthogonale. En particulier, la relation d'orthogonalité entre A_0 et W_0 se traduit par l'équation suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \psi(t-l) dt = 0, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (2.38)$$

La condition d'orthogonalité n'est pas une condition nécessaire pour la reconstruction du signal. Cependant, elle permet de développer des méthodes de calcul simples. Supposons que W_j n'est pas orthogonale à A_j et que l'ondelette $\psi_{j,k}(t) \in W_j$ possède une ondelette duale $\tilde{\psi}_{j,k}(t) \in \tilde{W}_j$. La dualité implique que la relation suivante est satisfaite

$$\langle \psi_{j,k}(t), \tilde{\psi}_{l,m}(t) \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z} \quad (2.39)$$

où $\delta_{j,k}$ désigne le symbole de Cronecker. Pour reconstruire le signal $x(t)$, le sous espace \tilde{W}_j doit être orthogonal à A_j . La base d'ondelettes $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}$ est dite biorthogonale.

2.7.2. Relations à deux échelles

Les relations à deux échelles établissent un lien entre les fonctions échelle et ondelette à un niveau d'échelle donné à la fonction échelle au niveau d'échelle immédiatement inférieur. Ces relations peuvent être déduites des propriétés suivantes

$$\varphi(t) \in A_0 \subset A_{-1} \quad (2.40a)$$

$$\psi(t) \in W_0 \subset A_{-1} \quad (2.40b)$$

Il s'en suit que la fonction échelle $\varphi(t)$ et l'ondelette mère $\psi(t)$ peuvent être exprimées par une combinaison linéaire de fonctions de A_{-1} :

$$\varphi(t) = \sum_k g_0(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k) \quad (2.41a)$$

$$\psi(t) = \sum_k g_1(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k) \quad (2.41b)$$

où $g_0(k)$ et $g_1(k)$ sont deux séquences de ℓ^2 avec ℓ^2 dénotant l'ensemble des séquences discrètes à énergie finie.

Les équations (2.41a) et (2.41b) définissent les relations à deux échelles. En général, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les relations liant A_j et A_{j-1} sont exprimées par :

$$\varphi(2^{-j}t) = \sum_k g_0(k) \sqrt{2} \varphi(2^{-j+1}t - k) \quad (2.42a)$$

$$\psi(2^{-j}t) = \sum_k g_1(k) \sqrt{2} \varphi(2^{-j+1}t - k) \quad (2.42b)$$

En prenant la transformée de Fourier des relations (2.42a) et (2.42b), il vient

$$\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_0\left(\frac{f}{2}\right) \Phi\left(\frac{f}{2}\right) \quad (2.43a)$$

$$\Psi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_1\left(\frac{f}{2}\right) \Phi\left(\frac{f}{2}\right) \quad (2.43b)$$

$\Phi(f)$, $\Psi(f)$, $G_0(f)$ et $G_1(f)$ sont les transformées de Fourier de $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $g_0(k)$ et $g_1(k)$, respectivement.

Du fait que les ondelettes génèrent les espaces orthogonaux complémentaires et que les versions translattées de l'ondelette sont orthogonales, on montre que les séquences $g_0(k)$ et $g_1(k)$ sont reliées par [Tru98]

$$g_1(k) = (-1)^k g_0(1 - k) \quad (2.44)$$

La relation (2.44) définit ce qu'on appelle des filtres miroirs en quadrature dans la littérature des bancs de filtres.

2.8. Représentation d'un signal dans les espaces d'approximation et d'ondelette

Les sous espaces d'approximation A_n sont emboîtés. Si on considère un signal arbitraire à énergie finie, on ne peut affirmer qu'il est dans l'un des sous espaces, c'est à dire qu'on ne peut garantir l'existence d'une séquence $a_{j,k}$ telle que

$$x(t) = \sum_k a_{j,k} \varphi(2^{-j}t - k) \quad (2.45)$$

Cependant, pour une certaine valeur de j , $x(t)$ peut être approximé par $x_j(t) \in A_j$, soit donc

$$x(t) \approx \sum_k a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) = \sum_k a_{j,k} \varphi(2^{-j}t - k) \quad (2.46)$$

Les coefficients $a_{j,k}$ de la fonction échelle sont calculés à partir des échantillons du signal. Puisque A_j est un sous espace de L^2 et $x(t) \in L^2$, $x_j(t)$ peut être considéré comme une projection orthogonale de $x(t)$ dans le sous espace A_j . Donc, l'erreur $x(t) - x_j(t)$ qui résulte de la projection est orthogonale à A_j et, par conséquent, à la fonction échelle, ce qui permet d'écrire

$$\langle x, \varphi_{j,l} \rangle - \langle x_j, \varphi_{j,l} \rangle = 0 \quad \text{pour tout } l \in Z \quad (2.47)$$

Si la fonction échelle et ses versions translatées forment une base orthonormée, le développement de (2.47) permet d'aboutir à l'équation suivante :

$$a_{j,m} = \langle x, \varphi_{j,m} \rangle \quad (2.48)$$

Si le signal $x(t)$ est échantillonné à des instants $t = k2^j$, la discrétisation de (2.48) donne

$$\begin{aligned} a_{j,m} &= 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi^*(2^{-j}t - m) dt \\ &\approx 2^{-j/2} \sum_k x(k2^j) \varphi^*(k - m) \end{aligned} \quad (2.49)$$

La diminution de la valeur de j entraîne un espace d'approximation plus large puisque $\varphi_{j,k}(t)$ est plus étroite et est translatée avec des pas plus petits d'où la possibilité de représenter des détails plus fins. En augmentant la valeur de j , la fonction échelle devient plus large et elle est translatée avec des pas plus grands. Par conséquent, les fonctions échelle larges peuvent représenter uniquement une information grossière et, donc, l'espace qu'elles engendrent est plus petit. Les caractéristiques du signal ne sont pas décrites en utilisant $\varphi_{j,k}(t)$ et en diminuant j pour augmenter la dimension du sous espace qu'elle engendre mais en définissant un ensemble d'ondelettes $\psi_{j,k}(t)$ qui génèrent la différence entre les espaces engendrés par les fonctions échelle. La partie du signal correspondant à cette différence s'écrit comme

$$d = \sum_{j=-\infty}^{j_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2.50)$$

où les coefficients d'ondelettes sont calculés en utilisant une formule similaire à (2.48) avec la fonction échelle remplacée par la fonction ondelette

$$w_{j,m} = \langle x, \psi_{j,m} \rangle \quad (2.51)$$

Si la base d'ondelettes est biorthogonale, les coefficients d'échelle et d'ondelette sont calculés en remplaçant $\varphi_{j,k}(t)$ et $\psi_{j,k}(t)$ dans (2.48) et (2.51), respectivement, par leurs duales.

2.9. Algorithme de décomposition

L'algorithme de décomposition permet de trouver à partir d'une approximation à une échelle donnée, l'approximation et les détails à l'échelle immédiatement inférieure par itérations successives. L'algorithme de Mallat [Mal89] permet d'obtenir la décomposition pour les analyses multirésolutions orthogonales et biorthogonales. Désignons par $s = 2^j$ le paramètre échelle et par $u = k 2^j$ le paramètre de translation, où j et k représentent deux entiers. La transformée en ondelettes discrète de $x(t)$ au point $(k 2^j, 2^j)$ représente la corrélation entre $x(t)$ et $\psi^*(t)$ en ce point. Cette transformation génère un ensemble de points dans le plan temps-échelle donnés par

$$w_{j,k} = W_x(k 2^j, 2^j) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - k 2^j}{2^j} \right) dt \quad (2.52)$$

L'algorithme de décomposition sépare le signal en composantes à différentes échelles où chaque composante peut être traitée séparément. L'algorithme retient l'information pertinente de sorte qu'on peut reconstituer le signal. L'algorithme de décomposition peut être développé en exprimant les fonctions échelle et ondelette à un niveau j comme une combinaison linéaire des fonctions d'échelle au niveau $j - 1$.

Puisque $A_0 \subset A_{-1}$, on peut écrire

$$\varphi(t) = \sum_k g_0(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k)$$

donc

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \sum_p g_0(p) \sqrt{2} \varphi(2(2^{-j}t - k) - p)$$

En regroupant les indices et les exposants, on obtient

$$\varphi_{j,k}(t) = \sum_p g_0(p) \varphi_{j-1, p+2k}(t)$$

Donc, on peut calculer les coefficients $a_{j,k} = \langle x, \varphi_{j,k} \rangle$ de l'approximation au niveau j comme

$$a_{j,k} = \sum_p g_0(p) \langle x, \varphi_{j-1, p+2k} \rangle$$

Si on pose $l = p + 2k$, il vient

$$a_{j,k} = \sum_l g_0(l-2k) \langle x, \varphi_{j-1,l} \rangle$$

Si on désigne par $\bar{g}_0(k) = g_0(-k)$, on obtient

$$a_{j,k} = \sum_l \bar{g}_0(2k-l) \langle x, \varphi_{j-1,l} \rangle$$

soit donc

$$a_{j,k} = \sum_l \bar{g}_0(2k-l) a_{j-1,l} \quad (2.53)$$

Considérons maintenant une ondelette de W_0 . Sa décomposition sur la base de A_{-1} donne

$$\psi(t) = \sum_k g_1(k) \varphi_{-1,k} = \sum_k g_1(k) \sqrt{2} \varphi(2t-k)$$

ce qui permet d'aboutir à l'expression de $g_1(k)$ suivante

$$g_1(k) = \langle \psi, \varphi_{-1,k} \rangle$$

Un calcul analogue au précédent permet d'aboutir à l'expression des coefficients d'ondelettes suivante

$$\begin{aligned} w_{j,k} &= \langle x, \psi_{j,k} \rangle \\ &= \sum_p g_1(p) \langle x, \varphi_{j-1,p+2k} \rangle \end{aligned}$$

En posant $\bar{g}_1(k) = g_1(-k)$, on obtient l'équation de décomposition en ondelettes à l'échelle j

$$\begin{aligned} w_{j,k} &= \sum_l \bar{g}_1(2k-l) \langle x, \varphi_{j-1,l} \rangle \\ &= \sum_l \bar{g}_1(2k-l) a_{j-1,l} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Les membres de droite des équations (2.53) et (2.54) correspondent à une décimation par deux après convolution. Les coefficients échelle et ondelette à un niveau de résolution j peuvent être obtenus par convolution des coefficients échelle au niveau de résolution $j-1$ avec les coefficients des filtres associés \bar{g}_0 et \bar{g}_1 suivie d'une décimation par deux. Le filtre \bar{g}_0 est passe bas alors que le filtre \bar{g}_1 est passe haut. Par itération, on obtient les composantes du signal associées aux différents niveaux de résolution. On retrouve ces structures dans la littérature de bancs de filtres où des algorithmes efficaces ont été développés. La figure 2.5 illustre le processus de décomposition en utilisant la notation vectorielle suivante

$$\mathbf{a}_j = \{a_{j,k}\}, \mathbf{w}_j = \{w_{j,k}\}, \bar{\mathbf{g}}_0 = \{\bar{g}_0(k)\}, \bar{\mathbf{g}}_1 = \{\bar{g}_1(k)\}$$

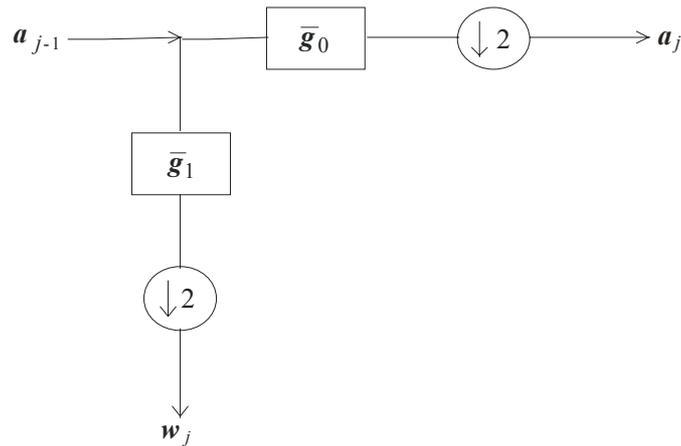


Figure 2.5 : Processus de décomposition en ondelette à un niveau.

Ce bloc de décomposition est appliqué de manière itérative aux coefficients de la fonction échelle à une échelle supérieure pour obtenir l'arbre dyadique de décomposition en ondelettes représenté sur la figure 2.6.

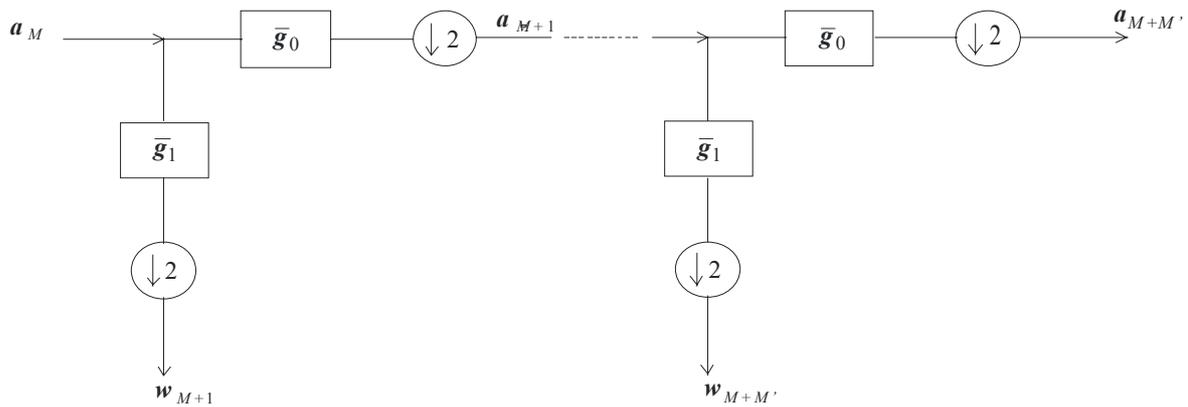


Figure 2.6: Arbre dyadique de décomposition en ondelettes.

2.10. Algorithme de reconstruction

La transformée en ondelette discrète possède une transformée inverse unique permettant la reconstruction parfaite du signal. L'algorithme de reconstruction retrouve le signal à partir des composantes à différentes échelles en exploitant les relations à deux échelles entre la fonction échelle et l'ondelette [Mal89]. Considérons la somme des composantes au niveau de résolution j :

$$x_j(t) + d_j(t) = \sum_k a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) + \sum_k w_{j,k} \psi_{j,k}(t) = x_{j-1}(t) \quad (2.55)$$

En substituant les relations à deux échelles (2.42a) et (2.42b) dans (2.55), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_k a_{j,k} \sum_l g_0(l) \varphi(2^{-j+1}t - 2k - l) + \sum_k w_{j,k} \sum_l g_1(l) \varphi(2^{-j+1}t - 2k - l) \\ = \sum_l a_{j-1,l} \varphi(2^{-j+1}t - l) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Par comparaison des coefficients de $\varphi(2^{-j+1}t - l)$ dans les deux membres de l'égalité (2.56), il vient

$$a_{j-1,l} = \sum_k [g_0(l - 2k) a_{j,k} + g_1(l - 2k) w_{j,k}] \quad (2.57)$$

Le membre de droite de (2.57) correspond à une interpolation suivie d'une convolution. La séquence des coefficients d'échelle au niveau de résolution j est sur-échantillonnée, ce qui veut dire que sa longueur est doublée par insertion d'un zéro entre deux échantillons successifs, puis convoluée avec la séquence des coefficients du filtre associé. La même procédure est appliquée à la séquence des coefficients d'ondelette à la résolution j , et les résultats sont additionnés pour donner les coefficients d'échelle au niveau de résolution $j - 1$. L'algorithme de reconstruction est illustré sur la figure 2.7.

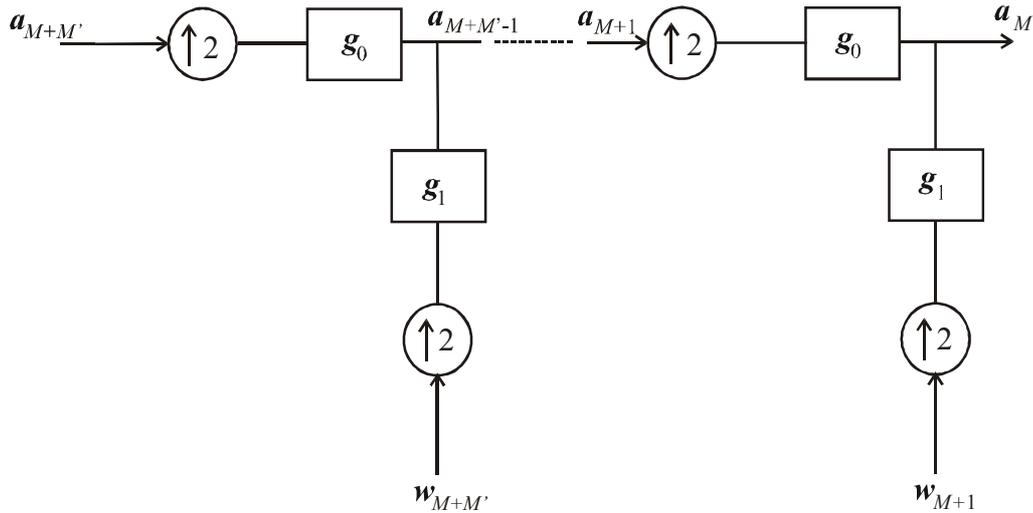


Figure 2.7 : Processus de reconstruction à partir de la fonction échelle et des coefficients d'ondelettes.

2.11. Exemples de bases d'ondelettes

2.11.1. Ondelette de Haar

L'ondelette de Haar est la plus simple des bases d'ondelettes. La fonction échelle utilisée dans la construction de l'ondelette est donnée par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.58)$$

Cette fonction peut être décomposée comme suit

$$\varphi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1) \quad (2.59)$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de (2.59), il vient

$$\Phi(f) = \Phi\left(\frac{f}{2}\right) \frac{1 + e^{-j\pi f}}{2} \quad (2.60)$$

En comparant (2.60) et (2.43a), on en déduit la réponse fréquentielle du filtre g_0 associée à la fonction échelle

$$G_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + e^{-j2\pi f})$$

La fonction de transfert du filtre s'écrit comme

$$G_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + z^{-1}) \quad (2.61a)$$

L'utilisation des propriétés des filtres miroirs en quadrature permet déterminer le filtre g_1 :

$$G_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - z^{-1}) \quad (2.61b)$$

En utilisant (2.43b), on obtient la transformée de Fourier de l'ondelette

$$\Psi(f) = \frac{1}{2} (1 - e^{-j\pi f}) \Phi(f/2)$$

soit donc

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1)$$

ce qui donne finalement

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.62)$$

Les filtres associés à l'ondelette de Haar sont simples. L'inconvénient majeur qui limite l'intérêt de cette ondelette est sa mauvaise résolution fréquentielle et les discontinuités qui sont inadéquates pour l'approximation des fonctions lisses. La figure 2.8 montre la représentation graphique des fonctions échelle et ondelette associées à la base de Haar.

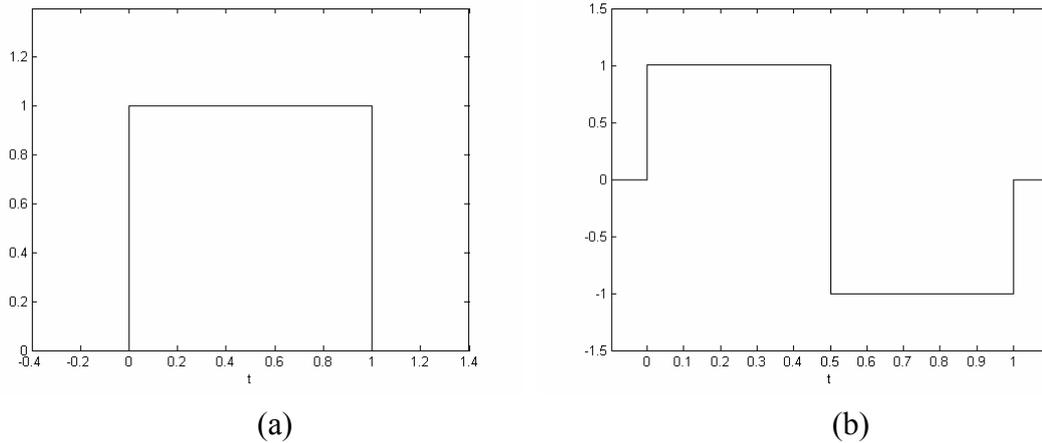


Figure 2.8 : Fonctions échelle et ondelette de la base de Haar.
(a) fonction échelle. (b) ondelette.

2.11.2. Ondelette de Shannon

La fonction échelle associée à l'ondelette de Shannon aussi appelée ondelette de Littelwood-Paley est définie dans le domaine fréquentiel par

$$|\Phi(f)| = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq f < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.63)$$

Son expression dans le domaine temporel peut être déduite par transformation de Fourier inverse et en choisissant une phase nulle, ce qui donne

$$\varphi(t) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{j2\pi ft} df = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (2.64)$$

La réponse fréquentielle du filtre numérique associée est déterminée à partir de la relation

$$G_0(f) = \sqrt{2} \frac{\Phi(2f)}{\Phi(f)}$$

or, $G_0(f)$ est périodique de période 1, ce qui donne

$$G_0(f) = \begin{cases} \sqrt{2} & -1/2 \leq f < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit donc

$$g_0(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}$$

$G_1(f)$ peut être déduite facilement par

$$G_1(f) = -e^{-j2\pi f} G_0^*\left(f + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -\sqrt{2} e^{-j2\pi f} & -1/2 \leq f < -1/4 \\ 0 & -1/4 \leq f < 1/4 \\ -\sqrt{2} e^{-j2\pi f} & 1/4 \leq f < 1/2 \end{cases}$$

soit donc

$$g_1(n) = \frac{(-1)^n \sin \frac{1-n}{2} \pi}{\sqrt{2} \frac{1-n}{2} \pi}$$

La fonction ondelette peut être déterminée par

$$\Psi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_1\left(\frac{f}{2}\right) \Phi\left(\frac{f}{2}\right) = \begin{cases} -e^{-j2\pi f} & 1/2 \leq |f| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient

$$\psi(t) = \frac{\cos \pi t - \sin 2 \pi t}{\pi \left(t - \frac{1}{2}\right)} \quad (2.65)$$

La figure 2.9 représente graphiquement des fonctions échelle et ondelette de la base de Shannon. Notons que l'inconvénient de l'analyse par l'ondelette de Shannon est la mauvaise localisation temporelle.

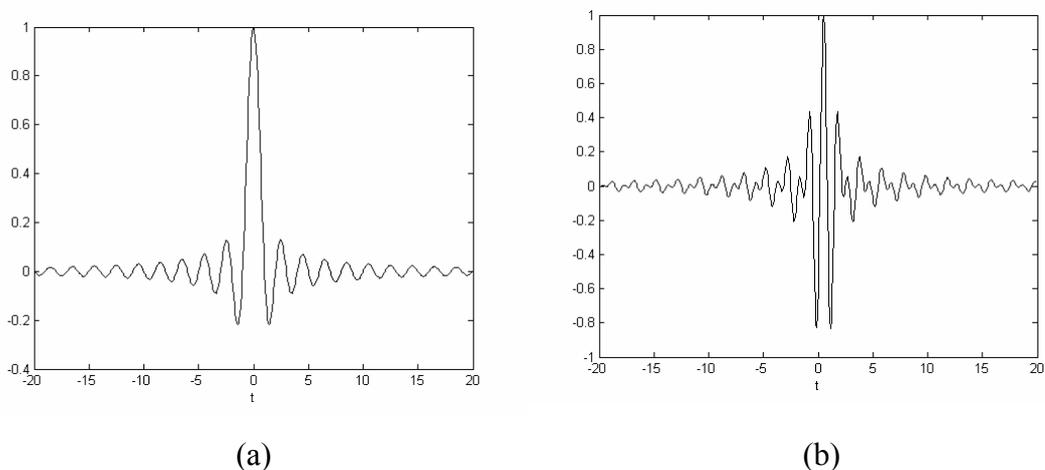


Figure 2.9 : Fonctions échelle et ondelette de Shannon. (a) fonction échelle. (b) ondelette.

2.11.3. Ondelettes à support compact (Daubechies)

Cette famille d'ondelettes orthonormale est caractérisée par la compacité des supports. Cependant, elle n'est pas à phase linéaire. La compacité des fonctions de base et des filtres associés permet une réduction du coût de calcul, ce qui facilite d'envisager des applications en temps réel. L'ondelette de Daubechies possède q (≥ 2) moments nuls, soit donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \psi(t) dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots, q-1$$

ce qui permet d'écrire $G_0(f)$ sous la forme

$$G_0(f) = \left(\frac{1 + e^{j2\pi f}}{2} \right)^q P(f) \quad (2.66)$$

où $P(f)$ est un polynôme trigonométrique. Le développement de la condition d'orthogonalité de $\psi(t)$ permet d'aboutir à une équation dont la solution fournit les coefficients du filtre associé à l'ondelette. La figure 2.10 représente graphiquement les fonctions échelle et ondelettes de Daubechies d'ordre 7.

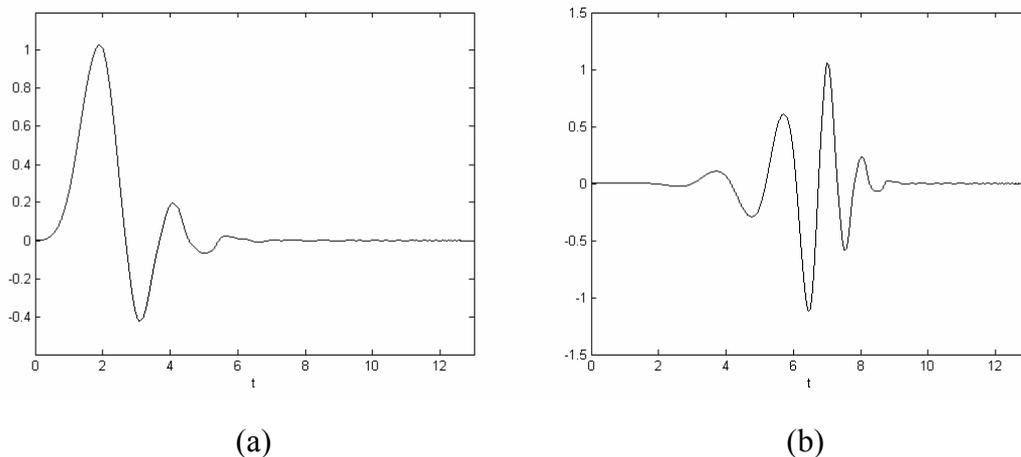


Figure 2.10 : Fonctions échelle et ondelette de la base de Daubechies. (a) fonction échelle. (b) ondelette.

2.12. Seuillage des coefficients d'ondelettes

Le seuillage est une technique utilisée en traitement du signal avec les ondelettes. Il consiste à annuler les coefficients d'ondelettes inférieurs à un certain seuil. Le seuillage est souvent utilisé dans le débruitage, la compression des signaux et des images [Don94, Don98]. On distingue trois sortes de seuillage : seuillage dur, seuillage tendre et seuillage par pourcentage.

2.12.1. seuillage dur

Si le signal ou la valeur du coefficient est inférieur à une certaine valeur prédéfinie, il est posé égal à zéro. Le seuillage dur est exprimé comme suit

$$y = \begin{cases} x & \text{pour } |x| \geq \sigma \\ 0 & \text{pour } |x| < \sigma \end{cases} \quad (2.67)$$

où σ est la valeur du seuil. Le seuillage dur est illustré graphiquement sur la figure 2.11a. Le graphe est non linéaire et discontinu en $x = \sigma$.

2.12.2. Seuillage tendre

Le seuillage tendre est défini par

$$y = \begin{cases} \text{sgn}(x)q(|x| - \sigma) & \text{pour } |x| \geq \sigma \\ 0 & \text{pour } |x| < \sigma \end{cases} \quad (2.68)$$

Généralement, $q(x)$ est une fonction linéaire. Cependant, des fonctions non linéaires de degré trois ou quatre peuvent être utilisées. La figure 2.11b illustre le seuillage tendre pour une fonction $q(x)$ linéaire.

2.12.3. Seuillage par pourcentage

Dans ce type de seuillage, un pourcentage des coefficients d'ondelettes qui ne dépassent pas le seuil est posé égal à zéro. Le seuillage par pourcentage est utilisé particulièrement dans les applications de compression. Le choix de la valeur du seuil σ est basé sur l'histogramme de l'ensemble des coefficients et le nombre total de coefficients. Une fois le seuil est déterminé, le principe est le même que celui du seuillage dur.

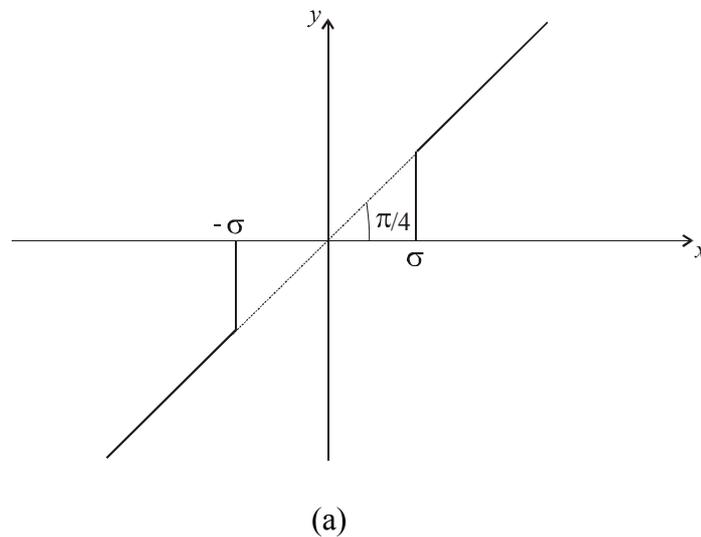
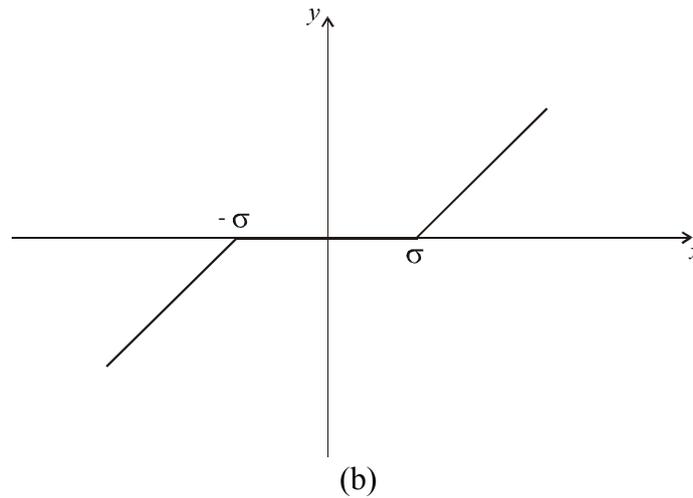


Figure 2.11 : Principe du seuillage. (a) Seuillage dur. (b) Seuillage tendre.

**Figure 2.11 (suite)**

2.13. Conclusion

Contrairement aux méthodes d'analyse temps-fréquences développées dans le chapitre 1 pour lesquelles la résolution temps-fréquence est fixe, l'analyse en ondelettes permet une analyse à résolution temps-fréquence variable. Cette propriété est particulièrement intéressante pour l'analyser des signaux incluant des structures de différentes tailles.

La transformée en ondelettes peut être exprimée comme un opérateur de dérivation multi-échelles. Cette interprétation est d'une grande importance pour la détection des singularités dans les signaux. En utilisant des ondelettes à moments nuls, les singularités peuvent être détectées en suivant les maximums locaux de la transformée en ondelettes aux échelles fines. Cette propriété est exploitée dans le chapitre 4 pour estimer la fréquence du signal source de perturbations électromagnétiques dans un circuit imprimé.

L'analyse en ondelettes peut être réalisée en utilisant des algorithmes efficaces. L'algorithme de Mallat est un exemple d'algorithme utilisé dans ce contexte. Il consiste à appliquer la décomposition de manière itérative aux coefficients de la fonction échelle à une échelle supérieure pour obtenir l'arbre dyadique de décomposition en ondelettes. Le signal peut être reconstruit à partir des composantes à différentes échelles moyennant un algorithme de reconstruction qui exploite les relations à deux échelles entre la fonction échelle et l'ondelette.

Chapitre 3

Les signaux d'interférences électromagnétiques

3.1. Introduction

Durant la phase de conception et de mise au point des systèmes électroniques, le problème d'interférences électromagnétiques se pose dès que les signaux véhiculés par les conducteurs deviennent rapides. Par exemple, sur un circuit imprimé, une piste acheminant des signaux logiques est susceptible de produire des interférences qui peuvent perturber une deuxième piste se trouvant à proximité et véhiculant des signaux de contrôle sur une distance de 10 cm. Les câbles longs transportant des bits parallèles à grande vitesse sont aussi candidats aux interférences électromagnétiques. L'un des problèmes auxquels on s'intéresse dans l'analyse des interférences électromagnétiques est l'identification de la source ayant généré cette interférence. L'application de l'analyse en ondelettes au problème d'identification des lignes sources de perturbation électromagnétiques sur les circuits imprimés constitue l'un des objectifs de ce travail. L'analyse en ondelettes semble prometteuse pour détecter et identifier les sources d'interférences électromagnétiques [Buc00, Ant01].

Pour une meilleure compréhension du problème, il nous a paru donc utile d'inclure un chapitre consacré aux signaux d'interférences électromagnétiques. L'objet de ce chapitre est de présenter l'aspect théorique des interférences électromagnétiques et établir la solution dans les domaines temporel et fréquentiel dans le cas de trois lignes couplées. Le chapitre présente également la méthode des différences finies dans le domaine temporel pour la simulation des interférences électromagnétiques.

3.2. Interférence et couplage électromagnétiques

Les interférences électromagnétiques constituent un aspect de couplage entre les lignes ou les pistes de circuits imprimés. Bien qu'il existe une certaine ressemblance entre le problème des interférences électromagnétiques et celui du couplage d'antennes, il convient de noter que le phénomène d'interférences est un problème de couplage de champ proche entre un circuit émetteur et un circuit récepteur se trouvant à proximité l'un de l'autre.

Les interférences électromagnétiques entre lignes ou conducteurs peuvent être causées par un champ électrique via une capacité mutuelle ou par les variations temporelles du champ magnétique via une inductance mutuelle (Figure 3.1).

Dans la phase d'analyse de l'interférence électromagnétique, avant d'attribuer la perturbation à une source d'interférences, il est nécessaire que la ligne réceptrice ne soit

pas contaminée par le bruit. Une autre cause de perturbations pouvant affecter les données véhiculées par les lignes sont les réflexions provoquées par une charge non adaptée à la ligne.

Dans la prédiction des interférences électromagnétiques, il est souvent supposé que la ligne de transmission est sans pertes. Une source de pertes dans les lignes de transmission est l'effet de peau. La présence de deux conducteurs conduisant des courants de directions opposées tend à accroître la résistance de la ligne. Une seconde source de pertes est le diélectrique séparant les conducteurs. L'erreur due à l'exclusion des pertes dans la ligne de transmission peut être importante uniquement dans le cas de longs câbles et de conducteurs acheminant des signaux caractérisés par un faible temps de montée et est, en général, inférieure à l'erreur due à l'imprécision des calculs.

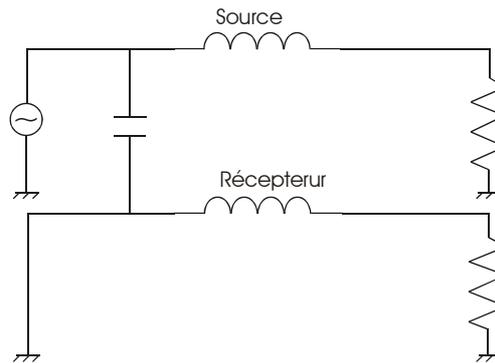


Figure 3.1 : Phénomène d'interférences électromagnétiques dans une ligne de transmission.

3.3. Interférences dans une ligne à trois conducteurs

Le phénomène d'interférences électromagnétiques ne peut avoir lieu que lorsque la ligne de transmission est composée de trois conducteurs ou plus. Pour illustrer ce phénomène, on considère une ligne à trois conducteurs représentée sur la figure 3.2 [ClaR92]. Les circuits attachés aux extrémités des conducteurs de la ligne sont susceptibles de s'interférer via les inductances mutuelles et les capacités mutuelles entre les conducteurs. Une source de résistance interne R_s générant une tension $V_S(t)$ est connectée à une charge R_L à travers un conducteur générateur et un conducteur de référence. Deux autres résistances de terminaison notées R_{NE} et R_{FE} sont connectées aux extrémités proche (near-end) et lointaine (far-end), respectivement, d'un conducteur récepteur via le conducteur de référence. Les indices NE et FE font référence à l'extrémité proche et l'extrémité lointaine, respectivement. Les conducteurs sont supposés parallèles à l'axe z et ont une section uniforme le long de la ligne. De même, il est supposé que le diélectrique séparant les conducteurs de la ligne est de section uniforme. Le courant $I_G(z, t)$ et la tension $V_G(z, t)$ associés au circuit générateur génèrent des champs électromagnétiques qui interagissent avec le circuit récepteur composé du conducteur récepteur et du conducteur de référence. Cette interaction induit un courant $I_R(z, t)$ et une tension $V_R(z, t)$ le long du circuit récepteur. Le courant et la tension induits donnent naissance à des tensions $V_{NE}(t)$ et $V_{FE}(t)$ aux bornes des résistances connectées aux extrémités du circuit récepteur.

La prédiction des interférences électromagnétiques consiste à déterminer les tensions $V_{NE}(t)$ et $V_{FE}(t)$ connaissant la section de la ligne, la source $V_S(t)$, les résistances R_s, R_L, R_{NE}

et R_{FE} . On distingue deux types d'analyse des interférences : l'analyse temporelle et l'analyse fréquentielle. L'analyse temporelle s'intéresse à la détermination de la forme d'onde des tensions $V_{NE}(t)$ et $V_{FE}(t)$ pour une forme générale de la tension source $V_S(t)$. L'analyse fréquentielle consiste à déterminer les tensions $V_{NE}(j\omega)$ et $V_{FE}(j\omega)$ pour une source de tension sinusoïdale $V_S(t) = V \cos(\omega t + \varphi)$.

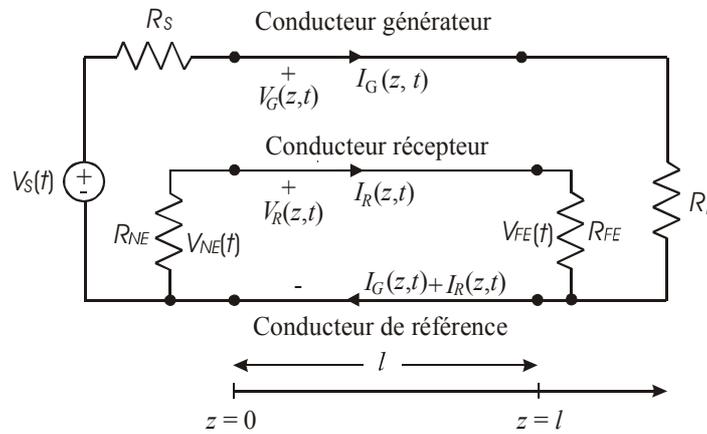
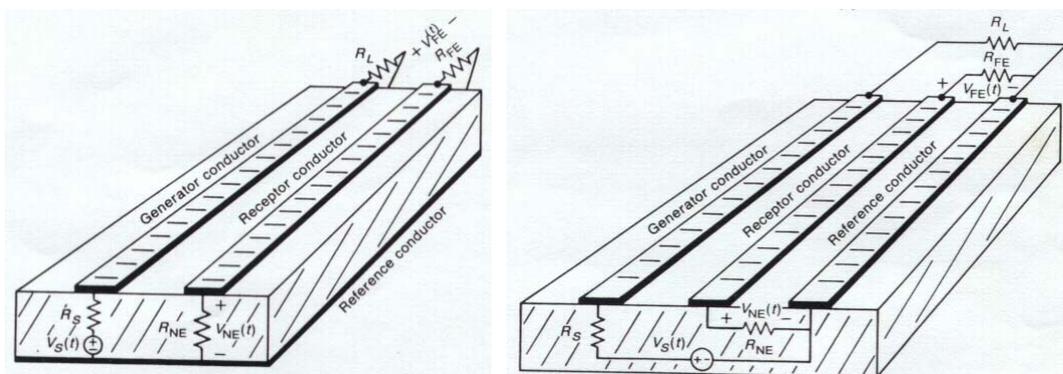


Figure 3.2 : Interférences dans une ligne à trois conducteurs.

Deux configurations typiques de lignes de transmission rencontrées dans les circuits imprimés sont représentées sur la figure 3.3. La configuration représentée sur la figure 3.3-a consiste en deux pistes parallèles sur la face d'un diélectrique qui a le plan de masse sur l'autre face (microstrip couplé). La configuration représentée sur la figure 3.3-b consiste en trois pistes parallèles placées sur un diélectrique (strips couplés). Dans les deux configurations, le milieu séparant les conducteurs n'est pas homogène.

Notons que l'effet des interférences dépend aussi de la complexité du circuit. Des modèles de prédiction des interférences électromagnétiques dans des circuits types tels que les transistors ou les amplificateurs opérationnels ont été également proposés dans la littérature.



(a) microstrip couplé

(b) strips couplés

Figure 3.3 : Configurations rencontrées dans les circuits imprimés.

3.4. Equations de la ligne de transmission

Dans l'analyse des interférences générées dans les lignes multiconducteurs, il est supposé que le mode électromagnétique transverse (TEM : transverse electromagnetic) est le seul mode existant. Sous l'hypothèse de structure de champ TEM, les tensions de lignes $V_G(z, t)$ et $V_R(z, t)$ ainsi que les courants $I_G(z, t)$ et $I_R(z, t)$ peuvent être définis de façon unique pour des fréquences d'excitation non nulles. Cependant, cette supposition reste approximative puisque les structures TEM pures n'existent pas pour les conducteurs imparfaits ou en cas de diélectrique non homogène. Néanmoins, l'approximation reste acceptable pour les bons conducteurs aux fréquences de travail de l'ordre du GHz . Cette structure de champ est alors appelée le mode quasi TEM.

Dans une ligne de transmission, chaque conducteur est caractérisé par une résistance par unité de longueur notée r_G pour le conducteur générateur, r_R pour le conducteur récepteur et r_0 pour le conducteur de référence. Les circuits générateur et récepteur possèdent des inductances propres par unité de longueur notées l_G et l_R et une inductance mutuelle par unité de longueur notée l_m . Les champs électriques engendrés par les tensions donnent naissance à des courants de déplacement et de conduction qui circulent entre les conducteurs. A ces effets correspondent la conductance propre g_G et la capacité propre c_G associées au circuit générateur, la conductance propre g_R et la capacité propre c_R associées au circuit récepteur et les éléments mutuels g_m et c_m . Le schéma électrique d'une ligne de transmission à trois conducteurs est représenté sur la figure 3.4.

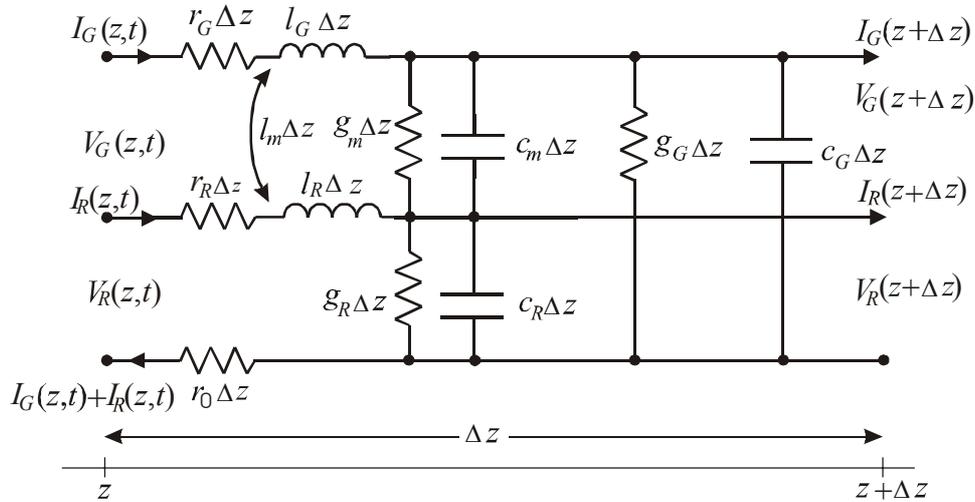


Figure 3.4 : Schéma d'une ligne à trois conducteurs.

Les équations de la ligne de transmission peuvent être obtenues en considérant les relations liant les tensions et les courants aux deux extrémités de cette section et en faisant tendre la longueur de la section vers zéro, ce qui donne [ClaR92]

$$\frac{\partial V_G(z, t)}{\partial z} = -(r_G + r_0)I_G(z, t) - r_0 I_R(z, t) - l_G \frac{\partial I_G(z, t)}{\partial t} - l_m \frac{\partial I_R(z, t)}{\partial t} \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial V_R(z,t)}{\partial z} = -r_0 I_G(z,t) - (r_R + r_0) I_R(z,t) - l_m \frac{\partial I_G(z,t)}{\partial t} - l_R \frac{\partial I_R(z,t)}{\partial t} \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial I_G(z,t)}{\partial z} = -(g_G + g_m) V_G(z,t) + g_m V_R(z,t) - (c_G + c_m) \frac{\partial V_G(z,t)}{\partial t} + c_m \frac{\partial V_R(z,t)}{\partial t} \quad (3.1c)$$

$$\frac{\partial I_R(z,t)}{\partial z} = g_m V_G(z,t) - (g_R + g_m) V_R(z,t) + c_m \frac{\partial V_G(z,t)}{\partial t} - (c_R + c_m) \frac{\partial V_R(z,t)}{\partial t} \quad (3.1d)$$

Sous forme compacte, ces équations différentielles aux dérivées partielles deviennent

$$\frac{\partial \mathbf{V}(z,t)}{\partial z} = -\mathbf{R}\mathbf{I}(z,t) - \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{I}(z,t)}{\partial t} \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}(z,t)}{\partial t} = -\mathbf{G}\mathbf{V}(z,t) - \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{V}(z,t)}{\partial t} \quad (3.2b)$$

où

$$\mathbf{V}(z,t) = \begin{bmatrix} V_G(z,t) \\ V_R(z,t) \end{bmatrix} \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{I}(z,t) = \begin{bmatrix} I_G(z,t) \\ I_R(z,t) \end{bmatrix} \quad (3.3b)$$

Les matrices des paramètres par unité de longueur sont données par

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_G + r_0 & r_0 \\ r_0 & r_R + r_0 \end{bmatrix} \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_G & l_m \\ l_m & l_R \end{bmatrix} \quad (3.4b)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_G + g_m & -g_m \\ -g_m & g_R + g_m \end{bmatrix} \quad (3.4c)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_G + c_m & -c_m \\ -c_m & c_R + c_m \end{bmatrix} \quad (3.4d)$$

Il est difficile de résoudre les équations de ligne précédentes dans le domaine temporel. Dans le domaine fréquentiel, ces équations deviennent

$$\frac{d}{dz} \hat{\mathbf{V}}(z) = -\hat{\mathbf{Z}}\mathbf{I}(z) \quad (3.5a)$$

$$\frac{d}{dz} \hat{\mathbf{I}}(z) = -\hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{V}}(z) \quad (3.5b)$$

où les vecteurs des phaseurs tension et courant sont donnés par

$$\hat{\mathbf{V}}(z) = \begin{bmatrix} \hat{V}_G(z) \\ \hat{V}_R(z) \end{bmatrix} \quad (3.6a)$$

$$\hat{\mathbf{I}}(z) = \begin{bmatrix} \hat{I}_G(z) \\ \hat{I}_R(z) \end{bmatrix} \quad (3.6b)$$

Les tensions et courants dans le domaine temporel peuvent être déduits comme suit

$$\mathbf{V}(z, t) = \text{Re} \left\{ \hat{\mathbf{V}}(z) e^{j\omega t} \right\} \quad (3.7a)$$

$$\mathbf{I}(z, t) = \text{Re} \left\{ \hat{\mathbf{I}}(z) e^{j\omega t} \right\} \quad (3.7b)$$

Les matrices impédance et admittance intervenant dans l'équation (3.5) sont données par

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{R} + j\omega \mathbf{L} \quad (3.8a)$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} + j\omega \mathbf{C} \quad (3.8b)$$

La résolution des équations de lignes multiconducteurs nécessite la détermination des paramètres par unité de longueur pour une configuration particulière de la ligne. Il convient de distinguer entre les paramètres par unité de longueur internes et externes. Les paramètres externes sont dus aux champs électromagnétiques externes aux conducteurs. La partie du champ magnétique interne contribue à l'inductance interne par unité de longueur. L'inductance par unité de longueur totale est la somme des inductances interne et externe. Pour des lignes de dimensions typiques, l'inductance par unité de longueur interne est négligeable par rapport à l'inductance par unité de longueur externe, ce qui justifie l'approximation de l'inductance par unité de longueur par l'inductance externe. De même, le courant à l'intérieur des conducteurs rencontre une résistance interne par unité de longueur. Les expressions des paramètres par unité de longueur sont difficiles à déterminer dans le cas de lignes dans un milieu non homogène. Dans le cas d'un milieu homogène, des expressions approximatives des paramètres par unité de longueur peuvent être déterminées alors qu'en présence d'un milieu non homogène, on utilise généralement les méthodes numériques. Les résistances internes par unité de longueur r_G , r_R et r_0 et les inductances internes par unité de longueur sont indépendantes des configurations des lignes si les conducteurs sont suffisamment séparés. Les résultats obtenus dans le cas d'une ligne à trois conducteurs peuvent être étendus aux lignes multiconducteurs. Si le milieu séparant les conducteurs de la ligne est homogène, les matrices des paramètres sont reliées par

$$\mathbf{L} \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{L} = \mu \varepsilon \mathbf{I}_2 \quad (3.9)$$

où μ est la perméabilité du milieu, ε est sa permittivité et \mathbf{I}_2 désigne la matrice unité de dimensions 2 x 2

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Donc, il suffit de déterminer une des matrices des paramètres pour déduire l'autre à partir de la relation

$$\mathbf{C} = \mu\varepsilon\mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{v^2}\mathbf{L}^{-1} \quad (3.11)$$

où $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ est la vitesse de groupe qui est égale à la vitesse de propagation des ondes dans la ligne. En remplaçant \mathbf{L} et \mathbf{C} dans l'équation (3.11) par leurs expressions données par (3.4b) et (3.4d), on obtient les expressions des capacités par unité de longueur en fonction des inductances par unité de longueur

$$c_m = \frac{l_m}{v^2(l_G l_R - l_m^2)} \quad (3.12a)$$

$$c_G + c_m = \frac{l_R}{v^2(l_G l_R - l_m^2)} \quad (3.12b)$$

$$c_R + c_m = \frac{l_G}{v^2(l_G l_R - l_m^2)} \quad (3.12c)$$

Dans un milieu non homogène, la matrice inductance par unité de longueur n'est pas affectée par la non homogénéité du diélectrique puisque $\mu = \mu_0$. Donc, si \mathbf{C}_0 désigne la matrice capacité par unité de longueur sans diélectrique, la matrice inductance est donnée par $\mu_0\varepsilon_0\mathbf{C}_0^{-1}$. Généralement, les méthodes numériques sont utilisées pour déterminer les paramètres par unité de longueur dans un milieu non homogène. Bien que les méthodes numériques donnent des résultats précis, elles nécessitent un temps de calcul prohibitif. Pour réduire le temps de calcul, des équations empiriques obtenues par approximations ont été proposées comme alternative pour calculer la capacité et l'inductance [Soh01].

Dans ce modèle, les différents paramètres ont été supposés constants. Pour tenir compte de la dépendance des paramètres de la ligne en fonction de la fréquence, des modèles d'approximation utilisant la fonction rationnelle de Debye ont été proposés [Sca01].

3.5. Analyse fréquentielle des interférences électromagnétiques

Une solution exacte de l'équation de la ligne de transmission peut être obtenue dans le cas d'une excitation sinusoïdale sans aucune restriction. Si la ligne peut être considérée comme électriquement courte, des résultats plus simples peuvent être déduits à partir de la solution générale.

3.5.1. Solution générale

Les équations de ligne dans le domaine fréquentiel données par (3.5) sont des équations différentielles couplées du premier ordre. Pour découpler ces équations différentielles, dérivons chaque équation par rapport à z et substituons la seconde, ce qui conduit aux équations du second ordre de la forme

$$\frac{d^2 \hat{V}(z)}{dz^2} = \hat{Z} \hat{Y} \hat{V}(z) \quad (3.13a)$$

$$\frac{d^2 \hat{I}(z)}{dz^2} = \hat{Y} \hat{Z} \hat{I}(z) \quad (3.13b)$$

La solution générale est obtenue en définissant la transformation suivante

$$\hat{I} = \hat{T} \hat{I}_m \quad (3.14)$$

La matrice de transformation \hat{T} est de dimension 2x2 et \hat{I}_m est le courant modal. La solution générale de (3.14) est de la forme

$$\mathbf{I}_m(z) = e^{-\hat{\gamma}z} \hat{I}_m^+ - e^{\hat{\gamma}z} \mathbf{I}_m^- \quad (3.15)$$

où

$$\mathbf{e}^{\pm \hat{\gamma}z} = \begin{bmatrix} e^{\pm \hat{\gamma}_G z} & 0 \\ 0 & e^{\pm \hat{\gamma}_R z} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

et

$$\hat{I}_m^\pm = \begin{bmatrix} \hat{I}_{mG}^\pm \\ \hat{I}_{mR}^\pm \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

avec $\hat{\gamma}_G^2$ et $\hat{\gamma}_R^2$ désignant les valeurs propres de $\hat{Y}\hat{Z}$. Les grandeurs $\hat{\gamma}_G$ et $\hat{\gamma}_R$ sont appelées les constantes de propagation. Les quantités \hat{I}_{mG}^+ , \hat{I}_{mG}^- , \hat{I}_{mR}^+ et \hat{I}_{mR}^- sont des constantes à déterminer. Les courants sont obtenus à partir de la solution modale

$$\mathbf{I}(z) = \hat{T} \hat{I}_m = \hat{T} \left(e^{-\hat{\gamma}z} \hat{I}_m^+ - e^{\hat{\gamma}z} \mathbf{I}_m^- \right) \quad (3.18)$$

Les tensions de ligne sont obtenues à partir de (3.5)

$$\begin{aligned} \hat{V}(z) &= -\hat{Y}^{-1} \frac{d\hat{I}(z)}{dz} \\ &= \hat{Y}^{-1} \hat{T} \hat{\gamma} \left(e^{-\hat{\gamma}z} \hat{I}_m^+ + e^{\hat{\gamma}z} \mathbf{I}_m^- \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.5.2. Couplage inductif et couplage capacitif

Les équations précédentes ont peu d'intérêt dans le contexte du phénomène d'interférences électromagnétiques. Des expressions littérales simplifiées donnant les tensions d'interférences peuvent être obtenues dans le cas d'une ligne sans perte à trois conducteurs dans un milieu homogène. Les conducteurs sont supposés être parfaits et séparés par un milieu homogène sans pertes. Cette approximation permet d'aboutir à des résultats qui illustrent le mécanisme d'interférences électromagnétiques. Pour une ligne sans pertes, on a $\mathbf{R} = \mathbf{G} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{Z}} = j\omega\mathbf{L}$ et $\hat{\mathbf{Y}} = j\omega\hat{\mathbf{C}}$.

En général, on s'intéresse aux tensions et courants aux extrémités de la ligne. Dans ce cas, la ligne couplée à trois conducteur peut être assimilée à un circuit multi-pôles (Figure 3.5). L'écriture des équations du quadripôle permet de déduire les tensions aux extrémités de la ligne. Si la ligne est de longueur l électriquement courte à la fréquence de travail ($l \ll \lambda$) et si le couplage entre le circuit générateur et le circuit récepteur est faible, on obtient [ClaR92]

$$\hat{V}_{NE} = \frac{1}{Den} \left(\frac{R_{NE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega l_m l \hat{I}_{G_{DC}} + \frac{R_{NE} R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega c_m l \hat{V}_{G_{DC}} \right) \quad (3.20a)$$

$$\hat{V}_{FE} = \frac{1}{Den} \left(-\frac{R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega l_m l \hat{I}_{G_{DC}} + \frac{R_{NE} R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega c_m l \hat{V}_{G_{DC}} \right) \quad (3.20b)$$

où

$$Den \approx (1 + j\omega\tau_G)(1 + j\omega\tau_R) \quad (3.21a)$$

$$\tau_G = \frac{l_G l}{R_S + R_L} + (c_G + c_m) l \frac{R_S R_L}{R_S + R_L} \quad (3.21b)$$

$$\tau_R = \frac{l_R l}{R_{NE} + R_{FE}} + (c_R + c_m) l \frac{R_{NE} R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} \quad (3.21c)$$

$$\hat{V}_{G_{DC}} = \frac{R_L}{R_S + R_L} \hat{V}_s \quad (3.21d)$$

$$\hat{I}_{G_{DC}} = \frac{1}{R_S + R_L} \hat{V}_s \quad (3.21e)$$

Les expressions (3.20a) et (3.20b) montrent que pour des lignes faiblement couplées et électriquement courtes, l'interférence est une combinaison linéaire des contributions dues à l'inductance mutuelle l_m entre les deux circuits (couplage inductif) et à la capacité mutuelle c_m entre les deux circuits (couplage capacitif). Ceci est appelé le principe de superposition des couplages inductif et capacitif.

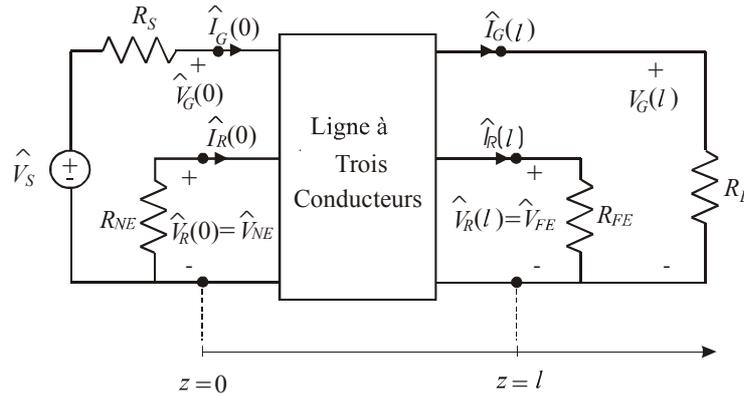


Figure 3.5 : Représentation de la ligne à trois conducteurs sous forme de circuit multi-pôles.

Si la fréquence d'excitation est suffisamment basse de telle sorte que l'approximation $Den \approx 1$ soit valable, les expressions (3.20) se simplifient davantage et deviennent

$$\hat{V}_{NE} = \frac{R_{NE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega l_m \hat{I}_{G_{DC}} + \frac{R_{NE} R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega c_m l \hat{V}_{G_{DC}} \quad (3.22a)$$

$$\hat{V}_{FE} = -\frac{R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega l_m \hat{I}_{G_{DC}} + \frac{R_{NE} R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega c_m \hat{V}_{G_{DC}} \quad (3.22b)$$

Il est clair que l'interférence est la superposition de deux composantes : une composante est due à l'inductance mutuelle entre les deux circuits (couplage inductif) et l'autre est due à la capacité mutuelle entre les deux circuits (couplage capacitif). Si la composante due au couplage inductif est dominante par rapport à celle due au couplage capacitif alors les tensions d'interférences se réduisent à

$$\hat{V}_{NE}^{IND} = \frac{R_{NE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega l_m \hat{I}_{G_{DC}} \quad (3.23a)$$

$$\hat{V}_{FE}^{NE} = -\frac{R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega l_m \hat{I}_{G_{DC}} \quad (3.23b)$$

Si la composante due au couplage capacitif est dominante par rapport à celle due au couplage inductif alors il vient

$$\hat{V}_{NE} = \frac{R_{NE} R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega l_m \hat{V}_{G_{DC}} \quad (3.24a)$$

$$\hat{V}_{FE} = \frac{R_{NE} R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} j\omega l_m \hat{V}_{G_{DC}} \quad (3.24b)$$

Le couplage total est la somme de ces deux composantes

$$\hat{V}_{NE} = V_{NE}^{IND} + V_{NE}^{CAP} \quad (3.25a)$$

$$\hat{V}_{FE} = V_{FE}^{IND} + V_{FE}^{CAP} \quad (3.25b)$$

L'interférence peut être considérée comme une fonction de transfert entre l'entrée \hat{V}_s et les sorties \hat{V}_{NE} et \hat{V}_{FE} . On montre que les fonctions de transfert sont de la forme

$$\frac{\hat{V}_{NE}}{\hat{V}_s} = j\omega \left(M_{NE}^{IND} + M_{NE}^{CAP} \right) \quad (3.26a)$$

$$\frac{\hat{V}_{FE}}{\hat{V}_s} = j\omega \left(M_{FE}^{IND} + M_{FE}^{CAP} \right) \quad (3.26b)$$

où

$$M_{NE}^{IND} = \frac{R_{NE}}{R_{NE} + R_{FE}} \frac{L_m}{R_s + R_L} \quad (3.27a)$$

$$M_{NE}^{CAP} = \frac{R_{NE} R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} \frac{R_L C_m}{R_s + R_L} \quad (3.27b)$$

$$M_{FE}^{IND} = - \frac{R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} \frac{L_m}{R_s + R_L} \quad (3.27c)$$

$$M_{FE}^{CAP} = M_{NE}^{CAP} = \frac{R_{NE} R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} \frac{R_L C_m}{R_s + R_L} \quad (3.27d)$$

où $L_m = l_m l$ et $C_m = c_m l$ sont l'inductance mutuelle et la capacité mutuelle totales entre le circuit générateur et le circuit récepteur.

Les expressions (3.26a) et (3.26b) montrent que les contributions dues aux couplages inductif et capacitif sont fonctions de la fréquence d'excitation ; elles augmentent linéairement avec l'augmentation de la fréquence. Les réponses fréquentielles sont caractérisées par une pente de 20 dB/décade.

3.5.3. Couplage dû à l'impédance commune

Les conducteurs imparfaits peuvent produire des interférences non négligeables aux basses fréquences. Pour des charges typiques, aux basses fréquences, la résistance du conducteur de référence est inférieure aux résistances de charge, et donc la majorité du courant du circuit générateur retourne par le conducteur de référence ce qui provoque une chute de tension \hat{V}_0 donnée par

$$\hat{V}_0 = \frac{R_0}{R_0 + R_L} \hat{V}_s \quad (3.28)$$

Cette tension donne naissance à des interférences dans le circuit récepteur dont les fonctions de transfert sont exprimées par

$$\frac{\hat{V}_{NE}^{CI}}{\hat{V}_s} = M_{NE}^{CI} = \frac{R_{NE}}{R_{NE} + R_{FE}} \frac{R_0}{R_0 + R_L} \quad (3.29a)$$

$$\frac{\hat{V}_{FE}^{CI}}{\hat{V}_s} = M_{FE}^{CI} = -\frac{R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} \frac{R_0}{R_0 + R_L} \quad (3.29b)$$

Le couplage total est approximativement la somme des couplages inductif, capacitif et à impédance commune

$$\frac{\hat{V}_{NE}}{\hat{V}_s} = j\omega \left(M_{NE}^{IND} + M_{NE}^{CAP} \right) + M_{NE}^{CI} \quad (3.30a)$$

$$\frac{\hat{V}_{FE}}{\hat{V}_s} = j\omega \left(M_{FE}^{IND} + M_{FE}^{CAP} \right) + M_{FE}^{CI} \quad (3.30b)$$

3.6. Analyse temporelle des interférences électromagnétiques

Il s'agit de prédire les tensions dans les extrémité proche et lointaine de la ligne couplée à trois conducteurs pour une forme d'onde quelconque de la tension source $V_s(t)$. Il est supposé que le mode TEM est le seul mode de propagation dans la ligne. On se place également dans le cas de conducteurs parfaits et de diélectrique sans pertes.

3.6.1 Couplage inductif et couplage capacitif

Le terme $j\omega$ dans le domaine fréquentiel est substitué par l'opérateur d/dt dans le domaine temporel. Par la suite, les équations (3.26a) et (3.26b) s'écrivent dans le domaine temporel comme suit :

$$V_{NE}(t) = M_{NE} \frac{dV_s(t)}{dt} \quad (3.31a)$$

$$V_{FE}(t) = M_{FE} \frac{dV_s(t)}{dt} \quad (3.31b)$$

où

$$M_{NE} = M_{NE}^{IND} + M_{NE}^{CAP} \quad (3.32a)$$

$$M_{FE} = M_{FE}^{IND} + M_{FE}^{CAP} \quad (3.32b)$$

Il en découle que pour une ligne électriquement courte, l'interférence n'est autre que la dérivée de la tension source multipliée par les coefficients d'interférences M_{NE} et M_{FE} . Dans le domaine temporel, l'interférence est la somme de contributions produites par les couplages inductif et capacitif dus à l'inductance mutuelle et à la capacité mutuelle entre le circuit générateur et le circuit récepteur. La figure 3.6 montre les tensions d'interférences pour une source de tension périodique trapézoïdale. Le signal d'interférence apparaît sous forme d'impulsions durant la période de transition de la source. Durant le temps de montée de l'impulsion de la source, la tension d'interférence est positive si le coefficient d'interférence est positif. Durant le temps de descente, la tension d'interférence est une impulsion négative si le coefficient d'interférence est positif. Le coefficient d'interférence M_{NE} correspondant à l'extrémité proche est toujours positif alors que le coefficient M_{FE} associé à l'extrémité lointaine est positif si le couplage capacitif est dominant par rapport au couplage inductif. Si le couplage inductif est dominant par rapport au couplage capacitif alors le coefficient M_{FE} est négatif.

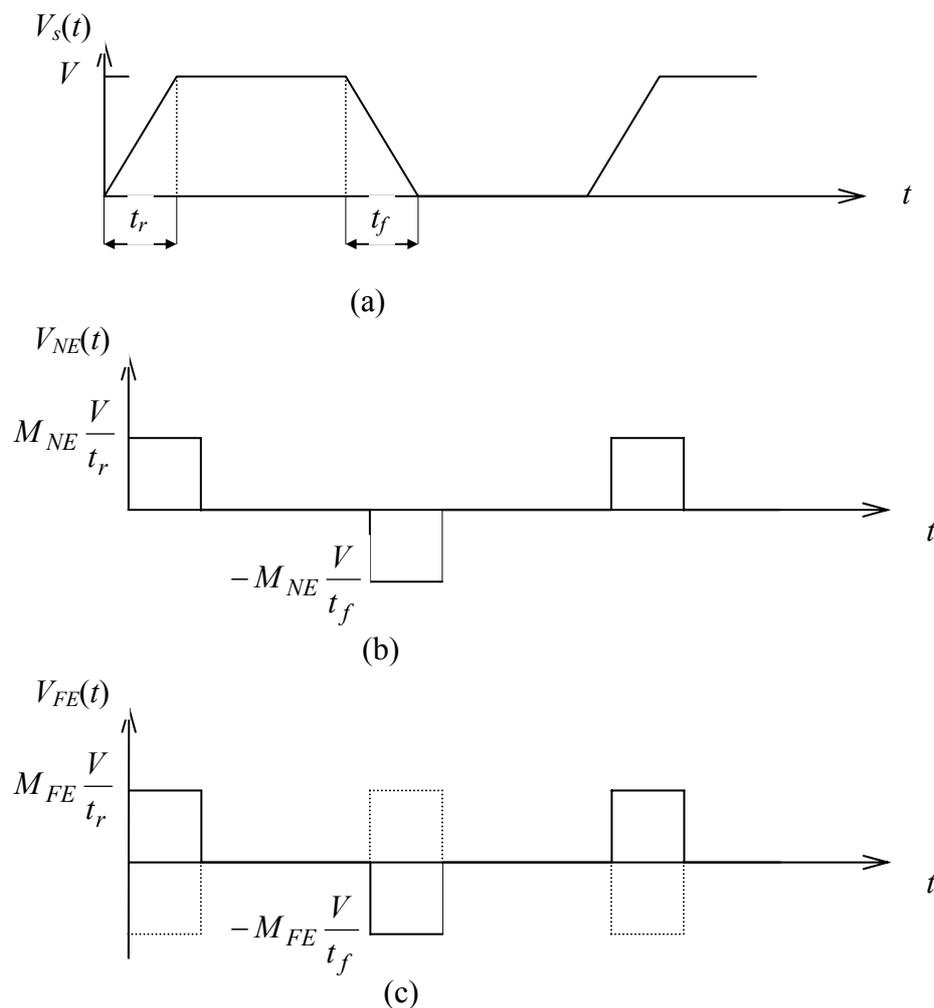


Figure 3.6 : Source de tension trapézoïdale et interférences aux extrémités proche et lointaine. (a) Source trapézoïdale. (b) Interférence à l'extrémité proche. (c) Interférence à l'extrémité lointaine.

Il a été supposé que la ligne est électriquement courte. Pour un signal qui contient des composantes fréquentielles allant du continu jusqu'à des fréquences élevées (théoriquement infinies), seule les composantes qui sont inférieures à la fréquence pour laquelle la ligne est électriquement courte sont traitées correctement par ce modèle. Les hautes fréquences au delà de cette valeur ne sont pas correctement traitées. Cette contrainte est traduite par la condition suivante sur les temps de montée et de descente de la tension source

$$t_r, t_f > 10T_D \quad (3.33)$$

où $T_D = l/v$ est le temps de retard de la ligne.

3.6.2. Couplage dû à l'impédance commune

La prise en considération de la résistance des conducteurs a pour effet d'ajouter une contribution due à l'impédance commune. On obtient donc

$$V_{NE}(t) = \left(M_{NE}^{IND} + M_{NE}^{CAP} \right) \frac{dV_s(t)}{dt} + M_{NE}^{CI} V_s(t) \quad (3.34a)$$

$$V_{FE}(t) = \left(M_{FE}^{IND} + M_{FE}^{CAP} \right) \frac{dV_s(t)}{dt} + M_{FE}^{CI} V_s(t) \quad (3.34b)$$

où les coefficients de couplage de l'impédance commune M_{NE}^{CI} et M_{FE}^{CI} sont donnés par

$$M_{NE}^{CI} = \frac{R_{NE}}{R_{NE} + R_{FE}} \frac{R_0}{R_s + R_L} \quad (3.35a)$$

$$M_{FE}^{CI} = -\frac{R_{FE}}{R_{NE} + R_{FE}} \frac{R_0}{R_s + R_L} \quad (3.35b)$$

La contribution due à l'impédance commune est une version atténuée de $V_s(t)$ représentée par les termes $M_{NE}^{CI} V_s(t)$ et $M_{FE}^{CI} V_s(t)$.

3.7. Simulation des interférences

Il existe plusieurs programmes de simulation des interférences électromagnétiques dans les lignes couplées. Une approche consiste à déterminer les paramètres de la ligne tels que l'inductance mutuelle et la capacité mutuelle au moyen d'un programme de calcul numérique et, par la suite, utiliser ces paramètres avec un programme de simulation tel que SPICE ou PSPICE pour prédire l'interférence électromagnétique [Wes01].

L'approche basée sur la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD : Finite Difference Time Domain) [Yee66] fournit des résultats précis dans le problème d'analyse des interférences entre les lignes de transmission [Pot91, Xia01]. De même, elle présente l'avantage de pouvoir simuler des structures tridimensionnelles. La méthode FDTD résout les équations de Maxwell dans deux ou trois dimensions [Kun93]

$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.36a)$$

$$\vec{\nabla}_x \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (3.36b)$$

où $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ et $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

L'espace de simulation à trois dimensions est décomposé en éléments cubiques de faces Δx , Δy et Δz appelés cellules de Yee. Les six composantes des champs E_x , E_y , E_z , H_x , H_y et H_z sont définies en chaque point de la cellule de manière entrelacée où chaque composante du champ \vec{E} est entourée par quatre composantes du champ \vec{H} et vice versa (Figure 3.7). La notation utilisée pour décrire les champs est, par exemple,

$$E_x^n[i, j, k] = E_x \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) \Delta x, j \Delta y, k \Delta z \right]_{t=n \Delta t} \quad (3.37)$$

où x désigne la composante suivant l'axe ox , n représente l'instant d'évaluation et (i, j, k) désigne l'indice de la cellule de Yee contenant le champ à calculer. En se reportant à la figure 3.7, on remarque que la composante $E_x(i, j, k)$ est localisée en $\left[\left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta x, j \Delta y, k \Delta z \right]$. Les champs sont définis uniquement aux points de l'espace et non sur toute la cellule. Les paramètres ε , μ et σ peuvent être spécifiés pour chaque composante du champ permettant ainsi de simuler des milieux linéaires anisotropes.

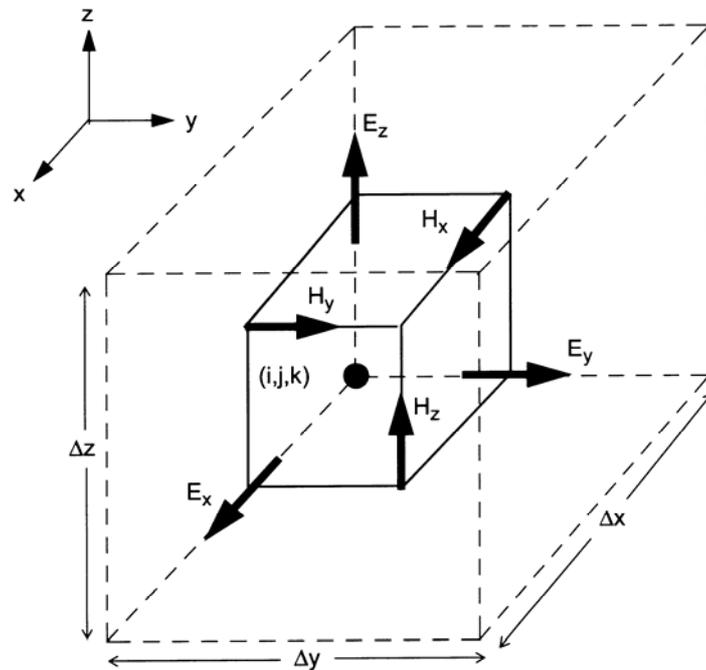


Figure 3.7 : Cellule de Yee.

Pour obtenir les équations de mise à jour de ces champs, les dérivées sont remplacées par des approximations de différence de second ordre dans le domaine temporel

$$\frac{\partial}{\partial t} H_x^n[i, j, k] = \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}[i, j, k] - H_x^{n-\frac{1}{2}}[i, j, k]}{\Delta t} + o(\Delta t^2) \quad (3.38)$$

Les approximations dans le domaine spatial donne

$$\frac{\partial}{\partial z} E_y^n[i, j, k] = \frac{E_y^n[i, j, k+1] - E_y^n[i, j, k]}{\Delta z} + o(\Delta z^2) \quad (3.39a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z^n[i, j, k] = \frac{E_z^n[i, j+1, k] - E_z^n[i, j, k]}{\Delta y} + o(\Delta y^2) \quad (3.39b)$$

L'équation (3.36a) donne

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] \quad (3.40)$$

En combinant les équations précédentes, on obtient l'équation de mise à jour de $H_x^{n+\frac{1}{2}}[i, j, k]$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}[i, j, k] = \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_y^n[i, j, k+1] - E_y^n[i, j, k]}{\Delta z} - \frac{E_z^n[i, j+1, k] - E_z^n[i, j, k]}{\Delta y} \right] + H_x^{n-\frac{1}{2}}[i, j, k] \quad (3.41)$$

En procédant de la même façon, on peut obtenir les expressions de mise à jour des autres composantes des champs électrique et magnétique.

La méthode FDTD permet la modélisation des interférences électromagnétiques entre des structures arbitraires. Cependant, elle devient coûteuse en terme de temps de calcul et de capacité de stockage dans le cas de l'analyse des interactions entre des objets séparés par un large espace. Pour tirer profit des avantages de la méthode des différences finies tout en diminuant le temps de calcul et la capacité de stockage, la combinaison de la méthode des moments avec la méthode des différences finies a été envisagée [Lin99]. D'autres méthodes basées sur l'analyse multirésolution ont été également proposées comme alternative [Wer96, Kru96, Kru97].

Dans le cadre de ce travail, le simulateur appelé XFDTD basé sur la méthode des différences finies dans le domaine temporel a été utilisé pour simuler les interférences électromagnétiques.

Chapitre 4

Analyse en ondelettes des signaux d'interférences sur circuits imprimés

4.1. Introduction

Dans la dernière décade, des grands efforts ont été déployés pour augmenter la vitesse des circuits numériques. Cependant, aux hautes fréquences, le temps de commutation devient plus court donnant naissance au phénomène des interférences électromagnétiques. Comme conséquence, l'intégrité du signal véhiculé par les pistes du circuit imprimé peut être affectée si le phénomène n'est pas pris en considération dès la première étape de conception du système électronique [Kha89]. Les signaux d'interférences causent un sérieux problème d'intégrité du signal particulièrement entre les longues lignes parallèles [Gra92, Sca01]. Particulièrement, lorsque la ligne de connexion devient électriquement longue, le signal d'interférence peut entraîner la distorsion de la fonction logique [ParB94, Yea88]. Le problème d'intégrité du signal devient donc crucial durant la phase de simulation et de conception du circuit.

Les interférences électromagnétiques constituent un aspect important de l'analyse de la compatibilité électromagnétique que le concepteur se trouve confronté avec pour améliorer les performances du système et assurer son succès. A cette fin, plusieurs approches ont été proposées dans la littérature pour prédire les interférences électromagnétiques [GriS01, Soh01, Xia01]. Néanmoins, un problème qui peut se poser au concepteur est de déterminer si le mauvais fonctionnement du prototype est dû aux erreurs logiques ou aux interférences. Il est donc d'une importance capitale de détecter les interférences et identifier leur source en utilisant des simulations durant la phase de conception en vue de les éliminer ou, au moins, de les réduire à des niveaux acceptables avant la construction du prototype. Donc, une méthode efficace d'identification de la ligne source des interférences électromagnétiques s'avère donc indispensable.

Généralement, dans la conception des circuits imprimés, l'identification des lignes perturbatrices est basée sur une méthode géométrique où les contraintes en terme d'interférences sont spécifiées en valeurs de tension qui sont converties en distance maximale. Seules les lignes dont la distance les séparant de la ligne perturbée ne dépasse pas la distance maximale seront prises en considération dans la procédure d'identification de la ligne perturbatrice. Cependant, il n'est pas rare qu'une ligne située au delà de la distance maximale spécifiée donne lieu à une interférence électromagnétique de grande amplitude alors qu'il n'existe pas une règle générale d'identification efficace.

Récemment, il a été montré que les ondelettes peuvent être utilisées dans la prédiction des interférences et le diagnostic des pannes dans les lignes de transmission [Ant01, Buc00, GriS00]. Dans [Buc00], les ondelettes ont été utilisées pour générer la signature de l'interférence en vue d'identifier la ligne défectueuse et dans [Ant01], la décomposition en paquets d'ondelettes a été utilisée dans l'extraction des caractéristiques et la classification des sources d'interférences électromagnétiques. Une des caractéristiques importantes des ondelettes est leur capacité de détecter les singularités ce qui les rend très efficaces pour l'analyse des signaux perturbés par des interférences électromagnétiques. En outre, la puissance moyenne des coefficients d'ondelettes peut fournir une information sur la distance séparant les lignes couplées [Kac03a].

Dans ce chapitre, la décomposition en ondelettes est utilisée pour analyser les signaux d'interférences électromagnétiques sur circuits imprimés. L'objectif de l'analyse est d'identifier la ligne source de la perturbation en ne disposant que du signal perturbé. L'approche suivie consiste à estimer la fréquence du signal ayant causé l'interférence, puis déterminer la distance de séparation entre la ligne perturbatrice et la ligne perturbée. Ces deux paramètres sont d'un grand intérêt pour l'identification de la ligne source de perturbation. Contrairement à l'approche géométrique, il n'est pas indispensable de spécifier un seuil pour la distance séparant les lignes couplées. Dans ce qui suit, on présente la configuration du circuit imprimé simulé ainsi que le modèle des signaux à traiter. Dans le reste du chapitre, on présente les résultats qui montrent l'efficacité des ondelettes dans l'analyse des signaux d'interférences pour déterminer la fréquence du signal perturbateur ainsi que la distance séparant la ligne perturbatrice et la ligne perturbée.

4.2. Configuration du circuit imprimé

Le circuit imprimé est simulé en utilisant le simulateur XFDTD de REMCOM basé sur la méthode des différences finies dans le domaine temporel (cf. § 3.7). Il a une structure de stripline (Figure 4.1). Le substrat jouant le rôle de diélectrique a une épaisseur h et il est caractérisé par une permittivité relative ε_r . Dans les exemples traités, ε_r prend une valeur entre 4 et 5 qui est typiquement la permittivité de l'époxy utilisé dans la fabrication des circuits imprimés. Sur une face du diélectrique se trouve la masse et sur l'autre face se trouvent deux pistes parallèles de longueur $L = 10$ cm et de largeur w véhiculant des signaux logiques (horloge, signaux de contrôle, etc.). A une extrémité de la première ligne (ligne 1) est connectée une source de tension, de résistance interne $R_s = 50 \Omega$, générant un signal logique de forme trapézoïdale. Sur l'autre extrémité de la ligne est attachée une résistance de charge $R_L = 50 \Omega$. Deux résistances de terminaison R_{NE} et R_{FE} sont attachées à la seconde ligne (ligne 2) aux extrémités proche et lointaine par rapport à la source. Les deux résistances ont une valeur de 50Ω .

Le signal se propageant le long de la ligne 1 (ligne perturbatrice) cause des interférences qui affectent le signal véhiculé par la ligne 2 (ligne perturbée). Les signaux générés ont une amplitude de 5 V et un rapport cyclique de 0.5. L'effet réciproque de la ligne perturbée sur la ligne perturbatrice est négligé. Dans les exemples qui seront présentés, on ne s'intéresse qu'à l'interférence générée à l'extrémité proche puisqu'elle est caractérisée par des impulsions de plus grande amplitude et de plus longue durée que celles de l'interférence de l'extrémité lointaine [Clay92, Wes01].

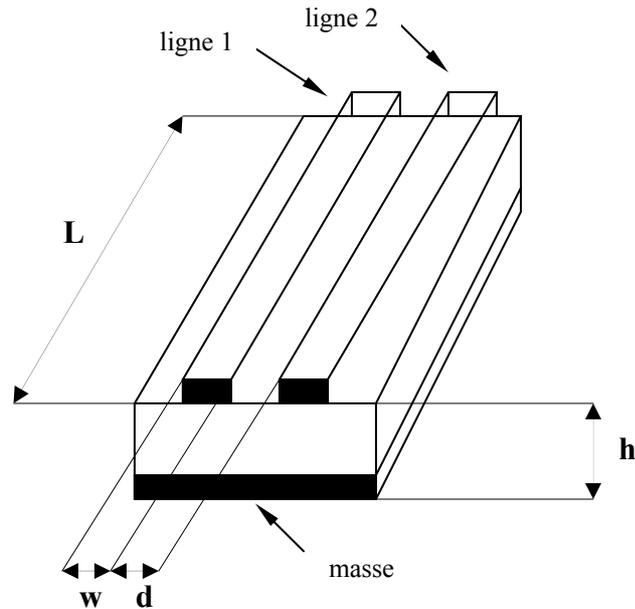


Figure 4.1 : Configuration du circuit imprimé utilisé dans la simulation.

4.3. Détection des interférences

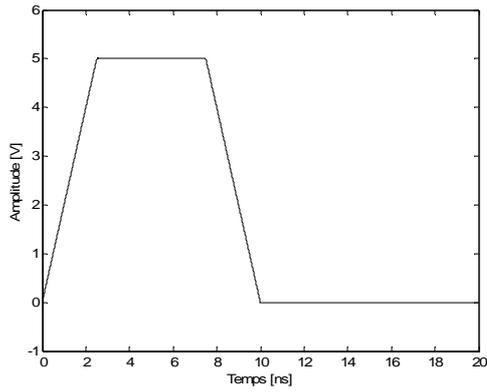
L'objectif est de mettre en évidence la présence ou l'absence des interférences électromagnétiques sans se préoccuper de leur origine ou de leur estimation. En utilisant une décomposition en ondelettes, il est possible de détecter si des interférences électromagnétiques sont présentes dans le signal véhiculé par une ligne du circuit imprimé. Les coefficients d'ondelettes reflètent le degré de corrélation entre le signal et l'ondelette analysante et fournissent une description locale du signal. En particulier, ils sont très efficaces pour détecter les singularités. Considérons un signal perturbateur véhiculé par la ligne 1 de fréquence $f = 200$ MHz et de temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.5$ ns. Le signal perturbé a une fréquence $f = 50$ MHz et des temps de montée et de descente $t_r = t_f = 2.5$ ns. Les paramètres du circuit imprimé utilisé sont : permittivité $\epsilon_r = 4.7$, épaisseur du substrat $h = 1.5$ mm et largeur des pistes $w = 2$ mm. La ligne perturbée se trouve à une distance de 1 mm de la ligne perturbatrice.

La figure 4.2a montre le signal sans perturbation, la figure 4.2b illustre sa représentation temps-échelle alors que les figures 4.2c, 4.2d et 4.2e montrent les coefficients d'ondelettes aux niveaux de résolution 1, 2 et 3, respectivement. L'ondelette de Daubechies db3 a été utilisée dans l'analyse. On constate bien que les d'ondelettes associés au signal sans perturbation sont nuls partout sauf aux instants de transition où le signal passe du niveau logique haut au niveau logique bas et vice versa. Les figures 4.3a et 4.3b montrent le signal perturbateur et le signal perturbé, respectivement, alors que la figure 4.3c montre la représentation temps-échelle du signal perturbé. Les coefficients d'ondelettes du signal perturbé aux niveaux de résolution 1, 2 et 3 sont représentés sur les figures 4.3d, 4.3e et 4.3f, respectivement. Contrairement au cas du signal sans perturbation, les coefficients d'ondelettes associés au signal perturbé sont partout non nuls. Aux échelles fines, les coefficients d'ondelettes introduits par les perturbations ont des niveaux beaucoup plus faibles que ceux des coefficients d'ondelettes associés au signal sans

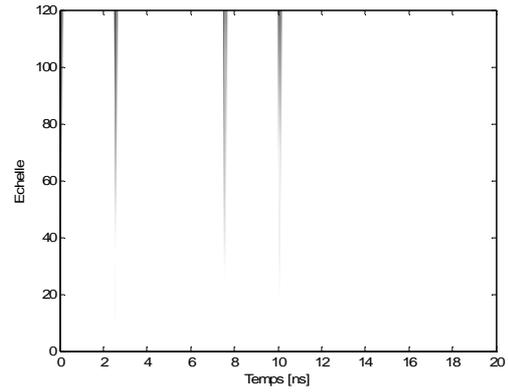
perturbation. En augmentant le niveau de décomposition, l'amplitude des coefficients d'ondelettes augmente et l'effet des interférences électromagnétiques est toujours apparent.

En augmentant la distance séparant la ligne perturbatrice et la ligne perturbée, l'analyse en ondelettes permet toujours la détection des interférences. La figure 4.4 montre la distribution temps-échelle du signal perturbé ainsi que les coefficients d'ondelettes à différents niveaux de résolution pour une distance de séparation de 5 mm.

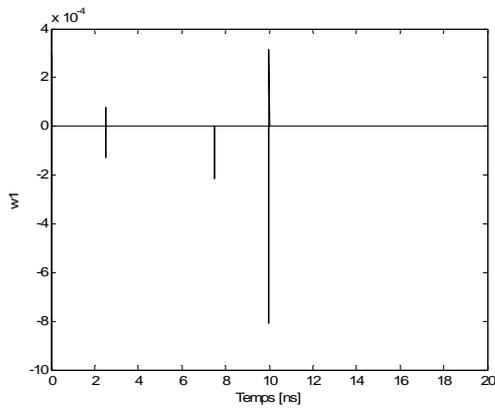
L'analyse en ondelettes a été effectuée en utilisant l'ondelette de Haar. La figures 4.5 montre la distribution temps-échelle du signal sans perturbation et les résultats de la décomposition en ondelettes à différents niveaux de résolution. Les coefficients d'ondelettes du signal non perturbé sont constants durant la période de transition. Les coefficients d'ondelettes associés au signal perturbé à différents niveaux de résolution pour une distance de séparation de 1 mm sont montrés sur la figure 4.6. L'effet de l'interférence apparaît clairement en comparant les coefficients d'ondelettes correspondant au signal sans perturbation à ceux correspondant au signal perturbé. La superposition du signal d'interférence au signal utile introduit des perturbations aux coefficients d'ondelettes. La figure 4.7 montre les résultats d'analyse en ondelettes au moyen de l'ondelette de Haar pour une distance de séparation de 5 mm.



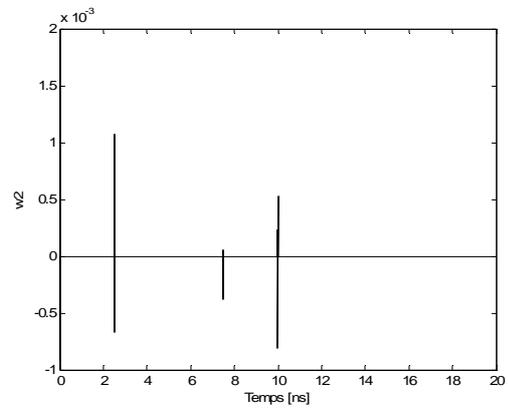
(a) Signal sans perturbation



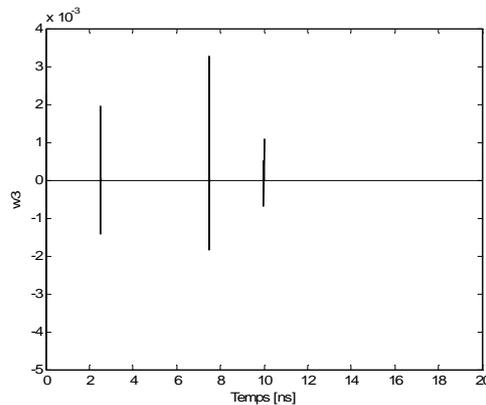
(b) Représentation temps-échelle



(c) Coefficients d'ondelettes au niveau 1

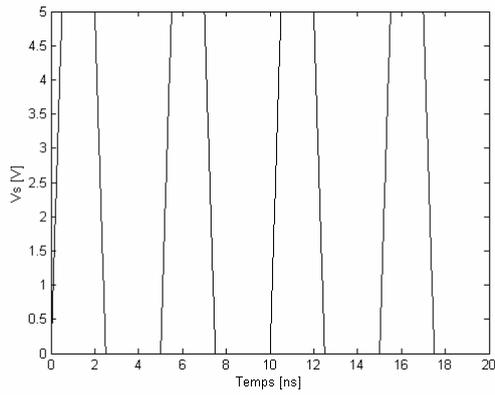


(d) Coefficients d'ondelettes au niveau 2

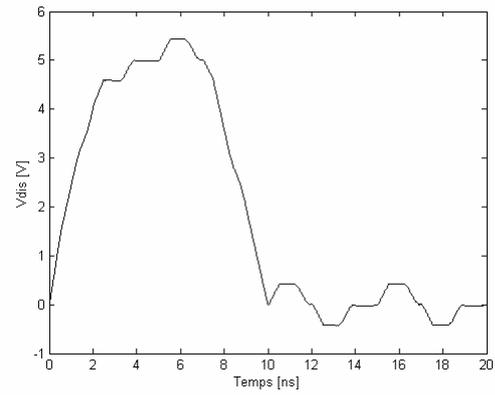


(e) Coefficients d'ondelettes au niveau 3

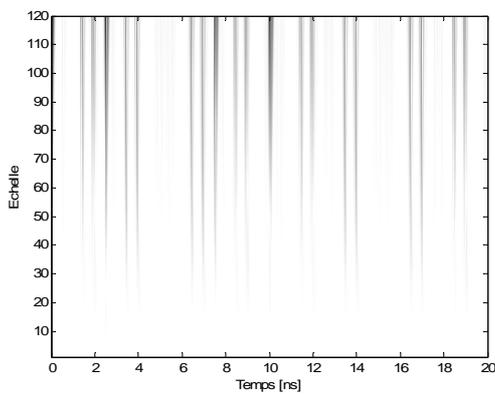
Figure 4.2 : Analyse en ondelettes du signal original sans perturbation en utilisant l'ondelette de Daubechies db3. (a) Signal sans perturbation. (b) Représentation temps-échelle du signal sans perturbation. (c) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 1$. (d) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 2$. (e) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 3$.



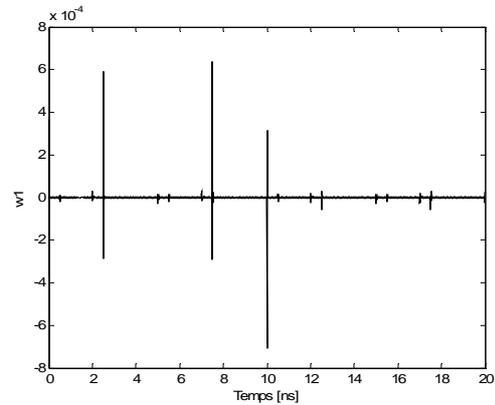
(a) signal perturbateur



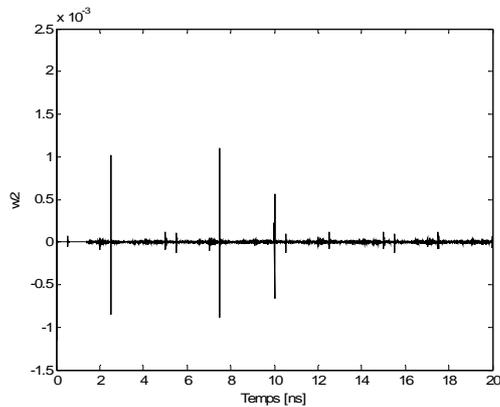
(b) signal perturbé



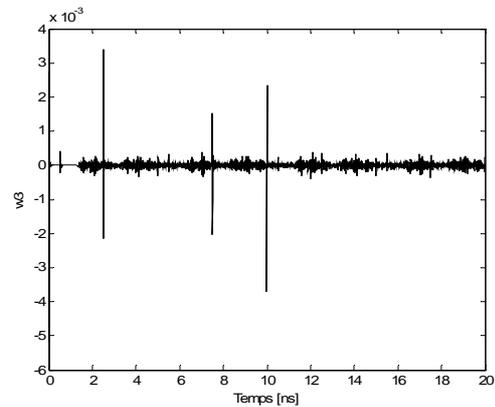
(c) Représentation temps-échelle



(d) Coefficients d'ondelettes au niveau 1

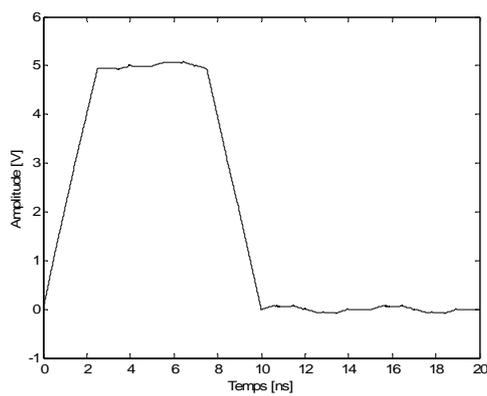


(e) Coefficients d'ondelettes au niveau 2

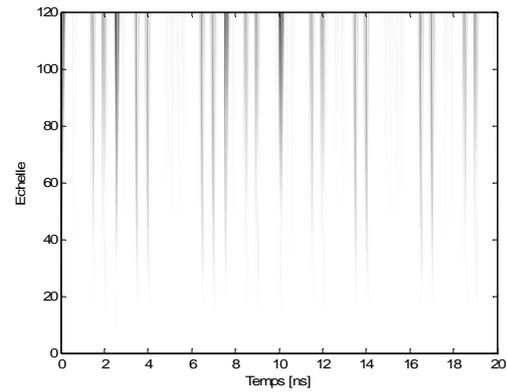


(f) Coefficients d'ondelettes au niveau 3

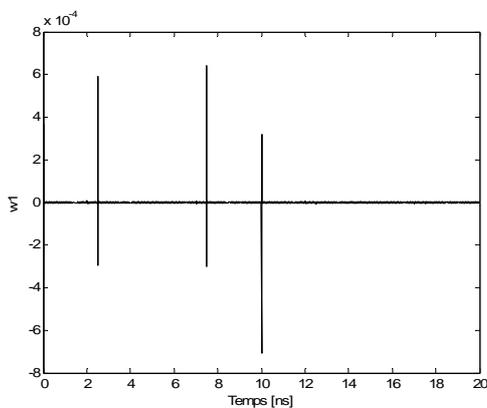
Figure 4.3 : Analyse en ondelettes du signal perturbé pour une distance de séparation de 1 mm en utilisant l'ondelette de Daubechies db3. (a) Signal perturbateur. (b) Signal perturbé. (c) Représentation temps-échelle du signal perturbé. (d) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 1$. (e) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 2$. (f) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 3$.



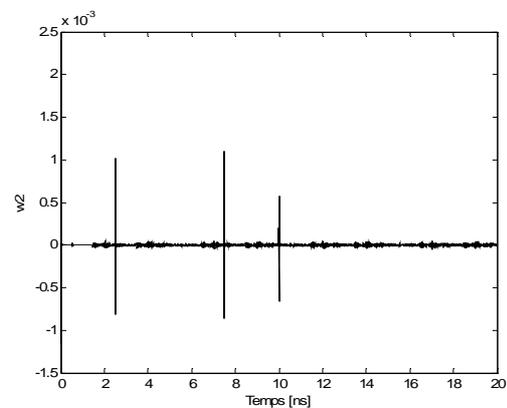
(a) signal perturbé



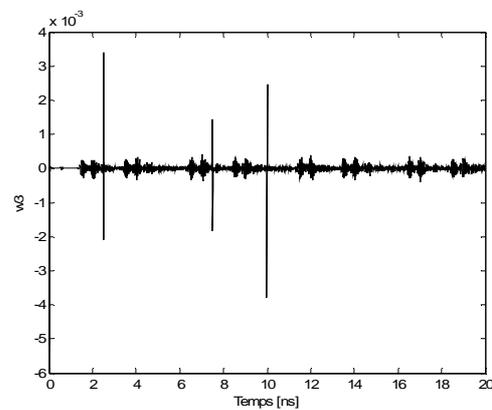
(b) Représentation temps-échelle



(c) Coefficients d'ondelettes au niveau 1

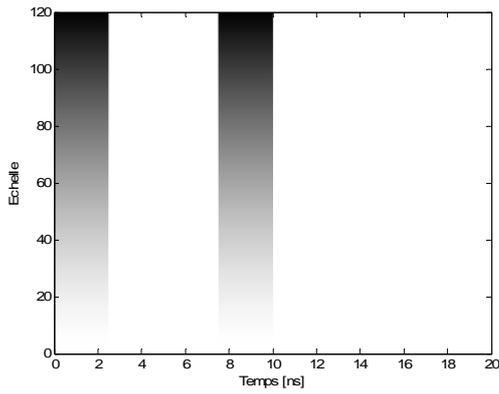


(d) Coefficients d'ondelettes au niveau 2

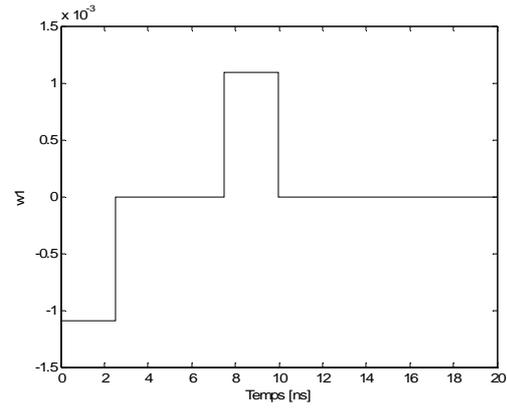


(e) Coefficients d'ondelettes au niveau 3

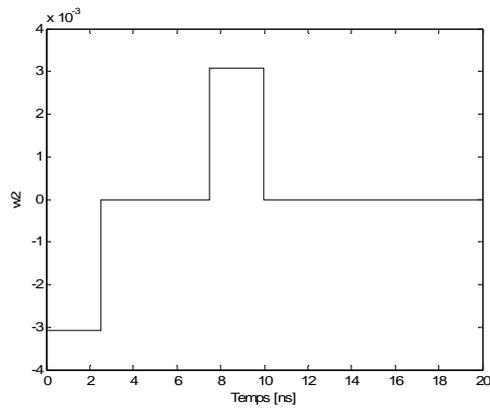
Figure 4.4 : Analyse en ondelettes du signal perturbé pour une distance de séparation de 5 mm en utilisant l'ondelette de Daubechies db3. (a) Signal perturbé. (b) Représentation temps-échelle du signal perturbé. (c) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 1$. (d) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 2$. (e) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 3$.



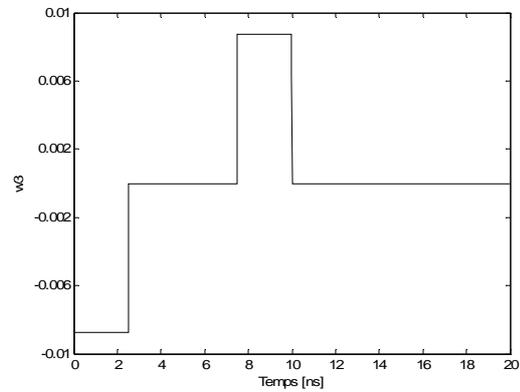
(a) Représentation temps-échelle



(b) Coefficients d'ondelettes au niveau 1

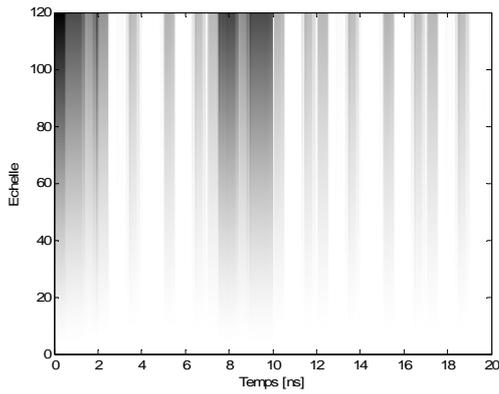


(c) Coefficients d'ondelettes au niveau 2

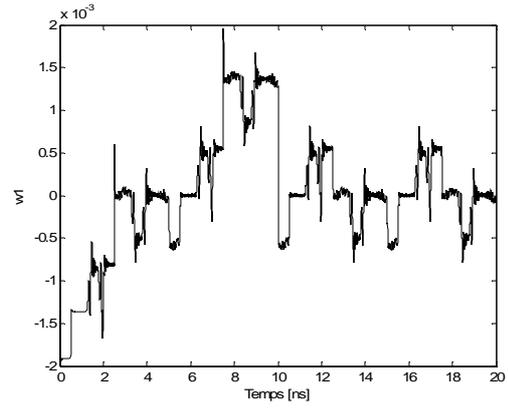


(d) Coefficients d'ondelettes au niveau 3

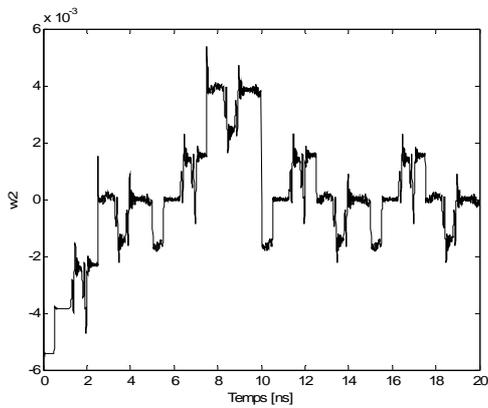
Figure 4.5 : Analyse en ondelettes du signal original sans perturbation en utilisant l'ondelette de Haar. (a) Représentation temps-échelle du signal sans perturbation. (b) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 1$. (c) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 2$. (d) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 3$.



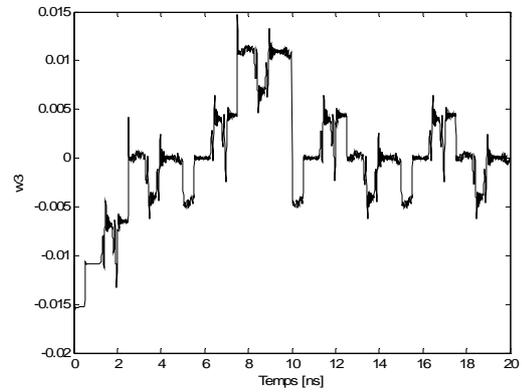
(a) Représentation temps-échelle



(b) Coefficients d'ondelettes au niveau 1

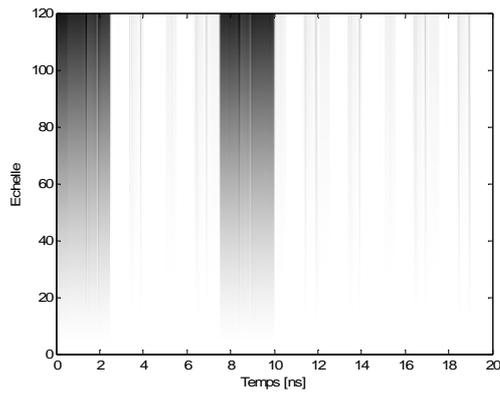


(c) Coefficients d'ondelettes au niveau 2

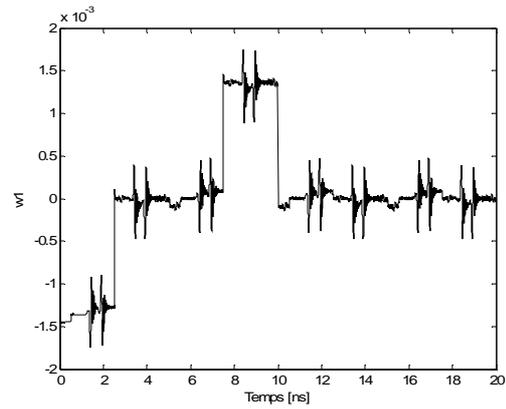


(d) Coefficients d'ondelettes au niveau 3

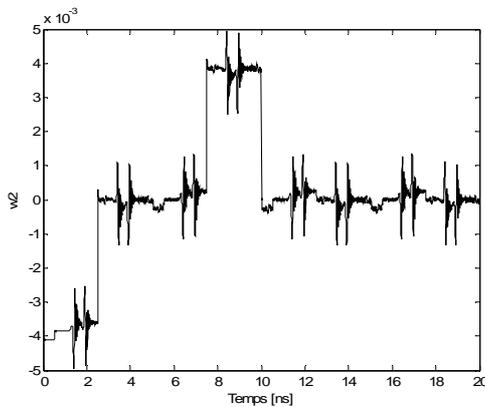
Figure 4.6 : Analyse en ondelettes du signal perturbé pour une distance de séparation de 1 mm en utilisant l'ondelette de Haar. (a) Représentation temps-échelle du signal perturbé. (b) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 1$. (c) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 2$. (d) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 3$.



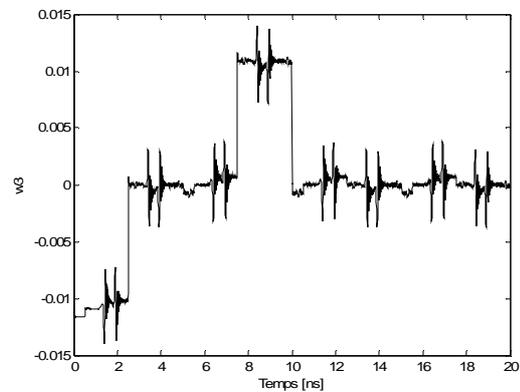
(a) Représentation temps-échelle



(b) Coefficients d'ondelettes au niveau 1



(c) Coefficients d'ondelettes au niveau 2



(d) Coefficients d'ondelettes au niveau 3

Figure 4.7 : Analyse en ondelettes du signal perturbé pour une distance de séparation de 5 mm en utilisant l'ondelette de Haar. (a) Représentation temps-échelle du signal perturbé. (b) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 1$. (c) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 2$. (d) Coefficients d'ondelettes au niveau de résolution $j = 3$.

4.4. Estimation de la fréquence du signal perturbateur

4.4.1. Procédure d'estimation

La fréquence du signal perturbateur est d'une grande importance du fait qu'elle fournit une information précieuse sur la source d'interférence. L'approche suivie pour son estimation consiste à effectuer un seuillage sur les coefficients d'ondelettes résultant de la décomposition aux niveaux de résolution fins du signal perturbé en utilisant l'ondelette de Daubechies (db) [Kac03b, Kac04]. Ce seuillage a pour effet d'éliminer les coefficients dus à l'interférence. Les coefficients d'ondelettes obtenus après seuillage sont associés au signal utile et correspondent aux instants de transition. Une approximation linéaire des échantillons du signal dans chaque intervalle défini par deux instants de transition consécutifs permet d'estimer le signal utile sans interférence et donc estimer le signal d'interférence comme suit

$$V_c(t) = V_{dis}(t) - V_{und}(t) \quad (4.1)$$

où $V_c(t)$, $V_{dis}(t)$ et $V_{und}(t)$ représentent le signal d'interférence, le signal perturbé et l'estimation du signal sans perturbation, respectivement. Notons que l'interférence est périodique et a la même période que le signal trapézoïdal qui l'a causé.

La méthode d'estimation de la fréquence du signal perturbateur consiste à effectuer une décomposition en ondelettes de l'interférence reconstruite et, par la suite, détecter les maximums de la séquence d'autocorrélation des coefficients résultant de cette décomposition. Une interpolation de la séquence d'autocorrélation des coefficients d'ondelettes permet de revenir à l'échelle originale du signal et estimer la période comme la durée entre deux maximums consécutifs. La procédure d'estimation de la fréquence du signal perturbateur se résume comme suit :

1. Analyse en ondelettes du signal perturbé

Le signal perturbé est la superposition du signal utile sans perturbation et de l'interférence qui introduit des coefficients d'ondelettes non nuls dans la décomposition. En effectuant une analyse en ondelettes aux échelles fines ($j = 1$) au moyen d'une ondelette ayant un nombre de moments nuls suffisamment élevé telle que l'ondelette db7, les détails fins correspondant aux transitions du signal non perturbé et les interférences causées par le signal perturbateur peuvent être facilement mis en évidence. L'utilisation d'une ondelette de Daubechies avec un nombre de moments nuls élevé permet de discriminer entre les deux sous ensembles de détails.

2. Seuillage des coefficients d'ondelettes

L'ensemble des coefficients d'ondelettes comprend des coefficients de faibles valeurs et des coefficients de grandes valeurs. Les coefficients de grandes valeurs proviennent des transitions du signal non perturbé alors que les coefficients de faibles valeurs sont dus au signal d'interférence. En annulant tous les coefficients qui n'excèdent pas un certain seuil choisi égal à 50 % du coefficient maximal, tous les coefficients d'ondelettes introduits par le signal d'interférence sont supprimés. Les coefficients restants proviennent du signal non perturbé et peuvent être utilisés pour localiser les instants de transition d'un niveau logique à un autre.

3. Reconstruction du signal d'interférence

Pour estimer le signal non perturbé, une approximation linéaire au sens des moindres carrés sur base des échantillons du signal perturbé dans chaque intervalle défini par deux instants de transitions successifs est utilisée. Le signal d'interférence est alors estimé par (4.1).

4. Décomposition en ondelettes du signal d'interférence

Le signal d'interférence est composé d'une suite d'impulsions de signes alternés. L'impulsion positive correspond au temps de montée du signal perturbateur alors que l'impulsion négative correspond au temps de descente. Une décomposition en ondelettes au niveau $j = 3$ rend plus claire cette structure quasi-périodique. L'ondelette d'analyse n'est pas contrainte d'avoir un grand nombre de moments nuls puisque les amplitudes des transitions dans l'interférence reconstruites sont du même ordre. Bien que la structure du

signal d'interférence est quasi-périodique, il est difficile d'obtenir une estimation directe de la période.

5. Calcul de la séquence d'autocorrélation

La période du signal d'interférence est estimée en calculant la séquence d'autocorrélation des coefficients d'ondelettes obtenus à l'étape 4 et en localisant ses maximums. Les coefficients d'ondelettes à un certain niveau sont calculés à partir des coefficients d'ondelettes du niveau inférieur par filtrage puis sous-échantillonnage d'un facteur 2. Pour maintenir l'échelle temporelle initiale, une opération de sur-échantillonnage est nécessaire. La durée entre deux valeurs maximales successives de la séquence d'autocorrélation sur-échantillonnée fournit une estimation de la période du signal d'interférence.

4.4.2. Résultats et discussion

L'approche d'estimation de la fréquence du signal perturbateur est illustrée par des exemples de simulation. Considérons le cas de d'une ligne perturbatrice véhiculant un signal logique représenté par une forme d'onde trapézoïdale de fréquence $f = 250$ MHz et de temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.25$ ns (Figure 4.8a). La ligne perturbée véhicule un signal de fréquence $f = 50$ MHz et de temps de montée et de descente $t_r = t_f = 2.5$ ns (Figure 4.8b). Le circuit imprimé utilisé dans cet exemple présente les mêmes caractéristiques que le circuit précédent. La ligne perturbatrice se trouve à une distance de 3 mm de la ligne perturbée. Les coefficients d'ondelettes résultant d'une décomposition au niveau 1 en utilisant l'ondelette de Daubechies db7 sont représentés sur la figure 4.8c. Les coefficients d'ondelettes associés aux instants de transition du signal utile sont beaucoup plus grands que les coefficients dus au signal d'interférence. En choisissant un seuil de 50% de la valeur maximale des coefficients d'ondelettes et en annulant les coefficients inférieurs à ce seuil, on arrive à isoler les coefficients dus au signal utile et, par conséquent, localiser les instants de transition et reconstruire le signal sans perturbation. La figure 4.8d montre le signal sans perturbation estimé. L'interférence reconstruite en utilisant (4.1) est représentée sur la figure 4.8e. On constate bien la présence d'impulsions de signes alternés qui correspondent aux temps de montée et de descente du signal perturbateur. Cependant, le signal d'interférence reconstruit n'est pas tout à fait périodique mais quasi-périodique à cause de l'erreur commise sur la localisation des coefficients d'ondelettes de la deuxième décomposition qui se répercute sur l'approximation linéaire du signal. En calculant la séquence d'autocorrélation du signal d'interférence on voit apparaître des pics de différentes amplitudes (Figure 4.8f). La période du signal perturbateur peut être estimée par la durée séparant deux pics consécutifs qui donne $T = 3.9864$ ns, d'où une fréquence estimée $\hat{f} = 250.8525$ MHz.

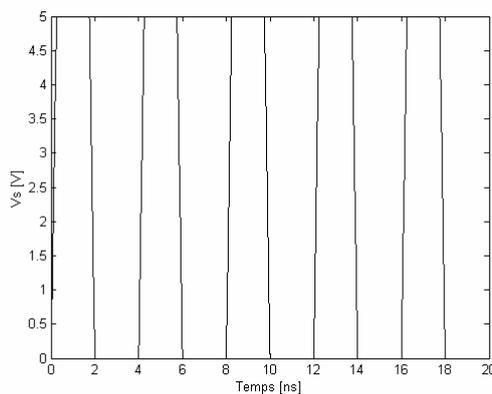
Au lieu d'utiliser la séquence d'autocorrélation du signal d'interférence pour estimer la fréquence du signal perturbateur, utilisons celle des coefficients d'ondelettes. La figure 4.8g montre les coefficients d'ondelettes obtenus par une décomposition au niveau 3 en utilisant l'ondelette de Daubechies db2. On constate bien le caractère quasi-périodique que présente ces coefficients. Néanmoins, il est difficile d'en déduire la fréquence du signal perturbateur. Cela devient possible en calculant la séquence d'autocorrélation qui fait apparaître des pics bien localisés (Figure 4.8h). Après retour à l'échelle originale par interpolations successives, l'estimation de la période du signal perturbateur comme la durée entre deux pics consécutifs donne $T = 3.9960$ ns qui correspond à une fréquence

estimée $\hat{f} = 250.2481$ MHz. On note que les pics de la séquence d'autocorrélation des coefficients d'ondelettes sont définis avec plus de précision que les pics de la séquence d'autocorrélation du signal d'interférence reconstruit par seuillage. La figure 4.9 illustre les résultats obtenus pour des distances de séparation entre la ligne perturbatrice et la ligne perturbée égales à 10 mm et 15 mm. Dans tous les cas, la fréquence est estimée avec une très bonne précision.

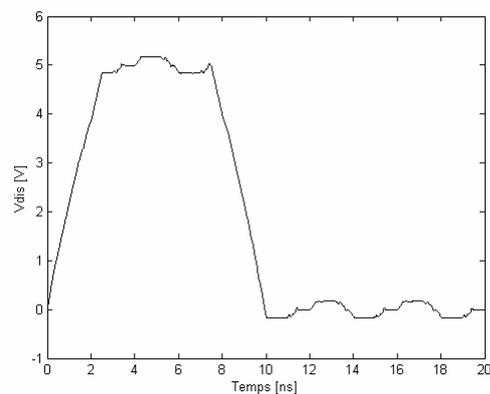
Considérons un autre exemple dans lequel le signal perturbateur a une fréquence $f = 100$ MHz et des temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.5$ ns. Le signal perturbé est celui de l'exemple précédent ($f = 50$ MHz, temps de montée et de descente $t_r = t_f = 2.5$ ns). La figure 4.10 montre les résultats obtenus pour une distance de séparation de 3 mm. Le calcul à partir de la séquence d'autocorrélation du signal d'interférence reconstruit donne une fréquence estimée $\hat{f} = 100.4381$ MHz, alors qu'à partir de la séquence d'autocorrélation des coefficients d'ondelette, on trouve $\hat{f} = 99.9547$ MHz. Notons que même en augmentant la distance de séparation, la fréquence du signal perturbateur est estimée avec une très bonne précision.

Considérons le cas où la fréquence du signal perturbateur n'est ni entière ni multiple de la fréquence du signal perturbé. Le signal perturbateur a pour fréquence $f = 141.2965$ MHz et des temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.5$ ns alors que le signal perturbé possède toujours les mêmes caractéristiques que précédemment, soit $f = 50$ MHz et $t_r = t_f = 2.5$ ns. Comme montré sur la figure 4.11, les pics de la séquence d'autocorrélation sont bien apparents. La fréquence estimée à partir de la séquence d'autocorrélation du signal d'interférence reconstruit est $\hat{f} = 142.6551$ MHz alors que celle calculée en passant à une décomposition en ondelettes au niveau 3 est $\hat{f} = 144.4408$ MHz.

Cette fréquence estimée sera utilisée pour déterminer la distance séparant la ligne perturbatrice et la ligne perturbée qui est un paramètre très important dans l'identification de la ligne source de perturbation.

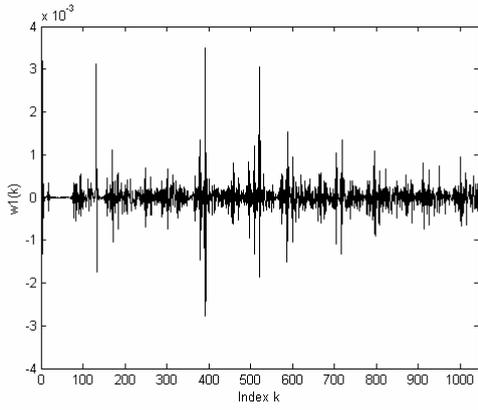


(a) Signal perturbateur

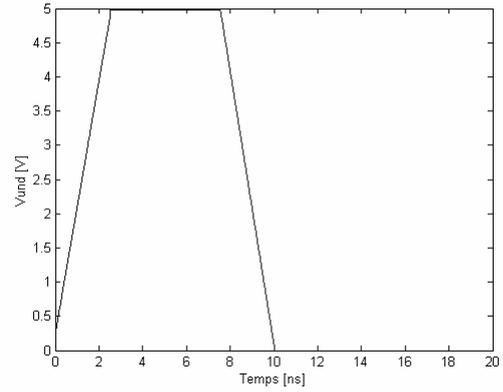


(b) Signal perturbé

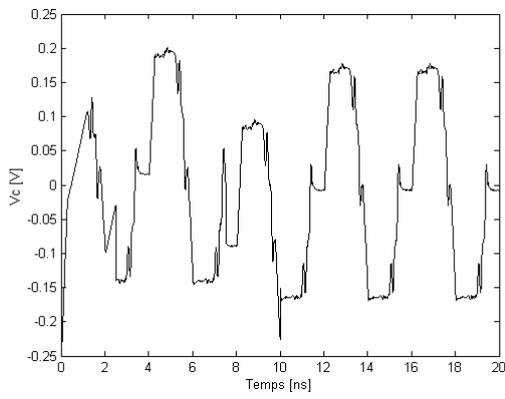
Figure 4.8: Illustration de la procédure d'estimation de la fréquence du signal perturbateur. Fréquence du signal perturbateur $f = 250$ MHz, distance de séparation $d = 3$ mm.



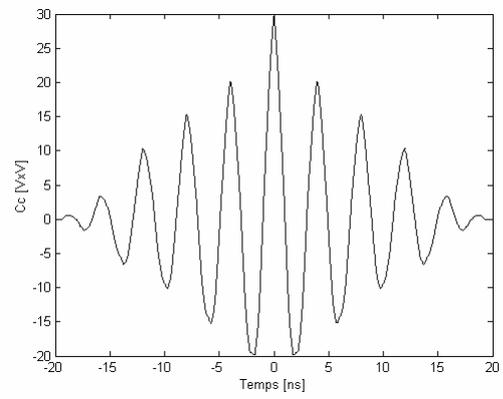
(c) Coefficients d'ondelettes au niveau 1 utilisant l'ondelette db7



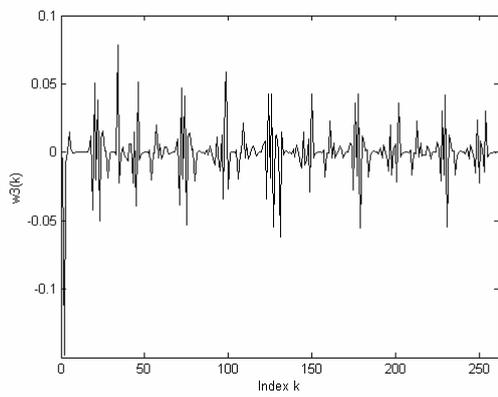
(d) signal reconstruit



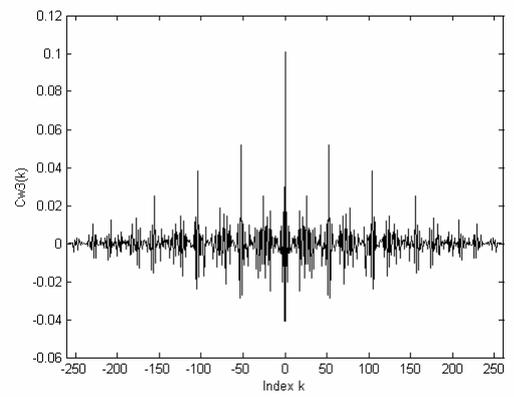
(e) interférence reconstruite



(f) autocorrélation de l'interférence reconstruite

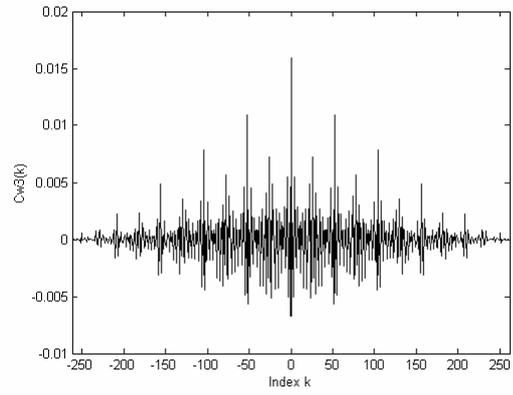
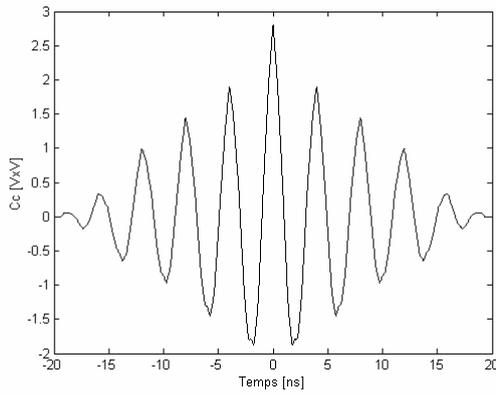


(g) Coefficients d'ondelettes au niveau 3 utilisant l'ondelette db2



(h) Autocorrélation des coefficients d'ondelettes au niveau 3

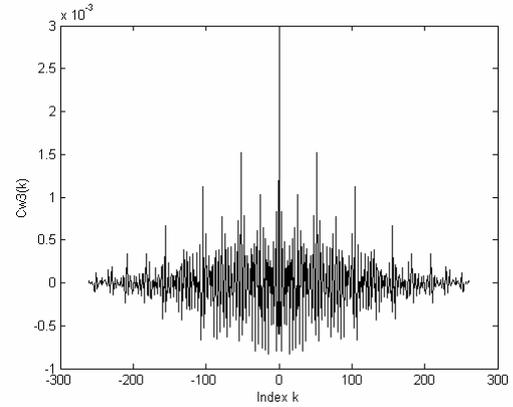
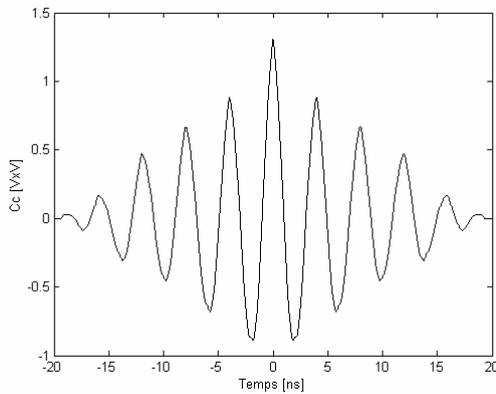
Figure 4.8 (suite)



(i) Autocorrélation de l'interférence reconstruite

(ii) Autocorrélation des coefficients d'ondelettes

(a) Distance de séparation de 10 mm

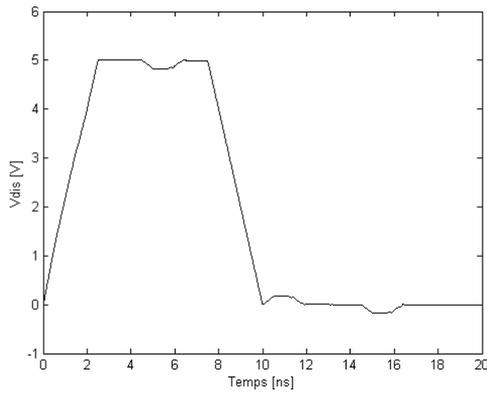


(i) Autocorrélation de l'interférence reconstruite

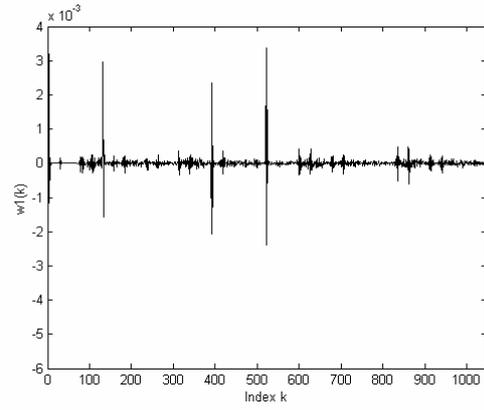
(ii) Autocorrélation des coefficients d'ondelettes

(b) Distance de séparation de 15 mm

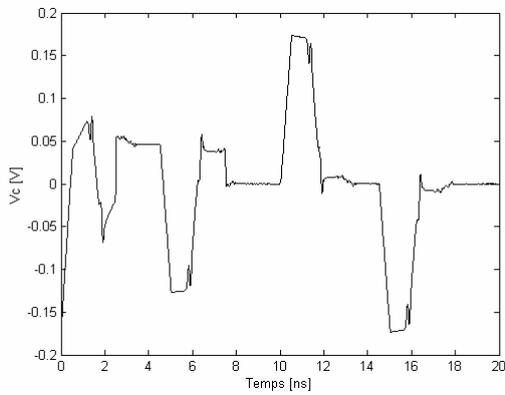
Figure 4.9: Séquence d'autocorrélation de l'interférence reconstruite et des coefficients d'ondelettes au niveau 3 pour différentes valeurs de la distance de séparation. (a) $d = 5$ mm. (b) $d = 15$ mm.



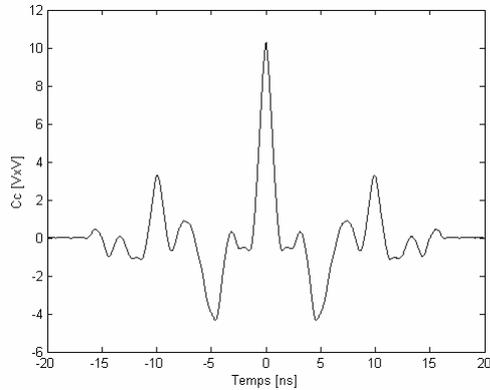
(a) Signal perturbé



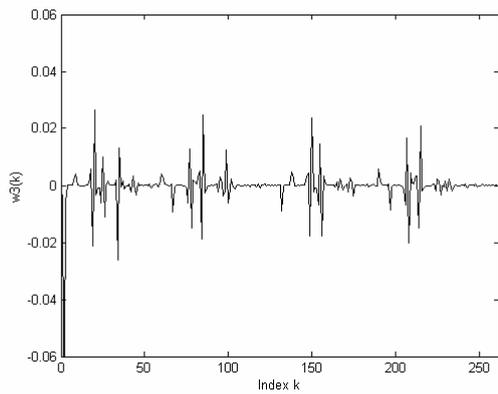
(b) Coefficients d'ondelettes au niveau 1 du signal perturbé utilisant l'ondelette db7



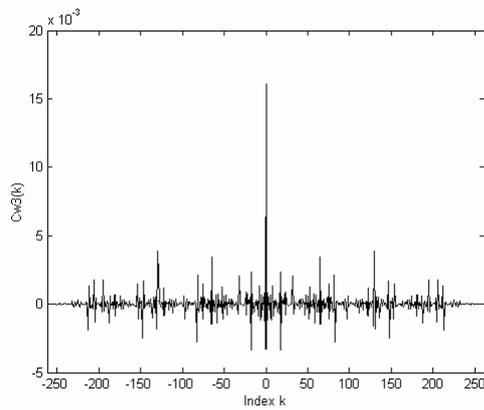
(c) Interférence reconstruite



(d) Autocorrélation de l'interférence reconstruite

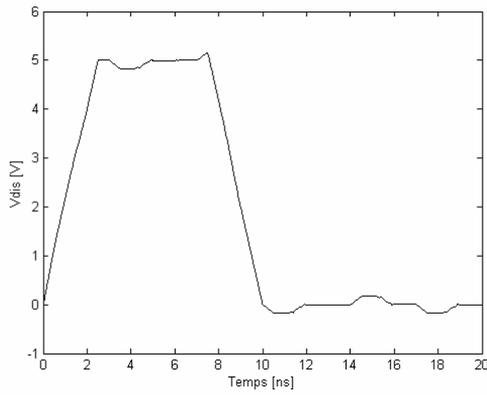


(e) Coefficients d'ondelettes au niveau 3 de l'interférence reconstruite utilisant l'ondelette db2

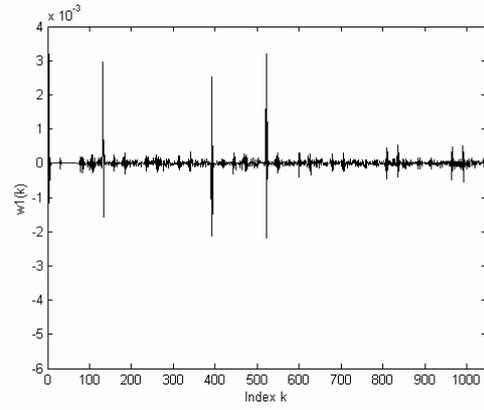


(f) Autocorrélation des coefficients d'ondelettes au niveau 3

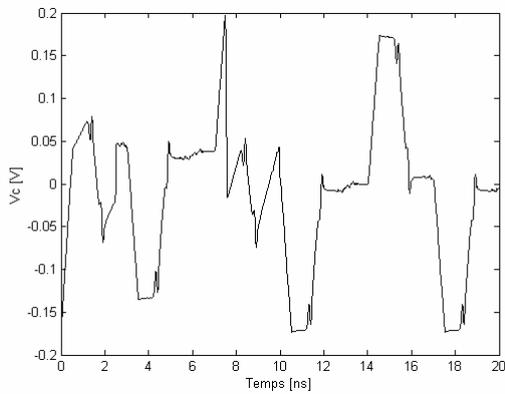
Figure 4.10: Etapes d'estimation de la fréquence pour un signal perturbateur de fréquence $f = 100$ MHz et une distance de séparation de 3 mm.



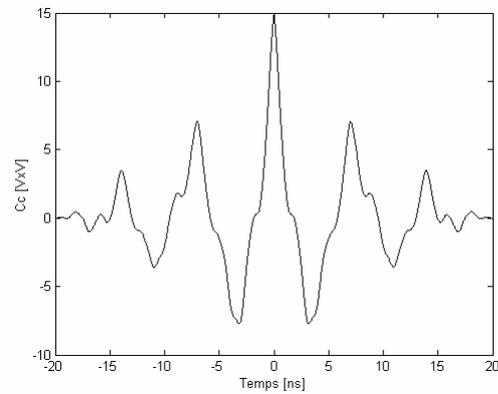
(a) Signal perturbé



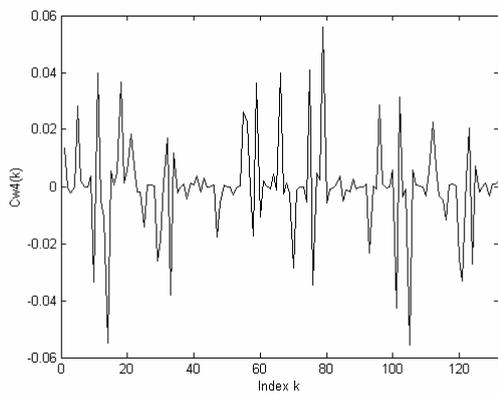
(b) Coefficients d'ondelettes au niveau 1 du signal perturbé utilisant l'ondelette db7



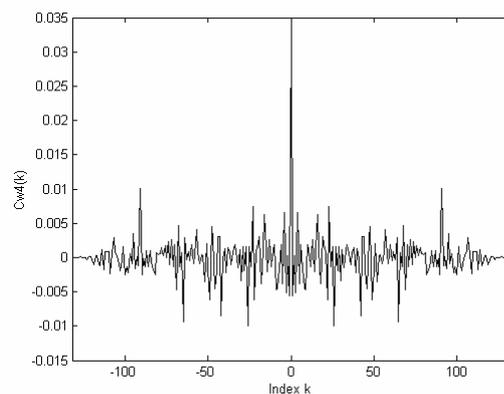
(c) Interférence reconstruite



(d) Autocorrélation de l'interférence reconstruite



(e) Coefficients d'ondelettes au niveau 3 de l'interférence reconstruite utilisant l'ondelette db2



(f) Autocorrélation des coefficients d'ondelettes au niveau 3

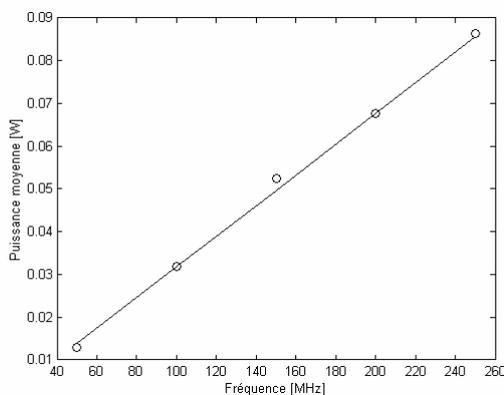
Figure 4.11: Etapes d'estimation de la fréquence pour un signal perturbateur de fréquence $f = 141.2965$ MHz et une distance de séparation de 3 mm.

4.5. Détermination de la distance de séparation

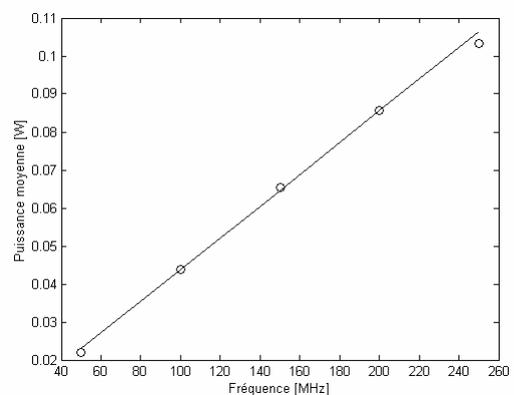
4.5.1. Procédure de calcul

L'algorithme proposé pour estimer la distance séparant la ligne perturbatrice et la ligne perturbée utilise deux lois empiriques vérifiées par des simulations. On suppose que les puissances moyennes de deux interférences causées par deux signaux de référence de fréquences différentes et connues véhiculés par une ligne perturbatrice se trouvant à une certaine distance de référence aussi connue ont été obtenues par simulation durant une étape de prétraitement. Ses signaux sont considérés comme des signaux de référence.

La première loi concerne la variation de la puissance moyenne du signal d'interférence en fonction de la fréquence. Des simulations ont montré que la puissance moyenne de l'interférence croît linéairement avec sa fréquence. La figure 4.12 montre la variation de la puissance moyenne du signal d'interférence pour cinq valeurs différentes de la fréquence en prenant comme distance de référence $d_{ref} = 1$ mm. Les paramètres du circuit imprimé utilisé sont : permittivité $\varepsilon_r = 5$, épaisseur $h = 1.5$ mm et largeur des pistes $w = 1$ mm. Les résultats montrés sur la figure 4.12a sont obtenus en reconstruisant le signal d'interférence à partir du signal perturbé selon l'approche décrite précédemment alors que ceux montrés sur la figure 4.12b sont obtenus en simulant le signal d'interférence, c'est à dire l'interférence est générée sur la ligne perturbée lorsque cette dernière ne véhicule aucun signal utile. Comme observé sur la figure, une loi linéaire décrit bien cette dépendance dans la plage des fréquences utiles pour les circuits imprimés.



(a) Interférences reconstruites à partir du signal perturbateur



(b) Interférences simulées

Figure 4.12: Approximation des puissances moyennes des interférences par une fonction linéaire de la fréquence. (a) Interférences reconstruites à partir du signal perturbé. (b) Interférences simulées.

Connaissant les puissances moyennes des interférences causées par les deux signaux de référence, il est possible de déduire une relation donnant la variation de la puissance moyenne du signal d'interférence en fonction de la fréquence pour la distance de référence d_{ref} . La variation de la puissance moyenne du signal d'interférence en fonction de la fréquence s'exprime comme suit :

$$P_i(d_{ref}, f) = a f + b \quad (4.2)$$

où P_i est la puissance moyenne du signal d'interférence, f est sa fréquence et a et b sont deux constantes à déterminer connaissant les puissances moyennes de référence.

Dés lors, il est possible de déterminer la puissance moyenne de tout signal d'interférence dont la fréquence a été déterminée selon la procédure développée dans la section précédente.

Pour estimer la distance séparant deux lignes couplées, une loi empirique basée sur des simulations et reliant la puissance moyenne du signal d'interférence à la distance de séparation a été proposée sous une forme équivalente à l'équation du 'path loss' de la propagation électromagnétique. Cette relation est exprimée par

$$P_i(d, f) = \frac{K(f)}{d^\alpha} \quad (4.3)$$

où d est la distance de séparation, α est une constante qui dépend de l'épaisseur du circuit imprimé et $K(f)$ est un paramètre dépendant de la fréquence déterminé à partir de la puissance moyenne de l'interférence générée par le signal de référence. En posant $d = d_{ref}$, dans (4.3), le paramètre $K(f)$ est obtenu comme

$$K(f) = P_i(d_{ref}, f) d_{ref}^\alpha \quad (4.4)$$

Substituons (4.4) et (4.2) dans (4.3), il vient

$$\begin{aligned} P_i(d, f) &= P_i(d_{ref}, f) \left(\frac{d_{ref}}{d} \right)^\alpha \\ &= (a f + b) \left(\frac{d_{ref}}{d} \right)^\alpha \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour une certaine fréquence, la puissance moyenne de l'interférence suit une variation hyperbolique en fonction de la distance de séparation. Pour étudier la variation de l'exposant α en fonction de l'épaisseur du circuit imprimé, plusieurs simulations ont été effectuées. L'exposant α calculé au moyen d'une approximation au sens des moindres carrés décroît linéairement lorsque l'épaisseur du circuit imprimé augmente (Figure 4.13) et la loi de variation, représentée en trait pointillé, est approximée par la relation suivante :

$$\alpha = -0.1812 h + 2.4898 \quad (4.6)$$

Des simulations ont montré que pour une épaisseur h constante, l'exposant α est quasi-constant dans la plage des valeurs de la permittivité utiles pour les circuits imprimés.

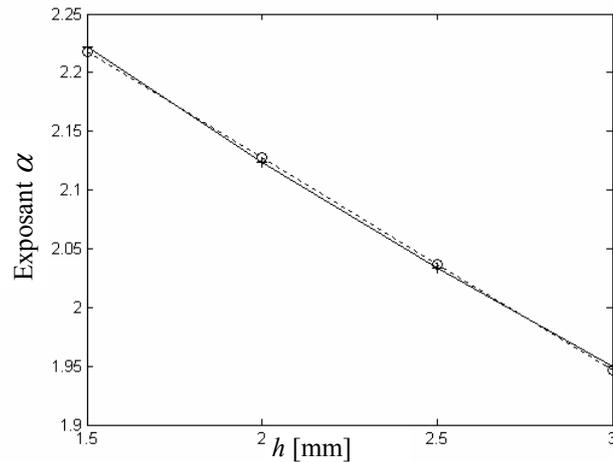


Figure 4.13: Variation de l'exposant α en fonction de l'épaisseur h du circuit imprimé. Les symboles '+' indiquent les valeurs obtenues par calcul sur base des puissances moyennes des interférence estimées et les symbole 'o' indiquent les valeurs obtenues par approximation au sens des moindres carrés.

L'algorithme de calcul de la distance de séparation est résumé comme suit :

1. Estimation de la fréquence du signal d'interférence en utilisant l'algorithme basé sur l'analyse en ondelettes.
2. Obtention de la relation linéaire entre la puissance moyenne du signal d'interférence et la fréquence pour une distance de référence d_{ref} . Cela implique le calcul des constantes a et b dans (4.2) à partir de la connaissance des puissances moyennes d'une interférence de référence obtenue durant une étape de prétraitement.
3. Calcul de α en utilisant (4.6)
4. Calcul de la puissance moyenne du signal d'interférence reconstruit obtenu durant l'étape d'estimation de la fréquence.
5. Calcul de la distance de séparation en utilisant (4.5).

4.5.2. Résultats et discussion

Considérons un signal perturbateur de fréquence $f = 250$ MHz et de temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.25$ ns et un signal perturbé de fréquence $f = 50$ MHz et de temps de montée et de descente $t_r = t_f = 2.5$ ns. Les paramètres du circuit imprimé utilisé sont : permittivité $\epsilon_r = 4.7$, épaisseur du substrat $h = 1.5$ mm et largeur des pistes $w = 2$ mm. La distance séparant les deux lignes est de 3 mm. Après reconstruction de l'interférence à partir du signal perturbé, le calcul fournit une fréquence estimée $\hat{f} = 250.2481$ MHz. Pour obtenir la relation linéaire entre la puissance moyenne du signal d'interférence et la fréquence pour une distance de référence de 1 mm, deux puissances moyennes d'interférences associées à des signaux perturbateurs de fréquences 100 MHz et 200 MHz ont été utilisées. Elles étaient calculées à partir des signaux d'interférences reconstruits durant l'étape d'estimation de la fréquence. Les puissances moyennes correspondantes

sont égales à 0.0318 W et 0.0677 W, respectivement. La substitution de ces valeurs dans (4.2) permet de calculer les constantes a et b définissant la relation linéaire. Le calcul fournit $a = 3.59 \times 10^{-4}$ et $b = 0.0209$. L'équation (4.6) fournit un exposant $\alpha = 2.1274$. La puissance moyenne $P_i = 0.0143$ du signal d'interférence reconstruit durant l'étape d'estimation de la fréquence permet de calculer la distance de séparation en utilisant (4.5). En utilisant (4.5), le calcul fournit une distance estimée

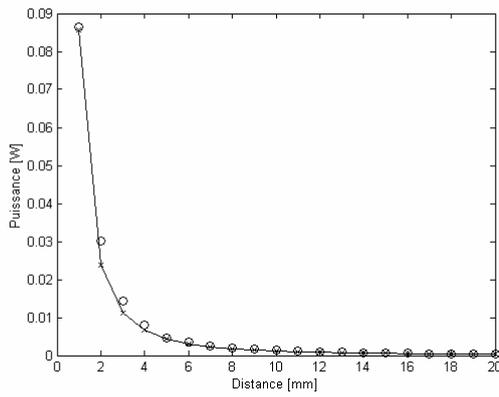
$$\hat{d} = \left(\frac{af + b}{P_i} \right)^{\frac{1}{\alpha}} d_{ref} = 2.62 \text{ mm.}$$

L'approche proposée fournit une estimation précise même pour des grandes valeurs de la distance séparant les deux lignes couplées. La même procédure de calcul a été appliquée à des lignes séparées par des distances variant de 1 mm à 20 mm avec un pas de 1 mm. La figure 4.14a représente les puissances moyennes calculées sur base des échantillons du signal d'interférence reconstruit (symboles 'x') et les puissances moyennes obtenues par approximation en utilisant la relation (4.5) (symboles 'o') pour les différentes valeurs de la distance de séparation. La figure 4.14b donne la même représentation graphique en utilisant une échelle logarithmique.

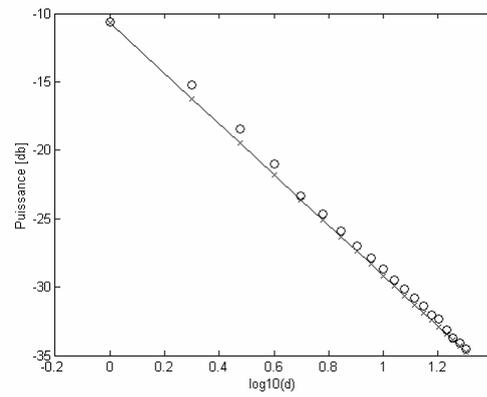
Les figures 4.15 et 4.16 montrent les résultats obtenus pour des signaux perturbateurs de fréquences $f = 100$ MHz et $f = 141.2965$ MHz caractérisés par des temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.5$ ns.

La relation (4.5) fournit donc un moyen de calcul de la distance séparant la ligne perturbatrice et la ligne perturbée avec une certaine tolérance. La distance estimée selon l'approche proposée en fonction de la distance de séparation exacte est représentée graphiquement pour les différents signaux perturbateurs sur la figure 4.17. Si on considère, par exemple, le cas d'un circuit imprimé dans lequel la distance entre deux pistes quelconques est un nombre multiple d'un certain pas, en fixant une tolérance, il est possible de déterminer exactement la distance entre la ligne perturbatrice et la ligne perturbée.

L'algorithme global d'estimation de la fréquence du signal perturbateur et de la distance séparant les deux lignes couplées permet la localisation de la ligne perturbatrice avec une précision acceptable dont l'intérêt est considérable durant la phase de conception des circuits imprimés.

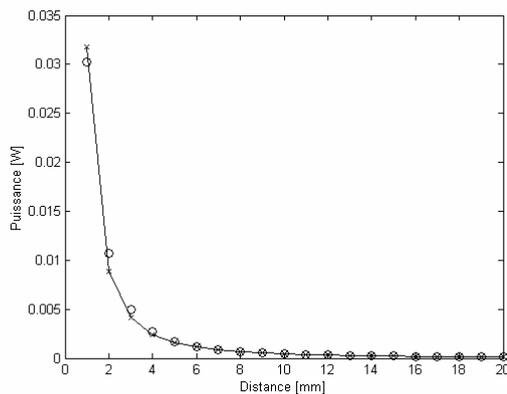


(a) Echelle linéaire.

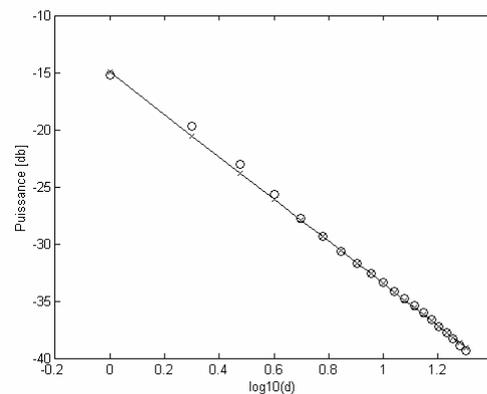


(b) Echelle logarithmique.

Figure 4.14: Variation de la puissance moyenne en fonction de la distance de séparation pour un signal perturbateur de fréquence $f = 250$ MHz et de temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.25$ ns. Les symboles 'o' désignent les valeurs calculées par reconstruction de l'interférence et les symboles 'x' désignent les valeurs obtenues en utilisant la relation (4.5). (a) Echelle linéaire. (b) Echelle logarithmique.



(a) Echelle linéaire



(b) Echelle logarithmique

Figure 4.15: Variation de la puissance moyenne en fonction de la distance de séparation pour un signal perturbateur de fréquence $f = 100$ MHz et de temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.5$ ns. Les symboles 'o' désignent les valeurs calculées par reconstruction de l'interférence et les symboles 'x' désignent les valeurs obtenues en utilisant la relation (4.5). (a) Echelle linéaire. (b) Echelle logarithmique.

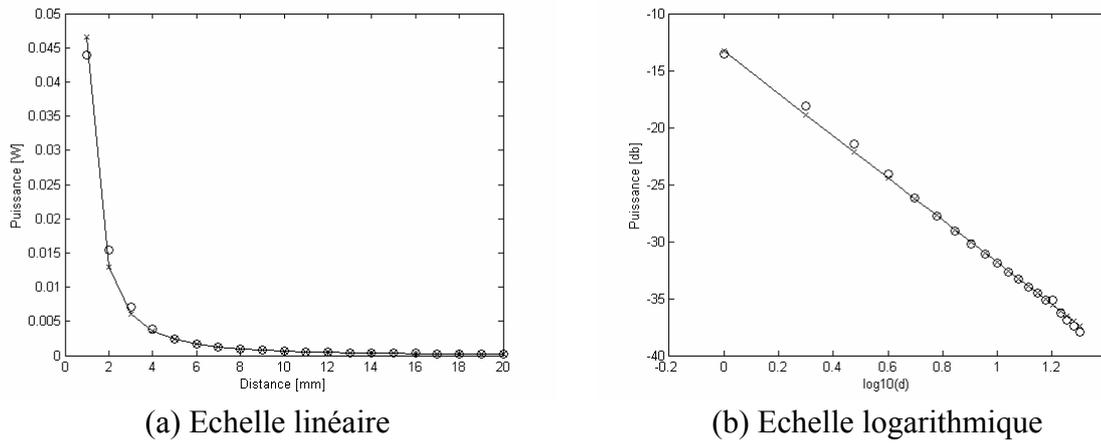


Figure 4.16: Variation de la puissance moyenne en fonction de la distance de séparation pour un signal perturbateur de fréquence $f = 141.2965$ MHz et de temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.5$ ns. Les symboles 'o' désignent les valeurs calculées par reconstruction de l'interférence et les symboles 'x' désignent les valeurs obtenues en utilisant la relation (4.5). (a) Echelle linéaire. (b) Echelle logarithmique.

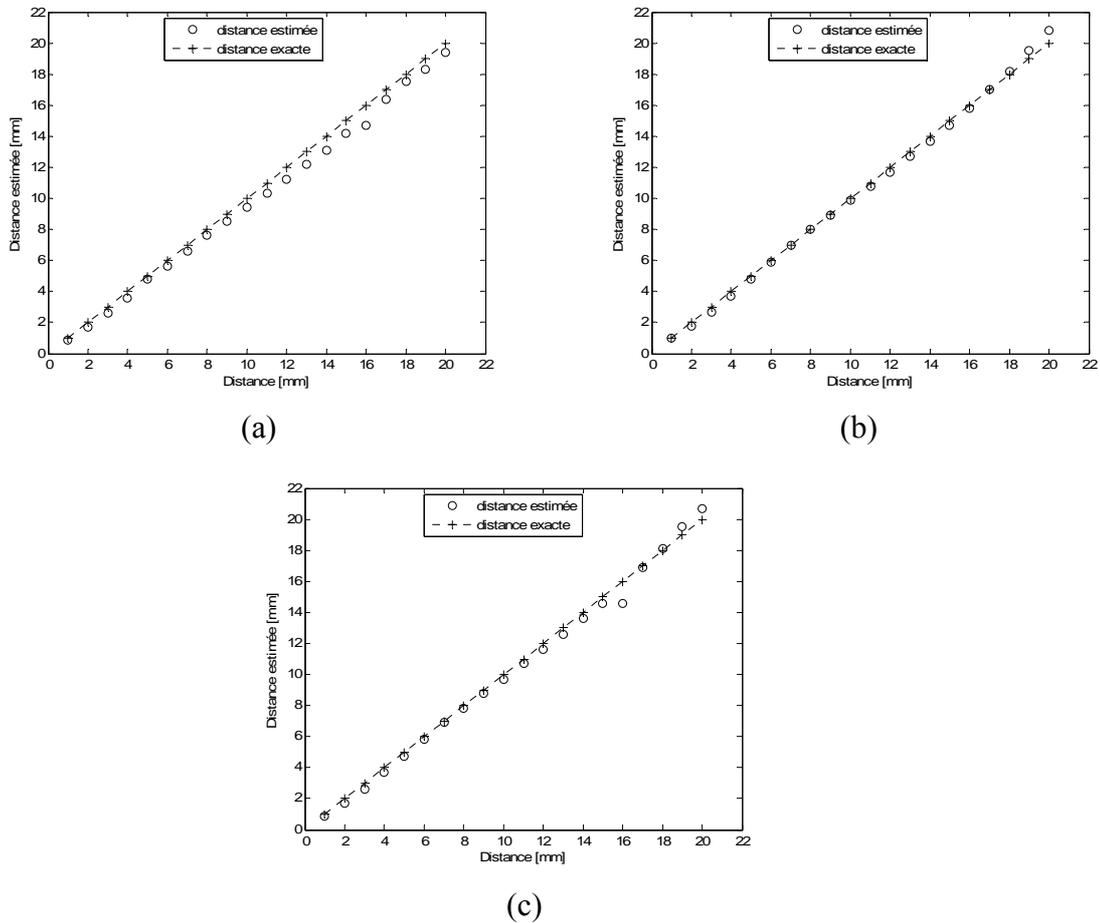


Figure 4.17 : Distance estimée en fonction de la distance exacte pour des signaux perturbateurs avec différents paramètres. (a) Signal perturbateur de fréquence $f = 250$ MHz et de temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.25$ ns. (b) Signal perturbateur de fréquence $f = 100$ MHz et de temps de montée et de descente $t_f = t_r = 0.5$ ns. (c) Signal perturbateur de fréquence $f = 141.2965$ MHz et de temps de montée et de descente $t_f = t_r = 0.5$ ns.

4.6. Réduction des interférences

Dans les simulations des interférences électromagnétiques, nous avons considéré le cas de deux lignes parallèles de 10 cm de longueur. Le phénomène d'interférences électromagnétiques est d'autant plus important que les lignes sont longues et que l'angle entre elles est petit. La diminution de la longueur des pistes permet de diminuer l'amplitude des interférences ainsi que la durée des impulsions. Sur la figure 4.18 ont été superposées les interférences causées par des lignes perturbatrices de longueurs 10 cm (trait pointillé) et 2 cm (trait continu) véhiculant un signal logique de fréquence $f = 250$ MHz et de temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.25$ ns et séparées par une distance de 1 mm de la ligne perturbée.

Le parallélisme des pistes favorise également le phénomène d'interférences. Le concepteur de circuits imprimés doit s'efforcer pour effectuer des connexions les une inclinées par rapport aux autres pour réduire au maximum l'amplitude et la durée des impulsions d'interférences. Sur La figure 4.19 ont été représentées les interférences obtenues dans le cas d'une ligne perpendiculaire (trait continu) et d'une ligne parallèle (trait pointillé) à la ligne perturbée. Les deux lignes ont des longueurs de 5 cm alors que le signal perturbateur a une fréquence $f = 250$ MHz et un temps de montée et de descente $t_r = t_f = 0.25$ ns. Dans le cas des lignes parallèles, la distance de séparation est de 1 mm alors que dans le cas des lignes perpendiculaires, les deux extrémités des lignes sont placées l'une à coté de l'autre et elles sont séparées par une distance de 1 mm.

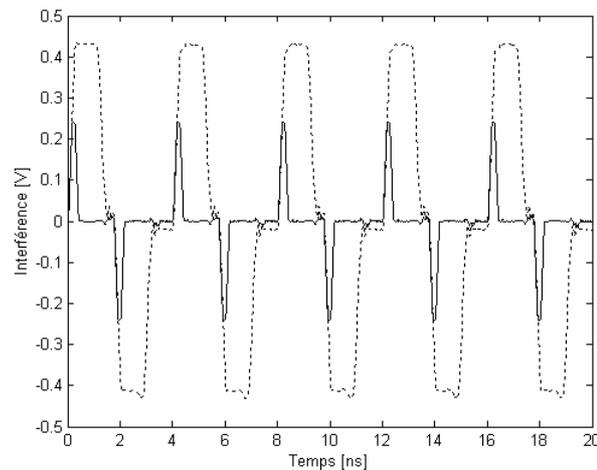


Figure 4.18: Effet de la longueur des lignes sur les interférences électromagnétiques. La courbe en trait continu correspond à une ligne perturbée de longueur 2 cm et la courbe en trait pointillé correspond à une longueur de 10 cm.

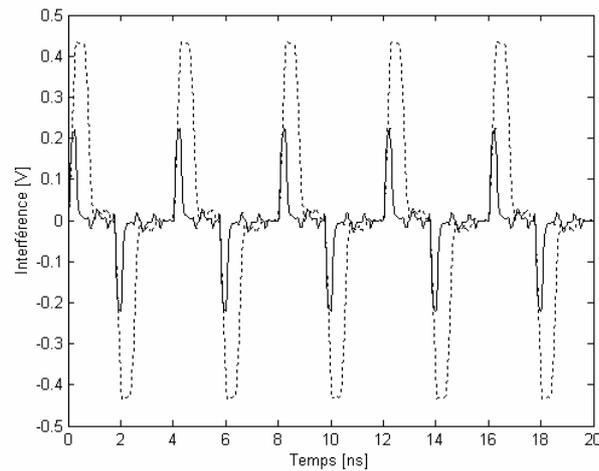


Figure 4.19: Effet de la direction des lignes sur les interférences. La courbe en trait continu correspond à deux pistes perpendiculaires et la courbe en trait pointillé correspond à deux lignes parallèles.

4.7. Conclusion

La méthode d'identification de la ligne perturbatrice sur circuits imprimés utilisant l'analyse en ondelettes a été validée par simulation de signaux logiques véhiculés par deux lignes sur un circuit imprimé. La procédure d'identification est basée sur l'estimation de la fréquence du signal d'interférence et la détermination de la distance séparant les lignes couplées. L'approche proposée ne fait aucune supposition concernant la localisation de la ligne perturbatrice. La connaissance des puissances moyennes de signaux d'interférence générés par deux signaux de référence de fréquences connues et émis à partir d'une certaine distance de référence permet de déterminer avec une bonne précision la distance de séparation.

Chapitre 5

Analyse temps-fréquence par modélisation autorégressive

5.1. Introduction

Plusieurs méthodes paramétriques, fréquemment utilisées en estimation spectrale des signaux stationnaires ont été étendues au cas non stationnaire. Particulièrement, le problème de la modélisation temps-variant et l'estimation spectrale des signaux non stationnaires basées sur un modèle autorégressif (AR) a fait l'objet de plusieurs travaux [Gre83, Con99a,b]. Dans [Gre83], la représentation du filtre en treillis a été étendue au cas non stationnaire et une procédure similaire à l'algorithme récursif de Levinson permettant de calculer les coefficients du modèle AR temps-variant a été développée. La densité spectrale de puissance temps-variant a été utilisée alors comme une distribution temps-fréquence.

La modélisation AR est étroitement liée au problème de la prédiction linéaire. En effet, le modèle AR et le prédicteur linéaire optimal sont identiques s'ils ont le même ordre. La forme usuelle de la prédiction linéaire est la prédiction unilatérale qui consiste à exprimer l'échantillon courant du signal par une somme pondérée des échantillons passés. Une autre forme de la prédiction linéaire, appelée prédiction linéaire bilatérale, a été introduite et appliquée à plusieurs problèmes en traitement du signal pour améliorer les performances de la prédiction linéaire unilatérale [Dav91, Lee89, Hsu93, Hsu94]. Dans la prédiction linéaire bilatérale, l'échantillon courant du signal est estimé par une combinaison linéaire symétrique des échantillons passés et futurs. Il a été montré que le modèle de prédiction linéaire bilatérale présente des performances supérieures à celles du modèle de prédiction linéaire unilatérale dans plusieurs situations. En particulier, il a été montré que le modèle à base de prédiction linéaire bilatérale conduit à une plus petite erreur de prédiction et une meilleure résolution fréquentielle que le modèle basé sur la prédiction linéaire unilatérale.

L'objectif de ce chapitre est de développer les différentes méthodes d'estimation de la distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR temps-variant. Après avoir présenté les méthodes de traitement par bloc ainsi que les méthodes récursives, on propose une distribution temps-fréquence basée sur le modèle de prédiction linéaire bilatérale temps-variant comme alternative au modèle de prédiction linéaire unilatérale conventionnel. On montre que la représentation temps-fréquence proposée présente des meilleures performances que celles de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire unilatéral temps-variant en terme de résolution temps-fréquence. La distribution temps-

fréquence basée sur le modèle de prédiction linéaire bilatérale temps-variant est également utilisée pour estimer la fréquence instantanée. Enfin, la distribution temps-fréquence utilisant le prédicteur linéaire bilatéral temps-variant est étendue aux signaux vectoriels. Le chapitre présente des exemples permettant de comparer les performances des distributions temps-fréquence utilisant les prédicteurs linéaires unilatéral et bilatéral temps-variant et celles de la distribution de Choi-Williams (cf. § 1.3.5.1.).

5.2. Analyse temps-fréquence basée sur le modèle AR non stationnaire

5.2.1. Modélisation AR non stationnaire

Soit $x(n)$ un processus stochastique discret de moyenne nulle. La représentation AR temps-variant de $x(n)$ est donnée par [Gre83]

$$x(n) = -\sum_{i=1}^p a_i(n-i)x(n-i) + u(n) \quad (5.1)$$

où p est l'ordre du modèle AR temps-variant, $u(n)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 et $a_i(n)$, $i = 1, \dots, p$, sont les coefficients AR temps-variant.

Plusieurs méthodes de calcul des coefficients du modèle AR temps-variant ont été développées dans la littérature. Une approche consiste à supposer que le signal est localement stationnaire, ce qui signifie que les coefficients $a_i(n)$ évoluent lentement dans le temps, et alors appliquer les algorithmes dédiés au cas stationnaire sur des fenêtres d'analyse de courte durée. Les performances de cette approche dépendent essentiellement de la longueur de la fenêtre. Si les propriétés statistiques du signal varient rapidement, l'algorithme doit être appliqué sur des fenêtres très courtes afin de pouvoir suivre l'évolution du signal entraînant ainsi une dégradation notable de la qualité d'estimation.

Une deuxième approche est basée sur la modélisation des coefficients $a_i(n)$ comme un processus Markovien. Si les paramètres du modèle de Markov sont connus, le problème d'estimation des paramètres $a_i(n)$ se réduit simplement à l'estimation des états du modèle en utilisant un estimateur basé sur le filtre de Kalman. Si la matrice de transition et la covariance du bruit sont inconnues, le problème devient celui d'une estimation non linéaire simultanée de l'état et des paramètres du modèle.

Une troisième approche qui sera développée dans ce chapitre consiste à approximer les coefficients $a_i(n)$ par une combinaison linéaire d'un nombre réduit de fonctions de base f_j [Hal83, Nie02]

$$a_i(n) = \sum_{j=0}^m a_{ij} f_j(n) \quad (5.2)$$

Un choix adéquat des fonctions de base permet de modéliser une grande variété de signaux non stationnaires. Il existe une multitude de fonctions de base dans la littérature. Dans [RaoT70], les fonctions de base n'étaient autre que le développement en série de Taylor de second ordre des coefficients AR temps-variant alors que dans [Lip75], une décomposition à un ordre quelconque a été utilisée. D'autres choix possibles de fonctions de base incluent la base de Fourier, les polynômes de Legendre et les fonctions sphéroïdales (prolate spheroidal) [Hal83, Gre83, Nie02].

Moyennant la formulation donnée par (5.2), le problème de la modélisation AR temps-variant se réduit à la détermination des coefficients constants a_{ij} . Chaque terme de la somme (5.1) peut être écrit comme

$$a_i(n-i)x(n-i) = \sum_{j=0}^m a_{ij} f_j(n-i)x(n-i) \quad (5.3)$$

Définissons le vecteur \mathbf{X}_{n-i} comme

$$\mathbf{X}_{n-i} = [f_0(n-i)x(n-i) \cdots f_m(n-i)x(n-i)]^T \quad (5.4)$$

où T dénote le vecteur transposé. Donc, (5.3) devient

$$a_i(n-i)x(n-i) = [a_{i0} \cdots a_{im}] \mathbf{X}_{n-i} \quad (5.5)$$

L'équation de récurrence décrivant le processus AR non stationnaire prend alors la forme suivante :

$$x(n) + [\mathbf{X}_{n-1}^T \cdots \mathbf{X}_{n-p}^T] \mathbf{A} = u(n) \quad (5.6)$$

où \mathbf{A} est le vecteur donné par

$$\mathbf{A} = [a_{10} \cdots a_{1m} \ a_{20} \cdots a_{2m} \ \cdots \ a_{p0} \cdots a_{pm}]^T \quad (5.7)$$

L'innovation $u(n)$ du processus AR non stationnaire est identique à l'erreur de prédiction $e_1(n) = x(n) - \hat{x}(n)$, où $\hat{x}(n)$ est le prédicteur optimal de $x(n)$ sur base des p échantillons passés, et les paramètres AR sont identiques aux coefficients du prédicteur optimal, ce qui se traduit par

$$\hat{x}(n) = -[\mathbf{X}_{n-1}^T \cdots \mathbf{X}_{n-p}^T] \mathbf{A} \quad (5.8)$$

La minimisation de l'erreur quadratique moyenne $\varepsilon_1^2 = E[e_1^2(n)]$, où le symbole E dénote la moyenne statistique, conduit à l'ensemble des équations linéaires dont la forme est identique à celle de l'ensemble des équation de Yule-Walker

$$E \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1}^T & \cdots & \mathbf{X}_{n-p}^T \end{bmatrix} \right) \mathbf{A} = -E \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n-p} \end{bmatrix} x(n) \right) \quad (5.9)$$

Le système d'équations (5.9) est le résultat de la minimisation de la variance d'un bruit blanc stationnaire. Par conséquent, l'utilisation d'un estimateur ergodique de la moyenne statistique reste valable. Le fait que le bruit $u(n)$ soit stationnaire et ergodique permet de substituer la moyenne statistique dans (5.9) par une moyenne temporelle.

Les méthodes de résolution de l'ensemble des équations (5.9) peuvent être divisées en méthodes par bloc et méthodes récursives [ChaR87].

5.2.2. Méthodes d'estimation par bloc

En remplaçant la moyenne statistique par son estimateur et en définissant la fonction de corrélation généralisée par

$$c_{kl}(i, j) = \sum_n f_k(n-i)f_l(n-j)x(n-i)x(n-j) \quad \begin{array}{l} i, j = 1, \dots, p \\ k, l = 0, \dots, m \end{array} \quad (5.10)$$

le système d'équations (5.9) devient

$$\sum_{i=1}^p \sum_{k=0}^m a_{ik} c_{kl}(i, j) = -c_{0l}(0, j), \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq p, \quad 0 \leq l \leq m \\ 1 \leq j \leq p \end{array} \quad (5.11)$$

où $f_0(n) = 1$.

Selon l'intervalle de sommation sur n dans (5.10), on distingue la méthode de la covariance et la méthode de l'autocorrélation usuelles [Mak75]. Dans la méthode de la covariance, la sommation sur n s'étend de p à $N - 1$, où N est le nombre total d'échantillons. Le système d'équations (5.11) peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{00} & \mathbf{C}_{01} & \cdots & \mathbf{C}_{0m} \\ \mathbf{C}_{10} & \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{m1} & \mathbf{C}_{m2} & \cdots & \mathbf{C}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \end{bmatrix} \quad (5.12a)$$

où

$$\mathbf{a}_i = [a_{1i} \ a_{2i} \ \cdots \ a_{pi}]^T, \quad 0 \leq i \leq m \quad (5.12b)$$

$$\mathbf{c}_i = [c_{0i}(0,1) \ c_{0i}(0,2) \ \cdots \ c_{0i}(0,p)]^T, \quad 0 \leq i \leq m \quad (5.12c)$$

$$\mathbf{C}_{kl} = \begin{bmatrix} c_{kl}(1,1) & c_{kl}(1,2) & \cdots & c_{kl}(1,p) \\ c_{kl}(2,1) & c_{kl}(2,2) & \cdots & c_{kl}(2,p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{kl}(p,1) & c_{kl}(p,2) & \cdots & c_{kl}(p,p) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq k \leq m, \quad 0 \leq l \leq m. \quad (5.12d)$$

Soit donc de la forme

$$\mathbf{C} \mathbf{A} = -\mathbf{c} \quad (5.13)$$

La matrice \mathbf{C} est composée de $(m + 1) \times (m + 1)$ blocs symétrique de $p \times p$ éléments donnés par (5.12d) et le vecteur \mathbf{c} est composé de $(m + 1)$ vecteurs de $p \times 1$ éléments donnés par (5.12c).

Dans la méthode de l'autocorrélation, la sommation sur n s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ avec les valeurs des échantillons non disponibles posées égales à zéro. Les éléments de la matrice de corrélation deviennent

$$c_{kl}(i, j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k(n) f_l(n+i-j) x(n) x(n+i-j) = r_{kl}(i-j) \quad (5.14)$$

Avec cette définition des éléments de la matrice de corrélation, la matrice \mathbf{C} dans (5.13) devient bloc symétrique et de Toeplitz.

5.2.3. Méthodes d'estimation récursives

L'approche récursive suppose implicitement que le vecteur des paramètres \mathbf{A} dépend du temps et, donc, il sera noté \mathbf{A}_n pour faire apparaître cette dépendance. Le vecteur courant à l'instant n , est calculé récursivement à partir du vecteur précédent estimé à l'instant $n-1$ en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursif (algorithme RLS) développé en Annexe. En définissant le vecteur \mathbf{Y}_n par

$$\mathbf{Y}_n = \left[\mathbf{X}_{n-1}^T \quad \mathbf{X}_{n-2}^T \quad \cdots \quad \mathbf{X}_{n-p}^T \right]^T \quad (5.15)$$

l'équation (5.8) peut être réécrite sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{x}(n) = -\mathbf{Y}_n^T \mathbf{A}_n = -\mathbf{A}_n^T \mathbf{Y}_n \quad (5.16)$$

Le vecteur des paramètres \mathbf{A}_n est calculé en minimisant la fonction coût donnée par

$$E(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} e_1^2(i) \quad (5.17)$$

où l'erreur de prédiction $e_1(i)$ est exprimée par

$$e_1(i) = x(i) - \hat{x}(i) = x(i) + \mathbf{A}_n^T \mathbf{Y}_i \quad (5.18)$$

Le paramètre de pondération λ , appelé facteur d'oubli, est inférieur à l'unité. Il permet d'attribuer des plus forts poids aux erreurs de prédiction les plus récentes par rapport aux erreurs de prédiction passées.

La valeur optimale du vecteur des paramètres \mathbf{A}_n minimisant la fonction coût $E(n)$ s'obtient en résolvant l'ensemble des équations normales exprimées sous forme matricielle par

$$\Phi(n) \mathbf{A}_n = -\Psi(n) \quad (5.19a)$$

où $\Phi(n)$ est la matrice de corrélation de dimension $p(m+1) \times p(m+1)$ donnée par

$$\Phi(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_i^T \quad (5.19b)$$

et $\Psi(n)$ est le vecteur de cross corrélation de dimension $p(m+1) \times 1$ donné par

$$\Psi(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} Y_i x(i) \quad (5.19c)$$

L'algorithme des moindres carrés récursif permettant de calculer le vecteur des coefficients A_n se résume comme suit [Hay91]

Initialisation

$$P_0 = \delta^{-1} I_{p(m+1)}, \text{ avec } \delta \text{ dénotant une petite constante positive}$$

$$A_0 = \mathbf{0}$$

pour $n = 1, 2, \dots$

$$\kappa_n = \lambda + Y_n^T P_{n-1} Y_n$$

$$k_n = \frac{P_{n-1} Y_n}{\kappa_n}$$

$$A_n = A_{n-1} - k_n (x(n) + Y_{n-1}^T A_{n-1})$$

$$P_n = \frac{1}{\lambda} (P_{n-1} - k_n Y_n^T P_{n-1})$$

où $I_{p(m+1)}$ désigne la matrice unité de dimension $p(m+1) \times p(m+1)$ et $\mathbf{0}$ dénote le vecteur nul de dimension $p(m+1) \times 1$.

Une fois l'algorithme a convergé, les paramètres AR temps-variant sont calculés en utilisant (5.2). Si le modèle des coefficients AR temps-variant ne change pas au cours de l'intervalle d'analyse, l'algorithme peut être arrêté dès que la différence entre les vecteurs estimés à deux instants successifs devient négligeable. Cependant, lorsque le modèle des paramètres change durant l'intervalle d'analyse, un critère de convergence doit être calculé pour détecter ce changement et mettre à jour le vecteur des coefficients A_n . Un critère de convergence est exprimée en fonction de la norme du vecteur des paramètres par [ChaR87]

$$C_n = \frac{\|A_n\| - \|A_{n-1}\|}{\|A_n\|} \quad (5.20)$$

La convergence de l'algorithme est atteinte lorsque la valeur de C_n est inférieure à un certain seuil.

La détermination du facteur d'oubli est souvent basée sur un choix arbitraire. Néanmoins, quelques procédures de sélection de ce facteur ont été proposées dans la littérature. Ces méthodes permettent de fixer l'intervalle ou la valeur adéquate du facteur d'oubli en se basant sur un critère qui reflète le degré de non stationnarité du signal. Par

exemple, dans [ChoY91, Got95], le facteur d'oubli est choisi tel que la longueur effective $1/(1 - \lambda)$ soit inférieure ou égale à l'intervalle de stationnarité du signal et que la fréquence la plus basse $(1 - \lambda)$, donnée par l'inverse de la longueur effective, soit inférieure ou égale à la plus basse fréquence sous considération.

5.2.4. Distribution temps-fréquence à base de modèle AR temps-variant

La distribution temps-fréquence qui n'est autre que la densité spectrale de puissance du processus AR temps-variant est exprimée par [Gre83]

$$P_x(n, f) = \frac{\varepsilon_1^2}{\left| A(n-1, z) A(n-1, z^{-1}) \right|_{z=\exp(j2\pi f)}} \quad (5.21a)$$

où

$$A(n, z) = 1 + \sum_{i=1}^p a_i(n) z^{-i} \quad (5.21b)$$

La quantité $P_x(n, f)$ exprime la distribution de la puissance du signal dans le plan temps-fréquence et il est appelé densité spectrale de puissance instantanée. La figure 5.1 montre le schéma bloc illustrant la méthode de calcul de la distribution temps-fréquence du processus $x(n)$ en utilisant un modèle AR temps-variant dont les paramètres sont estimés par l'algorithme des moindres carrés récursif.

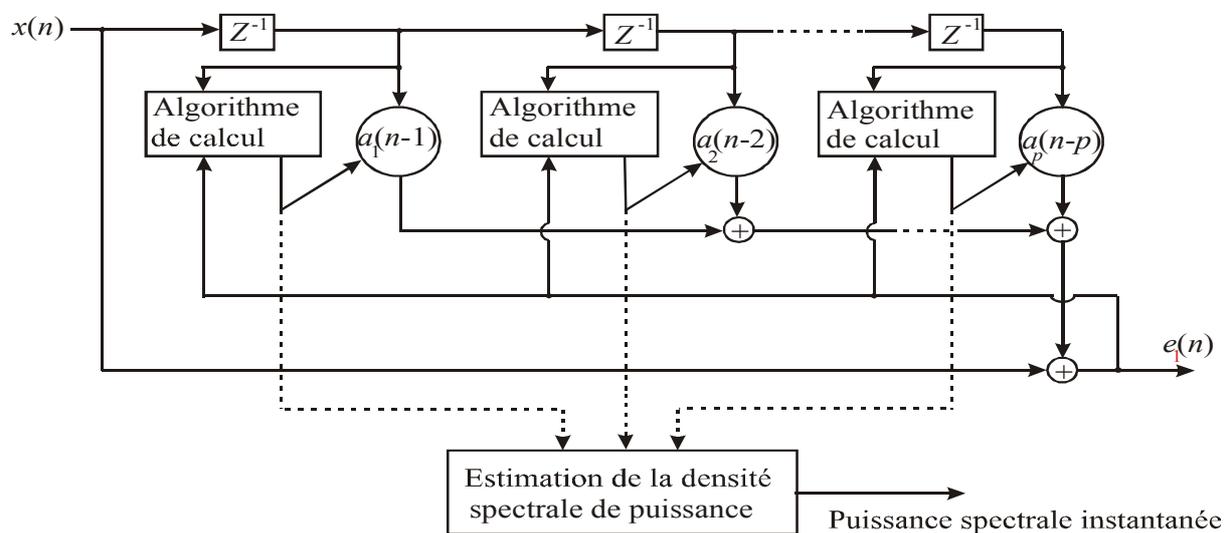


Figure. 5.1 : Schéma bloc de la procédure récursive d'estimation de la densité spectrale de puissance instantanée.

5.3. Analyse temps-fréquence à base de modèle de prédiction linéaire bilatérale temps-variant

La prédiction linéaire bilatérale a été utilisée dans le cas stationnaire dans le but d'améliorer les performances du prédicteur unilatéral usuel [Lee89, Hsu93, Hsu94]. Une comparaison entre les prédicteurs unilatéral et bilatéral est donnée dans [Hsu95]. Une revue des principaux résultats de la prédiction linéaire bilatérale dans le cas stationnaire permet une meilleure compréhension de son extension au cas non stationnaire.

5.3.1. Modèle AR bilatéral temps-invariant

Le modèle AR bilatéral d'ordre p fait intervenir les p échantillons passés et futurs. Il est décrit par l'équation aux différences linéaire suivante [Tug86, Hsu94]:

$$x(n) = -\sum_{i=1}^p \beta_i (x(n-i) + x(n+i)) + u(n) \quad (5.22)$$

où $u(n)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 et les β_i sont les coefficients du modèle AR bilatéral. A partir de (5.22), on peut voir que $x(n)$ est modélisé comme la sortie d'un système linéaire temps invariant non causal excité par l'entrée $u(n)$. La fonction de transfert du système est donnée par

$$H(z) = \frac{1}{\beta(z)} \quad (5.23a)$$

où

$$\beta(z) = 1 + \sum_{i=1}^p \beta_i (z^{-i} + z^i) \quad (5.23b)$$

Le prédicteur linéaire bilatéral d'ordre p estime l'échantillon présent $x(n)$ comme une combinaison linéaire des p échantillons passés et futurs

$$\hat{x}(n) = -\sum_{i=1}^p b_i (x(n-i) + x(n+i)) \quad (5.24)$$

Il a été montré que les coefficients du modèle AR bilatéral d'ordre p sont différents des coefficients du prédicteur linéaire bilatéral optimal du même ordre [Hsu94]. Par conséquent, l'utilisation d'un estimateur spectral ayant une forme similaire à celle de l'estimateur spectral basé sur le prédicteur linéaire unilatéral

$$P_x(f) = \frac{\varepsilon_2^2}{|B(z)B(z^{-1})|} \Bigg|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad (5.25)$$

où ε_2^2 est l'erreur de prédiction bilatérale quadratique moyenne et $B(z)$ est le filtre associé à l'erreur de prédiction bilatérale, introduit un biais. Cependant, il a été montré que l'estimateur spectral modifié

$$P_x(f) = \frac{\varepsilon_2^2}{|B(\exp(j2\pi f))|} \quad (5.26)$$

fournit le spectre exact du processus AR [Hsu95]. Un avantage de la prédiction linéaire bilatérale est qu'elle conduit à une erreur de prédiction plus petite que celle obtenue avec un prédicteur linéaire unilatéral. On peut écrire les relations suivantes [Hsu93]

$$\varepsilon_2^2 = \frac{\varepsilon_1^2}{1 + \sum_{i=1}^p a_i^2} \quad (5.27)$$

où a_i , $i = 1, 2, \dots, p$, sont les coefficients de prédiction unilatérale. La relation (5.27) montre que l'erreur quadratique moyenne bilatérale est toujours inférieure à l'erreur quadratique moyenne unilatérale.

5.3.2. Modèle de prédiction linéaire bilatérale non stationnaire

Le prédicteur linéaire bilatéral temps-variant peut être obtenu à partir de (5.24) en supposant que les coefficients de prédiction bilatérale sont fonctions du temps

$$\hat{x}(n) = -\sum_{i=1}^p b_i(n-i)(x(n-i) + x(n+i)) \quad (5.28)$$

et l'estimateur spectral modifié correspondant devient

$$P_x(n, f) = \frac{\varepsilon_2^2}{|B(n-1, z)|} \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad (5.29a)$$

où

$$B(n, z) = 1 + \sum_{i=1}^p b_i(n)(z^{-i} + z^i) \quad (5.29b)$$

Les paramètres $b_i(n)$ sont estimés comme dans le cas unilatéral. En posant

$$b_i(n-i) = \sum_{j=0}^m b_{ij} f_j(n-i) \quad (5.30)$$

l'équation (5.28) prend la forme suivante

$$\hat{x}(n) = -\left[\mathbf{X}_{n-1}^T \cdots \mathbf{X}_{n-p}^T \right] \mathbf{B} \quad (5.31a)$$

où

$$\mathbf{B} = \left[b_{10} \cdots b_{1m} b_{20} \cdots b_{2m} \cdots b_{p0} \cdots b_{pm} \right]^T \quad (5.31b)$$

$$\mathbf{X}_{n-i} = \left[f_0(n-i)(x(n-i) + x(n+i)) \cdots f_m(n-i)(x(n-i) + x(n+i)) \right]^T, i = 1, \dots, p \quad (5.31c)$$

La minimisation de l'erreur quadratique moyenne ε_2^2 conduit à l'ensemble des équations linéaires données par

$$E \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1}^T & \cdots & \mathbf{X}_{n-p}^T \end{bmatrix} \right) \mathbf{B} = -E \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n-p} \end{bmatrix} x(n) \right) \quad (5.32)$$

La solution du système (5.32) peut être obtenue en utilisant une approche par bloc ou une approche récursive.

5.3.3. Méthodes d'estimation par bloc

En définissant la fonction de corrélation généralisée par

$$c_{kl}(i, j) = \sum_n f_k(n-i) f_l(n-j) (x(n-i) + x(n+i))(x(n-j) + x(n+j)) \quad (5.33a)$$

et la matrice \mathbf{C}_{kl} par

$$\mathbf{C}_{kl} = \begin{bmatrix} c_{kl}(1,1) & c_{kl}(1,2) & \cdots & c_{kl}(1,p) \\ c_{kl}(2,1) & c_{kl}(2,2) & \cdots & c_{kl}(2,p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{kl}(p,1) & c_{kl}(p,2) & \cdots & c_{kl}(p,p) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq k \leq m, \quad 0 \leq l \leq m \quad (5.33b)$$

Les éléments b_{ij} sont calculés en résolvant le système d'équations écrit sous forme matricielle comme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{00} & \mathbf{C}_{01} & \cdots & \mathbf{C}_{0m} \\ \mathbf{C}_{10} & \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{m1} & \mathbf{C}_{m2} & \cdots & \mathbf{C}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \end{bmatrix} \quad (5.34a)$$

où

$$\mathbf{b}_i = [b_{1i} \ b_{2i} \ \cdots \ b_{pi}]^T, \quad 0 \leq i \leq m \quad (5.34b)$$

et

$$\mathbf{c}_i = [c_{0i}(0,1) \ c_{0i}(0,2) \ \cdots \ c_{0i}(0,p)]^T, \quad 0 \leq i \leq m \quad (5.34c)$$

5.3.4. Méthodes d'estimation récursives

En définissant le vecteur \mathbf{Y}_n par

$$\mathbf{Y}_n = [\mathbf{X}_{n-1}^T \ \mathbf{X}_{n-2}^T \ \cdots \ \mathbf{X}_{n-p}^T]^T \quad (5.35)$$

où les vecteurs \mathbf{X}_{n-i} sont donnés par (5.31c), l'équation (5.31a) prend la forme suivante

$$\hat{x}(n) = -\mathbf{Y}_n^T \mathbf{B}_n = -\mathbf{B}_n^T \mathbf{Y}_n \quad (5.36)$$

L'équation (5.36) possède la même forme que l'équation (5.16) à l'exception que les vecteurs \mathbf{Y}_{n-i} sont formés en utilisant les échantillons passés et futurs. Le vecteur des paramètres de prédiction bilatérale \mathbf{B} peut être calculé en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursif en tenant compte des nouvelles définitions des vecteurs \mathbf{X}_n et \mathbf{Y}_n [Kac05]. La fonction coût à minimiser est donnée par

$$E(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} e_2^2(i) \quad (5.37a)$$

où l'erreur de prédiction bilatérale $e_2(i)$ est exprimée par

$$e_2(i) = x(i) - \hat{x}(i) = x(i) + \mathbf{B}_n^T \mathbf{Y}_i \quad (5.37b)$$

La valeur optimale du vecteur des paramètres \mathbf{B}_n minimisant la fonction coût $E(n)$ s'obtient en résolvant l'ensemble des équations exprimées sous forme matricielle par

$$\Phi(n) \mathbf{B}_n = -\Psi(n) \quad (5.38a)$$

où $\Phi(n)$ est la matrice de corrélation de dimension $p(m+1) \times p(m+1)$ donnée par

$$\Phi(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_i^T \quad (5.38b)$$

et $\Psi(n)$ est le vecteur de cross corrélation de dimension $p(m+1) \times 1$ donné par

$$\Psi(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{Y}_i x(i) \quad (5.38c)$$

5.4. Estimateur de la fréquence instantanée à base de prédiction linéaire bilatérale

Dans ce paragraphe, on montre que le prédicteur linéaire bilatéral temps-variant fournit une estimation de la loi de la fréquence instantanée [Kac02a, Kac05]. Pour un signal complexe temps discret modulé en amplitude et en fréquence de la forme

$$x(n) = a(n) \exp[j\varphi(n)], \quad (5.39)$$

la fréquence instantanée et la phase instantanée discrètes sont exprimées, respectivement, par [Boa92a]

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} (\varphi(n) - \varphi(n-1)) \quad (5.40)$$

$$\varphi(n) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^n f(k) \quad (5.41)$$

Une forme équivalente à (5.41) est donnée par

$$\varphi(n) = 2\pi f(n) + \varphi(n-1) \quad (5.42)$$

Si $x(n)$ est un signal modulé en amplitude et en fréquence de la forme $x(n) = a(n) \cos[\varphi(n)]$, ayant un produit largeur de bande-durée suffisamment grand et une amplitude $a(n)$ lentement variable, il peut être remplacé par sa séquence analytique à temps discret. Dans ce cas, le signal analytique $z(n)$ peut être approximé par (5.39) [Boa90, Fla93]

Dans la définition précédente de la fréquence instantanée, il est supposé que le signal est mono-composante. Si le signal est multi-composantes, il peut être modélisé par la somme de plusieurs signaux mono-composantes où chaque composante est caractérisée par son enveloppe et sa fréquence instantanée.

Les distributions temps-fréquence sont des outils puissants pour l'estimation de la fréquence instantanée. L'estimation de la fréquence instantanée au moyen du prédicteur linéaire a été introduite par Griffiths [GriL75] qui a montré que le spectre instantané est caractérisé par des pics associés aux lignes spectrales contenues dans le signal. De manière similaire, on peut montrer que les pôles de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral temps-variant sont situés sur la fréquence instantanée théorique du signal et, alors, elle peut être utilisée comme un estimateur de la fréquence instantanée. Si le modèle basé sur le prédicteur linéaire bilatéral est une représentation précise du signal $x(n)$, on peut utiliser l'approximation $x(n) = \hat{x}(n)$. Dans le cas d'un signal modulé en fréquence de la forme

$$x(n) = a \exp[j\varphi(n)], \quad (5.43)$$

la fréquence instantanée est rendue proportionnelle au message

$$f(n) = f_0 + m(n) \quad (5.44)$$

où f_0 is la fréquence de la porteuse et $m(n)$ est le message.

En substituant (5.43) dans (5.28), il vient

$$\hat{x}(n) = -a \sum_{k=1}^p b_k(n-k) \{ \exp[j\varphi(n-k)] + \exp[j\varphi(n+k)] \} \quad (5.45)$$

en utilisant (5.42) et (5.44), on peut écrire

$$\varphi(n-k) = \varphi(n) - 2\pi k f_0 - 2\pi \sum_{i=0}^{k-1} m(n-i) \quad (5.46a)$$

$$\varphi(n+k) = \varphi(n) + 2\pi k f_0 + 2\pi \sum_{i=0}^{k-1} m(n+i) \quad (5.46b)$$

La substitution de (5.46a) et (5.46b) dans (5.45) donne

$$\hat{x}(n) = -a \exp[j\varphi(n)] \sum_{k=1}^p b_k (n-k) \left\{ \exp \left[-j2\pi k f_0 - j2\pi \sum_{i=0}^{k-1} m(n-i) \right] + \exp \left[j2\pi k f_0 + j2\pi \sum_{i=0}^{k-1} m(n+i) \right] \right\} \quad (5.47)$$

Cependant, l'erreur de prédiction bilatérale est supposée être faible, soit donc $x(n) \approx \hat{x}(n)$, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^p b_k (n-k) \left\{ \exp \left[-j2\pi k f_0 - j2\pi \sum_{i=0}^{k-1} m(n-i) \right] + \exp \left[j2\pi k f_0 + j2\pi \sum_{i=0}^{k-1} m(n+i) \right] \right\} \approx -1 \quad (5.48)$$

Si le message est supposé être constant sur un intervalle de temps de longueur $2p-1$ en nombre de périodes d'échantillonnage, $m(n) \approx m(n \pm 1) \approx \dots \approx m(n \pm (p-1))$, alors (5.48) devient

$$\sum_{k=1}^p b_k (n-k) \left\{ \exp \left\{ -j2\pi k [f_0 + m(n)] \right\} + \exp \left\{ j2\pi k [f_0 + m(n)] \right\} \right\} \approx -1 \quad (5.49)$$

L'équation (5.49) montre que les pôles du modèle prédicteur bilatéral sont situés sur la fréquence instantanée théorique du signal modulé. Ceci est une expression valable dans le cas général des signaux modulés en fréquence sans aucune restriction sur la loi de la fréquence instantanée. Les paramètres de prédiction linéaire bilatérale temps-variant sont calculés en les exprimant par une combinaison linéaire d'un ensemble de fonctions de base et l'algorithme des moindres carrés récursif est utilisé pour calculer les coefficients constants résultant de la décomposition.

Si le signal est composé de plusieurs composantes spectrales temps-variant, la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral donne lieu à une ligne spectrale temps-variant pour chaque composante si l'ordre du modèle utilisé est plus grand que le nombre de composantes. Cependant, l'ordre du modèle doit être choisi avec une grande précaution parce qu'un ordre élevé peut conduire à l'apparition de pics spectrales fantômes qui rendent l'interprétation difficile.

5.5. Exemples numériques

Dans ce paragraphe, on donne des exemples qui illustrent les performances de la distribution temps-fréquence utilisant le modèle de prédiction linéaire bilatérale sur des signaux réels et synthétiques. Une comparaison avec la distribution temps-fréquence basée sur la prédiction linéaire unilatérale et la distribution de Choi-Williams est aussi fournie. Les exemples permettent d'illustrer la bonne résolution temps-fréquence de la distribution temps-fréquence basée sur la prédiction linéaire bilatérale dans l'analyse des signaux multi-composantes et on montrent que le prédicteur linéaire bilatéral nécessite un ordre

plus faible que celui du modèle de prédiction linéaire unilatérale pour atteindre une meilleure résolution et une estimation plus précise de la distribution temps-fréquence. Les cinq premiers polynômes de Legendre ont été utilisés dans l'expansion des coefficients AR temps-variant. La fréquence d'échantillonnage et $f_s = 1$ KHz alors que la longueur du signal est $N = 1000$ en nombre d'échantillons. Le facteur d'oubli de l'algorithme des moindres carrés récursif est fixé à $\lambda = 0.99$.

Exemple 5.1— signal de parole pathologique

Dans les applications médicales, les mesures acoustiques du signal de parole sont souvent utilisées soit pour détecter les pathologies du larynx soit pour suivre l'évolution du patient au cours de traitements. Les mesures des perturbations des vibrations de la glotte peuvent renseigner sur plusieurs aspects pathologiques de la qualité de la voix ce qui les rend d'un intérêt particulier dans l'évaluation et la discrimination des voix normales et pathologiques [Kli90, ParJ01]. De nombreuses méthodes sont basées sur la mesure des perturbations de la fréquence fondamentale (jitter) des voyelles soutenues. L'analyse temps-fréquence fournit un moyen puissant pour détecter et localiser les perturbations de la fréquence fondamentale. Cet exemple illustre l'aptitude de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral à analyser et à suivre l'évolution de la fréquence fondamentale dans le plan temps-fréquence. Le signal de parole échantillonné à 20 KHz consiste en une voyelle /a/ soutenue produite par un locuteur dysphonique. Pour suivre l'évolution de la fréquence fondamentale, le signal a été filtré passe bas à une fréquence de coupure de 400 Hz. L'analyse temps-fréquence du signal filtré a été effectuée en utilisant la distribution de Choi-Williams et les distributions temps-fréquence basées sur les prédicteurs linéaires unilatéral et bilatéral. Ces distributions sont représentées sur la figure 5.2. Parmi les trois distributions, la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral suit avec précision l'évolution de la fréquence fondamentale et elle est caractérisée par une grande concentration.

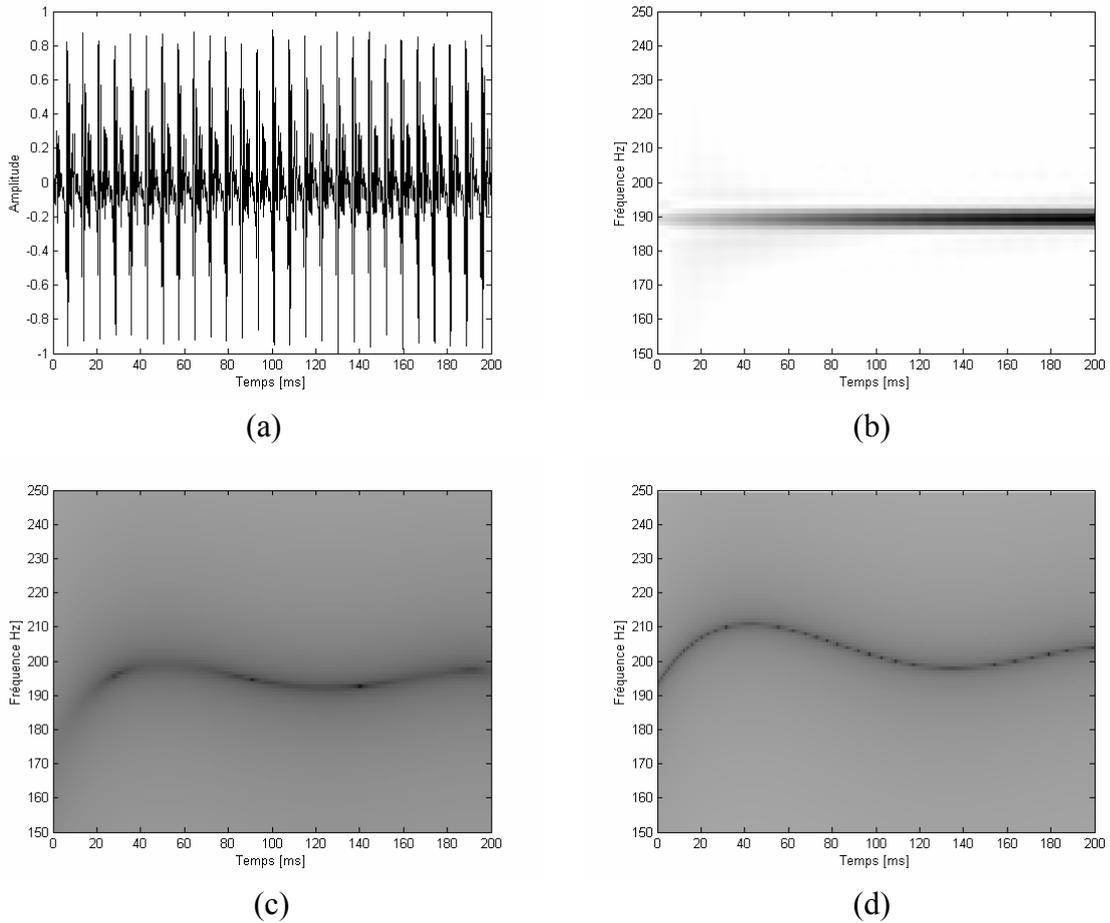


Figure 5.2 : Signal de parole filtré passe bas et les différentes distributions temps-fréquence. (a) Signal de parole filtré. (b) Distribution de Choi-Williams. (c) Distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR unilatéral temps-variant d'ordre $p=2$. (d) Distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR bilatéral temps-variant d'ordre $p=1$.

Exemple 5.2 —Trois chirps linéaires parallèles

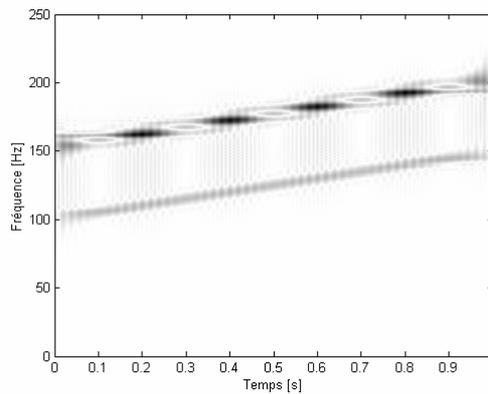
Dans cet exemple, on compare la distribution temps-fréquence utilisant un modèle de prédiction linéaire bilatérale temps-variant, la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire unilatéral et la distribution de Choi-Williams en terme de résolution temps-fréquence. Le signal de test utilisé est composé de la somme de trois chirps linéaires [Con99a,b].

$$x(n) = \sum_{i=1}^3 \cos \left(2\pi \left(f_{0i} + \frac{\alpha_f}{2} n \right) n \right) \quad (5.50)$$

avec $\alpha_f = 50 \text{ Hz} / s$, $f_{01} = 100 \text{ Hz}$, $f_{02} = 150 \text{ Hz}$ et $f_{03} = 155 \text{ Hz}$.

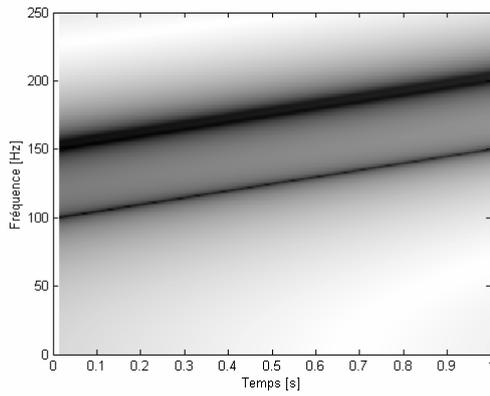
La fréquence instantanée de la première composante croît linéairement de 100 Hz à 150 Hz, celle de la deuxième composante croît de 150 Hz à 200 Hz et celle de la troisième composante varie de 155 Hz à 205 Hz. Dans un tel cas, en plus du problème des termes d'interférences, la distribution de Wigner-Ville s'est montrée incapable de distinguer entre les deux hautes composantes spectrales. Quant à la distribution de Choi-Williams, même si

elle a permis de réduire considérablement les termes d'interférences, elle n'a pu discriminer entre les deux hautes composantes fréquentielles du signal (Figure 5.3a). La distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire unilatéral est incapable de distinguer les deux composantes même en choisissant un ordre de modèle $p = 6$ (Figure 5.3b). La distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral d'ordre $p = 3$ montre clairement trois composantes spectrales bien distinguées (Figure 5.3c). Cet exemple illustre la supériorité de la performance de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral par rapport aux deux autres distributions dans l'analyse des signaux multi-composantes modulés en fréquence. Des coupes des trois distributions temps-fréquence prises à l'instant $t = 0.2$ s sont montrées sur les figures 5.3d, 5.3e et 5.3f.

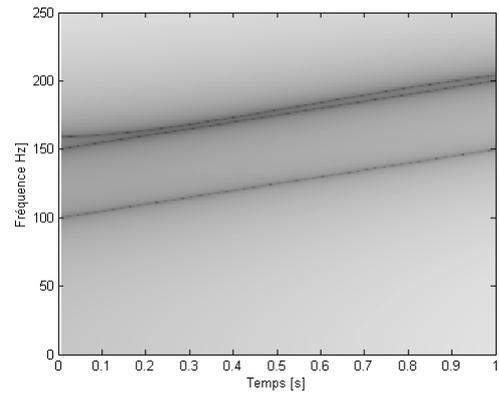


(a)

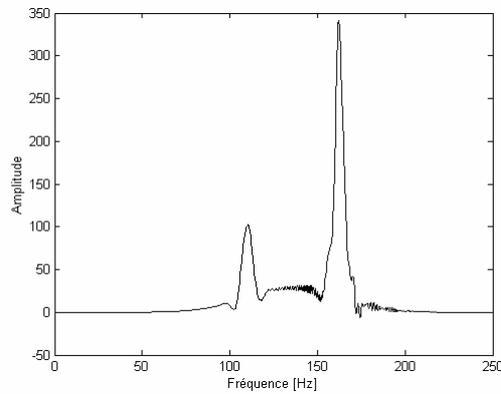
Figure 5.3 : Analyse temps-fréquence du signal composé de la somme de trois chirps linéaires parallèles. (a) Distribution de Choi-Williams. (b) Distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR unilatéral temps-variant d'ordre $p = 6$. (c) Distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR bilatéral temps-variant d'ordre $p = 3$. (d) Coupe de la distribution de Choi-Williams à l'instant $t = 0.2$ s. (e) Coupe de la distribution temps-fréquence utilisant le modèle AR unilatéral temps-variant à l'instant $t = 0.2$ s. (f) Coupe de la distribution temps-fréquence utilisant le modèle AR bilatéral temps-variant à l'instant $t = 0.2$ s.



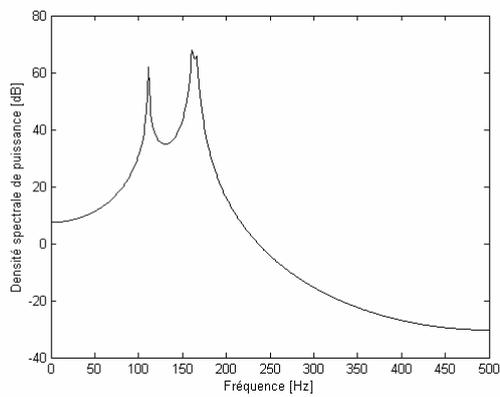
(b)



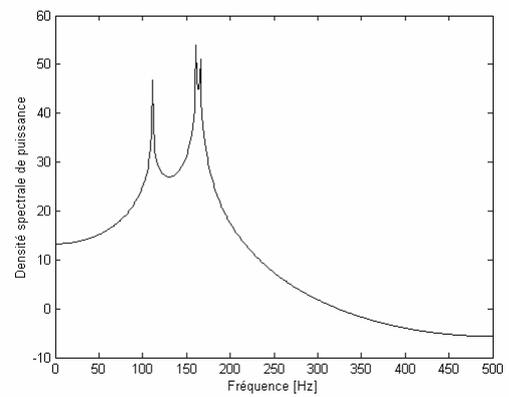
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 5.3 (suite)

Exemple 5.3—Signal modulé en fréquence

L'objectif de cet exemple est d'illustrer l'aptitude de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral à estimer la fréquence instantanée des signaux

modulés en fréquence. La fréquence du signal synthétisé croît linéairement de 50 Hz à 200 Hz. La fréquence instantanée est estimée comme la fréquence correspondante au maximum de la distribution temps-fréquence (cf. § 1.4.3.5.). La figure 5.4 montre les fréquences instantanées estimées au moyen de la distribution de Choi-Williams, de la distribution basée sur le prédicteur linéaire unilatéral d'ordre $p = 2$ et de la distribution basée sur le prédicteur linéaire bilatéral d'ordre $p = 1$. On peut observer que les courbes des fréquences instantanées estimées se chevauchent sur l'intervalle d'analyse. Pour plus d'illustration, des coupes des trois distributions temps-fréquence prises à l'instant $t = 0.2$ s ont été représentées. On peut voir que le lobe associé à la distribution basée sur le prédicteur bilatéral (Figure 5.4c) est plus étroit que les lobes associés à la distribution basée sur le prédicteur unilatéral (Figure 5.4b) et à la distribution de Choi-Williams (Figure 5.4a).

Considérons maintenant l'effet du bruit blanc gaussien sur la performance des trois distributions temps-fréquence. Le signal utilisé dans le test est caractérisé par un rapport signal à bruit de 10 dB. Comme montré sur la figure 5.5c, en utilisant un ordre $p = 1$, la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral demeure précise et possède toujours une bonne concentration autour de la fréquence instantanée théorique. Pour le même rapport signal à bruit, les distributions de Choi-Williams et celle basée sur le prédicteur linéaire unilatéral d'ordre $p = 2$ sont biaisées comme illustré sur les figures 5.5a et 5.5b, respectivement. Des coupes des différentes distributions temps-fréquence prises à l'instant $t = 0.2$ s sont montrées sur les figures 5.5d et 5.5e. A nouveau, la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral est caractérisée par le lobe le plus étroit autour de la fréquence instantanée théorique et est la moins biaisée. La diminution du rapport signal à bruit donne lieu à des distributions temps-fréquence de plus en plus biaisées. Néanmoins, l'approche utilisant le prédicteur linéaire bilatéral fournit les meilleures estimations que celles obtenues par le prédicteur linéaire unilatéral et la distribution de Choi-Williams.

Une propriété du modèle prédicteur bilatéral est qu'il renforce les pics de la densité spectrale [Hsu95], ce qui le rend plus avantageux que le modèle prédicteur unilatéral pour l'estimation de la fréquence instantanée. La supériorité de la performance du prédicteur linéaire bilatéral par rapport à celle du prédicteur linéaire unilatéral pour l'estimation de la fréquence instantanée des signaux contaminés par du bruit peut être illustrée en représentant la largeur de bande du pic spectral en fonction du rapport signal à bruit. Il a été observé que la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral est caractérisée par un pic spectral étroit même pour des faibles rapports signal à bruit. En effet, la largeur du pic spectral d'une coupe de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral à l'instant $t = 0.2$ s n'excède pas 0.02 Hz même pour des rapports signal à bruit aussi faibles que 10 dB alors qu'elle augmente rapidement lorsque le rapport signal à bruit décroît dans le cas de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire unilatéral. Comme montré sur la figure 5.6, même en prenant un ordre $p = 4$, la performance de l'estimateur de la fréquence instantanée basée sur le prédicteur linéaire unilatéral n'atteint pas celle de l'estimateur basé sur le prédicteur linéaire bilatéral en terme de largeur de bande à 3 dB du pic spectral. En particulier, à un rapport signal à bruit de 30 dB, le pic spectral à 3 dB correspondant à l'estimateur basé sur le prédicteur linéaire bilatéral est 10 fois moins étroit que le pic correspondant à l'estimateur basé sur le prédicteur linéaire unilatéral.

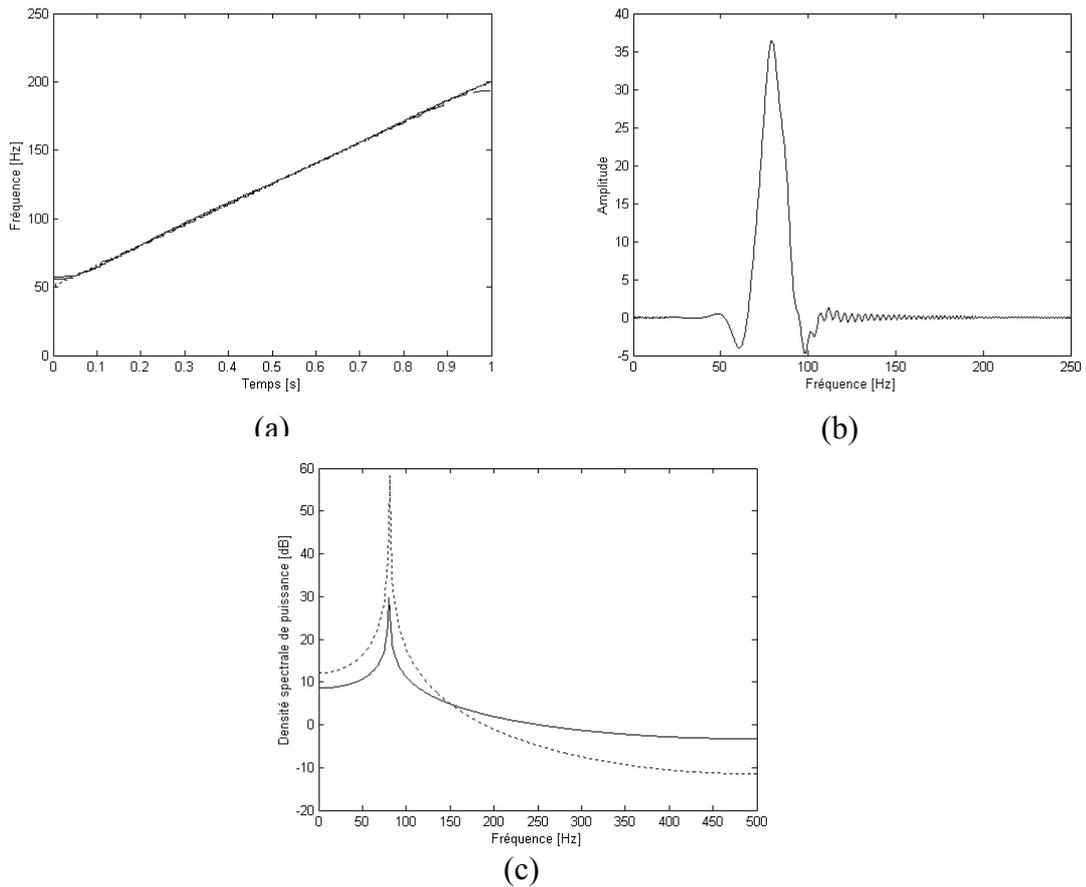


Figure 5.4 : Estimation de la fréquence instantanée au moyen des différentes distributions temps-fréquence. (a) superposition des fréquences instantanées estimées par la distribution de Choi-Williams, la distribution basée sur le prédicteur linéaire unilatéral temps-variant d'ordre $p = 2$ et la distribution basée sur le prédicteur linéaire bilatéral temps-variant d'ordre $p = 1$. (b) Coupe de la distribution de Choi-Williams à l'instant $t = 0.2$ s. (c) Coupes des distributions temps-fréquence basées sur les prédicteurs unilatéral d'ordre $p = 2$ (en trait pointillé) et bilatéral d'ordre $p = 1$ (en trait continu) à l'instant $t = 0.2$ s.

5.6. Complexité arithmétique

La distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral possède une meilleure performance que celle de la distribution basée sur le prédicteur unilatéral et de Choi-Williams mais au prix d'une certaine augmentation du nombre d'opérations. Le calcul de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur à long terme bilatéral nécessite N additions supplémentaires par rapport à la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire unilatéral. Si m dénote le plus haut degré du polynôme de Legendre, le calcul des paramètres du prédicteur bilatéral d'ordre p au moyen de l'algorithme des moindres carrés récursif standard nécessite $O(p^2(m+1)^2)$ opérations arithmétiques à chaque itération $n > p$. L'estimation de N fréquences de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur bilatéral au moyen de l'algorithme de la transformée de Fourier rapide nécessite $O(N \log_2(N))$ opérations à chaque instant. La complexité de calcul de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur bilatéral est alors approximé par $O(N^2 \log_2(N) + Np^2(m+1)^2)$. Le nombre d'opérations nécessaires pour le calcul de la distribution de Choi-Williams est approximativement $O(N^2 \log_2(N))$.

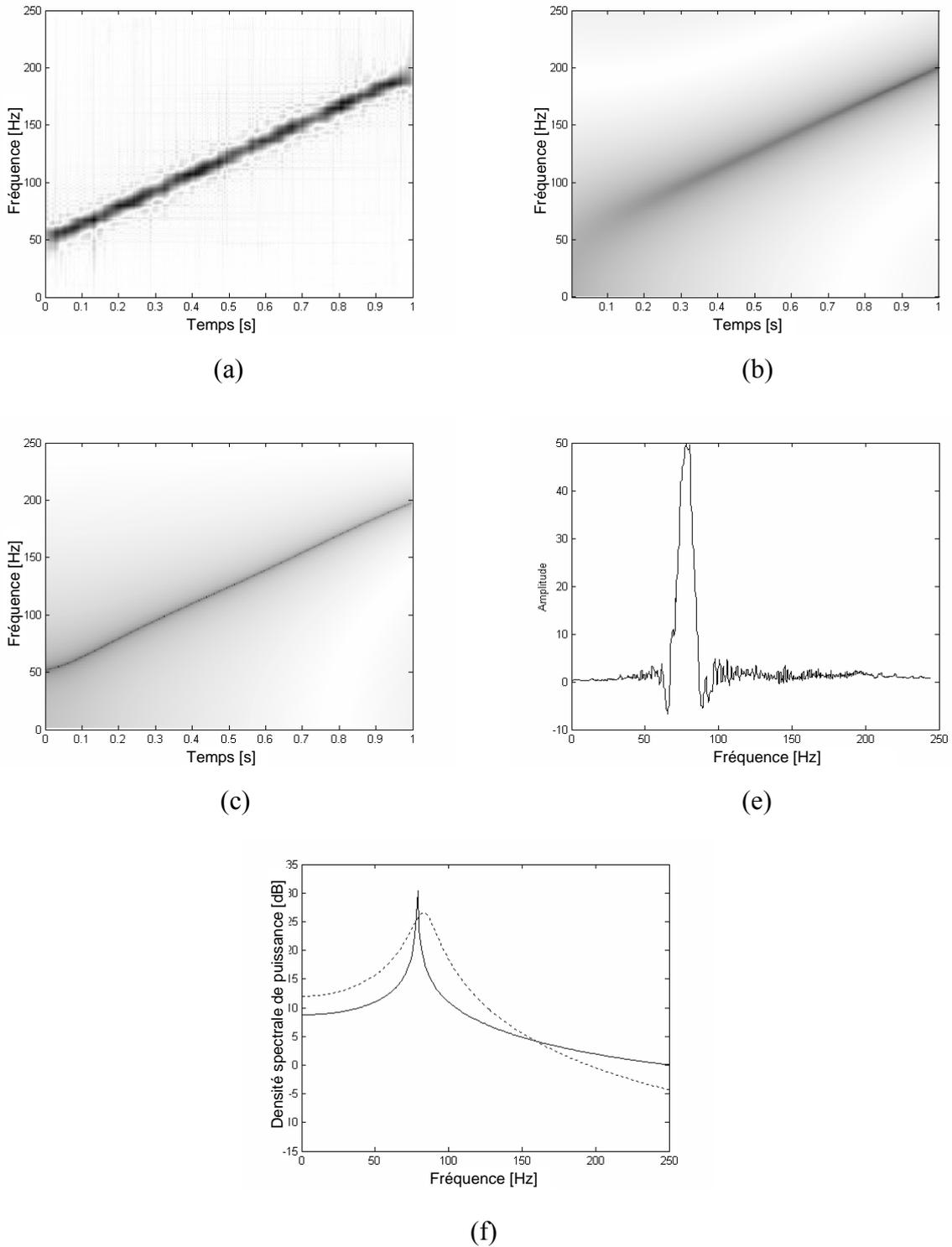


Figure 5.5 : Distributions temps-fréquence du signal modulé en fréquence à un rapport signal à bruit de 10 dB. (a) Distribution de Choi-Williams. (b) Distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire unilatéral temps-variant d'ordre $p = 2$. (c) Distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral temps-variant d'ordre $p = 1$. (d) Coupe de la distribution de Choi-Williams à l'instant $t = 0.2$ s. (e) Coupes superposées des distributions temps-fréquence basées sur les prédicteurs unilatéral d'ordre $p = 2$ (trait pointillé) et bilatéral d'ordre $p = 1$ (trait continu) à l'instant $t = 0.2$ s.

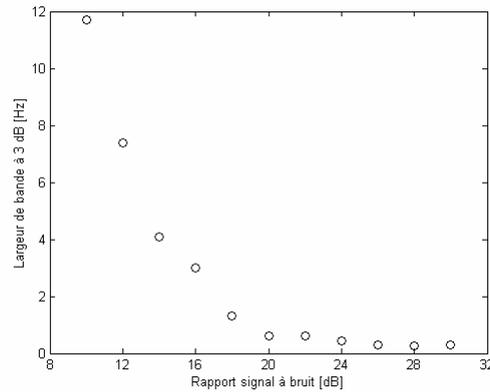


Figure 5.6: Largeur de bande à 3 dB du pic spectral d'une coupe de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire unilatéral d'ordre $p = 4$ à l'instant $t = 0.2$ s en fonction du rapport signal à bruit. La largeur de bande à 3 dB du pic spectral d'une coupe de la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral d'ordre $p = 1$ est de 0.02 Hz pour un rapport signal à bruit entre 10 dB et 30 dB.

5.7. Extension aux signaux vectoriels

Dans plusieurs applications telles que l'analyse de l'électroencéphalogramme (EEG) et le traitement des données spatiales, les signaux sont enregistrés à partir de plusieurs capteurs (canaux) conduisant ainsi à des processus vectoriels ou multicanaux. Vu la relation entre les signaux provenant des différents capteurs, un modèle multicanaux permettant de modéliser et analyser conjointement les signaux est plus approprié. Dans une telle situation, l'information peut être extraite des spectres individuels des canaux ainsi que des cross spectres des paires de canaux.

Différents algorithmes ont été développés pour la modélisation paramétrique et l'analyse spectrale multicanaux des signaux stationnaires [Mor78, Fri86, Has03]. L'algorithme de Levinson-Wiggins-Robinson (LWR) qui est une extension de l'algorithme récursif basé sur une structure en treillis du cas scalaire est bien connu dans la modélisation autorégressive vectorielle [Wig65]. La modélisation et l'analyse temps-fréquence multicanaux des signaux non stationnaires trouve des applications dans plusieurs disciplines de traitement du signal [Arn98, Pau95, Cra02]. Plusieurs chercheurs ont considéré le problème de la modélisation autorégressive vectorielle. Dans [Ger83], un algorithme récursif basé sur une structure circulaire d'un filtre en treillis a été proposé pour calculer les coefficients de corrélation partielle de la structure en question. La modélisation des paramètres du processus AR vectoriel comme des variables aléatoires [Arn98, Ell00, Jia93]. Dans cette approche, une procédure basée sur le filtre de Kalman a été utilisée pour estimer les paramètres vectoriels.

L'objectif de cette partie du travail est de proposer une approche basée sur un modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant pour l'analyse temps-fréquence des signaux vectoriels non stationnaires. Le modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant est une généralisation du modèle AR bilatéral rencontré dans le cas scalaire. Il estime l'échantillon présent du signal d'un certain canal par une somme pondérée symétrique des échantillons passés et futurs de ce canal ainsi que des autres canaux. Les paramètres multidimensionnels temps-variant du

modèle AR vectoriel bilatéral sont modélisés par une combinaison linéaire d'un ensemble de fonctions de base et alors l'algorithme des moindres carrés récursif est utilisé pour estimer les coefficients intervenant dans la combinaison linéaire. Le modèle AR vectoriel bilatéral nécessite un ordre plus petit que celui du modèle AR vectoriel unilatéral pour accomplir une meilleure résolution dans le plan temps-fréquence. Puisque la procédure d'estimation des paramètres multidimensionnels temps-variant du modèle AR vectoriel bilatéral nécessite le même nombre de multiplications que le modèle AR unilatéral, l'utilisation d'un ordre plus petit permet de réduire la complexité de calcul.

5.7.1. Modélisation autorégressive vectorielle temps-variant

Soit $\mathbf{x}(n) = [x_1(n) \ x_2(n) \ \dots \ x_M(n)]^T$ un processus stochastique stationnaire M -dimensionnel discret de moyenne nulle. Le processus vectoriel $\mathbf{x}(n)$ peut être modélisé comme la sortie d'un système multicanaux excité par un bruit blanc gaussien $\mathbf{u}(n)$ M -dimensionnel de moyenne nulle et de matrice de covariance $\Sigma_{\mathbf{u}}$ [Kay88b]

$$\mathbf{x}(n) = -\sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{x}(n-i) + \mathbf{u}(n) \quad (5.51)$$

L'expression (5.51) est le modèle AR vectoriel du processus, p est l'ordre du modèle et \mathbf{A}_i , $i = 1, \dots, p$ sont les paramètres du modèle de dimensions $M \times M$ à estimer. Le spectre AR vectoriel du processus est la matrice de dimension $M \times M$ donnée par

$$\mathbf{P}(f) = \mathbf{A}_p^{-1}(z) \Sigma_{\mathbf{u}} \mathbf{A}_p^{-H}(z^{-1}) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad (5.52)$$

où H dénote la matrice complexe conjuguée transposée et $\mathbf{A}_p(z)$ est donnée par

$$\mathbf{A}_p(z) = \mathbf{I}_M + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i z^{-i} \quad (5.53)$$

avec \mathbf{I}_M désignant la matrice unité de dimension $M \times M$.

Considérons le cas où le processus vectoriel $\mathbf{x}(n)$ est non stationnaire. Le modèle AR vectoriel temps-variant correspondant est obtenu à partir de (5.51) en considérant que les paramètres sont dépendants du temps

$$\mathbf{x}(n) = -\sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i(n-i) \mathbf{x}(n-i) + \mathbf{u}(n) \quad (5.54)$$

Le modèle donné par (5.54) est une extension du modèle AR non stationnaire scalaire développé dans [Gre83], où les coefficients scalaires sont remplacés par des coefficients matriciels. La matrice densité spectrale de puissance peut être écrite comme [Arn98, Ger90]

$$\mathbf{P}(n, f) = \mathbf{A}_p^{-1}(n-1, z) \Sigma_{\mathbf{u}} \mathbf{A}_p^{-H}(n-1, z^{-1}) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad (5.55a)$$

où

$$\mathbf{A}_p(n, z) = \mathbf{I}_M + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i(n) z^{-i} \quad (5.55b)$$

La quantité $\mathbf{P}(n, f)$ est la matrice densité spectrale de puissance instantanée. Chaque élément diagonal de $\mathbf{P}(n, f)$ montre la distribution de la puissance d'un certain canal dans le plan temps-fréquence alors que chaque élément non diagonal montre la distribution du cross spectre d'une paire de canal dans le plan temps-fréquence.

5.7.2. Analyse temps-fréquence multicanaux basée sur le modèle autorégressif bilatéral

5.7.2.1. Distribution temps-fréquence

La représentation AR vectorielle bilatérale temps-variant d'ordre p du processus $\mathbf{x}(n)$ est obtenue à partir de la version scalaire [Kac02b, Kac05] en remplaçant les scalaires par des matrices ce qui conduit à

$$\mathbf{x}(n) = -\sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) + \mathbf{v}(n) \quad (5.56)$$

où $\mathbf{B}_i(n)$, $i = 1, \dots, p$ sont les paramètres $M \times M$ du modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant et $\mathbf{v}(n) = [v_1(n) \ v_2(n) \ \dots \ v_M(n)]^T$ est le vecteur du bruit blanc gaussien de dimension M et de matrice de covariance Σ_v . La matrice de la distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant peut être exprimée par

$$\mathbf{P}(n, f) = \mathbf{B}_p^{-1}(n-1, z) \Sigma_v \mathbf{B}_p^{-H}(n-1, z^{-1}) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad (5.57a)$$

où

$$\mathbf{B}_p(n, z) = \mathbf{I}_M + \sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i(n) (z^{-i} + z^i) \quad (5.57b)$$

5.7.2.2. Estimation des paramètres multidimensionnels

Considérons le problème d'estimation des paramètres du modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant. Si les coefficients M -dimensionnels temps-variant $\mathbf{B}_i(n)$ sont lentement variables alors ils peuvent être exprimés par une combinaison linéaire de fonctions de base

$$\mathbf{B}_i(n) = \sum_{j=0}^m \mathbf{B}_{ij} f_j(n), \quad i = 1, \dots, p \quad (5.58)$$

où \mathbf{B}_{ij} , $i = 1, \dots, p$; $j = 0, \dots, m$ sont des matrices constantes de dimensions $M \times M$ à calculer. Comme dans le cas scalaire, les polynômes de Legendre peuvent être utilisés comme fonctions de base. Chaque terme de la décomposition donnée par (5.56) peut être écrit comme

$$\mathbf{B}_i(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) = \sum_{j=0}^m \mathbf{B}_{ij} f_j(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)). \quad (5.59)$$

En définissant le vecteur \mathbf{X}_n par

$$\mathbf{X}_{n-i} = \begin{bmatrix} f_0(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) \\ f_1(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) \\ \vdots \\ f_m(n-i)(\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, p \quad (5.60)$$

l'équation (5.56) devient

$$\mathbf{x}(n) = -[\underline{\mathbf{B}}_1 \underline{\mathbf{B}}_2 \cdots \underline{\mathbf{B}}_p] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \mathbf{X}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n-p} \end{bmatrix} + \mathbf{v}(n) \quad (5.61a)$$

où

$$\underline{\mathbf{B}}_i = [\mathbf{B}_{i0} \mathbf{B}_{i1} \cdots \mathbf{B}_{im}], \quad i = 1, \dots, p \quad (5.61b)$$

L'équation (5.56) peut être réécrite comme

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_M(n) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11}^T & \mathbf{b}_{12}^T & \cdots & \mathbf{b}_{1p}^T \\ \mathbf{b}_{21}^T & \mathbf{b}_{22}^T & \cdots & \mathbf{b}_{2p}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{M1}^T & \mathbf{b}_{M2}^T & \cdots & \mathbf{b}_{Mp}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \mathbf{X}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n-p} \end{bmatrix} + \mathbf{v}(n) \quad (5.62a)$$

où

$$\mathbf{b}_{ki} = [b_{k1}^{(i0)} b_{k2}^{(i0)} \cdots b_{kM}^{(i0)} b_{k1}^{(i1)} b_{k2}^{(i1)} \cdots b_{kM}^{(i1)} \cdots b_{k1}^{(im)} b_{k2}^{(im)} \cdots b_{kM}^{(im)}]^T \quad (5.62b)$$

avec $b_{kl}^{(ij)}$ dénotant l'élément (k, l) de la matrice \mathbf{B}_{ij}

$$b_{kl}^{(ij)} = [\mathbf{B}_{ij}]_{kl} \quad (5.62c)$$

Egalisons les deux membres de l'équation matricielle pour obtenir l'ensemble des M équations suivantes

$$x_i(n) = -[\mathbf{X}_{n-1}^T \mathbf{X}_{n-2}^T \cdots \mathbf{X}_{n-p}^T] \underline{\mathbf{b}}_i + v_i(n), \quad i = 1, \dots, M \quad (5.63a)$$

où

$$\underline{\mathbf{b}}_i = [\mathbf{b}_{i1}^T \quad \mathbf{b}_{i2}^T \quad \cdots \quad \mathbf{b}_{ip}^T]^T. \quad (5.63b)$$

La minimisation de l'erreur quadratique moyenne dans chaque canal donne

$$E \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \mathbf{X}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1}^T & \mathbf{X}_{n-2}^T & \cdots & \mathbf{X}_{n-p}^T \end{bmatrix} \right) \underline{\mathbf{b}}_i = -E \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \mathbf{X}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n-p} \end{bmatrix} x_i(n) \right), \quad i = 1, \dots, M \quad (5.64)$$

Chaque ensemble des équations données par (5.64) possède la même forme que l'équation développée dans le cas scalaire [Kac05] à l'exception que les vecteurs \mathbf{X}_{n-i} , $i = 1, \dots, p$ sont formés en utilisant les échantillons passés et futurs de tous les canaux. Le vecteur courant des paramètres $\underline{\mathbf{b}}_i$ est estimé récursivement à partir du vecteur précédent en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursif. Définissons le vecteur \mathbf{Y}_n par

$$\mathbf{Y}_n = \left[\mathbf{X}_{n-1}^T \quad \mathbf{X}_{n-2}^T \quad \dots \quad \mathbf{X}_{n-p}^T \right]^T \quad (5.65)$$

L'algorithme des moindres carrés récursif permettant de résoudre (5.64) est résumé comme suit :

Initialisation

$$\mathbf{P}_0 = \delta^{-1} \mathbf{I}_{p(m+1)}, \text{ avec } \delta \text{ dénotant une petite constante positive.}$$

$$\underline{\mathbf{b}}_{i,0} = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

Pour $i = 1, 2, \dots, p$

Pour $n = 1, 2, \dots$

$$\kappa_n = \lambda + \mathbf{Y}_n^T \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{Y}_n$$

$$\mathbf{k}_n = \frac{\mathbf{P}_{n-1} \mathbf{Y}_n}{\kappa_n}$$

$$\underline{\mathbf{b}}_{i,n} = \underline{\mathbf{b}}_{i,n-1} - \mathbf{k}_n \left(x_i(n) + \mathbf{Y}_{n-1}^T \underline{\mathbf{b}}_{i,n-1} \right)$$

$$\mathbf{P}_n = \frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{k}_n \mathbf{Y}_n^T \mathbf{P}_{n-1} \right)$$

Une fois l'algorithme a convergé, une estimation des paramètres \mathbf{B}_{ij} peut être obtenue en utilisant (5.62b) et (5.62c).

La matrice de covariance du bruit d'entrée est estimée comme la matrice de covariance de l'erreur de prédiction multicanaux

$$\hat{\Sigma}_v = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{x}(n) + \sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i(n) (\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) \right) \left(\mathbf{x}(n) + \sum_{i=1}^p \mathbf{B}_i(n) (\mathbf{x}(n-i) + \mathbf{x}(n+i)) \right)^T \quad (5.66)$$

5.7.3. Exemples numériques

La performance du modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant pour l'analyse temps-fréquence multicanaux est illustrée en utilisant des signaux synthétiques. La distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant est comparée à la distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR vectoriel unilatéral et à la distribution de Choi-Williams. Le paramètre σ qui contrôle la réduction des termes d'interférence versus la résolution temps-fréquence dans la distribution de Choi-Williams a été fixé à 0.5. Les quatre premiers polynômes de Legendre ont été utilisés dans la décomposition des coefficients AR multidimensionnels temps-variant. Le facteur d'oubli λ dans l'algorithme des moindres carrés récursif a été posé égal à 0.99. A travers les exemples de simulation, des signaux à deux canaux ont générés. La longueur des signaux est $N = 500$ et la fréquence d'échantillonnage est $f_s = 1$ kHz.

Exemple 5.4

Cet exemple illustre la grande résolution de la distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant. Un signal à deux canaux composé de deux chirps linéaires parallèles proches a été généré selon le modèle suivant

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.8 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} \quad (5.67a)$$

où les composantes $s_i(n)$ sont données par

$$s_i(n) = \cos \left(2\pi \left(f_{0i} + \frac{\alpha_f}{2} n \right) n \right), \quad i = 1, 2 \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (5.67b)$$

avec $\alpha_f = 100$ Hz / s, $f_{01} = 50$ Hz, $f_{02} = 57$ Hz

et $\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \ w_2(n)]^T$ est le vecteur bruit blanc gaussien à deux composantes.

La fréquence instantanée de la première composante varie linéairement de 50 Hz à 100 Hz alors que la fréquence instantanée de la seconde composante varie de 57 Hz à 107 Hz. Le rapport signal à bruit dans chaque canal est de 20 dB.

On peut observer sur les figures 5.7a et 5.7b que les auto distributions de Choi-Williams de chaque canal montre une seule composante. Les deux composantes apparaissent comme une seule composante dans le plan temps-fréquence. La cross distribution temps-fréquence basée sur la méthode de Choi-Williams (Figure 5.7c) montre deux composantes légèrement séparées et caractérisées par un élargissement autour de la loi de la fréquence instantanée. L'amplitude des termes d'interférences dans la cross distribution temps-fréquence est plus petite que celle des termes d'interférence des auto distributions de sorte qu'ils sont considérablement réduits alors que les auto termes sont toujours concentrés. Les auto distributions des canaux 1 et 2 ainsi que les cross distributions temps-fréquence basées sur un modèle vectoriel AR unilatéral d'ordre $p=4$ sont incapables de discerner de manière précise les deux composantes dans la totalité du plan temps-fréquence comme illustré sur les figures 5.8a, 5.8b et 5.8c. Les auto distributions temps-fréquence des canaux 1 et 2 utilisant un modèle AR vectoriel bilatéral

ainsi que la cross distribution montrées sur les figures 5.9a, 5.9b et 5.9c, respectivement, font apparaître clairement deux composantes distinguables fortement concentrées autour de la loi théorique linéaire de la fréquence instantanée. Notons qu'un ordre $p = 2$ a été utilisé pour le modèle AR vectoriel bilatéral. Comme dans le cas scalaire, le modèle AR vectoriel bilatéral renforce les pics conduisant à une amélioration de la résolution de la distribution temps-fréquence.

Exemple 5.5

Cet exemple consiste en un signal à deux canaux généré selon le modèle suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.45 \\ -0.6 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} \quad (5.68a)$$

où les deux composantes sont données par

$$s_1(n) = \cos \left(2\pi \left(f_{01} + \frac{\alpha_f}{2} n \right) n \right) \quad \text{avec } \alpha_f = 100 \text{ Hz/s}, \quad f_{01} = 57 \text{ Hz} \quad (5.68b)$$

$$s_2(n) = \cos \left(2\pi \left(f_{02} + \frac{\beta_f}{3} n^2 \right) n \right), \quad \text{avec } \beta_f = 500 \text{ Hz/s}^2, \quad f_{02} = 50 \text{ Hz} \quad (5.68c)$$

et $\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \quad w_2(n)]^T$ est le vecteur bruit blanc gaussien.

La première composante est un chirp linéaire dont la fréquence instantanée varie de 57 Hz à 107 Hz alors que la seconde composante est un chirp quadratique dont la fréquence instantanée augmente non linéairement de 50 Hz à 175 Hz. Le rapport signal à bruit dans chaque canal est de 25 dB.

Les figures 5.10a, 5.10b et 5.10c montrent que les auto distributions de Choi-Williams de chaque canal ainsi que la cross distribution font apparaître une seule composante entre les instants 0 s et 0.35 s. Du fait que les deux composantes sont très proches l'une de l'autre, elles apparaissent comme une seule composante dans cet intervalle. Au delà de l'instant 0.35 s, les deux composantes sont distinguées bien qu'un élargissement autour de la loi théorique de la fréquence instantanée est observé. Les distributions temps-fréquence estimées au moyen du modèle AR vectoriel unilatéral d'ordre $p=4$ montre deux composantes au delà de l'instant 0.15 s comme observé sur les figures 5.11a, 5.11b et 5.11c. Cependant, entre les instants 0 s et 0.15 s, les distributions temps-fréquence à base du modèle AR vectoriel unilatéral sont incapables de discerner clairement les deux composantes. Les auto distributions temps-fréquence correspondant aux deux canaux ainsi que la cross distribution basées sur un modèle AR vectoriel bilatéral d'ordre $p=2$ montrent avec clarté deux composantes dans la totalité du plan temps-fréquence comme observé sur les figures 5.12a, 5.12b et 5.12c.

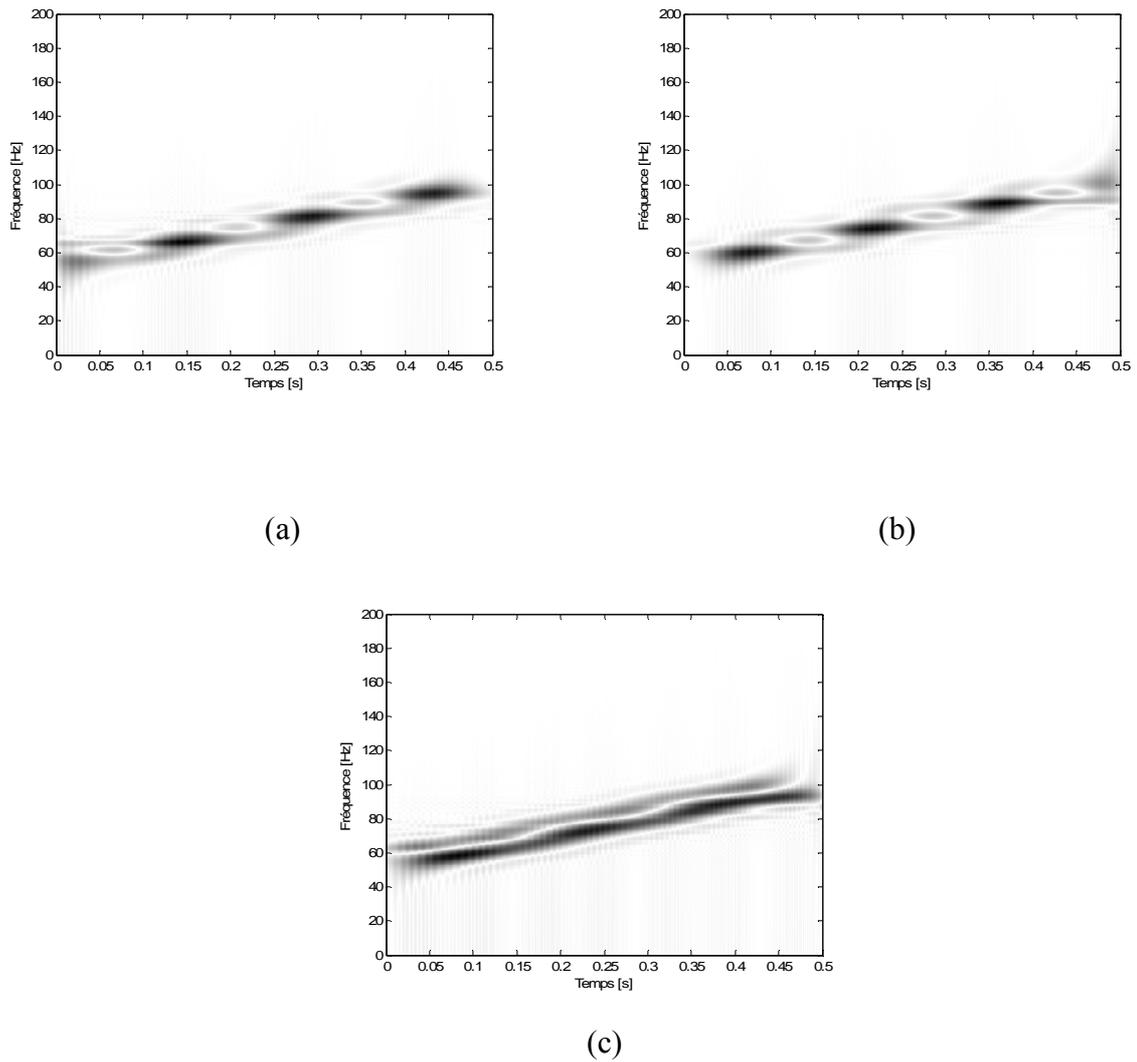


Figure 5.7 : Distribution de Choi-Williams du signal à deux canaux de l'exemple 5.4. Le signal de chaque canal est composé de la combinaison linéaire de deux chirps linéaires parallèles. Le rapport signal à bruit dans chaque canal est de 20 dB. (a) Auto distribution de Choi-Williams du canal 1. (b) Auto distribution de Choi-Williams du canal 2. (c) Cross distribution de Choi-Williams.

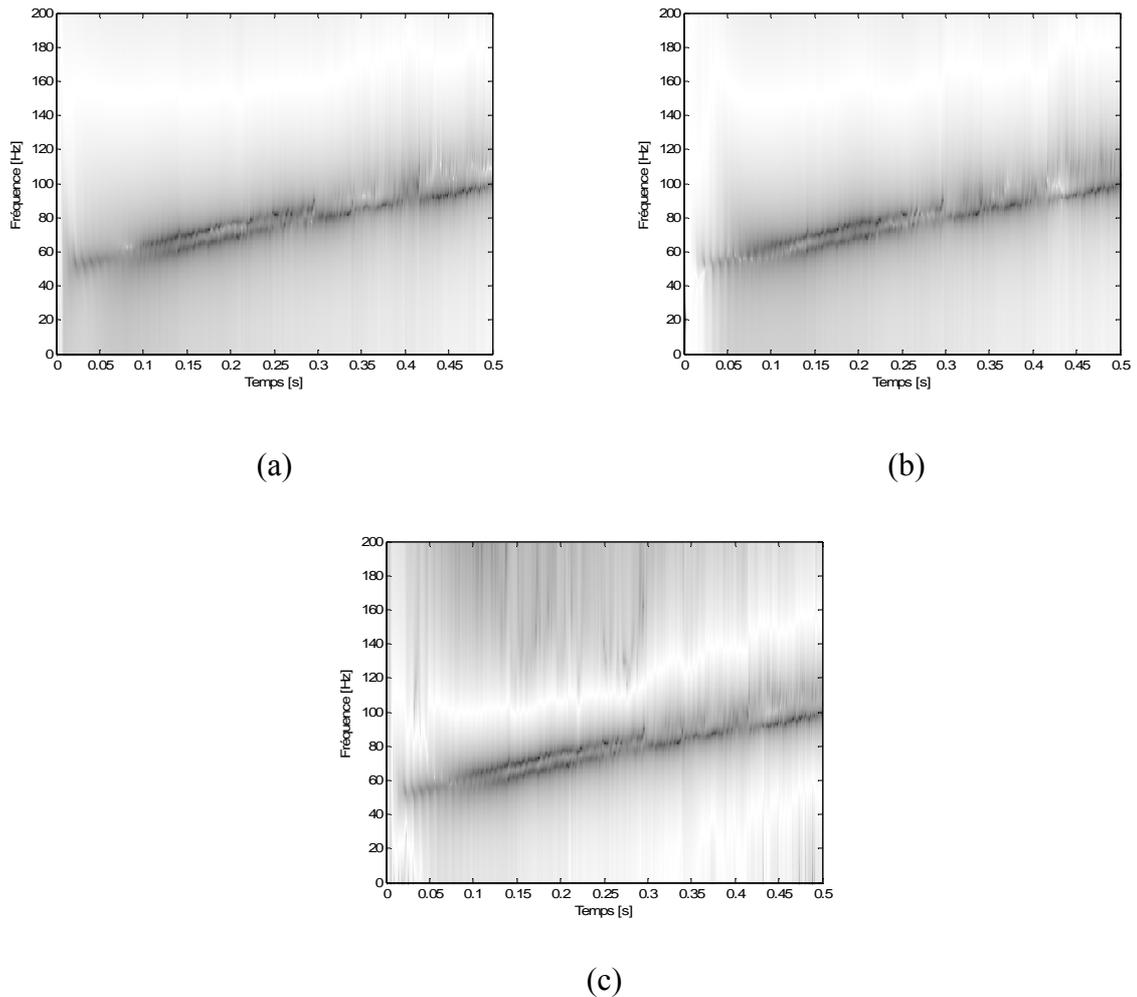


Figure 5.8 : Distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR vectoriel unilatéral du signal à deux canaux de l'exemple 5.4. Les quatre premiers polynômes de Legendre ont été utilisés dans la décomposition des coefficients matriciels temps-variant. L'ordre du modèle est $p = 4$. Le signal dans chaque canal est composé d'une combinaison linéaire de deux chirps linéaires parallèles. Le rapport signal à bruit dans chaque canal est de 20 dB. (a) Auto distribution temps-fréquence du canal 1. (b) Auto distribution temps-fréquence du canal 2. (c) Cross distribution temps-fréquence.

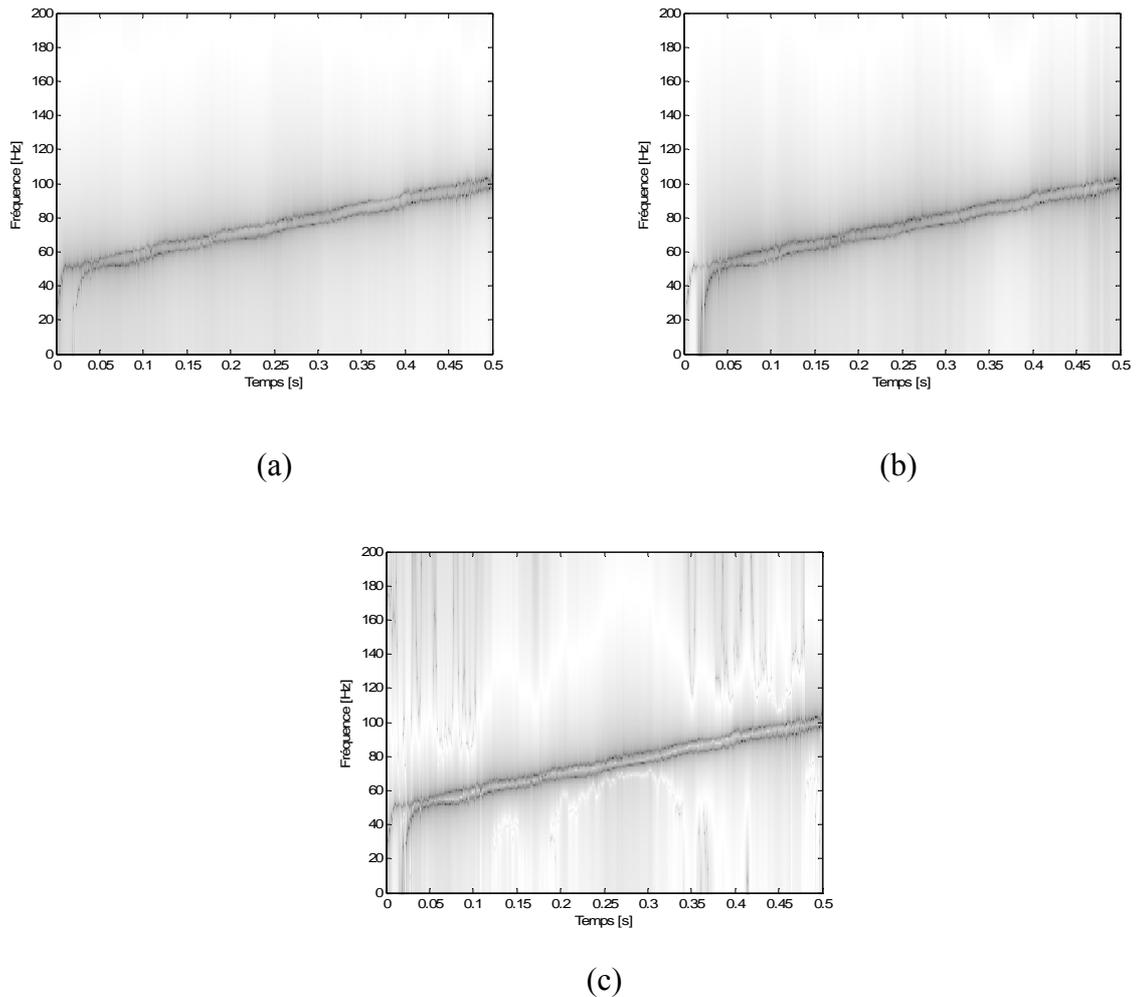


Figure 5.9 : Distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR vectoriel bilatéral du signal à deux canaux de l'exemple 5.4. Les quatre premiers polynômes de Legendre ont été utilisés dans la décomposition des coefficients matriciels temps-variant. L'ordre du modèle est $p = 2$. Le signal dans chaque canal est composé d'une combinaison linéaire de deux chirps linéaires parallèles. Le rapport signal à bruit dans chaque canal est de 20 dB. (a) Auto distribution temps-fréquence du canal 1. (b) Auto distribution temps-fréquence du canal 2. (c) Cross distribution temps-fréquence.

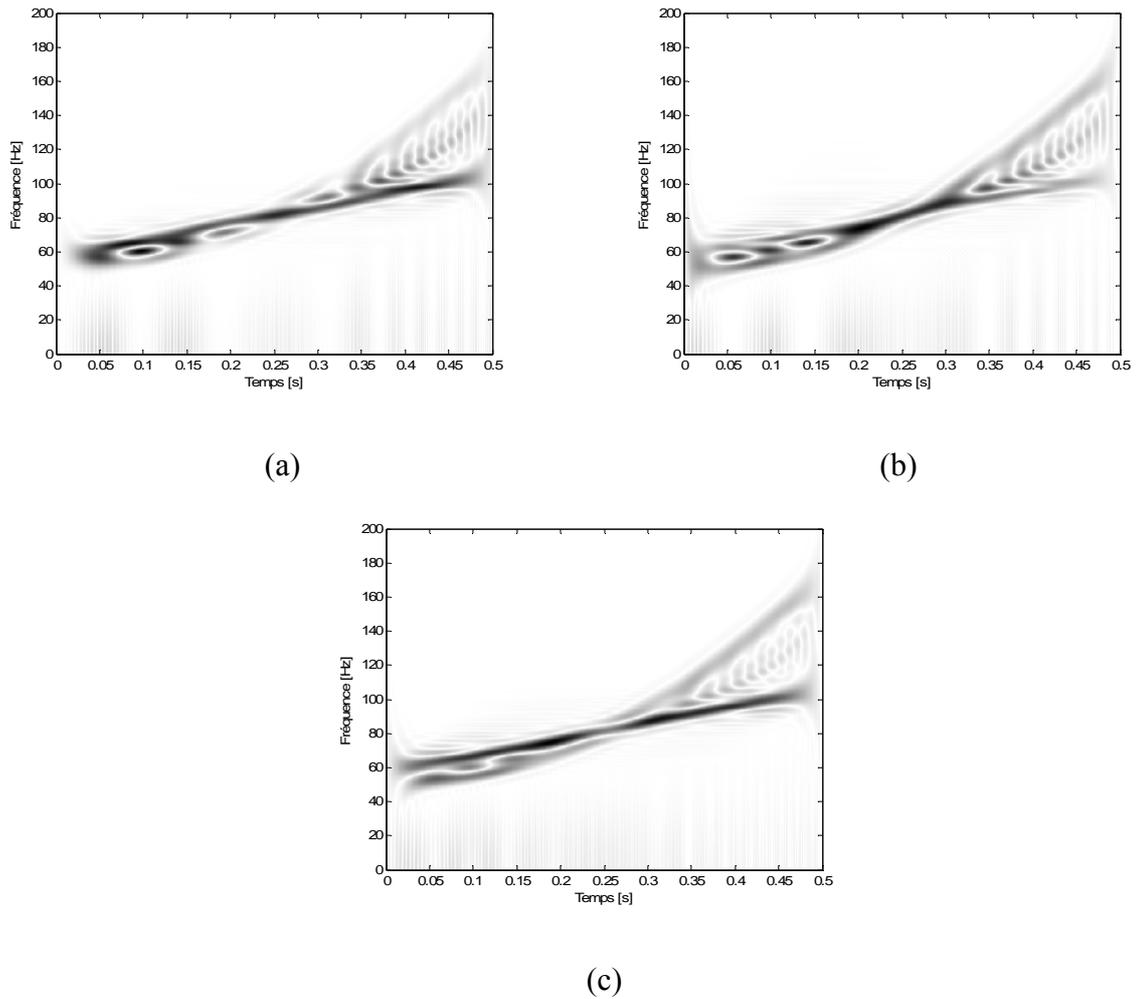


Figure 5.10 : Distribution de Choi-Williams du signal à deux canaux de l'exemple 5.5. Le signal dans chaque canal est composé de la combinaison linéaire d'un chirp quadratique et d'un chirp linéaire. Le rapport signal à bruit dans chaque canal est de 25 dB. (a) Auto distribution de Choi-Williams du canal 1. (b) Auto distribution de Choi-Williams du canal 2. (c) Cross distribution de Choi-Williams.

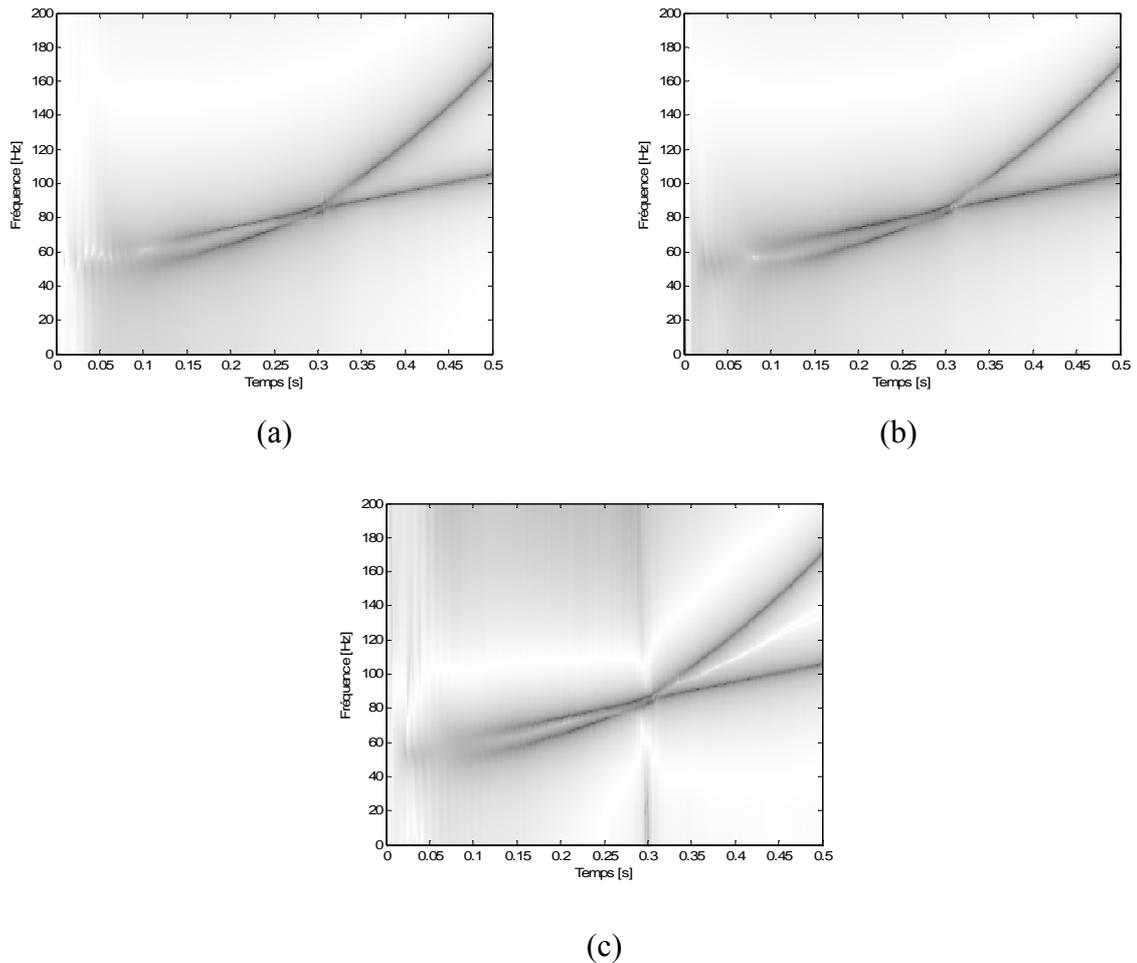


Figure 5.11 : Distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR vectoriel unilatéral du signal à deux canaux de l'exemple 5.5. Les quatre premiers polynômes de Legendre ont été utilisés dans la décomposition des coefficients matriciels temps-variant. L'ordre du modèle est $p = 4$. Le signal dans chaque canal est composé d'une combinaison linéaire d'un chirp quadratique et d'un chirp linéaire. Le rapport signal à bruit dans chaque canal est de 25 dB. (a) Auto distribution temps-fréquence du canal 1. (b) Auto distribution temps-fréquence du canal 2. (c) Cross distribution temps-fréquence.

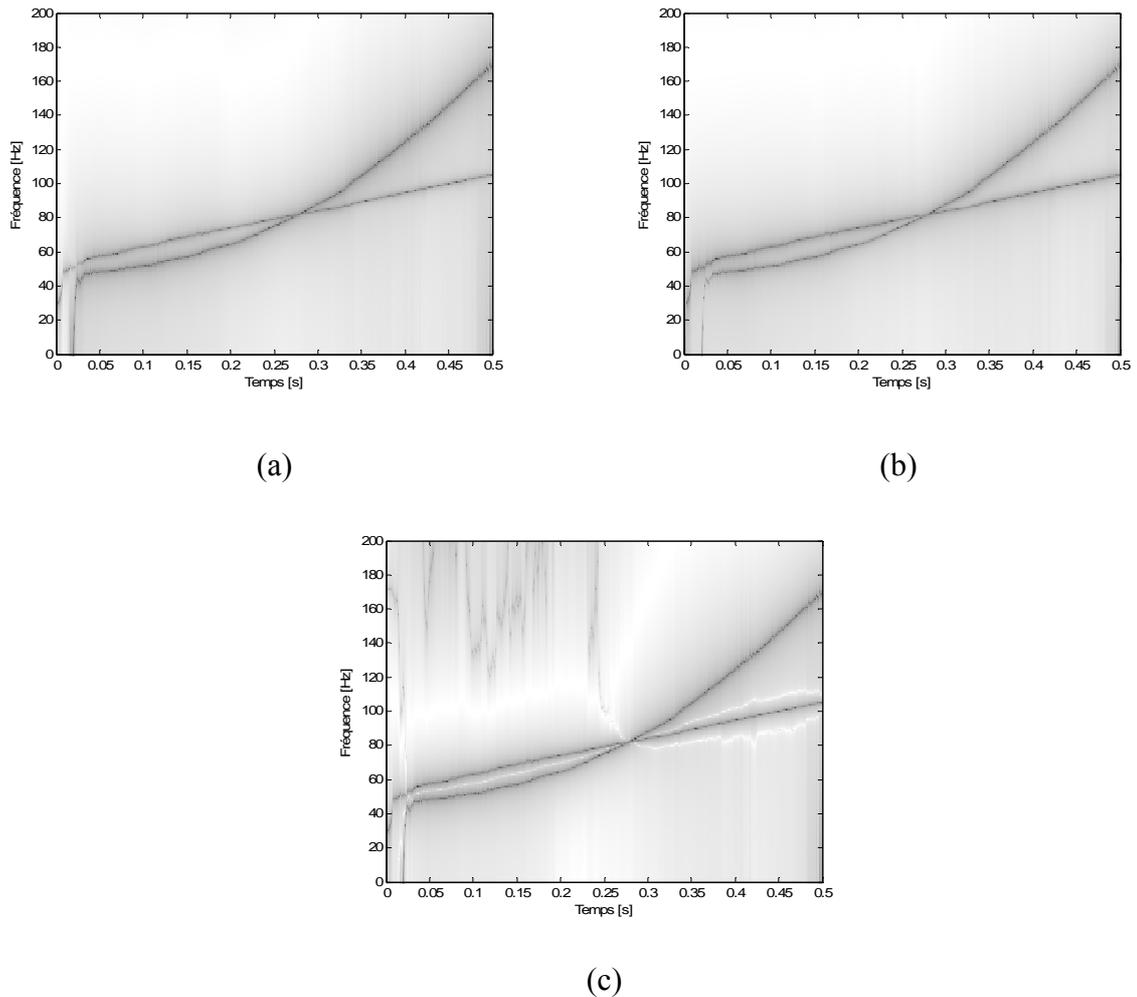


Figure 5.12 : Distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR vectoriel bilatéral du signal à deux canaux de l'exemple 5.5. Les quatre premiers polynômes de Legendre ont été utilisés dans la décomposition des coefficients matriciels temps-variant. L'ordre du modèle est $p = 2$. Le signal dans chaque canal est composé d'une combinaison linéaire d'un chirp quadratique et d'un chirp linéaire. Le rapport signal à bruit dans chaque canal est de 25 dB. (a) Auto distribution temps-fréquence du canal 1. (b) Auto distribution temps-fréquence du canal 2. (c) Cross distribution temps-fréquence.

5.7.4. Complexité arithmétique

A chaque itération, le calcul des paramètres matriciels du modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant d'ordre p à M canaux utilisant les polynômes de Legendre jusqu'au degré m nécessite $M(m + 1)p$ opération d'addition plus que le modèle AR vectoriel unilatéral temps-variant. A chaque itération l'algorithme des moindres carrés récursifs nécessite $O(M^2(m + 1)^2 p^2)$ opérations pour calculer les paramètres matriciels du modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant. Les éléments de la matrice cross-spectrale instantanée peuvent être calculés efficacement en utilisant l'algorithme de la transformée de Fourier rapide. Cela nécessite à chaque itération $O(M^2 N \log_2(N))$ pour calculer N points FFT des entrées des matrices de dimensions $M \times M$ et $O(M^3)$ pour l'inversion et la multiplication des matrices. Le modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant nécessite donc $O(N^2 M^2 \log_2(N) + NM^2(m + 1)^2 p^2 + NM^3)$ opérations.

5.8. Conclusion

Une distribution temps-fréquence basée sur un prédicteur linéaire bilatéral temps-variant a été proposée et comparée à la distribution de Choi-Williams et à la distribution basée sur un prédicteur linéaire unilatéral temps-variant. Il a été montré que la distribution temps-fréquence proposée possède une performance supérieure à celle des deux autres distributions. En particulier, il a été montré que la distribution temps-fréquence basée sur le modèle prédicteur linéaire bilatéral temps-variant est capable de discerner deux composantes non stationnaires très proches qui ne peuvent être discernées en utilisant la distribution de Choi-Williams ou la distribution basée sur le prédicteur linéaire unilatéral temps-variant même en augmentant son ordre. Dans tous les cas, le prédicteur linéaire bilatéral nécessite un ordre plus petit que celui du prédicteur linéaire unilatéral pour accomplir une estimation avec une plus grande précision. Le choix de l'ordre du modèle est d'une grande importance parce qu'un mauvais choix peut donner lieu à l'apparition de fausses composantes spectrales conduisant à des résultats d'estimation erronés.

Le prédicteur linéaire bilatéral temps-variant a été étendu au cas vectoriel pour l'analyse temps-fréquence des signaux multicanaux. Il a été montré que le modèle AR vectoriel bilatéral nécessite un ordre plus faible que celui du modèle unilatéral pour accomplir une meilleure résolution temps-fréquence. La distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR vectoriel bilatéral a été testée sur des signaux multicanaux non stationnaires et comparée à la distribution basée sur le modèle AR vectoriel unilatéral conventionnel et à la distribution de Choi-Williams. La distribution temp-fréquence utilisant le modèle AR vectoriel bilatéral a montré une performance supérieure à celle des deux autres distributions en terme de résolution temps-fréquence. En effet, elle permet de discerner deux composantes ayant des fréquences instantanées très proches que ni la distribution de Choi-Williams ni la distribution basée sur le modèle AR vectoriel unilatéral ne permettent de les distinguer avec clarté.

Conclusion

Le résultat d'analyse des signaux non stationnaires dépend fortement de la distribution temps-fréquence utilisée. Les distributions temps-fréquence linéaires sont désirables pour leur simplicité. Cependant, leur résolution temps-fréquence est limitée. Les méthodes temps-fréquence quadratiques sont attractives pour leur grande résolution temps-fréquence et fournissent une interprétation en terme de quantité corrélative ou énergétique. La classe de Cohen comprend l'ensemble des distributions temps-fréquence obtenues par filtrage de la distribution de Wigner-Ville joue un rôle important dans ce cadre.

Les termes d'interférences associés aux distributions temps-fréquence quadratiques lors de l'analyse des signaux multi-composantes constituent une sérieuse limitation de ces distributions. En effet, ils rendent difficile l'interprétation de la distribution temps-fréquence limitant ainsi son intérêt pratique. Les distributions de Choi-Williams et à noyau en cône permettent de réduire les termes d'interférences en utilisant une fonction noyau adéquate. Cependant, la réduction de l'amplitude des termes d'interférence se fait au détriment d'une diminution de la résolution temps-fréquence.

Une autre catégorie de distributions temps-fréquence quadratiques est obtenue en substituant au signal un modèle paramétrique composé d'une combinaison linéaire de fonctions gaussiennes concentrées dans le plan temps-fréquence. Cette approche donne lieu à des distributions temps-fréquence à termes d'interférences supprimés préservant les propriétés de positivité et de marginalité temporelle et fréquentielle.

Comme application de l'analyse temps-fréquence, une méthode basée sur l'analyse en ondelettes a été proposée pour identifier la ligne perturbatrice générant des signaux d'interférences électromagnétiques dans les circuits imprimés. L'analyse en ondelettes a été utilisée pour séparer le signal utile sans perturbation et le signal interférant. L'algorithme mis au point permet d'estimer la fréquence du signal perturbateur ainsi que la distance entre la ligne perturbatrice et la ligne perturbée sans faire aucune supposition concernant la localisation de la ligne perturbatrice. La méthode d'identification a été testée et validée en simulant un circuit imprimé composé d'une ligne perturbatrice et d'une ligne perturbée. La méthode permet de déterminer la fréquence du signal perturbateur et la distance séparant les lignes couplées avec une bonne précision.

Le modèle de prédiction linéaire bilatérale temps-variant a été proposé pour construire une distribution temps-fréquence quadratique comme alternative au prédicteur linéaire unilatéral. Les paramètres du modèle sont exprimés par une combinaison linéaire de fonctions de base connues et l'algorithme des moindres carrés récursif est utilisé pour calculer les coefficients intervenant dans la combinaison linéaire. Les résultats d'analyse des signaux synthétiques et réels montrent que la distribution temps-fréquence basée sur le

prédicteur linéaire bilatéral possède une meilleure résolution que la distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire unilatéral temps-variant et la distribution de Choi-Williams. La distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral temps-variant permet de distinguer deux composantes non stationnaires très proches qui ne peuvent être discernées en utilisant la distribution de Choi-Williams ou la distribution basée sur le prédicteur linéaire unilatéral temps-variant même en augmentant son ordre. La distribution temps-fréquence basée sur le prédicteur linéaire bilatéral temps-variant a été utilisée pour estimer la fréquence instantanée en recherchant les fréquences qui correspondent aux pics.

L'approche d'analyse temps-fréquence proposée dans le cas des signaux monodimensionnels a été étendue aux signaux multicanaux. En se basant sur des signaux synthétiques, il a été montré que le modèle AR vectoriel bilatéral temps-variant nécessite un ordre plus petit que celui du modèle AR vectoriel unilatéral temps-variant pour accomplir une meilleure résolution temps-fréquence. Dans le cas vectoriel, la réduction du nombre de paramètres présente un grand intérêt parce qu'elle permet une réduction considérable de la complexité de calcul.

Dans la partie du travail sur l'application de l'analyse en ondelettes à la détection et l'identification des sources d'interférences électromagnétiques sur circuits imprimés, nous avons traité le problème d'une seule source perturbatrice. Cependant, il n'est pas rare qu'en pratique, les interférences soient causées par plusieurs sources de perturbation. Le cas de plusieurs sources perturbatrices peut être envisagé comme suite à ce travail et peut être considéré dans les futures recherches. Dans ce contexte, il est suggéré de faire une analogie avec le problème de la séparation aveugle en traitement du signal et appliquer les méthodes existantes pour retrouver la contribution de chaque source perturbatrice. Néanmoins, la présence d'un grand nombre de paramètres tels que la longueur des lignes, l'épaisseur du substrat et les caractéristiques des signaux complique la situation. Le développement d'une méthode qui prend en considération toutes ces variables peut être envisagé.

Dans la partie du travail sur l'analyse temps-fréquence par modélisation AR, la généralisation de la distribution temps-fréquence basée sur le modèle AR bilatéral temps-variant aux signaux multidimensionnels peut être envisagée comme suite à ce travail.

Annexe

Algorithme des moindres carrés récursif

A.1. Algorithme des moindres carrés récursif (RLS) à pondération exponentielle

La méthode des moindres carrés récursive utilise l'information contenue dans le nouvel échantillon disponible pour mettre à jour les estimations précédentes des différentes quantités. La fonction coût à minimiser est donnée par [Hay91]

$$E(n) = \sum_{i=1}^n \beta(n, i) e^2(i) \quad (\text{A.1})$$

où $e(i)$ est l'erreur de prédiction exprimée par

$$e(i) = x(i) + A^T(n)X(i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

et le vecteur $X(i)$ est composé des p échantillons passés,

$$X(i) = [x(i-1) \quad \dots \quad x(i-2) \quad \dots \quad x(i-p)]^T \quad (\text{A.3})$$

et $A(n)$ est le vecteur des coefficients de prédiction à long terme

$$A(n) = [a_1(n) \quad a_2(n) \quad \dots \quad a_p(n)]^T \quad (\text{A.4})$$

Le facteur de pondération $\beta(n, i)$, appelé facteur d'oubli, est tel que

$$0 < \beta(n, i) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.5a})$$

Il permet de tenir compte du comportement non stationnaire du signal en attribuant une plus grande contribution aux échantillons récents qu'aux échantillons passés. Le facteur d'oubli fréquemment utilisé applique une pondération exponentielle,

$$\beta(n, i) = \lambda^{n-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.5b})$$

où λ est une constante positive plus petite que l'unité.

La mémoire de l'algorithme ou la longueur effective asymptotique de la fenêtre d'analyse, en nombre d'échantillons, est définie par

$$L_e = \frac{1}{1 - \lambda} \quad (\text{A.6})$$

Le cas particulier $\lambda = 1$ correspond à une mémoire infinie.

En utilisant un facteur d'oubli exponentiel, la fonction coût à minimiser prend la forme suivante :

$$E(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} |e(i)|^2 \quad (\text{A.7})$$

La valeur optimale du vecteur de prédiction $A(n)$ minimisant la fonction coût $E(n)$ s'obtient en résolvant l'ensemble des équations normales donné sous forme matricielle par

$$\Phi(n) A(n) = \theta(n) \quad (\text{A.8})$$

où $\Phi(n)$ est la matrice de corrélation de dimension $p \times p$ donnée par

$$\Phi(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{X}(i) \mathbf{X}^T(i) \quad (\text{A.9})$$

et $\theta(n)$ est le vecteur de cross corrélation de dimension $p \times 1$ donné par

$$\theta(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{X}(i) x(i) \quad (\text{A.10})$$

En isolant le terme correspondant à $i = n$ dans la sommation du membre de droite de l'équation (A.9), il vient

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-i} \mathbf{X}(i) \mathbf{X}^T(i) + \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n) \\ &= \lambda \left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-1-i} \mathbf{X}(i) \mathbf{X}^T(i) \right] + \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n) \\ &= \lambda \Phi(n-1) + \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

L'opération d'adaptation permettant d'obtenir la matrice de corrélation $\Phi(n)$ met donc en œuvre l'ancienne valeur $\Phi(n-1)$ et un terme de correction $\mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n)$.

De même, la valeur du vecteur de cross corrélation $\theta(n)$ peut s'écrire sous la forme

$$\theta(n) = \lambda \theta(n-1) + \mathbf{X}(n) x(n) \quad (\text{A.12})$$

Le calcul de $A(n)$ dans (A.8) nécessite la détermination de l'inverse de la matrice de corrélation $\Phi(n)$. Ceci peut être accompli en appliquant le lemme d'inversion matricielle suivant :

Soient \mathbf{R} et \mathbf{U} deux matrices de dimensions $l_1 \times l_1$ semi-définies positives telles que

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{V} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{V}^T \quad (\text{A.13a})$$

où \mathbf{W} est une autre matrice de dimension $l_2 \times l_2$ semi-définie positive et \mathbf{V} est une matrice de dimension $l_1 \times l_2$. L'inverse de la matrice \mathbf{R} est exprimé par

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{U} - \mathbf{U} \mathbf{V} \left(\mathbf{W} + \mathbf{V}^T \mathbf{U} \mathbf{V} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{U} \quad (\text{A.13b})$$

En supposant que la matrice de corrélation $\Phi(n)$ est semi-définie positive, donc non singulière, le lemme d'inversion matricielle peut être appliqué à l'équation récursive (A.11). En posant

$$\mathbf{R} = \Phi(n)$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \lambda \Phi(n-1)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}(n)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{I},$$

la substitution de ces définitions dans le lemme d'inversion matricielle conduit à la relation récursive permettant de calculer l'inverse de la fonction de corrélation

$$\Phi^{-1}(n) = \lambda^{-1} \Phi^{-1}(n-1) - \frac{\lambda^{-2} \Phi^{-1}(n-1) \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^T(n) \Phi^{-1}(n-1)}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{X}^T(n) \Phi^{-1}(n-1) \mathbf{X}(n)} \quad (\text{A.14})$$

En posant

$$\mathbf{P}(n) = \Phi^{-1}(n) \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{K}(n) = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}(n-1) \mathbf{X}(n)}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{X}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{X}(n)}, \quad (\text{A.16})$$

l'équation (A.14) peut être réécrite comme

$$\Phi^{-1}(n) = \mathbf{P}(n) = \lambda^{-1} \mathbf{P}(n-1) - \lambda^{-1} \mathbf{K}(n) \mathbf{X}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \quad (\text{A.17})$$

Notons que $\mathbf{P}(n)$ est une matrice de dimension $p \times p$ alors que $\mathbf{K}(n)$ est un vecteur de dimension $p \times 1$. En réarrangeant (A.16), on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n) &= \lambda^{-1} \mathbf{P}(n-1) \mathbf{X}(n) - \lambda^{-1} \mathbf{K}(n) \mathbf{X}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{X}(n) \\ &= \left[\lambda^{-1} \mathbf{P}(n-1) - \lambda^{-1} \mathbf{K}(n) \mathbf{X}^T(n) \mathbf{P}(n-1) \right] \mathbf{X}(n) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

L'expression entre crochets n'est autre que $\mathbf{P}(n)$ donné par (A.17). Donc, l'équation (A.18) se réduit à

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n) \mathbf{X}(n) \quad (\text{A.19})$$

ou encore, puisque $\mathbf{P}(n) = \Phi^{-1}(n)$, il vient

$$\mathbf{K}(n) = \Phi^{-1}(n)\mathbf{X}(n) \quad (\text{A.20})$$

A.2. Adaptation du vecteur des coefficients

Les équations (A.8), (A.12) et (A.15) permettent d'exprimer l'estimateur du vecteur de prédiction à l'instant n comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(n) &= -\Phi^{-1}(n)\boldsymbol{\theta}(n) \\ &= -\mathbf{P}(n)\boldsymbol{\theta}(n) \\ &= -\lambda\mathbf{P}(n)\boldsymbol{\theta}(n-1) - \mathbf{P}(n)\mathbf{X}(n)x(n) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

En substituant $\mathbf{P}(n)$ tel que donné par (A.17) dans le terme de droite de l'équation (A.21), il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(n) &= \mathbf{A}(n-1) - \mathbf{K}(n)[x(n) + \mathbf{X}^T(n)\mathbf{A}(n-1)] \\ &= \mathbf{A}(n-1) - \mathbf{K}(n)\alpha(n) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

où $\alpha(n)$ est l'innovation définie par

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= x(n) + \mathbf{X}^T(n)\mathbf{A}(n-1) \\ &= x(n) + \mathbf{A}^T(n-1)\mathbf{X}(n) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Le produit $\mathbf{A}^T(n-1)\mathbf{X}(n)$ représente une prédiction de l'échantillon courant $x(n)$ sur base des valeurs du vecteur des coefficients de prédiction à l'instant $n-1$. L'innovation $\alpha(n)$ est une estimation de l'erreur de prédiction a priori. Elle est, en général, différente de l'estimateur de l'erreur de prédiction a posteriori donné par

$$e(n) = x(n) + \mathbf{A}^T(n)\mathbf{X}(n) \quad (\text{A.24})$$

qui fait intervenir la valeur du vecteur des coefficients de prédiction à l'instant courant n .

A.3 Initialisation de l'algorithme des moindres carrés récursif

L'équation récursive (A.17) doit être initialisée en choisissant une valeur de départ $\mathbf{P}(0)$ ne conduisant pas à une matrice de corrélation $\Phi(n)$ singulière. Une méthode permettant d'aboutir au choix des valeurs initiales consiste à modifier légèrement l'expression de la matrice de corrélation $\Phi(n)$ en écrivant

$$\Phi(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{X}(i)\mathbf{X}^T(i) + \delta \lambda^n \mathbf{I} \quad (\text{A.25})$$

où \mathbf{I} est la matrice identité de dimension $p \times p$ et δ une constante positive.

Ce choix affecte uniquement la valeur initiale et non les relations récursives. En posant $n = 0$, on obtient

$$\Phi(0) = \delta \mathbf{I} \quad (\text{A.26a})$$

et par conséquent, la valeur de $P(0)$ est

$$P(0) = \delta^{-1} I \quad (\text{A.26b})$$

Le vecteur des coefficients de prédiction peut être initialisé au vecteur nul

$$A(0) = \mathbf{0} \quad (\text{A.26c})$$

où $\mathbf{0}$ est le vecteur nul de dimension $p \times 1$.

A.4. Comportement de l'algorithme RLS dans un environnement non stationnaire

Un problème lié à l'utilisation de l'algorithme des moindres carrés récursif est le choix du facteur d'oubli λ . Dans un environnement stationnaire, les meilleurs résultats sont obtenus lorsque les coefficients de prédiction sont lentement adaptés, ce qui correspond à $\lambda = 1$ [Hay91]. Lorsque l'algorithme RLS opère dans un environnement non stationnaire, le facteur d'oubli est assigné une valeur inférieure à 1 pour suivre l'évolution du vecteur des paramètres optimal qui varie d'une itération à l'autre. Le processus d'adaptation doit non seulement trouver la valeur optimale du vecteur des paramètres mais aussi suivre le changement continu de la valeur optimale.

Afin de pouvoir suivre les variations statistiques, l'algorithme possède une mémoire finie déterminée par le choix d'une valeur $\lambda < 1$. Cependant, le fait d'utiliser une valeur $\lambda < 1$ dans un environnement non stationnaire entraîne le changement du comportement de l'algorithme RLS.

En général, la performance d'un algorithme adaptatif dont le processus d'adaptation utilise une opération de moyennage statistique sur un nombre fini d'échantillons se dégrade. Dans l'algorithme RLS pondéré exponentiellement, ces dégradations, exprimées par l'excès de l'erreur quadratique moyenne, sont dues à deux sources d'erreurs [Ele86, Top88]. La première source d'erreur est attribuée à la pondération exponentielle de la séquence du carré de l'erreur et donc à la nature exponentielle des estimateurs de la matrice de corrélation et du vecteur de cross corrélation qui est une conséquence de la longueur finie de la durée de l'analyse. Cette erreur, appelée bruit d'estimation, entraîne un écart du vecteur des coefficients de prédiction par rapport à sa valeur optimale. La seconde source d'erreur est associée à la non stationnarité du signal. Le temps de réaction de l'algorithme d'adaptation pour s'adapter à son environnement et suivre les variations statistiques du vecteur des coefficients de prédiction introduit une erreur appelée erreur de retard (lag error).

Des formes approximatives ont été développées pour les deux types d'erreur [Med81, Ele86]. En général, lorsque la mémoire de l'algorithme RLS devient courte, ce qui se traduit par une diminution du facteur d'oubli λ , l'excès de l'erreur quadratique dû au bruit d'estimation augmente. Cela est équivalent à dire qu'une adaptation rapide de l'algorithme RLS entraîne une augmentation du bruit d'estimation. Pour une valeur de λ très proche de l'unité, le terme de l'erreur quadratique dû au bruit de retard est inversement proportionnelle à $(1 - \lambda)$ et, par conséquent, il augmente lorsque le facteur d'oubli λ croît. D'où la nécessité de faire un compromis entre le bruit d'estimation et le bruit de retard lors du choix du facteur d'oubli λ .

Références

- [All77a] J. –B. Allen, “Short–Term Spectral Analysis, Synthesis and Modification by Discrete Fourier Transform”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP–25, no. 6, pp. 235–238, 1977.
- [All77b] J. –B. Allen and L. –R. Rabiner, “A Unified Approach to STFT Analysis and Synthesis,” *Proc. IEEE*, vol. 65, no. 11, pp. 1558–1564, 1977.
- [Ami97] M. –G. Amin, “Interference Mitigation in Spread–Spectrum Communication Systems Using Time–Frequency Distributions”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, no. 1, pp. 90–102, 1997.
- [Ant01] G. Antonini and A. Orlandi, “Wavelet Packet–Based EMI Signal Processing and Source Identification”, *IEEE Trans. Electromagn. Comp.*, vol. 43, no. 2, pp. 140–148, 2001.
- [Arn98] M. Arnold et al., “Adaptive AR Modeling of Nonstationary Time Series by Means of Kalman Filtering,” *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 45, no. 5, pp. 553–562, 1998.
- [Aus91] L. Auslander and I. Gertner, “The Discrete Zak Transform Application to Time–Frequency Analysis and Synthesis of Nonstationary Signals”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, no. 4, pp. 825–835, 1991.
- [BarB01] B. Barkat and B. Boashash, “A High–Resolution Quadratic Time–Frequency Distribution of Multicomponent Signals Analysis”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 10, pp. 2232–2239, 2001.
- [BarB99] B. Barkat and B. Boashash, “Instantaneous Frequency Estimation of Polynomial FM Signals Using the Peak of the PWVD: Statistical Performance in the Presence of Additive Gaussian Noise”, vol. 47, no. 9, pp. 2480–2490, 1999.
- [BarR93] R. Baraniuk and D. –L. Jones, “Signal–Dependent Time–Frequency Analysis Using a Radially Gaussian Kernel,” *Signal Processing*, vol. 32, no. 3, pp. 263–284, 1993.
- [BarS99] S. Barbarossa and A. Scaglione, “Adaptive Time–Varying Cancellations of Wideband Interferences in Spread–Spectrum Communications Based on Time–Frequency Distributions”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, no. 4, pp. 957–965, 1999.
- [Bas80] M. –J. Bastiaans, “Gabor’s Expansion of a Signal into Gaussian Elementary Signals”, *Proc. IEEE*, vol. 68, no. 4, pp. 538–539, 1980.
- [Ber88] J. Bertrand and P. Bertrand, “Time–Frequency Representations of Broadband Signals”, in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing*, New York, USA, pp. 2196–2199, 1988.
- [Boa88] B. Boashash, “Note on the Wigner Distribution for Time–Frequency Signal Analysis”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 36, no. 9, pp. 1518–1521, 1988.

- [Boa01] B. Boashash and M. Mesbah, "A Time–Frequency Approach for Newborn Seizure Detection", *IEEE Engineering in Medicine & Biology Magazine*, vol. 20, no. 4, pp. 54–64, 2001.
- [Boa93a] B. Boashash and P. O’Shea, "Polynomial Wigner–Ville Distributions and their Relationship to Time–Varying Higher–Order Spectra", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no.1, pp. 216–220, 1994.
- [Boa93b] B. Boashash and P. O’Shea, "Use of the Cross Wigner–Ville for Estimation of Instantaneous Frequency", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 3, pp. 1439–1445, 1993.
- [Boa92a] B. Boashash, "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal—Part 1: Fundamentals", *Proc. IEEE*, vol. 80, no. 4, pp. 520–538, 1992.
- [Boa92b] B. Boashash, "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal—Part 2: Algorithms and Applications", *Proc. IEEE*, vol. 80, no. 4, pp. 440–568, 1992.
- [Boa91] B. Boashash, Time–Frequency Signal Analysis, in: *Advances in Spectrum Estimation*, ed. S. Haykin, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ, pp. 418–517, 1991.
- [Boa90] B. Boashash and P. –J. O’Shea, "A Methodology for Detection and Classification of Some Underwater Acoustic Signals Using Time–Frequency Analysis Techniques", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP–38, no. 11, pp. 1829–1841, 1990.
- [Bou91] G. –F. Boudreaux–Bartels and A. Papendreu, "On a Generalization of the Choi–Williams Exponential Distribution", in *Proc. Asilomar Conf. Sig., Syst., Comp.*, pp. 364–369, Pacific Grove, CA, Nov. 1991.
- [Buc00] C. Buccella and A. Orlandi, "Diagnosing Transmission Line Termination Faults by Means of Wavelet Based Crosstalk Signature Recognition", *IEEE Trans. Comp. Pack. Tec.*, vol. 23, no. 1, pp. 165–170, 2000.
- [Bur99] C. –S. Burrus, R. –A. Gopinath, H. Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms : A primer*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1998.
- [ChaD82] D. S. –K. Chan, "A Non–Aliasing Discrete–Time Wigner Distribution for Time–Frequency Signal Analysis", in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pp. 1333–1336, Paris, France, 1982.
- [ChaR87] R. Charbonnier et al., "Results on AR–Modelling of Nonstationary Signals", *Signal Processing*, vol. 12, no. 2, 1987, pp. 143–151.
- [Chu92] C. –K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Boston MA: Academic, 1992.
- [ClaR92] R. –P. Clayton, *Introduction to Electromagnetic Compatibility*, John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [ClaT80a] T. A. C. –M. Claasen and W. F. –G. Mecklenbräuker, "The Wigner–Distribution – A Tool for Time–Frequency Signal Analysis – Part I: Continuous–Time Signals", *Philips J. Res.*, vol. 35, pp. 217–250, 1980.
- [ClaT80b] T. A. C. –M. Claasen and W. F. –G. Mecklenbräuker, "The Wigner–Distribution – A Tool for Time–Frequency Signal Analysis – Part II: Discrete–Time Signals", *Philips J. Res.*, vol. 35, no. 4/5, pp. 276–300, 1980.
- [ClaT80c] T. A. C. –M. Claasen and W. F. –G. Mecklenbräuker, "The Wigner–Distribution – A Tool for Time–Frequency Signal Analysis – Part III: Relations with Other Time–Frequency Signal Transformation", *Philips J. Res.*, vol. 35, no. 6, pp. 372–389, 1980.

- [ClaT83] T. A. C. –M. Claasen, W. F. –G. Mecklenbräuker, “The Aliasing Problem in Discrete–Time Wigner Distributions”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP–31, no. 5, pp. 1067–1072, 1983.
- [ClaT84] T. A. C. –M. Claasen and W. F. –G. Mecklenbräuker, “On the Time–Frequency Discrimination of Energy Distributions – Can They Look Sharper than Heisenberg”, in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pp. 41B7.1–4, San Diego (CA), USA, 1984.
- [ChoH89] H. Choi and W. –J. Williams, “Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP–37, no. 6, pp. 862–871, 1989.
- [ChoY91] Y. –S. Cho, S. B. Kim, and E. –J. Powers, “Time Varying Spectral Estimation Using AR Models with Variable Forgetting Factors”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, no. 6, pp. 1422–1426, 1991.
- [Coh89] L. Cohen, “Time-Frequency Distributions—A review”, *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 7, pp. 941–981, 1989.
- [Coh85a] L. Cohen and T. –E. Posch, “Generalized Ambiguity Functions”, *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, signal Processing*, Tampa (FL), USA, pp. 27.6.1–27.6.4, 1985.
- [Coh85b] L. Cohen and T. –E. Posch, “Positive Time-Frequency Distribution Functions”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-33, no. 1, pp. 31–38, 1985.
- [Con99a] S. Conforto and T. D’alessio, “Spectral Analysis of Nonstationary Signals From Mechanical Measurements: A parametric Approach”, *Mec. Sys. Signal Processing*, vol. 13, no. 3, pp. 395–411, 1999.
- [Con99b] S. Conforto, T. D’alessio, “Optimal Estimation of Power Spectral Density by Means of a Time-Varying Autoregressive Approach”, *Signal Processing*, vol. 72, no. 1, pp. 1–14, 1999.
- [Cra02] S. –D. Cranstoun et al., “Time-Frequency Spectral Estimation of Multichannel EEG Using the Auto-SLEX Method”, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 49, no. 9, pp. 988–996, 2002.
- [Cve95] Z. Cvetkovic and M. Vitterli, “Discrete-Time Wavelet Extrema Representation: Design and Consistent Reconstruction”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 3, pp. 681–693, 1995.
- [Dau92] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, Philadelphia, PA: SIAM, 1992.
- [Dau91] I. Daubechies, S. Jaffard and J. –L. Journé, “A Simple Wilson Orthonormal Basis with Exponential Decay”, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 22, no. 2, pp. 554–573, 1991.
- [Dav91] S. David and B. Ramamurthi, “Two-Sided Filters for Frame–Based Prediction”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, no. 4, pp. 789–794, 1991.
- [Dju01] I. Djurovic and L. Stankovic, “Robust Wigner Distribution With Application to the Instantaneous Frequency Estimation”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 12, pp. 2985–2993, 2001.
- [Don98] D. Donoho and I. Johnstone, “Minimax Estimation via Wavelet Shrinkage”, *The Annals of Statistics*, vol. 26, no. 3, pp. 879–921, 1998.
- [Don94] D. Donoho and I. Johnstone, “Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage”, *Biometrika*, vol. 81, no. 3, pp. 425–455, 1994.

- [Ele86] E. Eleftheriou, D. –D. Falconer, “Tracking Properties and Steady–State Performance of RLS Adaptive Filters Algorithms”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP–34, no. 5, pp. 1097–1110, 1986.
- [Ell00] M. Elling and P. Sherman, “A Kalman Filter Based Approach for Estimating Nonstationary VAR Models via Pole Tracking”, in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Istanbul, Turkey, vol. 2, pp. 685–688, 2000.
- [Fla93] P. Flandrin, *Temps–Fréquence*, Hermès, Paris, 1993.
- [Fla84] P. Flandrin, “Some Features of Time-Frequency Representations of Multicomponent Signals”, in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, signal Processing*, San Diego (CA), USA, pp. 41B.4.1–41B.4.4, 1984.
- [Fla80] P. Flandrin and B. Escudié, “Time and Frequency Representation of Finite Energy Signals: A Physical Property as a Result of Hilbertian Condition”, *Signal Processing*, vol. 2, no. 2, pp. 93–100, 1980.
- [Fri86] B. Friedlander and B. Porat, “Multichannel ARMA Spectral Estimation by the Modified Yule-Walker Method”, *Signal processing*, vol. 10, no. 1, 49–59, 1986.
- [Gab46] D. Gabor, “Theory of Communication”, *J. IEE*, vol. 93, no. III, pp. 429–457, 1946.
- [Ger90] W. Gersch and D. Stone, “Multichannel Time-Varying Autoregressive Modeling: a Circular Lattice–Smoothness Priors Realization”, in *Proc. 29th IEEE Conf. Decis. Cont.*, pp. 859–560, 1990.
- [Ger83] W. Gersch, A. Gevins, and G. Kitagawa, “A Multivariate Time–Varying Autoregressive Modeling of Nonstationary Covariance Time Series”, in *Proc. 22nd IEEE Conf. Decis. Cont.*, pp. 579–584, 1983.
- [Goo99] M. –M. Goodwin and M. Vitterli, “Matching Pursuit and Atomic Signal Models Based on Recursive Filter Banks”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, no. 7, pp. 1890–1902, 1999.
- [Gos04] J. –C. Goswami and A. –E. Hoefel, “Algorithms for Estimating Instantaneous Frequency”, *Signal Processing*, vol. 84, no. 8, pp. 1423–1427, 2004.
- [Gos99] J. –C. Goswami, *Fundamentals of Wavelets*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [Got95] S. Goto, M. Nakamura, and K. Uosaki, “On-Line Based Estimation of Nonstationary Time Series Based on AR Model Parameter Estimation and Order Selection with a Forgetting Factor”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 6, pp. 1519–1522, 1995.
- [Gra92] L. –B. Gravelle and P. –F. Wilson, “EMI/EMC in Printed Circuit Boards: A Literature Review”, *IEEE Trans. Electromagn. Comp.* vol. 34, no. 2, pp. 109–116, 1992.
- [Gre83] Y. Grenier, “Time-Dependent ARMA Modelling of Nonstationary Signals”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 31, no. 4, pp. 899–911, 1983.
- [GriL75] L. –G. Griffiths, “Rapid Measurement of Digital Instantaneous Frequency”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 23, no. 4, pp. 207–222, 1975.
- [GriR03] R. Gribonval and E. Bacry, “Harmonic Decomposition of Audio Signals with Matching Pursuit”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, no. 1, pp. 101–111, 2003.

- [GriR01] R. Gribonval, “Fast Matching Pursuit with a Multiscale Dictionary of Gaussian Chirps”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 5, pp. 994–1001, 2001.
- [GriS01] S. Grivet-Talocia and F. Canavero, “Wavelet-Based Higher-Order Adaptive Modeling of Lossy Interconnects”, *IEEE Trans. Electromagn. Comp.* vol. 43, no. 4, pp. 471–484, 2001.
- [GriS00] S. Grivet-Talocia, “Adaptive Transient Solution of Nonuniform Multiconductor Transmission Lines Using Wavelets”, *IEEE Trans. Ant. Propagat.* vol. 48, no. 10, pp. 1563–1573, 2000.
- [Hal83] M. –G. Hall, A. –V. Oppenheim, and A. –S. Willsky, “Time-Varying Parametric Modeling of Speech”, *Signal Processing*, vol. 5, no. 3, 267–285, 1983.
- [Has03] M. –K. Hassan, M. –J. Hossain, and M. A. Haque, “Parameter Estimation of Multichannel Processes in Noise”, *Signal Processing*, vol. 83, no. 3, 603–610, 2003.
- [Hay91] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall International, 2nd ed., 1991, Ch. 13, pp. 477–507.
- [Hel66] C. –W. Helstrom, “An Expansion of a Signal in Gaussian Elementary Signals”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-12, no. 1, pp. 81–82, 1966.
- [Hla92] F. Hlawatsch and G. –F. Boudreaux-Bartels, “Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations”, *IEEE Mag.*, vol. 9, no 2, pp. 21–67, 1992.
- [Hla91] F. Hlawatsch, “Duality and Classification of Bilinear Time-Frequency Signal Representations”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, no. 7, pp. 1564–1574, 1991.
- [Hsu95] J. Hsu and A. –E. Yagle, “Similarities and Differences Between One-Sided and Two-Sided Linear Prediction”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 1, pp. 345–349, 1995.
- [Hsu94] J. Hsu and A. –E. Yagle, “Blind Deconvolution of Symmetric Noncausal Response Using Two-Sided Linear Prediction”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 6, pp. 1509–1517, 1994.
- [Hsu93] J. Hsu and A. –E. Yagle, “Fast Algorithms for Close-to-Toeplitz-Plus-Hankel Systems and Two-Sided Linear Prediction”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 7, pp. 2349–2361, 1993.
- [Hwa92] W. –L. Hwang and S. Mallat, “Singularities and Noise Discrimination with Wavelets”, in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, signal Processing*, San Francisco (CA), USA, pp. IV.377-380, 1992.
- [Jac83] L. Jacobson and H. Wechsler, “The Composite Pseudo Wigner Distribution (CPWD): a Computable and Versatile Approximation to the Wigner Distribution (WD)”, in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, signal Processing*, Boston (MA), USA, pp. 254–256, 1983.
- [Jan85] A. J. E. –M. Janssen and T. A. C. M. Claasen, “On Positivity of time-Frequency Distributions”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-33, no. 4, pp. 1029–1032, 1985.
- [Jan82] A. J. E. –M. Janssen, “On the Locus and Spread of Pseudo-Density Functions in the Time-Frequency Plane”, *Philips J. Res.*, vol. 37, pp. 79–110, 1982.
- [Jan81] A. J. E. –M. Janssen, “Gabor Representation of Generalized functions”, *J. Math. Anal. Appl.* vol. 83, no. 2, pp. 377–394, 1981.
- [Jeo92a] J. Jeong and W. J. Williams, “Mechanism of Cross-Terms in Spectrograms”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 10, pp. 2608–2613, 1992.

- [Jeo92b] J. Jeong and W. –J. Williams, “Alias-Free Generalized Discrete-Time Time-Frequency Distributions”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 11, pp. 2757–2765, 1992.
- [Jeo92c] J. Jeong and W. –J. Williams, “Kernel Design for Reduced Interference Distributions”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 2, pp. 402–412, 1992.
- [Jia93] X. –Q. Jiang and G. Kitagawa, “A Time Varying Coefficient Vector AR Modeling of Nonstationary Covariance Time Series”, *Signal Processing*, vol. 33, no. 3, pp. 315–331, 1993.
- [Jon95] D. –L. Jones and R. Baraniuk, “An Adaptive Optimal-Kernel Time-Frequency Representation”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 10, pp. 2361–2371, 1995.
- [Jon92] D. –L. Jones and T. –W. Parks, “A Resolution Comparison of Several Time-Frequency Representations”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 2, pp. 413–420, 1992.
- [Kac05] A. Kacha, F. Grenez and K. Benmahammed, “Time-Frequency Analysis and Instantaneous Frequency Estimation Using Two-Sided Linear Prediction”, *Signal Processing*, vol. 85, no. 3, pp. 491–503, 2005.
- [Kac04] A. Kacha, F. Grenez, P. De Doncker, and K. Benmahammed, “A Wavelet-Based Approach for Disturbance Line Identification in Printed Circuit Boards”, *J. Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 18, no. 5, pp. 675–690, 2004.
- [Kac03a] A. Kacha, F. Grenez, P. De Doncker and K. Benmahammed, “Crosstalk Analysis on Printed Circuit Board by Means of Wavelets”, in *Proc. Industrial Simulations Conf.*, Valencia, Spain, pp. 149–153, 2003.
- [Kac03b] A. Kacha, F. Grenez, P. De Doncker and K. Benmahammed, “A Wavelet-Based Approach for Crosstalk Frequency Estimation in Printed Circuit Boards”, in *Proc. Int. Conf. Appl. Electromag. Comm.*, Dubrovnik, Croatia, vol. 1, pp. 75–78, 2003.
- [Kac02a] A. Kacha and K. Benmahammed, “Tracking Instantaneous Frequency Using Two-Sided Linear Prediction”, in *Proc. IEEE Int. Symp. Circ., Sys.*, Scottsdale, (AR), USA, vol. 5, pp. 765–768, 2002.
- [Kac02b] A. Kacha and K. Benmahammed, “Adaptive Time-Frequency Analysis of Nonstationary Signals”, in *Proc. Int. Conf. Signal Processing*, Beijing, China, vol. 1, pp. 204–207, 2002.
- [Kad92b] S. Kadambe and G. –F. Boudreaux-Bartels, “A Comparison of the Existence of ‘Cross Terms’ in the Wigner-Ville Distribution and the Squared Magnitude of Wavelet Transform and the Short Time Fourier Transform”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 10, pp. 2498–2517, 1992.
- [Kat98] V. Katovnik and L. Stankovic, “Instantaneous frequency Estimation Using the Wigner Distribution with Varying and Data-Driven Window Length”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, no. 9, pp. 2315–2325, 1998.
- [Kay88a] S. –M. Kay, “Statistically/Computationally Efficient Frequency Estimation”, *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, signal Processing*, New York, USA, pp. 2292–2295, 1988.
- [Kay88b] S. –M. Kay, *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [Kha89] R. –L. Khan and G. –I. Costache, “Finite Element Method Applied to Modelling Crosstalk Problems on Printed Circuit Boards”, *IEEE Trans. Electromagn. Comp.* vol. 31, no. 1, pp. 5–16, 1989.

- [Kim00] K. Kim, I. Choi, and H. Kim, "Efficient Radar Target Classification Using Adaptive Joint Time-Frequency Processing", *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. 48, no. 12, pp. 1789–1801, 2000.
- [Kli90] F. Klingholtz, "Acoustic Recognition of Voice Disorders: a Comparative Study of Running Speech Versus Sustained Vowels", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 87, pp. 2218–2224, 1990.
- [Kru97] M. Krumpholz, H. –G. Winful and L. P. –B. Katehi, "Nonlinear Time-Domain Modeling by Multiresolution Time Domain", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, no. 3, pp. 385–393, 1997.
- [Kru96] M. Krumpholz and L. P. –B. Katehi, "MRTD: New Time-Domain Schemes Based on Multiresolution Analysis", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 44, no. 4, pp. 555–571, 1996.
- [Kun93] K. –S. Kunz and R. –J. Luebbers, *Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, CRC Press, 1993.
- [Kwo00] H. –K. Kwok and D. –L. Jones, "Improved Instantaneous Frequency Estimation Using an Adaptive Short-Time Fourier Transform", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, no. 10, pp. 2964–2972, 2000.
- [Lee89] A. –C. Lee, "A New Autoregressive Method for High-Performance Spectrum Analysis", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 86, no. 1, pp. 150–157, 1989.
- [Lin99] S. Lindemeier, L. Pierantoni, and P. Russer, "Hybrid Space Discretizing Integral Equations Methods for Numerical Modeling of Transient Interference", *IEEE Trans. Electromagn. Comp.* vol. 41, no. 4, pp. 425–430, 1999.
- [Lip75] L. –A. Liporace, "Linear Estimation of Nonstationary Signals", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 58, no. 6, pp. 1288–1295, 1975.
- [Lou93] P. Loughlin, J. –W. Pitton and L. –E. Atlas, "Bilinear Time-Frequency Representations: New Insights and Properties", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 2, pp. 750–767, 1993.
- [Lov93] B. –C. Lovel, R. –C. Williamson and B. Boashash, "The Relationship Between Instantaneous Frequency and Time–Frequency Representations", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 3, pp. 1458–1461, 1993.
- [Mak75] J. Makhoul, "Linear Prediction: A Tutorial Review", *Proc. IEEE*, vol. 63, no. 4, pp. 561–580, 1975.
- [Mal98] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1998.
- [Mal93] S. Mallat and Z. Zhang, "Matching Pursuit With Time-Frequency Dictionaries", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 12, pp. 3397–3415, 1993.
- [Mal92a] S. Mallat and S. Zhong, "Characterization of Signals from Multiscale Edges", *IEEE Trans. Patt. Machine Intell.*, vol. 14, no. 7, pp. 710–732, 1992.
- [Mal92b] S. Mallat and W. –L. Hwang, "Singularity Detection and Processing with Wavelets", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 38, no. 2, pp. 617–643, 1992.
- [Mal89] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", *IEEE Trans. Patt. Anal. and Mach. Intell.*, vol. 11, no. 7, pp. 674–693, 1989.
- [Med81] R. –S. Medaugh and L. –G. Griffiths, "A Comparison of Two Fast Linear Predictors", in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing*, Atlanta (Ge), USA, pp. 293–296, 1981.
- [MonA02] A. Monti, C. Medigue, and L. Mangin, "Instantaneous Parameter Estimation in Cardiovascular Time Series by Harmonic and Time–Frequency Analysis", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 49, no. 12, pp. 12, 2002

- [MonL67] L. –K. Montgomery and I. –S. Reed, “A Generalization of Gabor_Helstrom Transform”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-13, no. 2, pp. 344–345, 1967.
- [Mor78] M. Morf et al., “Recursive Multichannel Maximum Entropy Spectral Estimation”, in: D. Childers (ed.), *Modern Spectral Analysis*, IEEE Press, 1978, pp. 85–94.
- [Mou85] G. Mourgues, M. –R. Feix, J. –C. Andrieux, and P. Bertrand, “Not Necessary but Sufficient Conditions for the Positivity of Generalized Wigner Functions”, *J. Math. Phys.* vol. 26, no. 10, pp. 2554–2555, 1985.
- [Nie02] M. Niedzwiecki and T. Klaput, “Fast Recursive Function Estimators for Identification of Time-Varying Processes”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no. 8, pp. 1925–1934, 2002.
- [Pap92] A. Papandreou and G. –F. Boudreaux-Bartels, “Distributions for Time-Frequency Analysis: a Generalization of the Choi-Williams and the Butterworth Distribution”, *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, San Diego (CA), USA, pp. V.181–V.184, 1992.
- [ParJ01] J. Parsa and J. D. –G. Jamieson, “Acoustic Discrimination of Pathological Voice : Sustained Vowels Versus Continuous Speech”, *J. Speech Hear. Res.*, vol. 44, pp. 327–339, 2001.
- [ParB94] B. –H. Parker et al., “Crosstalk in the Interconnection Bus for a High-Speed Digital Logic Circuit”, *Int. J. Electronics*, vol. 76, pp. 265–269, 1994.
- [Pau95] M. –J. Paulik, N. Mohankrishnan, and M. Nikiforuk, “A Time Varying Vector Autoregressive Model for Signature Verification”, *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Adelaide, Australia, vol. 2, pp. 1395–1398, 1994.
- [Ped99] F. Pedersen, “A Gabor Expansion-Based Positive Time-Dependent Power Spectrum”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, no. 2, pp. 567–590, 1999.
- [Pey86] F. Peyrin and R. Prost, “A Unified Definition for the Discrete-Time, Discrete-Frequency, and Discrete-Time/Frequency Wigner-distributions”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, no. 4, pp. 858–867, 1986.
- [Por80] M. –R. Portnoff, “Time-Frequency Representations of Digital signals and Systems Based on Short-Time Fourier Transform Analysis”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-28, no. 2, pp. 55–69, 1980.
- [Pot91] N. –M. Pothecary and C. –J. Railton, “Analysis of Crosstalk on High-Speed Digital Circuits Using the Finite Difference Time-Domain Method”, *Int. J. Num. Modelling: Elec. Net., Devices and Fields*, vol. 4, no. 3, pp. 225–240, 1991.
- [Qia94a] S. Qian and D. Chen, “Decomposition of the Wigner-Ville Distribution and Time-Frequency Distribution Series”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 10, pp. 2836–2842, 1994.
- [Qia94b] S. Qian and D. Chen, “Signal Representation Using adaptive Normalized Gaussian Functions”, *Signal Processing*, vol. 47, no. 2, pp. 567–590, 1999.
- [Rab78] L. –R. Rabiner and R. –W. Schaffer, *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.
- [RaoP90] P. Rao and F. –J. Taylor, “Estimation of IF Using the Discrete Wigner Distribution”, *Electron. Lett.* vol. 26, no. 4, pp. 246–248, 1990.
- [RaoT70] T. –S. Rao, “The Fitting of Nonstationary Time-Series Models with Time-Dependent Parameters”, *J. Royal Stat. Soc. Series B*, vol. 32, no. 2, pp. 312–322, 1970.

- [Rio92] O. Rioul and P. Flandrin, "Time-Scale Energy Distributions: A General Class Extending Wavelet Transforms", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 7, pp. 1746–1757, 1992.
- [Rou05] A. Roueff, J. –I. Mars, J. Chanussot, and H. Pedersen, "Dispersion Estimation From Linear Array Data in the Time-Frequency Plane", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 10, Part I, pp. 3738–3748, 2005.
- [Sca01] A. Scarlatti and C. –L. Holloway, "An Equivalent Transmission-Line Model Containing Dispersion for High Speed Digital Lines—With an FDTD Implementation", *IEEE Trans. Electromagn. Comp.* vol. 43, no. 4, pp. 504–514, 2001.
- [Soh01] Y. Sohn, J. –C. Lee, H. –J. Park, and S. –I. Cho, "Empirical Equations on Electrical Parameters of Coupled Microstrip Lines for Crosstalk Estimation in Printed Circuit Board", *IEEE Trans. Advanced Packag.*, vol. 24, no. 4, pp. 521–527, 2001.
- [Szu84] H. –H. Szu and H. –J. Caulfield, "The Mutual Time-Frequency Content of Two Signals", *Proc. IEEE*, vol. 72, no. 7, pp. 902–908, 1984.
- [Top88] B. Toplis and S. Pasupathy, "Tracking Improvements in Fast RLS Algorithms Using a Variable Forgetting Factor", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-36, no. 2, pp. 206–227, 1988.
- [Tru98] F. Truchetet, *Ondelettes pour le signal numérique*, Hermès, Paris, 1998.
- [Tug86] J. –K. Tugnait, "Modeling and Identification of Symmetric Noncausal Impulse Responses", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 34, no. 5, pp. 1171–1181, 1986.
- [Vil48] J. Ville, "Théorie et Applications de la notion de signal analytique", *Câbles et transmission*, vol. 2A, pp. 61–74, 1948.
- [Wer96] M. Werthen and I. Wolff, "A Novel Wavelet Based Time Domain Simulation Approach", *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 6, no. 12, pp. 438–440, 1996.
- [Wes01] D. –A. Weston, *Electromagnetic Compatibility: Principles and Applications*, Marcel Dekker, 2001.
- [Wex90] J. Wexler and S. Raz, "Discrete Gabor Expansions", *Signal Processing*, vol. 21, no. 3, pp. 207–220, 1990.
- [Wig65] R. –A. Wiggins and E. –A. Robinson, "Recursive Solution to the Multichannel Filtering Problem", *J. Geophys. Res.*, vol. 70, no. 8, pp. 1885–1891, 1965.
- [Xia01] F. Xiao and W. Liu, Y. Kami, "Analysis of Crosstalk Between Finite-Length Microstrip Lines: FDTD Approach and Circuit Concept Modeling", *IEEE Trans Electromagn. Comp.* vol. 43, no. 4, pp. 573–578, 2001.
- [Yea88] J. –R. Yeagan et al., "Crosstalk in Multilayer Printed Circuit Boards", *IEEE Trans. Education*, vol. 31, no. 2, pp. 116–119, 1988.
- [Yee66] K. –S. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problem Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media", *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol. AP-14, no. 3, pp. 302–307, 1966.
- [Zha90] Y. Zhao, L. –E. Atlas and R. –J. Marks, "The Use of Cone-Shaped Kernels for Generalized Time-Frequency Representations of Nonstationary Signals", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-38, no. 7, pp. 1084–1091, 1990.

Abstract

Joint time-frequency representations are powerful tool for nonstationary signals analysis frequently encountered in practice. They map a one-dimensional signal, function of time, to a bi-dimensional function of time and frequency. The development of new time-frequency representations as well as their application to signals analysis constitute an active research field in signal processing. The contribution of this research work concerns the theoretical development as well as the application of time-frequency analysis methods.

The application aspect, concerns the problem of detection of electromagnetic interferences and identification of disturbance source lines in printed circuit boards (PCB). The theoretical aspect concerns the development of a parametric time-frequency distribution based on a bilateral time-varying autoregressive model. This model is proposed as an alternative to improve the performances of the conventional unilateral autoregressive model. The time-varying parameters of the bilateral autoregressive model are modeled as a linear combination of a known set of time functions basis and, therefore, the recursive least squares algorithm is used to estimate the coefficients involved in the linear combination.

We propose also a time-varying bilateral vector autoregressive-based approach for time-frequency analysis of multichannel nonstationary signals. Bilateral vector autoregressive model is a generalization of the scalar bilateral autoregressive model where the scalar coefficients are replaced by matrices.

Keywords: Time-frequency analysis, wavelet analysis, electromagnetic interference signals, time-varying linear predictive modeling, vector signals analysis.

ملخص

تعتبر التمثيلات المشتركة زمن-ذبذبة وسيلة قوية لتحليل الإشارات غير الثابتة (ذات المحتوى الطيفي المتغير) التي غالبا ما نجدها في التطبيق. هذه التمثيلات توافق لكل إشارة وحيدة البعد، بدلالة الزمن، دالة ذات بعدين بدلالة الزمن والذبذبة. يعتبر تطوير تمثيلات زمن-ذبذبة وتطبيقها في تحليل الإشارات مجال بحث فعال في معالجة الإشارة. يهتم هذا البحث بالتطوير النظري وتطبيق طرق التحليل زمن-ذبذبة.

الجانب التطبيقي يتعلق بمشكلة كشف الإشارة الكهرومغناطيسية المعيقة والتعرف على الخطوط مصدر الإشارات المعيقة المولدة في أسلاك الدارات المطبوعة (PCB). في الجانب النظري، يتمثل إسهام هذا البحث في تطوير توزيع زمن-ذبذبة وسيطي يعتمد على نموذج تنبؤ خطي ثنائي متغير مع الزمن. هذا النموذج اقترح كخيار لتحسين أداء نموذج التنبؤ الخطي الأحادي. تكتب معاملات نموذج التنبؤ الخطي المتغيرة مع الزمن على شكل تركيب خطي لمجموعة دوال أساسية معروفة ثم يتم حساب معاملات التركيبة الخطية باستعمال خوارزم أدنى المربعات التكراري. يحتاج نموذج التنبؤ الخطي الثنائي إلى عدد من المعاملات أقل من تلك التي يحتاجها نموذج التنبؤ الخطي الأحادي. يتميز التمثيل زمن-ذبذبة المقترح بأداء أحسن من أداء التوزيع زمن-ذبذبة الذي يعتمد على نموذج التنبؤ الخطي الأحادي المتغير مع الزمن.

نقترح في هذا البحث طريقة تعتمد على نموذج التنبؤ الخطي المتغير مع الزمن لتحليل الإشارات الشعاعية في المجال زمن-ذبذبة. يعتبر نموذج التنبؤ الخطي الثنائي الشعاعي المتغير مع الزمن تعميما لنموذج التنبؤ الخطي الثنائي العددي أين تعوض المعاملات العددية بمصفوفات.

كلمات مفتاحية: التحليل زمن-ذبذبة، التحليل بالموجات، الإشارات الكهرومغناطيسية المعيقة، نموذج التنبؤ الخطي المتغير مع الزمن، تحليل الإشارات الشعاعية.