

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

**THESE**

Présentée à la Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
Pour l'obtention du diplôme de

**DOCTORAT D'ETAT**

Option : Mathématiques Appliquées

Par

**GUECHI Fairouz**

THEME

***Etude d'un écoulement à surface libre  
dû à un jet avec effet de la tasse de thé  
en présence de la gravité***

Soutenu le : 16/12/2007

Devant le jury :

Président	Dr A. Aibeche	Professeur,	U.F.A.Sétif
Rapporteur	Dr H. Mekias	Professeur,	U.F.A.Sétif
Examineur	Dr N. Hamri	Professeur,	U.M.Constantine
Examineur	Dr B. Bouderah	M.C.,	U.M.B.M'sila
Examineur	Dr S. Drabla	M. C.,	U.F.A.Sétif

# REMERCIEMENTS

*Je remercie tout d'abord le bon DIEU notre créateur de m'avoir donné la force et la patience pour accomplir ce travail.*

*Mon grand respect et ma gratitude vont au Professeur H. Mekias pour avoir accepté de diriger le présent travail, pour ses conseils précieux, son suivi et l'aide qu'il m'a apporté tout au long de la réalisation de ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements au Professeur A. Aibeche qui a aimablement accepté de présider ce jury.*

*Je remercie également Dr S. Drabla, Dr B. Bouderah et Dr N. Hamri, qui malgré leurs nombreuses occupations, ont bien voulu accorder une attention particulière à ce travail. Ils m'honorent par leur présence.*

*Un grand merci à tous les membres de ma famille pour leur soutien moral et leurs encouragements durant la réalisation de ce travail.*

*Je tiens à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

*À la mémoire de mon père*

*À ma mère*

*À mes frères et sœurs*

*À ma petite famille: Mohamed, Mouna et Nour*

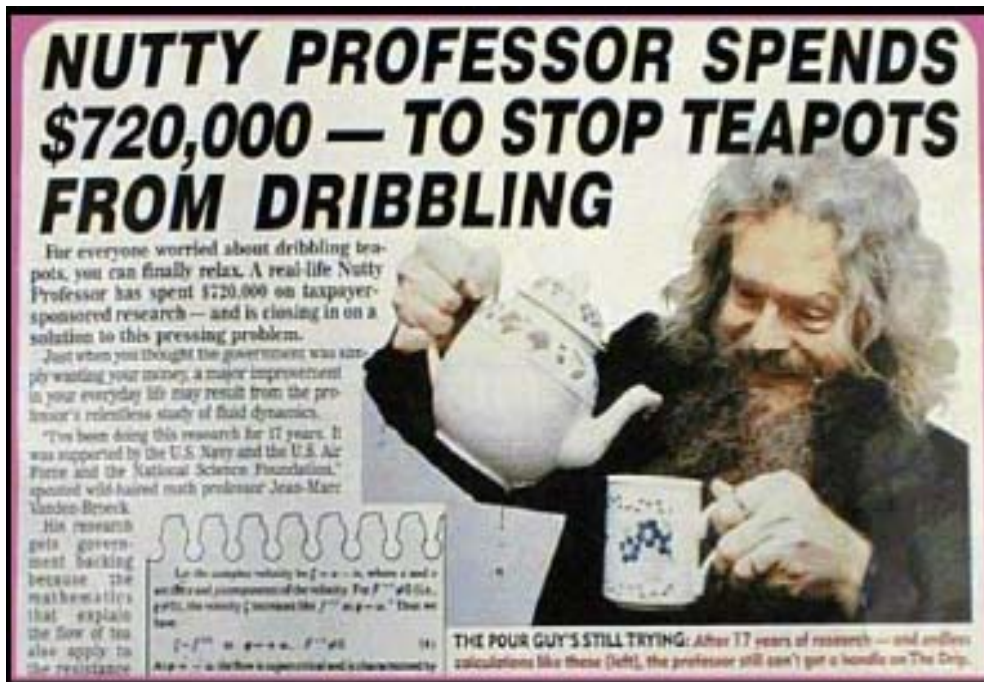
*À toutes mes amies.*

<b>Sommaire</b>	1
<b>Introduction</b>	2
<b>Chapitre I. Notions sur les écoulements à surface libre</b>	6
I.1 Introduction	7
I.2 Dérivation des équations de Bernoulli	9
I.3 Analyse dimensionnelle	15
I.4 Ecoulements potentiels	17
I.5 Dérivation de la courbure	19
<b>Chapitre II. Effet de la tension de surface sur un écoulement à surface libre en présence d'ondes capillaires</b>	22
II.1 Introduction	23
II.2 Position du problème	25
II.3 Equation intégrale	30
II.4 Procédure numérique	35
II.5 Discussion des résultats	37
<b>Chapitre III. Un jet avec effet de la tasse de thé en présence de la gravité</b>	45
III.1 Introduction	46
III.2 Formulation du problème	47
III.3 Méthode de la série	52
III.3.1 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularité	54
III.3.2 Formulation de la série	57
III.4 Procédure numérique	59
III.5 Discussion des résultats	61
<b>Conclusion générale</b>	70
<b>Annexe</b>	73
<b>Bibliographie</b>	78

# ***Introduction générale***

En mécanique des fluides, les écoulements à surface libre, autour des objets de différentes formes sont étudiés pour leurs applications industrielles et scientifiques. La surface libre est l'interface entre deux fluides non miscibles, généralement un liquide et un gaz. En état statique, la surface libre est plane et horizontale. Dans le cas dynamique, la surface libre a une forme inconnue et elle est déterminée comme solution du problème donné.

Dans notre travail on étudie un écoulement de notre vie quotidienne. Chacun de nous a constaté que lorsqu'on verse un liquide d'un récipient, le liquide peut s'écouler le long de la face extérieure du récipient. Ce phénomène est étudié par plusieurs auteurs et connu sous le nom « Effet de la tasse de thé ».



Reiner [29] a traité ce phénomène par expérience. En absence de tension de surface et gravité, en utilisant la méthode des lignes de courant libres et la transformation

hodographe due à Kirchhoff (1869), Keller a pu trouver une solution exacte du problème. Keller et Vanden broeck [32] ont calculé numériquement l'écoulement pour différentes configurations du bord du récipient cependant, ils ont négligé l'effet de la tension de surface sans négliger l'effet de gravité.

Dans le présent travail, on se propose d'étudier le même problème mais tenant en compte les effets de la tension de surface et de la gravité. Le problème n'admet pas une solution exacte à cause de la présence du nombre de Weber  $\alpha$  ou du nombre de Froude  $F$  dans l'équation de Bernoulli imposée sur la surface libre inconnue. La non linéarité de l'équation de Bernoulli et le fait que c'est une condition aux limites imposée sur une frontière inconnue rendent le problème difficile à résoudre. Actuellement, on ne connaît pas de solution exacte de ce type de problème. Pour cela on adopte une approche numérique pour résoudre le problème.

Ce travail se compose de trois chapitres, complété par une annexe.

Dans le premier chapitre, on présente des notions fondamentales de la mécanique des fluides. Une présentation de la théorie de la variable complexe et ses applications dans l'écoulement bidimensionnel et potentiel.

Dans le second chapitre, la tension de surface est prise en considération et l'effet de la force de gravité est négligé. Le problème non linéaire se caractérise par le nombre de Weber  $\alpha$ . Sa résolution numérique se base sur la méthode de l'intégrale de Cauchy utilisée par Forbes [11]. On utilise le théorème des résidus et la formule de l'intégrale de Cauchy pour calculer la fonction vitesse complexe qui est représentée par une intégrale. L'intégrale est évaluée numériquement par la règle du trapèze. Dans son mémoire de

magister, Guechi [15] a traité le problème en utilisant la méthode de la troncature de série. L'auteur a obtenu des solutions pour chaque  $\alpha \geq 10$ , et elle n'a pas pu expliquer la divergence de son schéma pour  $\alpha < 10$ . Dans le présent travail, en utilisant la méthode de l'intégrale, on a réussie à résoudre le problème pour des valeurs  $\alpha < 10$  et on a constaté l'apparition d'ondes capillaires pour  $4.16 \leq \alpha < 10$ .

Dans le dernier chapitre, on a étudié le problème de l'écoulement d'un liquide versé d'un récipient et s'écoulant le long de la surface extérieure du récipient, puis il se sépare de la paroi inférieure faisant un jet loin de la sortie. L'effet de la gravité et celui de la tension de surface sont pris en considération. On suit les étapes décrites par Vanden Broeck [32-36]. On utilise les techniques de troncature de série pour résoudre le problème. L'idée principale est de transformer le plan d'écoulement à un demi cercle dans un plan complexe auxiliaire où la surface libre sera représentée par un arc de cercle. La vitesse complexe est représentée par une série convenable de sorte que les conditions aux limites sur les parois rigides soient satisfaites sauf la condition de Bernoulli sur la surface libre. Pour satisfaire la condition de Bernoulli, on tronque la série en  $N$  termes, puis on impose la condition de Bernoulli soit satisfaite sur  $N$  points équidistant de la surface libre. Le problème se réduit à un système algébrique de  $N$  équations non linéaires qu'on résout par la méthode de Newton. La procédure est répétée pour différentes valeurs du nombre Weber  $\alpha$  et de nombre de Froude  $F$ . L'algorithme converge pour  $\alpha \geq 50$  et  $F \geq 2$ . On termine le travail par une conclusion générale.



# ***Chapitre I.***

## ***Notions sur les écoulements à surface libre***

Résumé :

*Dans ce chapitre, on présente des notions préliminaires du mouvement des fluides et quelques rappels et définitions sur les écoulements potentiels et bidimensionnels, et leurs relations avec la théorie de la variable complexe.*

Contenu :

- I.1 Introduction
- I.2 Dérivation des équations d'écoulement
- I.3 Analyse dimensionnelle
- I.4 Ecoulements potentiels
- I.5 Dérivation de la courbure

## I.1 Introduction :

La mécanique des fluides est une science qui nécessite beaucoup de mathématiques. La connaissance de la fonction de la variable complexe, l'analyse vectorielle, la notation tensorielle et la résolution des équations différentielles. Elle a connu un développement intense au cours des dernières décennies, ce qui n'a pas manqué d'accroître considérablement le nombre des publications consacrées à ses différents aspects. Cet intense développement est aussi bien dans les applications et les problèmes théoriques qui sont ardu même lorsqu'on les traite par ordinateurs. Parmi ces problèmes nous citons les écoulements à surface libre.

Lorsque nous sommes en présence de deux fluides non miscibles et de différentes densités et en état d'équilibre stable, le fluide lourd est au dessous du fluide léger. A travers la surface séparatrice, appelée l'interface, les caractéristiques et les variables du fluide (composé de deux fluides) sont discontinues. Au cas où la densité du fluide léger est presque négligeable comparée à la densité du fluide lourd, la discontinuité est assez forte que les mouvements des deux fluides peuvent être considérés comme indépendants. A l'interface, les deux fluides n'ont que la pression en commun. Pour ces raisons, l'interface est alors appelée surface libre. Les surfaces libres sont souvent, mais pas toujours, entre liquides et gaz. L'analyse d'un écoulement plan avec une surface libre a été l'objet d'intérêt pour beaucoup de mécaniciens des fluides pour une longue période.

Pour écrire en termes de mathématiques l'état d'un fluide en mouvement, on utilise des fonctions décrivant la distribution des vitesses du fluide  $\vec{q}$  ainsi que ses caractéristiques telles que la pression  $P$ , la densité  $\rho$ , la viscosité  $\mu$  et la température  $\Theta$ . En général, toutes ces grandeurs sont des fonctions des coordonnées  $x, y, z$  et du temps  $t$ . La détermination d'autres caractéristiques de l'écoulement tel que le coefficient de décharge, le coefficient de contraction et la position de la surface libre sont d'un intérêt particuliers aux ingénieurs.

Les problèmes en mécanique des fluides consistent à résoudre des équations aux dérivées partielles à partir de la connaissance des conditions aux limites qui sont imposées par la nature du problème physique. En général, la géométrie du corps est complexe et les difficultés dans l'analyse de l'écoulement autour d'un corps donné dépendent largement de la forme de ce corps. A nos jours, très peu de problèmes ont été résolus d'une façon explicite. Même les méthodes numériques sont assez difficiles à élaborer à cause de la condition aux limites imposée sur la frontière "libre" inconnue a priori. Les questions qui peuvent surgir de ce type de problèmes sont, par exemple quelle forme doit avoir une goutte d'un liquide en chute libre, ou bien éjectée sous pression ? Comment une bulle d'air s'élève-t-elle dans un tube rempli d'un liquide ?

Ces questions qui semblent assez banales sont d'applications technologiques très importantes. Par exemple: pompe d'injection de tous types. Avant d'entamer notre problème, nous avons vu utile de rappeler les équations fondamentales de la mécanique des fluides.

## I.2 Dérivation des équations d'écoulement :

Les équations qui gouvernent l'écoulement d'un fluide sont établies à partir des principes d'équilibre et de conservation. Les trois principes fondamentaux sont :

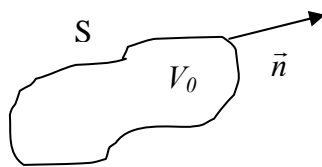
- 1- Principe de conservation de la masse.
- 2- Principe de conservation de l'énergie.
- 3- Principe d'équilibre entre la variation de la quantité du mouvement et les forces agissantes sur une particule.

### I.2.1 Equation de continuité (conservation de la masse)

Considérons une surface fermée  $S$  contenant un volume  $V_0$  dans l'espace occupé par le fluide. La quantité de fluide contenu dans ce volume est égale à  $\int_{V_0} \rho dV$ ,  $\rho$  est la densité du fluide.

Soient  $ds$  l'élément de la surface  $S$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal extérieur. Par unité de temps, il s'écoule, à travers  $ds$ , une quantité de fluide égale à  $\rho \vec{q} \cdot \vec{n} ds$ . La quantité  $\rho \vec{q} \cdot \vec{n} ds$  est positive si le fluide sort du volume  $V_0$  considéré, et négative si le fluide pénètre. La quantité totale du fluide sortant du volume  $V_0$  est :

$$\int_S \rho \vec{q} \cdot \vec{n} ds \quad (1.1)$$



D'autre part, la diminution de la quantité de fluide contenu dans le volume  $V_0$  est

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV.$$

En appliquant le principe de conservation de la masse, on obtient

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = \int_S \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \times ds \quad (1.2)$$

L'intégrale de surface peut être transformée en une intégrale de volume, en appliquant le théorème de divergence

$$\int_S \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \times ds = \int_{V_0} \text{div}(\rho \vec{q}) dV \quad (1.3)$$

On obtient ainsi

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = \int_{V_0} \text{div}(\rho \vec{q}) dV \quad (1.4)$$

D'où

$$\int_{V_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{q} \right) dV = 0 \quad (1.5)$$

Puisque  $V_0$  est arbitraire, l'intégrant est nul, i.e.:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{q} = 0 \quad (1.6)$$

En utilisant les relations suivantes

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{q} \cdot \text{grad } \rho$$

$$\text{div}(\rho \vec{q}) = \rho \text{div } \vec{q} + \vec{q} \cdot \text{grad } \rho$$

L'équation de la conservation de la masse (1.6) (nommée équation de continuité) prend la forme

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \vec{q} = 0 \quad (1.7)$$

Cas particuliers:

**a-** L'écoulement est stationnaire, i.e.  $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ , l'équation de continuité devient

$$\text{div}(\rho \vec{q}) = 0.$$

**b-** Le fluide est incompressible, i.e.  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ , l'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div } \vec{q} = 0. \quad (1.8)$$

### I.2.2 Equation de la conservation de la quantité du mouvement (Euler)

Soit  $M$  une particule d'un fluide en mouvement de vitesse  $\vec{q}$  occupant un volume  $V_0$  de surface  $S$ . Les forces extérieures agissantes sur la particule  $M$  sont de deux types: La force surfacique due au frottements des particules l'une contre l'autre, et la force de gravite  $\vec{g} \rho dV$ , où  $\vec{g}$  l'accélérateur de gravité.

Appliquant la loi fondamentale de la dynamique à une particule en mouvement négligeant la viscosité, on obtient

$$\int_{V_0} \rho \frac{D\vec{q}}{Dt} dV = - \int_S p \vec{n} ds' + \int_{V_0} \rho \cdot \vec{g} dV \quad (1.9)$$

En utilisant le théorème de Gauss (1.9) devient:

$$\int_{V_0} \left( \rho \frac{D\vec{q}}{Dt} + \text{grad } p - \rho \vec{g} \right) dV = 0 \quad (1.10)$$

Puisque cette égalité est vérifiée quelque soit le volume considéré, alors

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{g} \quad (1.11)$$

L'équation (1.11) est l'équation de mouvement d'Euler. Si on suppose que

$$\text{rot } \vec{q} = \vec{0} \quad (1.12)$$

l'écoulement est irrotationnel, i.e.  $\text{rot } \vec{q} = \vec{0}$ . Alors le champ  $\vec{q}$ , dont le rotationnel est nul, peut être représenté par le gradient d'une fonction scalaire c'est-à-dire, il existe  $\phi$  telle que:

$$\vec{q} = \nabla \phi \quad (1.13)$$

La fonction  $\phi$  est appelée fonction potentielle de vitesse.

pour un écoulement d'un fluide incompressible, l'équation (1.8) se réduit à:

$$\text{div}(\nabla \phi) = \Delta \phi = 0. \quad (1.14)$$

L'équation (1.14) est l'équation de Laplace. La fonction scalaire  $\phi$  est une fonction harmonique.

### 1.2.3 Conditions aux limites

On ne considère que les écoulements stationnaires. De là, seules les conditions aux limites sont à considérées.

***a- Condition au début et à la fin de l'écoulement***

Tout écoulement admet un commencement et une fin. Pour résoudre un problème d'écoulement il est souvent nécessaire d'imposer ces deux conditions ou l'une d'elle. Par exemple on peut supposer que l'écoulement au commencement est uniforme, ou bien une source ou autre. Cela se traduit par une condition imposée sur le champ de vecteur vitesse au début de l'écoulement.

***b- Condition sur les parois d'un corps rigide***

Si l'écoulement est autour ou bien sur un corps rigide et dans le cas où la viscosité est négligée la condition sur la paroi est qu'on suppose que le fluide ne pénètre pas le corps. Ainsi la condition est que la vitesse normale à la frontière du corps rigide est nulle. Dans certains cas, le corps est supposé perméable, la vitesse normale sera égale à la perméabilité du corps.

***c- Condition à l'interface***

Dans certains écoulements, le fluide n'est pas homogène mais constitué de deux ou plusieurs fluides non miscibles, dans ce cas, une surface entre deux fluides se forme appelée interface. Puisqu'il y a une discontinuité des propriétés des deux fluides à l'interface cela entraîne une discontinuité du champ de vecteur vitesse avec une conservation de l'énergie. Donc une condition supplémentaire sur l'interface est à imposer. Dans ce qui suit, on dérive cette condition dans le cas où le fluide supérieur est beaucoup plus léger que le fluide inférieur, exemple: interface fluide-gaz. Dans ce cas particulier, l'interface est appelée surface libre.



Pour simplifier les écritures et les calculs, on introduit la notion de dérivée

matérielle. La dérivée matérielle d'une fonction  $f$ , notée  $\frac{Df}{Dt}$ , est donnée par

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{Dz}{Dt} \quad (1.15)$$

Ou bien

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{q} \cdot \nabla f. \quad (1.16)$$

Si on prend  $f = \vec{q}$  dans l'équation (1.16) on obtient

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \nabla) \vec{q}. \quad (1.17)$$

sachant que

$$(\vec{q} \cdot \nabla) \vec{q} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{q} \cdot \vec{q}) - \vec{q} \times \text{rot } \vec{q}. \quad (1.18)$$

Puisque  $\text{rot } \vec{q} = 0$  et notons  $q = |\vec{q}|$ , en utilisant l'équation (1.13), (1.17) s'écrit sous la forme

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(q^2) \quad (1.19)$$

De l'équation (1.11), (1.19) devient

$$\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(q^2) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{g} = 0 \quad (1.20)$$

Si on prend  $y$  comme l'altitude de la particule orienté positivement vers le haut, alors  $\vec{g} = -g\nabla y$ , d'où (1.20) devient

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2} \nabla(q^2) + \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + g\nabla y = 0$$

Ou bien

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + g y\right) = 0 \quad (1.21)$$

Finalement en intégrant (1.22) on trouve:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + g y = h(t) \quad (1.22)$$

$h(t)$  est une fonction arbitraire dépendant de  $t$ . L'équation (1.22) est l'équation de Bernoulli qui est une condition aux limites imposée sur la frontière de forme inconnue.

### 1.3 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle consiste à faire le bilan des dimensions physiques des grandeurs qui interviennent dans l'équation du mouvement et à les comparer à des quantités de même dimension physique. On établit, ainsi, des critères portant sur des grandeurs sans dimensions, qui permettent de situer l'importance relative des différents termes figurant dans les équations.

La mécanique des fluides est l'un des champs d'application le plus important de l'analyse dimensionnelle. Plusieurs nombres sans dimension ont été introduits, le nombre de Weber  $\alpha$  le nombre de Froude, le nombre de Reynolds etc.

Le nombre de Weber permet de comparer la force d'inertie à la tension superficielle:

$$\alpha = \frac{\rho D U^2}{T}$$

Le nombre de Froude  $F$ , que l'on exprime en fonction de la vitesse  $U$ , d'une distance  $D$  et de l'accélération de la gravité  $g$ , permet de comparer la force d'inertie à la force de la gravité:

$$F^2 = \frac{U^2}{gD}$$

Le nombre de Reynolds  $Re$ , que l'on exprime en fonction de la vitesse  $U$ , d'une distance  $D$  et de la viscosité cinématique  $\eta$ , et permet de comparer la force d'inertie à la force de viscosité :

$$Re = \frac{DU}{\eta}$$

En générale si un phénomène physique dépend de  $N$  variables dimensionnelles, on peut rendre ces variables sans dimension en les réduisant à  $N-k$ , avec ( $k = 1, \dots, 4$ ). Les quatre variables universellement connues sont la longueur  $D$ , la masse  $M$ , la température  $\Theta$  et le temps  $t$ .

### Théorème $\pi$ de Vaschy-Buckingham

Soit un phénomène physique comprenant  $n$  variables, dans les dimensions desquelles interviennent  $p$  grandeurs fondamentales, l'équation  $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  qui régit le phénomène peut se mettre sous forme

$$h(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0$$

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}$  étant des produit sans dimensions indépendants.

## I.4 Ecoulement potentiel, bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide parfait et incompressible

### a. Ecoulement bidimensionnel (écoulement plan)

On appelle écoulement bidimensionnel un écoulement où le vecteur vitesse est, dans tout l'espace, parallèle à un plan fixe  $(O, x, y)$ .

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, toutes les fonctions de l'écoulement sont fonction des variables indépendantes  $(x, y)$ , et le champ vectoriel des vitesses  $\vec{q}$  a deux composantes  $(u, v)$ .

Si l'écoulement est bidimensionnel, l'équation (1.14) du potentiel de vitesse se réduit à

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.23)$$

### b. Lignes de courant

Une ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ces points au vecteur vitesse en ce point. La définition d'une ligne de courant est donnée par les équations:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (1.24)$$

### c. Equations différentielles des fonctions $\phi$ et $\psi$

Si  $\phi(x, y)$  est une fonction potentielle à deux variables  $(x, y)$  (i.e.: vérifiant l'équation de Laplace) on démontre l'existence d'une autre fonction potentielle  $\psi(x, y)$  dite fonction potentielle conjuguée à  $\phi$  tel que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.25)$$

$\psi$  est une fonction de  $x$  et  $y$ .

En substituant (1.25) dans (1.24) on obtient l'équation suivante:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0 \quad (1.26)$$

D'où  $\psi = \text{const}$ . On déduit alors que les courbes pour lesquelles  $\psi = \text{const}$  sont des lignes de courant. Pour cette raison  $\psi$  est appelée fonction lignes de courant.

#### 1.4.1 Application des fonctions analytiques aux écoulements potentiels, bidimensionnels.

Les problèmes d'écoulement potentiel, bidimensionnel de fluides incompressibles se réduisent à la résolution de l'équation de Laplace. On notera que la théorie des fonctions analytiques complexe offre une méthode très puissante pour l'obtention de la solution de cette équation. Au lieu de considérer  $\phi$  et  $\psi$  comme étant des fonctions de  $x$  et  $y$ , on introduit une nouvelle variable complexe :  $z = x + iy$

Les fonction  $\phi$  et  $\psi$  satisfont les conditions de Cauchy Riemann, d'où on peut introduire une fonction holomorphe  $f(z)$  de la variable complexe  $z$  appelé fonction potentielle complexe

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1.27)$$

De plus la dérivée de  $f$  nous donne :

$$\begin{aligned} \xi(z) = \frac{df}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= u - iv \end{aligned} \quad (1.28)$$

Elle est appelée vitesse complexe de l'écoulement qui est aussi analytique.

Alors le problème d'écoulement potentiel se réduit à déterminer la fonction potentielle de vitesse  $\phi(x, y)$  qui satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi = 0 & \text{dans le domaine d'écoulement } \Omega. \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 & \text{sur la paroi rigide} \\ \frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + g y = cte & \text{sur la surface libre de forme inconnue.} \end{array} \right. \quad (1.29)$$

La propriété de l'analyticité de  $f$  et  $\xi$  nous permet d'utiliser la théorie des fonctions analytiques pour résoudre le problème (1.29). En outre, on utilise le théorème des résidus ainsi que les transformations conformes [30].

## 1.5 Dérivation de la courbure

Dans les chapitres suivants (ultérieurs) on aura besoin d'exprimer la courbure de la surface libre en fonction de quelques variables intrinsèques.

De ce fait, on développe dans ce paragraphe cette expression de façon générale en se basant sur la théorie de la géométrie des courbes planes.

Soient  $\vec{u}_t$  et  $\vec{n}$  respectivement les vecteurs tangentiel et normal sur la surface libre et  $dl$  désigne un élément de la longueur d'arc sur la surface libre et  $R$  le rayon de courbure.

En utilisant le système de coordonnées intrinsèques sur la surface libre, on aura l'équation suivante :

$$\frac{d\bar{u}_t}{dl} = K\bar{n} = \frac{1}{R}\bar{n}$$

c.à.d.

$$\left| \frac{d\bar{u}_t}{dl} \right| = \frac{1}{R} = K$$

Désignons par  $\vec{g}$  le vecteur vitesse donc  $\vec{g} = (u, v) = \exp(\tau)(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$ ,

$q = |\vec{g}| = e^\tau$ ,  $\theta$  est l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale.

On sait que

$$\left| \frac{d\bar{u}_t}{dl} \right| = \left| \frac{d\bar{u}_t}{dt} \frac{dt}{dl} \right|$$

$$= \left| \frac{d\bar{u}_t}{dt} \frac{1}{q} \right|$$

$$= \left| \frac{d\bar{u}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{q} \right|$$

$t$  désigne le temps, jouant le rôle d'une variable auxiliaire.

D'une part, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dl} \frac{dl}{dt}$$

$$= \left[ \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d\phi}{dl} + \frac{d\theta}{d\psi} \frac{d\psi}{dl} \right] \frac{dl}{dt}$$

Mais  $\psi$  est constante sur la surface, libre donc

$$\frac{d\psi}{dl} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dl}{dt} = q,$$

Alors 
$$\frac{d\theta}{dt} = q \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d\phi}{dl}$$

D'autre part 
$$\frac{d\phi}{dl} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dl} = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dl}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dl} &= \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} u + \frac{\partial\phi}{\partial y} v \right) \frac{dt}{dl} \\ &= (u^2 + v^2) \frac{1}{q} = q \end{aligned}$$

D'où 
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\phi} q^2$$

Puisque 
$$q^2 = e^{2\tau}$$

On a 
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\phi} e^{2\tau}$$

Finalement

$$K = \left| \frac{d\bar{u}_t}{d\theta} \right| \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| \left| \frac{1}{q} \right| e^{2\tau}. \quad (1.30)$$

Puisque  $\left| \frac{d\bar{u}_t}{d\theta} \right| = 1$

Alors l'équation (1.30) devient

$$K = \frac{1}{R} \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| e^\tau \quad (1.31)$$



# ***Chapitre II.***

## ***Effet de la tension de surface sur un écoulement à surface libre en présence d'ondes capillaires***

Résumé :

*Dans ce chapitre, on étudie le problème de l'effet de la tasse de thé d'un écoulement potentiel et bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux à surface libre. On s'intéresse à l'effet de la tension de surface en négligeant l'effet de la gravité. Le problème est réduit à une équation intégrale curviligne ou l'intégration est uniquement sur la surface libre. L'équation intégrale est résolue numériquement pour des différentes valeurs du nombre de Weber  $\alpha$ .*

Contenu :

- II.1 Introduction
- II.2 Position du problème
- II.3 Equation intégrale.
- II.4 Discussion des résultats

## II.1 Introduction

Quand un liquide est versé d'un récipient, on remarque que des fois le liquide peut s'écouler le long de la face extérieure du récipient. Ce phénomène connu sous le nom de l'effet de la tasse de thé « teapot effect », a été étudié par plusieurs auteurs: Reiner [29], Scheidegger [30], Kistler & Scriven [21], Keller [20] & Vanden-Broeck & Keller [32]. Reiner [29] a traité le phénomène expérimentalement. Keller [20] a trouvé la solution exacte du problème en négligeant la force de gravité ainsi que la tension de surface. Il a étudié le phénomène en considérant différents types d'écoulements. Il a calculé les potentiels d'un écoulement plan ou le jet est confiné entre deux parois rigides parallèles. Il a considéré quatre cas. Dans le premier cas, l'écoulement est uniforme sur un plan horizontal. Dans le second, le fluide coule autour du bord de la paroi supérieure revient le long de la face inférieure et remplit l'espace entre les deux parois. Dans les deux cas autres le fluide tourne autour de la paroi supérieure ou la paroi inférieure. Kistler & Scriven [21] ont étudié un écoulement bidimensionnel d'un fluide visqueux se détachant d'un plan incliné en présentant un ensemble de phénomènes.

Vanden-Broeck & Keller [32] ont calculé numériquement l'écoulement pour différentes configurations du bord du récipient. Dans notre travail, on étudie un problème simplifié de l'effet de la tasse de thé. On considère que l'écoulement est sur un demi plan horizontal et de hauteur finie  $H$  au début de l'écoulement. Au bord du demi plan (considéré comme origine  $O$ ) l'écoulement tourne autour de  $O$  s'accroche à la face inférieure de la paroi et revient à l'infini avec une même hauteur  $H$ . Les tensions de surface sont prises en considération et la gravité est négligée.

La solution par la méthode d'hodographe [3] n'est pas possible à cause de la non linéarité de la condition à la surface libre. A l'aide de l'intégrale de Cauchy, le problème non linéaire est réduit à une équation intégrale puis résolue numériquement en suivant la technique de Forbes [11-12].

Dans son mémoire de Magister, Guechi [15] a traité le problème par la méthode de la série [16]. Elle a obtenue des solutions seulement pour  $\alpha \geq 10$  et le programme diverge pour  $\alpha < 10$  et elle a conclu que le problème n'a pas de solution pour  $\alpha < 10$ . Dans le présent travail on formule le même problème d'écoulement en équation integro-différentielle, le domaine d'intégration est réduit sur la surface libre uniquement. Le problème est ensuite résolu numériquement. On a pu trouver des solutions pour  $\alpha < 10$  mais admettant des ondes capillaires.

Vanden Broeck & Chapman [8] ont considéré le problème des écoulements potentiels à surface libre en absence de la gravité mais avec la tension de surface. Ils ont montré que les ondes capillaires en présence des tensions de surface ( $\alpha \neq \infty$ ) sont exponentiellement petits à tous ordres. En conséquence, les ondes capillaires ne peuvent pas être formulées via une série. Pour  $\alpha \geq 10$ , la solution par la présente méthode coïncide avec la solution via une série.

## II.2 Position du problème

Considérons un écoulement potentiel et bidimensionnel de profondeur finie d'un fluide incompressible et non visqueux sur un demi plan horizontal qui s'étend de  $\tilde{x} = -\infty$  à  $\tilde{x} = 0$ . On considère que le fluide coule autour du bord du demi plan ( $\tilde{x} = 0$ ) puis revient le long de la face inférieure du plan horizontal. On prend comme repère de référence l'axe des  $\tilde{x}$  sur le plan horizontal. L'axe des  $\tilde{y}$  est perpendiculaire à l'axe des  $\tilde{x}$  au point  $O$  et dirigé vers le haut (Fig.1).

La demi droite  $\tilde{x} \leq 0$  sera notée par  $IO$  (paroi rigide), la courbe  $ICJ$  désigne la surface libre (Fig.1). Le plan  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  de l'écoulement est identifié au plan de la variable complexe  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ .

Keller [20] a trouvé la solution exacte du problème en négligeant la force de gravité ainsi que la tension de surface. Vanden-Broeck & Keller [32] ont considéré que la force de tension est nulle mais la gravité n'est pas nulle. Ils ont calculé numériquement l'écoulement pour différentes configurations du bord du récipient.

Dans notre problème, on considère que la force de gravité  $\vec{g}$  est nulle mais la tension de surface  $\tilde{T}$  n'est pas nulle. Supposons que l'écoulement est uniforme à l'infini avec une vitesse constante  $\tilde{U}$  et de profondeur finie  $\tilde{D}$ .

La notation  $(\sim)$  désigne que les variables sont avec leurs dimensions physiques. Pour réduire le nombre de paramètres nous procédons à la non dimensionalisation du problème.

On prend  $\tilde{U}$  comme unité de vitesse, et  $\tilde{D}$  comme unité de longueur, nous introduisons les variables sans dimension suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{U}} \\ \frac{1}{R} = \frac{1}{\tilde{R}} \tilde{D} \\ \alpha = \frac{\tilde{\rho} \tilde{U}^2 \tilde{D}}{\tilde{T}} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$\tilde{q}$  le module du vecteur vitesse,  $\alpha$  le nombre de Weber et  $\tilde{R}$  est le rayon de courbure de la surface libre.  $\tilde{T}$  désigne la tension de surface sur la surface libre  $ICJ$ .  $\tilde{\rho}$  est la densité volumique du fluide.

Le fluide est supposé incompressible, non visqueux et irrotationnel. Pour résoudre le problème, il est convenable d'introduire les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  qui désignent respectivement le potentiel de vitesse et la fonction de courant. Les composantes  $u$  et  $v$  du vecteur vitesse  $\vec{q}$  sont données en terme de  $\phi$  et  $\psi$  par la relation de Cauchy Riemann :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont des fonctions potentielles, donc elles sont déterminées à des constantes près. Sans perte de généralité on prend sur la ligne de courant  $IO$  (paroi

rigide),  $\psi = 0$  alors que sur la ligne de courant  $ICJ$  (la surface libre)  $\psi = 1$  et on choisit  $\phi = 0$  au point  $C$  (Fig. 2).

Le problème d'écoulement potentiel se réduit à déterminer la fonction potentielle de vitesse  $\phi(x, y)$  qui satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{dans le domaine d'écoulement} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 & \text{sur } O'O \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 & \text{au point } C \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{P}{\rho} = cte. & \text{sur la surface libre } ICJ \end{array} \right.$$

La résolution du problème précédent est difficile analytiquement et même numériquement et cela est dû à la condition au limite imposée sur la surface libre de forme inconnue a priori.

Ce type de problème aux conditions aux limites libres est très difficile à traiter directement, des transformations sont nécessaires.

Pour les problèmes des écoulements potentiels bidimensionnels, on identifie le plan de l'écoulement à un plan complexe approprié ainsi toutes les fonctions de l'écoulement sont analytiques et le problème devient abordable.

Prenons le plan complexe décrit précédemment, on définit la fonction potentielle complexe  $f$  de la variable  $z = x + iy$  par

$$f(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

D'après la formule (2.2), la fonction  $f$  est analytique, ainsi que la vitesse complexe

$u - iv = \frac{df}{dz}$  qui est analytique sauf au point singulier, l'origine  $O$ .

A l'infini, l'écoulement est uniforme d'où :

$$u - iv = 1 \quad \text{quand } x \rightarrow -\infty \quad (2.3)$$

La pression est supposée constante sur la surface libre alors l'équation de Bernoulli sur la surface libre s'écrit :

$$\frac{1}{2} \tilde{q}^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2} \tilde{U}^2 + \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\rho}} \quad \text{sur } ICJ$$

Où  $\tilde{p}$  et  $\tilde{p}_0$  désignent, respectivement, la pression sur la surface libre et la pression atmosphérique juste au dessus de la surface libre.

La relation entre  $\tilde{p}$  et  $\tilde{p}_0$  est donnée par la loi de Laplace

$$\tilde{p} - \tilde{p}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}}$$

Sous les conditions décrites ci-dessus l'équation de Bernoulli sur la surface libre prend la forme:

$$\frac{1}{2} \tilde{q}^2 + \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}} \tilde{K} = \frac{1}{2} \tilde{U}^2 \quad (2.4)$$

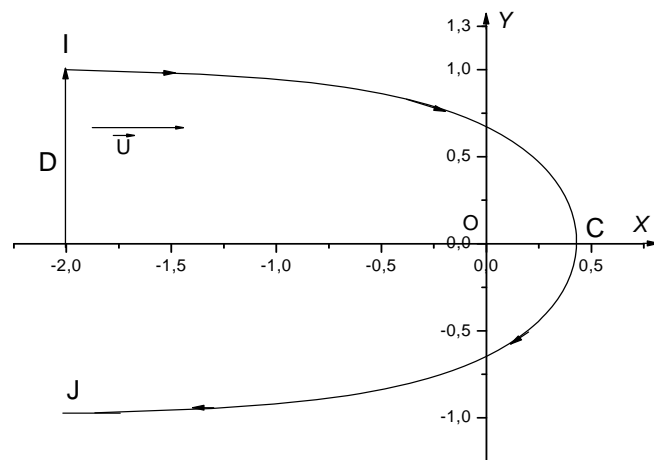


Fig. 1. Le domaine d'écoulement dans le plan  $z$

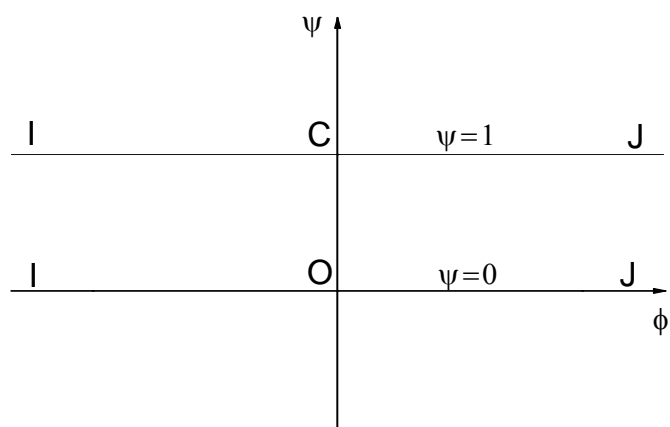


Fig. 2. Le domaine d'écoulement dans le plan  $w$



Où  $\tilde{K} = \frac{1}{\tilde{R}}$  désigne la courbure de la surface libre et  $\tilde{R}$  le rayon de courbure de la surface libre et  $\tilde{\rho}$  la densité de fluide,  $\tilde{T}$  la tension de surface.

En utilisant la formule (2.1), l'équation de Bernoulli devient

$$q^2 + \frac{2}{\alpha} \frac{1}{R} = 1 \quad (2.5)$$

$\alpha$  est le nombre de Weber et  $q$  le module du vecteur vitesse. Pour commodité de calcul, on définit la fonction  $\xi$  comme suit :

$$\xi = u - iv - 1 \quad (2.6)$$

La fonction  $\xi$  est analytique au domaine de fluide, sauf à l'origine  $O$  et elle s'annule à l'infini puisque quand  $x \rightarrow -\infty$  on a  $u \rightarrow 1$  et  $v \rightarrow 0$ .

### II.3 Méthode de l'intégrale

On résout le problème numériquement en utilisant la méthode de l'intégrale curviligne (Mekias [24], Mekias & Vanden-Broeck [25], Forbes [11-12], Koerber & Forbes [22], Wen [37], Manik [17], Hoking [19]). A l'aide de l'intégrale de Cauchy, on reformule le problème d'écoulement en équation integro-différentielle, le domaine d'intégration est réduit sur la surface libre uniquement.

La fonction  $\xi$  est analytique dans tout le domaine du fluide sauf à l'origine qui représente le bord du fond rigide. D'après la formule de l'intégrale de Cauchy on a

$$\oint_{\Gamma} \frac{\xi(\beta)d\beta}{\beta - z} = 2\pi i \sum \text{Residues} \quad (2.7)$$

Le point  $z$  appartient au domaine d'écoulement à l'intérieur du contour d'intégration  $\Gamma$ .

Le contour d'intégration  $\Gamma$  est orienté positivement dans le sens trigonométrique et il est formé par une partie de la surface libre jointe au fond rigide à l'infini par deux segments verticaux et au cercle de centre  $O$  et de rayon  $\varepsilon$  petit (Fig.3).

Si la variable  $z$  appartient à la surface libre, dans le contour  $\Gamma$  on contourne le point  $z$  par  $1/2$  cercle de centre  $z$  et d'un petit rayon  $\varepsilon$ . L'intégrale (2.7) sera au sens de la partie principale de Cauchy.

Suivant Forbes [11], on choisit la longueur d'arc  $l$  le long de la surface libre comme variable d'intégration. On note par  $s$  la coordonnée intrinsèque correspondante au point  $z$  sur la surface libre.

La contribution de l'intégrale sur la ligne verticale est nulle, car à l'infini  $\xi(z)$  est nulle ou bien bornée et sa contribution sur le demi cercle de petit rayon est  $-i\pi\xi(z)$ . En

Conséquence l'équation (2.7) devient

$$-i\pi\xi(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{\xi(z(l)) z'(l) dl}{z(l) - z(s)} + \int_{-\infty}^0 \frac{\overline{\xi}(z(l)) \overline{z}'(l) dl}{\overline{z}(l) - z(s)} \quad (2.8)$$

$$- 2\pi i \sum \text{Residues}$$

La première intégrale est au sens de la valeur principale de Cauchy. Pour résoudre le problème on calcule d'abord les résidus  $\xi(z)$  au voisinage des points singuliers. Dans notre problème, le point  $O$  est le seul point singulier de  $\xi(z)$  : un écoulement autour d'un angle.

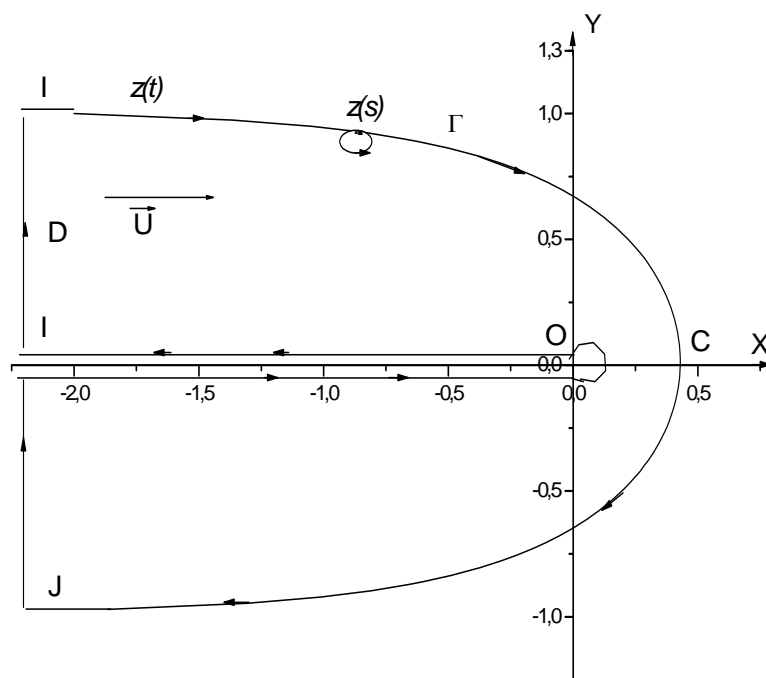


Fig. 3. Le domaine d'écoulement avec le contour d'intégration  $\Gamma$ .

### II.3.1 Comportement de $\xi(z)$ au voisinage de $O$

La fonction  $\xi(z)$  est analytique dans le domaine d'écoulement sauf à l'origine le bord du fond rigide  $O$ . La vitesse est assez grande en ce point et l'écoulement au voisinage de ce point est un écoulement autour d'un angle  $2\pi$ , d'où

$$u - iv \sim \frac{1}{\pi\sqrt{z}}, \quad \text{quand } z \rightarrow 0$$

Par conséquent

$$\text{Résidu}(\xi(z), 0) = 0.$$

En utilisant l'équation (2.2), l'équation (2.6) prend la forme

$$\xi(z(s)) = \phi_s(s) x_s(s) - i\psi_s(s) y_s(s) - 1 \quad (2.9)$$

En substituant l'équation (2.9) et le résidu de  $\xi(z)$  au voisinage de  $O$  dans l'équation (2.8) et si on prend seulement la partie imaginaire de cette équation on obtient l'équation intégral-différentielle suivante

$$-\pi(\phi_s(s)x_s(s) - 1) = - \int_{-\infty}^0 \frac{\phi_l(l)(y(l) - y(s)) dl}{(x(l) - x(s))^2 + (y(l) - y(s))^2} - \int_{-\infty}^0 \frac{\phi_l(l)(y(l) + y(s)) dl}{(x(l) - x(s))^2 + (y(l) + y(s))^2} \quad (2.10)$$

Pour écrire l'équation de Bernoulli en coordonnée intrinsèque  $s$ , on définit la valeur de la courbure par cette variable.

En coordonnées intrinsèques, la courbure  $K$  est donnée par:

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d\vec{s}}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{s}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \right|$$

et comme  $\tan(\theta) = \frac{y'(s)}{x'(s)}$

$\theta$  est l'angle que fait l'axe des  $x$  horizontal et le vecteur vitesse.

D'autre part  $\left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \frac{|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|}{((x'(s))^2 + (y'(s))^2)}$

par suite on obtient

$$\frac{1}{R} = \frac{|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|}{((x'(s))^2 + (y'(s))^2)}$$

En utilisant la coordonnée intrinsèque  $s$ , on écrit l'équation de Bernoulli sous la forme:

$$\phi_s^2 - \frac{2}{\alpha} \frac{|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|}{((x'(s))^2 + (y'(s))^2)} = 1 \quad (2.11)$$

La condition au limite à l'infini est donnée par

$$\phi_s = 1 \quad \text{Quand} \quad s \rightarrow -\infty \quad (2.12)$$

Finalement, la condition de la longueur d'arc peut s'écrire comme suit

$$x_s^2 + y_s^2 = 1 \quad (2.13)$$

Ceci complète la formulation de notre problème. On choisit les fonctions  $x(s)$ ,  $y(s)$ , et  $\phi(s)$  de sorte qu'ils satisfassent les équations (2.10) - (2.13).

## II.4. Procédure numérique

La procédure numérique utilisée dans ce chapitre est la même que celle utilisée par Forbes [11] dans l'étude d'un problème "On the effects of non-linearity in the free surface flow about a submerged point vortex".

Pour résoudre le système d'équations (2.10)-(2.13), on tronque le domaine d'intégration dans l'équation (2.10) à une valeur finie  $M$  et on introduit  $N$  points de maille:

$$s_i = \frac{(i-1)M}{N}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Les valeurs des variables d'écoulement  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $x'(s)$ ,  $y'(s)$  et  $\phi'(s)$  pour chaque point de maille  $s_i$  sont notées par  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $x'_i$ ,  $y'_i$ , et  $\phi'_i$ . Nous satisfaisons l'équation (2.10) pour tous les  $N-1$  *mi*-points.

$$sh_i = \frac{(s_i - s_{i-1})}{2}, \quad i = 2, \dots, N$$

L'intégrale est calculée par la règle du trapèze en faisant la sommation sur les points de maille  $s_i$ . La singularité de la valeur principale de Cauchy est alors éliminée, puisque elle apparaît symétriquement entre les points de maille.

On utilise la méthode de Newton pour résoudre le système (2.10) avec les inconnus  $y'_1, \dots, y'_N$ . Les variables de l'écoulement sont connues au point  $s_1$

$$\phi'_1 = 1$$

$$x_1 = s_1$$

$$y_1 = 1$$

$$y'_1 = 0$$

$$x'_1 = 1.$$

Nous exprimons les variables de l'écoulement en terme de  $y'_2, \dots, y'_N$ .

On utilise l'équation de Bernoulli (2.11) pour évaluer  $\phi'_2, \dots, \phi'_{N+1}$ , alors:

$$\phi_s^2 = \frac{2}{\alpha} \frac{|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|}{((x'(s))^2 + (y'(s))^2)} + 1, \quad i = 2, \dots, N + 1$$

Puis on utilise la règle du trapèze pour évaluer  $y_2, \dots, y_{N+1}$ :

$$y_i = \frac{h}{2} (y'_i + y'_{i-1}) + y_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N + 1$$

Les valeurs de  $x'_2, \dots, x'_{N+1}$  sont tirées de l'équation (2.13)

$$x'_i = (1 - y_i'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 2, \dots, N + 1$$

On utilise la règle du trapèze une autre fois pour calculer  $x_2, \dots, x_{N+1}$ , en effet

$$x_i = \frac{h}{2} (x'_i + x'_{i-1}) + x_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N + 1$$

Finalement toutes les variables de l'écoulement aux mi-points  $sh_i$  sont obtenues par interpolation au point  $s_i$ ; i.e.,

$$xh_i = \frac{1}{2} (x_i + x_{i-1})$$

$$xh'_i = \frac{1}{2} (x'_i + x'_{i-1})$$

$$yh_i = \frac{1}{2} (y_i + y_{i-1})$$

$$\phi h_i = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_{i-1})$$

$$yh'_i = \frac{1}{2} (y'_i + y'_{i-1})$$

En substituant ces expressions dans l'équation integro-differentielle (2.10) on obtient un système de  $N-1$  équations algébriques à  $N-1$  inconnus  $y'_i, i = 2, \dots, N$ . Pour résoudre le système, on applique la méthode de Newton. Nous commençons le calcul avec une grande valeur du nombre de Weber  $\alpha$ . Une fois qu'une solution est obtenue, elle est employée comme une première donnée initiale pour une plus petite valeur de  $\alpha$  et ainsi de suite. Pour une grande valeur de  $\alpha$  on peut résoudre le système avec  $N = 200$  ou plus. Le programme converge entre cinq à neuf itérations avec un test d'erreur de  $10^{-8}$ .

## II.5 Discussion des résultats

Les résultats numériques montrent qu'il existe une famille de solutions continûment dépendantes d'un seul paramètre: le nombre de Weber  $\alpha$ .

L'algorithme numérique converge pour tout  $\alpha \geq \alpha_0 = 4.16$ , mais on constate que la convergence est plus rapide quand  $\alpha \rightarrow \infty$ , elle est moins rapide au voisinage de la valeur  $\alpha_0$ . Le fait qu'il existe un nombre de Weber  $\alpha_0$ , tel que la solution cesse d'exister pour  $0 < \alpha < \alpha_0$ , est à prévoir car la tension de surface est inversement proportionnelle au nombre de Weber, et les tensions de surface sont en compétition avec l'effet de la tasse de thé. C'est à dire, les tensions de surface tendent à empêcher l'écoulement de « l'effet de la tasse de thé ».

Pour tout  $\alpha \geq 10$ , on a trouvé que les résultats numériques obtenus dans ce chapitre sont en concordance avec les résultats trouvés par la méthode de série dont l'algorithme



converge seulement pour  $\alpha \geq 10$ . Pour  $\alpha < 10$ , une erreur d' « over flow » apparaît. Pour surmonter ce problème, la méthode de l'intégral de Cauchy « boundary integral equation » a été utilisée pour calculer la forme de la surface libre, on arrive à trouver des ondes capillaires pour tout nombre de Weber  $\alpha_0 < \alpha < 10$ .

Lorsque le nombre de Weber  $\alpha$  tend vers l'infini, la tension de surface tend vers zéro, on a utilisé la même procédure numérique pour trouver la solution qui est en concordance avec la solution exacte par la méthode de « Kirchhoff » avec une erreur  $\varepsilon \leq 10^{-8}$ . Ce qui nous a permis d'affirmer que les résultats pour  $\alpha_0 < \alpha < \infty$  sont fiables. Les résultats numériques sont obtenus pour  $N = 200$ .

#### a- Solution sans tension de surface

En absence des forces de gravité et la tension de surface le problème a une solution exacte en utilisant la théorie des lignes de courant libres qui a été introduite par Kirchhoff [3] et qui est basée sur les transformations conformes.

Des résultats numériques sont obtenues lorsque  $\alpha$  tend vers l'infini, alors la tension de surface tend vers zéro, dans ce cas le système des équations (2.10)-(2.13) se réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} -\pi(\phi_s(s)x_s(s)-1) = - \int_{-\infty}^0 \frac{\phi_t(t)(y(t)-y(s)) dt}{(x(t)-x(s))^2 + (y(t)-y(s))^2} - \\ \int_{-\infty}^0 \frac{\phi_t(t)(y(t)+y(s)) dt}{(x(t)-x(s))^2 + (y(t)+y(s))^2} \\ \phi_s^2 = 1 \\ x_s^2 + y_s^2 = 1 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

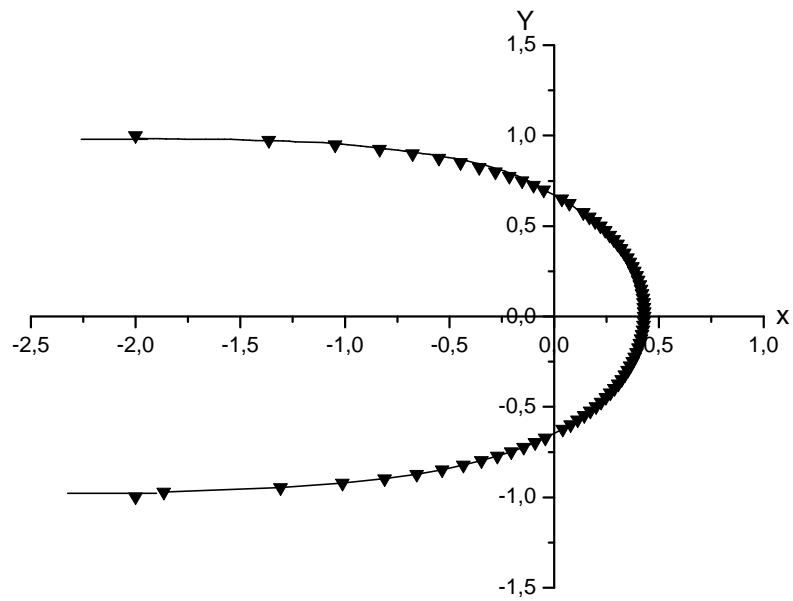


Fig. 4. Le domaine d'écoulement en absence de la tension de surface.

▼ Forme exacte de la surface libre

— Forme de la surface libre calculée via la méthode de l'intégrale.

Utilisons la méthode numérique décrite précédemment pour résoudre le système (2.14). On trouve que nos résultats sont identiques aux résultats que nous avons déjà trouvés par la méthode de Kirchhoff [3] (Fig. 4).

### **b- Solution avec l'effet de la tension de surface**

Nous utilisons la procédure numérique décrite en sec.II.4 pour calculer la solution du problème en présence de la tension de surface.

Le calcul numérique montre qu'il existe une valeur minimale de  $\alpha$ ,  $\alpha_0 = 4.16$  pour laquelle si  $\alpha > \alpha_0$  la méthode converge avec une erreur de  $10^{-8}$ .

On remarque que pour  $\alpha \geq 150$ , tous les graphes de la forme de la surface libre sont les mêmes et coïncident avec la solution exacte, on peut estimer que la tension de surface après cette valeur peut être négligée.

Fig. 5 et Fig. 6 montrent différents profils de la surface libre pour  $\alpha < 10$ . On constate l'apparition d'un train d'ondes capillaires à l'infini. L'amplitude  $A_m$  des ondes augmente quand  $\alpha$  diminue. Les cuvettes deviennent plus larges et les crêtes deviennent plus étroites.

Fig. 7 représente la variation de l'amplitude en fonction du nombre de Weber  $\alpha$ .

Nous n'avons pas pu obtenir de solutions pour tout  $\alpha < \alpha_0 = 4.16$ , ceci est probablement dû au fait que la tension superficielle tend à renforcer la surface pendant que l'effet de la tasse de thé tend à la plier au tournant. Par conséquent, il doit y avoir une valeur de la tension superficielle (le nombre de Weber) où les deux effets sont de même importance.

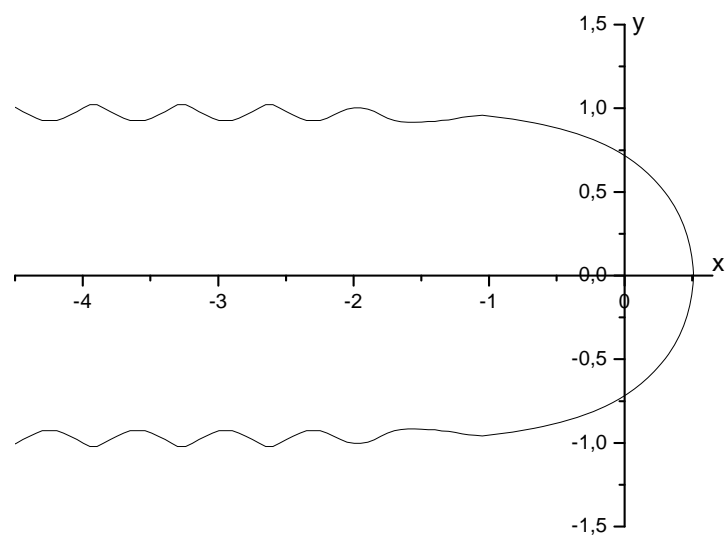


Fig. 5. La forme de la surface libre pour  $\alpha = 4.16$ .

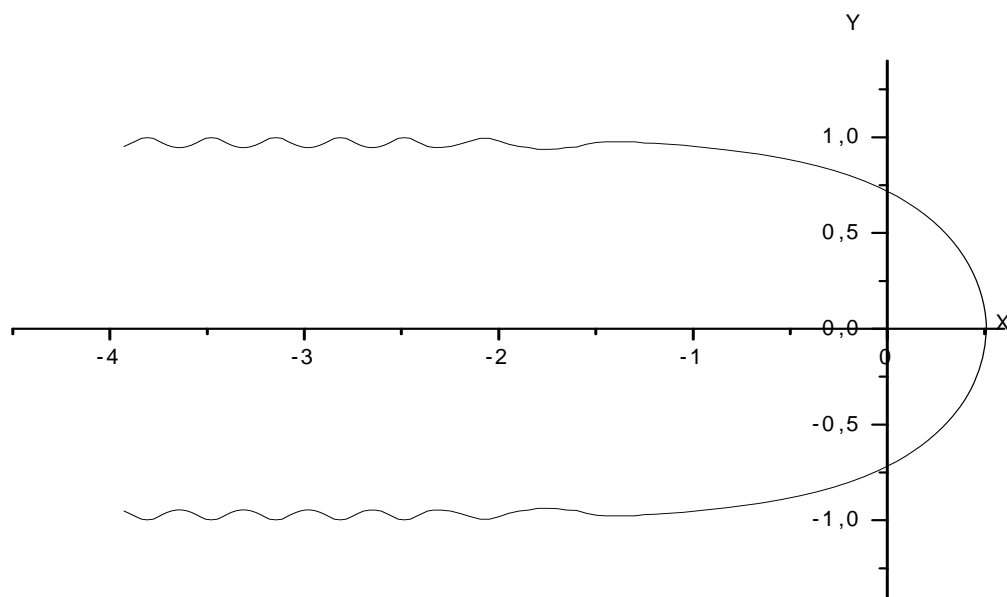


Fig. 6. La forme de la surface libre pour  $\alpha = 7$ .

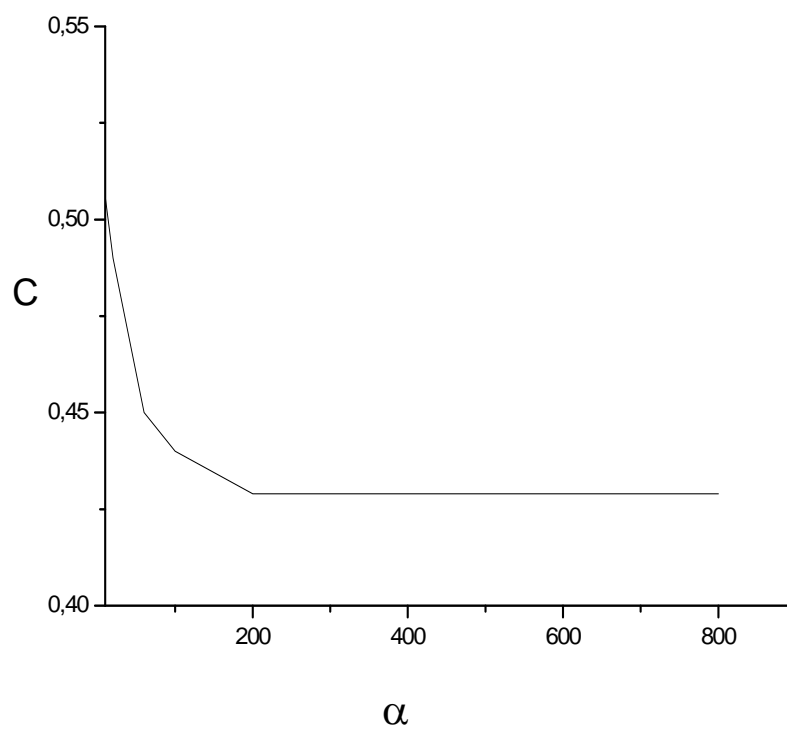


Fig. 7. La variation de la position  $C$  en fonction de nombre de Weber  $\alpha$  .

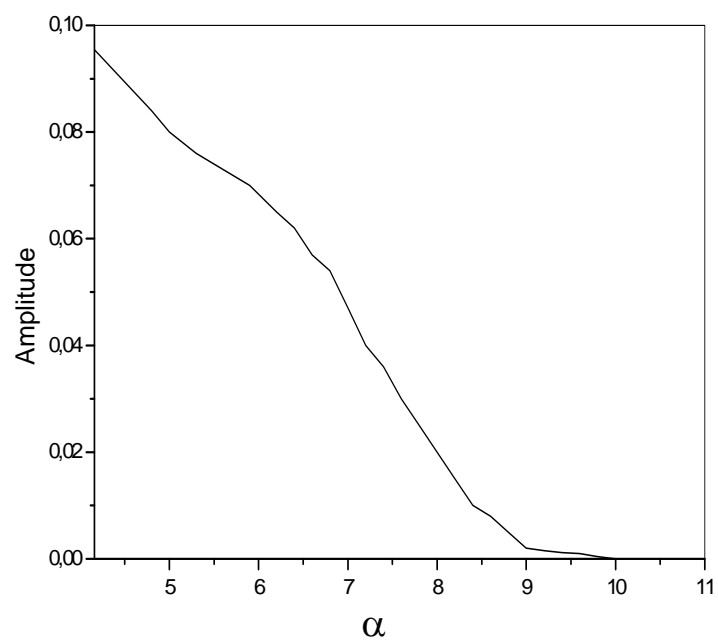


Fig. 8. La variation de l'amplitude en fonction du nombre de Weber  $\alpha$  .

## **Chapitre III.**

# ***Un jet avec effet de la tasse de thé en présence de la gravité***

Résumé :

*Dans ce chapitre, on s'intéresse au même problème du chapitre précédent en tenant compte de l'effet de la tension de surface ainsi que l'effet de la force de gravité. Sous l'effet de gravité, le fluide de l'écoulement sous le plateau horizontal se sépare de la paroi rigide et s'étend à l'infini formant un jet avec deux surfaces libres. On adopte la procédure numérique de troncation de série. Les solutions obtenues dépendent de deux paramètres le nombre de Weber  $\alpha$  et le nombre de Froude  $F$ .*

Contenu :

- III.1 Introduction
- III.2 Formulation du problème
- III.3 Méthode de la série
- III.4 Procédure numérique
- III.5 Discussion des résultats



### III.1 INTRODUCTION:

Les écoulements bidimensionnels à surface libre en présence de la gravité et l'effet de la tension de surface sont difficiles à résoudre. Même pour l'étude d'un écoulement d'une géométrie simple, la solution analytique est rare et les solutions sont calculées numériquement.

Les difficultés de ces problèmes résident dans la condition aux limites qui est non linéaire sur la surface libre de forme inconnue. Notre travail consiste à résoudre un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel à deux surfaces libres d'un liquide versé d'un récipient lorsque le liquide s'accroche à la surface extérieure du récipient, ensuite il se sépare formant un jet avec deux surfaces libres à l'infini. Goh & Tuck [18] ont calculé un écoulement à deux surfaces libres. Des écoulements de déversoir et de chute d'eau ont été analysés par Dias & Tuck [10]. Vanden Broeck & Keller [32] ont calculé numériquement un écoulement pour différentes configurations du bord du récipient en négligeant l'effet de la tension de surface et en tenant compte de l'effet de force de gravité. Dans le présent problème, l'effet de la gravité et l'effet de la tension de surface sont pris en considération. Pour résoudre ce problème on suit les étapes décrites par Vanden Broeck [34-36]. On obtient un système d'équations différentielles à partir de l'équation de Bernoulli. On applique la méthode de troncature de séries ([24-28], [4-6], [1], [9-10], [15-17], [13]) pour résoudre numériquement le système par la méthode de Newton.

## III.2 FORMULATION DU PROBLEME

Considérons l'écoulement potentiel et bidimensionnel décrit au chapitre II, d'un fluide incompressible non visqueux qui coule le long d'un demi plan  $O'O$  en tenant compte de l'effet de la tension de surface ainsi que celui de la gravité. A la limite du bord  $O$ , le fluide s'écoule en dessous du plan autour du point  $O$ . Sous l'effet de la gravité, le fluide se sépare de la paroi inférieure au point  $S$  où la surface libre fait un angle  $\gamma$  (Fig.13), puis s'écoule en chute libre vers l'infini et prend la forme d'un jet. Nous introduisons les coordonnées cartésiennes avec l'axe des  $\tilde{x}$  le long du plan horizontal  $O'O$  et l'axe des  $\tilde{y}$  perpendiculaire à cet axe, dirigé en haut et passant par le point  $O$ . La demi droite  $\tilde{x} \leq 0$  est le bord du récipient et on la note  $O'O$ . La courbe  $ABC$  désigne la surface libre supérieure. Le plan  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  de l'écoulement est identifié au plan complexe  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ .

Supposons que l'écoulement est uniforme au début avec une vitesse constante  $\tilde{U}$  et de hauteur  $\tilde{D}$ . Avant de résoudre le problème nous devons écrire l'équation de Bernoulli en variable adimensionnelles, alors on choisie  $\tilde{U}$  comme unité de vitesse, et  $\tilde{D}$  comme unité de longueur.

Notons les variables dimensionnelles par tilde ( $\sim$ ) et nous introduirons les variables sans dimension suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{U}} \\ \frac{1}{R} = \frac{1}{\tilde{R}} \tilde{D} \\ \alpha = \frac{\tilde{\rho} \tilde{D} \tilde{U}}{\tilde{T}} \\ F^2 = \frac{\tilde{U}}{\tilde{g} \tilde{D}} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$\tilde{q} = (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^{\frac{1}{2}}$  le module du vecteur vitesse  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ ,  $\alpha$  le nombre de Weber et  $F$  le nombre de Froude.  $\tilde{R}$  désigne le rayon de courbure de la surface libre,  $\tilde{g}$  est l'accélération due à la gravité.

Comme les formes des surfaces libres dans le plan physique sont inconnues, il est convenable d'introduire des variables indépendantes  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\psi}$  qui désignent respectivement le potentiel de vitesse et la fonction de courant. Les fonctions  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\psi}$  sont des fonctions potentielles, ces fonctions vérifient la relation de Cauchy Riemann.

La fonction potentielle complexe est définie par:

$$\tilde{f} = \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (3.2)$$

Il en résulte de la condition de Cauchy Riemann que la fonction  $\tilde{f}$  de la variable  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$  est analytique. Sans perte de généralité on prend  $\tilde{\phi} = 0$  au point  $S$  et  $\tilde{\psi} = \tilde{D}\tilde{U}$  sur la ligne de courant  $ABC$  qui est la surface libre de dessus. La paroi rigide horizontale  $O'O$ , le segment  $OS$  et la surface libre de dessous définissent une autre ligne

de courant pour laquelle  $\tilde{\psi} = 0$ . Cette transformation transforme le plan  $\tilde{z}$  à un plan de la variable complexe  $\tilde{f}$ , où le domaine de l'écoulement correspond à une bande infinie  $0 < \tilde{\psi} < \tilde{D}\tilde{U}$  (Fig. 9).

Notons par  $\tilde{\xi}$  la vitesse complexe

$$\tilde{\xi}(\tilde{z}) = \tilde{u} - i\tilde{v} = \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{z}} \quad (3.3)$$

La pression est supposée constante sur la surface libre alors la condition de Bernoulli sur la surface libre s'écrit sous forme :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}}\tilde{K} + \tilde{g}\tilde{y} = Cste \quad (3.4)$$

Où  $\tilde{K} = \frac{1}{\tilde{R}}$  désigne la courbure de la surface libre et  $\tilde{q}, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{g}$  et  $Cste$  désignent respectivement le module de la vitesse, la densité de fluide, la tension et l'accélération de la gravité et la constante de Bernoulli à déterminer.

Pour déterminer la constante  $Cste$ , on évalue l'équation (3.4) à  $\tilde{x} = -\infty$ , on a dans ce cas  $\tilde{\xi} = \tilde{U}$ , et comme la surface libre à l'infini est une droite  $\tilde{y} = \tilde{D}$  donc le rayon de courbure prend la valeur  $\tilde{R} = \infty$ . En substituant ces conditions dans (3.4), on trouve

$$\frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \tilde{g} = Cste \quad (3.5)$$

Cependant, l'équation de Bernoulli sur les deux surfaces libre  $ABC$  et  $SJ$  est de forme

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \tilde{g}\tilde{y} + \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}}\tilde{K} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \tilde{g} \quad (3.6)$$

Utilisons la formule (3.1), on rend l'équation (3.6) sous forme non dimensionnelle :

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{F^2}y + \frac{1}{\alpha R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{F^2} \quad (3.7)$$

Ou bien

$$|\xi|^2 + \frac{2}{F^2}(y-1) + \frac{2}{\alpha R} = 1 \quad (3.8)$$

Pour bien définir la valeur de la courbure sur les surfaces libre, il est convenable d'introduire de nouvelles variables définie par

$$\xi = u - iv = \exp(\tau - i\theta) \quad (3.9)$$

Ou  $|\xi| = \exp(\tau)$  et  $\theta$  est l'angle que fait l'axe des  $x$  horizontal et le vecteur vitesse  $\vec{q}(u, v)$ , Compté positivement dans le sens trigonométrique.

La condition sur la paroi rigide est donnée comme suit

$$\begin{cases} \text{Im } \xi = 0, \theta = 0 & \text{on } \psi = 0, \phi < \phi(O), \\ \text{Im } \xi = 0, \theta = \pi & \text{on } \psi = 0, \phi(O) < \phi < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

La valeur de la courbure en fonction des variables  $(\tau, \theta)$  a été calculée dans le chapitre

I, et on a obtenue l'équation suivante

$$K = \frac{1}{R} \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| e^\tau \quad (3.11)$$

Par suite, l'équation de Bernoulli, en fonction de ces nouvelles variables, prend la forme suivante:

$$e^{2\tau} + \frac{2}{\alpha} \exp(\tau) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| + \frac{2}{F^2}(y-1) = 1 \quad \text{sur } \psi = 1 \text{ et } (\psi = 0, \phi > 0) \quad (3.12)$$

Dans l'équation précédente, la présence de  $y$  rend l'équation difficile à résoudre.

D'une autre manière, il est plus facile de calculer la dérivée de  $y$  par rapport à la variable potentielle  $\phi$  (i.e  $\frac{dy}{d\phi}$ ). De là, il est convenable de dériver l'équation (3.12) par rapport à  $\phi$ .

$$2 \exp(2\tau) \frac{\partial \tau}{\partial \phi} + \frac{2}{F^2} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{2}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \exp(\tau) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| \right) = 0 \quad (3.13)$$

Pour trouver  $\frac{dy}{d\phi}$ , on utilise l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \phi} &= \frac{1}{\xi} \\ &= \frac{1}{\exp(\tau - i\theta)} \end{aligned}$$

D'ou

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \sin(\theta)$$

d'où (3.13) devient

$$\exp(2\tau) \frac{\partial \tau}{\partial \phi} + \frac{1}{F^2} \exp(-\tau) \sin(\theta) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \exp(\tau) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| \right) = 0 \quad (3.14)$$

### III.3 METHODE DE LA SERIE

On résout l'équation (3.14) numériquement en utilisant les techniques de troncature des séries utilisées par Vanden Broeck & Keller [32], ces techniques nous permettent de calculer la fonction vitesse complexe  $\xi$ .

Avant de décrire la forme de la série, on transforme le domaine d'écoulement, la région  $0 < \psi < 1$  du plan  $f$ , successivement par des transformations conformes, en un demi disque unité dans un plan de variable complexe  $\omega$ . Les surfaces libres seront transformées conformément sur le demi cercle et la paroi rigide sur le diamètre du demi disque, cette transformation est définie par

$$f = \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{(1 + \omega)^2}{2(1 + \omega^2)} \right) \quad (3.15)$$

Les points  $A, O'$  sont transformés à  $\omega = -1$  et  $C, J$  à  $\omega = i$ ,  $O$  et  $S$  sont transformés respectivement à  $\omega = \omega_0$  et  $\omega = 1$ .

L'application (3.15) a la propriété de transformer les surfaces libres en un demi cercle (Fig.10) qui sont de formes inconnues dans le plan  $z = x + iy$ .

Après avoir transformé notre domaine, on va étudier le comportement asymptotique de  $\xi$  au voisinage des points singuliers.

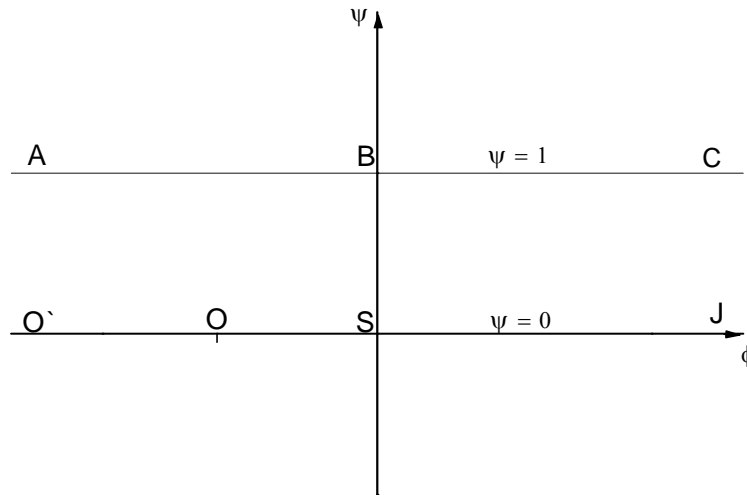


Fig. 9. Le domaine d'écoulement dans le plan  $f$

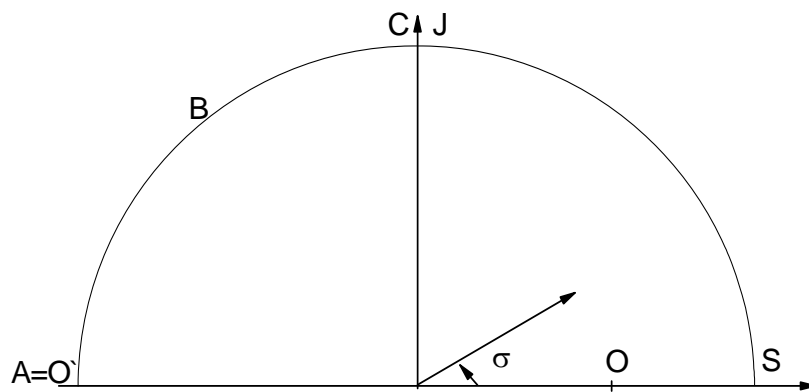


Fig. 10. Le domaine d'écoulement dans le plan  $\omega$ .



### III.3.1. Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités

L'écoulement est uniforme sauf aux points  $O, S, J$ , où il est autour ou dans un angle. La vitesse complexe  $\xi = u - iv$  est régulière sauf en ces points. Ces trois points correspondent, respectivement, aux points  $\omega = \omega_0, \omega = 1, \omega = i$

#### a- Comportement de $\xi$ au voisinage de $\omega = \omega_0$

La vitesse est assez grande au voisinage de  $\omega = 0$ , l'écoulement au voisinage de ce point est un écoulement autour d'un angle  $2\pi$  donc la fonction  $f$  prend la forme

$$f(z) \sim \sqrt{z}, \quad \text{quand } z \rightarrow O$$

De la formule 
$$\xi = \frac{df}{dz} = u - iv$$

on tire 
$$\xi \sim \frac{1}{\sqrt{z}}$$

En utilisant la transformation (3.15), on écrit  $\xi$  sous la forme

$$\xi \sim O\left(\frac{1}{\omega - \omega_0}\right), \quad \text{quand } \omega \rightarrow \omega_0 \quad (3.16)$$

#### b- Comportement de $\xi$ au voisinage de $\omega = i$

Quand  $\varphi \rightarrow +\infty$ , (aux points  $J, C$ ) l'écoulement prend la forme d'un jet et  $\xi$  augmente proportionnellement avec  $f^{\frac{1}{3}}$ . En effet l'équation de Bernoulli prend la forme

$$|\xi|^2 + gy = \text{const}, \quad \text{quand } y \rightarrow -\infty$$

donc

$$|\xi| = O(\sqrt{-y}), \quad \text{quand } y \rightarrow -\infty$$

D' une part, on a

$$|\xi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}$$

Comme  $\psi = 1$  sur la surface libre  $ABC$  et  $\psi = 0$  sur la surface libre  $SJ$  alors on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \text{quand } y \rightarrow -\infty$$

d'où

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = O\sqrt{-gy}, \quad \text{quand } y \rightarrow -\infty$$

En intégrant par rapport à  $y$  on obtient:

$$\phi = O\sqrt{(-y)^3}, \quad \text{quand } y \rightarrow -\infty$$

Par suite

$$-y = O\left(\phi^{\frac{2}{3}}\right), \quad \text{quand } y \rightarrow -\infty$$

Alors

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = O\left(\phi^{\frac{1}{3}}\right), \quad \text{quand } y \rightarrow -\infty$$

Finalement on trouve;

$$\xi = u - iv = O\left((\phi + i\psi)^{\frac{1}{3}}\right) = O\left(f^{\frac{1}{3}}\right), \quad \text{quand } y \rightarrow -\infty$$

Mais d'après la transformation (3.15), on a

$$f \sim -\log(1 + \omega^2), \quad \text{quand } \omega \rightarrow i$$

Le comportement de  $\xi$  au voisinage de  $\omega = i$  est

$$\xi = O\left(\left(\left(-\ln c(\omega^2 + 1)\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right) \quad (3.17)$$

### c- Comportement de $\xi$ au voisinage de $\omega = 1$

L'écoulement, au voisinage du point  $S$  est un écoulement dans un angle de valeur  $\gamma$  inconnue, dans le plan  $z$ , au voisinage de  $z = z_S$ . La fonction potentielle complexe est donnée par

$$f(z) \sim \frac{\gamma}{\pi} (z - z_S)^{\frac{\pi}{\gamma}} \quad , \text{ quand } z \rightarrow z_S$$

D'où

$$(z - z_S) \sim \left(\frac{\pi}{\gamma} f(z)\right)^{\frac{\gamma}{\pi}} \quad \text{quand } z \rightarrow z_S$$

On remplace la valeur de  $f$ , donnée dans la transformation (3.15), dans l'équation citée ci-dessus, on trouve

$$(z - z_S) \sim \left(\frac{\pi}{\gamma} \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{(1 + \omega)^2}{2(1 + \omega^2)}\right)\right)^{\frac{\gamma}{\pi}}$$

De la forme  $\xi = \frac{df}{dz} = u - iv$ , on obtient

$$\xi \sim \left(\left(\frac{\pi}{\gamma} \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{(1 + \omega)^2}{2(1 + \omega^2)}\right)\right)^{\frac{\gamma}{\pi}}\right)^{\frac{\pi}{\gamma} - 1} = \left(\frac{\pi}{\gamma} \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{(1 + \omega)^2}{2(1 + \omega^2)}\right)\right)^{1 - \frac{\gamma}{\pi}}$$

Finalement, on aura

$$\xi = O\left((\omega-1)^{1-\frac{\gamma}{\pi}}\right) \quad (3.18)$$

### III.3.2 Formulation de la série

Après avoir déterminé le comportement local de l'écoulement au voisinage des points singuliers, on écrit  $\xi(\omega)$  sous forme

$$\xi = \Omega(\omega) \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n\right) \quad (3.19)$$

Où  $\Omega(\omega)$  contient les singularités et les zéros de  $\xi$  aux points  $O$ ,  $S$  et  $J$ , données en

(3.16), (3.17) et (3.18), l'équation (3.19) devient

$$\xi(\omega) = (\omega-1)^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \left(-\ln c(\omega^2+1)\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\omega-\omega_O}\right) \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k\right) \quad (3.20)$$

Les puissances  $k$  sont choisies de façon que les conditions aux limites sur les bords rigides  $O'O$  et  $OS$  soient vérifiées. Pour cela on utilise l'équation (3.10), on trouve  $\xi$  sous la forme de série

$$\xi(t) = e^{\tau-i\theta} = (\omega-1)^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \left(-\ln c(\omega^2+1)\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\omega-\omega_O}\right) \exp\left(\sum_1^{\infty} a_n \omega^{2(n-1)}\right) \quad (3.21)$$

Avec ce choix de  $\xi$  toutes les conditions dans (3.10) sont vérifiées sauf la condition de Bernoulli.

### III.3.3 l'équation de Bernoulli dans le plan $\omega$

Dans le plan  $\omega$ , les deux surfaces libres sont représentées par l'arc circulaire

$$\omega = \exp(i\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \pi$$

On substitue cette formule dans (3.15), on obtient:

$$f = \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{(1 + \exp(i\sigma))^2}{2(1 + (\exp(i\sigma))^2)} \right) \quad (3.22)$$

Sur la surface libre  $ABC$ , la fonction complexe  $f$  prend la forme :

$$f = \phi + i \quad (3.23)$$

Sur la deuxième surface libre  $SJ$ , la fonction complexe  $f$  prend la forme :

$$f = \phi \quad (3.24)$$

De (3.23) et (3.24), on déduit:

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{d\phi}{d\sigma} \quad (3.25)$$

En utilisant (3.22) alors (3.25) devient

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\sigma} &= \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\sigma/2)}{\pi \cos(\sigma)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

D'autre par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{\operatorname{tg}(\sigma/2)}{\pi \cos(\sigma)} \end{aligned}$$

Donc 
$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \frac{\pi \cos(\sigma)}{\operatorname{tg}(\sigma/2)}$$

Substituons cette expression dans (3.14) on obtient

$$e^{2\tau} \frac{\pi \cos(\sigma)}{\operatorname{tg}(\sigma/2)} \tau_{\sigma} + \frac{1}{F^2} e^{-\tau} \sin \theta + \frac{\pi}{\alpha} e^{\tau} \frac{\pi \cos(\sigma)}{\operatorname{tg}(\sigma/2)} \left[ e^{\tau} \left| \frac{\pi \cos(\sigma)}{\operatorname{tg}(\sigma/2)} \theta_{\sigma} \right| \frac{\pi \cos(\sigma)}{\operatorname{tg}(\sigma/2)} \right]_{\sigma} = 0 \quad (3.27)$$

### III.4 PROCEDURE NUMERIQUE

Pour déterminer les coefficients  $a_n$ , on tronque la série (3.21) en  $N$  termes, puis on satisfait (3.27) en  $N$  points discrets des surfaces libres. On choisit  $N$  points  $\sigma_I$  équidistant de l'intervalle  $[0, \pi]$ . Les points  $\sigma \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right[$  concernant la surface libre inférieure  $SJ$  et les points  $\sigma \in \left]\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$  sont les points de la surface libre supérieure  $ABC$ .

$$\sigma_I = \frac{\pi}{N} \left(I - \frac{1}{2}\right), \quad I = 1, \dots, N.$$

En utilisant l'équation (3.21), on obtient  $[\tau(\sigma)]_{\sigma=\sigma_I}$ ,  $[\theta(\sigma)]_{\sigma=\sigma_I}$  et  $\left[\frac{\partial \tau}{\partial \sigma}\right]_{\sigma=\sigma_I}$ ,  $\left[\frac{\partial \theta}{\partial \sigma}\right]_{\sigma=\sigma_I}$

en fonction de  $a_n$  pour chaque  $\sigma_I$ . En substituant ces expressions dans (3.27) on obtient un système de  $N$  équations algébriques non linéaires à  $N$  inconnus ( $a_n$ ,  $n = 1, \dots, N-1$ ) et l'angle  $\gamma$ . Le nombre de Froude  $F$  et le nombre de Weber  $\alpha$  sont des paramètres.

Pour résoudre le système numériquement, on applique la méthode de Newton.

Une fois les coefficients  $a_n$  et l'angle  $\gamma$  sont connus, on détermine la forme des surfaces libres par la procédure décrite ci-après.

### III.4.1 La forme des surfaces libres

D'après la définition de la vitesse complexe, on a la relation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \phi} &= \frac{1}{u - iv} \\ &= \exp(-\tau + i\theta) \end{aligned}$$

d'où:

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \cos \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \sin \theta$$

Les surfaces libres sont caractérisées dans le plan  $\omega$  par le demi cercle  $r=1$ , et

$0 < \sigma < \pi$ . En faisant le changement de variables de  $(\tau, \theta)$  à  $(r, \sigma)$  on obtient:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases}$$

On détermine les valeurs de  $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$  et  $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$  pour chaque  $\sigma_l$  sur les deux surfaces libres.

On déduit le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \exp(-\tau(\sigma)) \frac{tg(\sigma/2)}{\pi \cos(\sigma)} \cos(\theta(\sigma)) \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \exp(-\tau(\sigma)) \frac{tg(\sigma/2)}{\pi \cos(\sigma)} \sin(\theta(\sigma)) \end{cases} \quad (3.28)$$

En intégrant (3.28) numériquement en utilisant la méthode d'Euler, on trouve les formes des surfaces libres.

### III.5 DISCUSSION DES RESULTATS

La procédure numérique décrite dans la section III.4 est utilisée pour calculer les solutions pour différentes valeurs du nombre de Weber  $\alpha$  et du nombre de Froude  $F$  ainsi que le paramètre  $\omega_0$ .

#### **$\alpha$ - Solution sans tension de surface (waterfalls)**

Les résultats numériques sont obtenues lorsque  $\alpha$  tend vers l'infini, alors que la tension de surface tend vers zéro, et  $g \neq 0$  et pour différentes valeurs de nombre de Froude. On prend  $\omega_0=1$  lorsque la position du point de séparation  $S$  est proche du point  $O$ .

L'équation (3.21) se réduit à

$$\xi(t) = \left( -\ln c(\omega^2 + 1) \right)^{\frac{1}{3}} \exp \left( \sum_0^{\infty} a_n \omega^{2n} \right) \quad (3.29)$$

Pour résoudre le problème on utilise la procédure numérique décrite précédemment pour trouver les coefficients  $a_n$  de la série (3.29). Le tableau ci-dessous montre quelques valeurs des coefficients  $a_n$  obtenues pour différentes valeurs du nombre de Froude  $F$ .



$F$	$a_1$	$a_{30}$	$a_{60}$	$a_{120}$
2	-1.005	$6.675 \cdot 10^{-4}$	$1.08 \cdot 10^{-6}$	$6.996 \cdot 10^{-8}$
5	-2.20	$-1.07279 \cdot 10^{-7}$	$1.867 \cdot 10^{-9}$	$1.694 \cdot 10^{-12}$
10	-3.192	$-2.4573 \cdot 10^{-9}$	$-2.056 \cdot 10^{-11}$	$-9.090 \cdot 10^{-13}$

Tableau (3.1). Quelques valeurs des coefficients de la série (3.29)

On remarque que les coefficients  $a_n$  diminuent rapidement. Les résultats obtenus sont comparables avec ceux du problème de l'écoulement étudié par Dias & Tuck [10]. Les solutions sont obtenues pour tout nombre de Froude  $F \geq 2$ . On constate que pour les grandes valeurs de  $F$ , la solution se réduit à un courant uniforme sur un plan horizontal. Fig.11 et Fig.12 montrent la forme des surfaces libres pour  $F = 2$  et  $F = 10$ . Les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus avec  $N = 120$ .

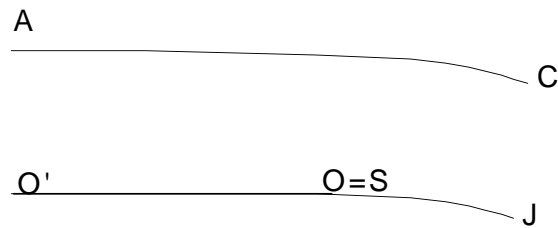


Fig. 11. Forme d'une chute d'eau pour  $F = 2$

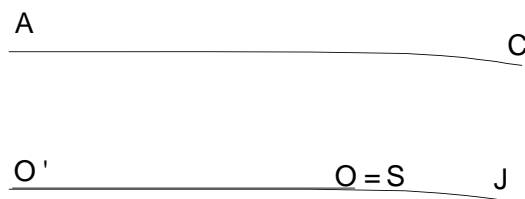


Fig. 12. Forme d'une chute d'eau pour  $F = 10$

**b- Solution avec effet de la tension surface**

On étudie l'influence des tensions de surface sur l'écoulement ( $\alpha \neq 0$ ) et on tient compte de l'effet de la gravité. Des solutions approchées pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $F$  sont obtenues par la procédure numérique décrite dans la section (III. 3).

Dans l'algorithme utilisé, les coefficients  $a_n$  sont des inconnus, le nombre de Weber  $\alpha$  et le nombre de Froude  $F$  sont des paramètres. Le système algébrique d'équations non linéaires est résolu en utilisant la méthode de Newton. Le tableau suivant nous donne quelques valeurs des coefficients  $a_n$  avec  $F = 2$ :

$\alpha$	$a_1$	$a_{10}$	$a_{20}$	$a_{30}$	$a_{58}$
200	1.0797	$-9.4786 \cdot 10^{-2}$	$-4.165 \cdot 10^{-4}$	$-9.975 \cdot 10^{-5}$	$-9.3783 \cdot 10^{-6}$
90	$2.05 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$1.5457 \cdot 10^{-3}$	$14.205 \cdot 10^{-5}$	$-8.1737 \cdot 10^{-6}$
50	-1.005	$6.675 \cdot 10^{-1}$	$3.1571 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$6.996 \cdot 10^{-4}$

Tableau (3.2). Les coefficients de la série (3.21) pour quelques valeurs de  $\alpha$ , pour  $F = 2$

On remarque que pour les valeurs de  $50 < \alpha < \infty$  les coefficients  $a_n$  décroissent rapidement.

La décroissance des coefficients est moins rapide lorsque  $\alpha$  est proche de 50. Une comparaison des coefficient de la série (3.21) pour  $\alpha = 90$  avec les termes de la série

numérique  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+0.1} \right)^n$ , montre que la série (3.21) est absolument convergente dans

le demi disque.

$$\left| \sum a_n \omega^n \right| \leq \sum |a_n| \leq \sum \frac{1}{(1+0.1)^n}$$

Le tableau ci-dessous nous montre la comparaison pour  $\alpha = 90$  et  $\omega_0 = 0.6769$ .

I	a (i)	$\sum \frac{1}{(1+0.1)^n}$
1	$2.05 \cdot 10^{-1}$	$9.09 \cdot 10^{-1}$
10	$8 \cdot 10^{-3}$	$3.85 \cdot 10^{-1}$
20	$1.5457 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-1}$
30	$14.205 \cdot 10^{-5}$	$0.57 \cdot 10^{-1}$
40	$6.10 \cdot 10^{-5}$	$0.22 \cdot 10^{-1}$
50	$1.036 \cdot 10^{-5}$	$0.85 \cdot 10^{-2}$
58	$-8.1737 \cdot 10^{-6}$	$0.39 \cdot 10^{-2}$

Tableau (3.3). La comparaison des coefficients de la série (3.21) par la série  $\sum \frac{1}{(1+0.1)^n}$

Avec un test d'arrêt d'une erreur  $\varepsilon = 10^{-6}$ , le programme s'arrête après quelques itérations seulement, ce qui établit la convergence de l'algorithme. La convergence devient moins rapide lorsque  $\alpha$  décroît. La solution est obtenue pour tout  $\alpha \geq 50$ . Les résultats ont été trouvés pour  $N = 58$ .

### **c- Profil des surfaces libres**

En intégrant le système d'équations (3.27), on trouve la forme des deux surfaces libres pour plusieurs valeurs de  $\alpha$  comme le montre les courbes présentées dans la Fig. 13, pour  $\alpha = 90$ .

Des profils typiques de la surface libre inférieure sont représentés dans la Fig. 14, pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ .

La Figure 15 nous montre l'effet de la tension de surface sur la distance de séparation  $\omega_0$ .

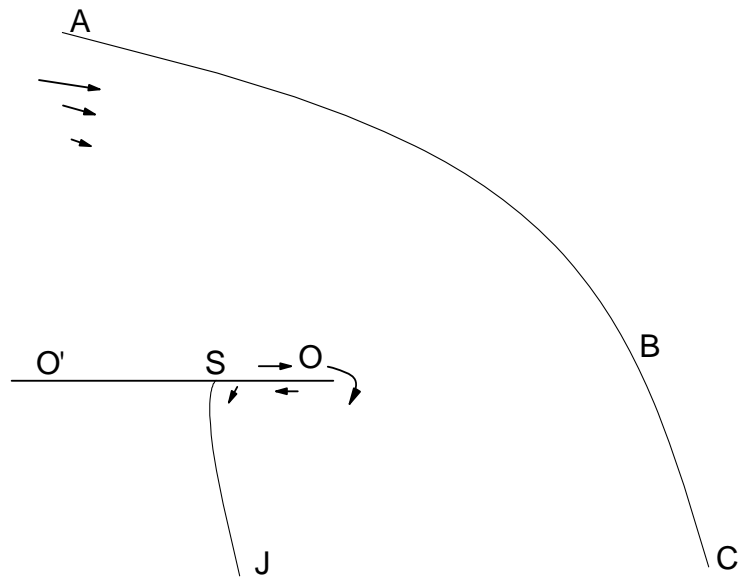


Fig. 13. Forme des surfaces libres pour  $\alpha = 90$  et  $F=2$ .

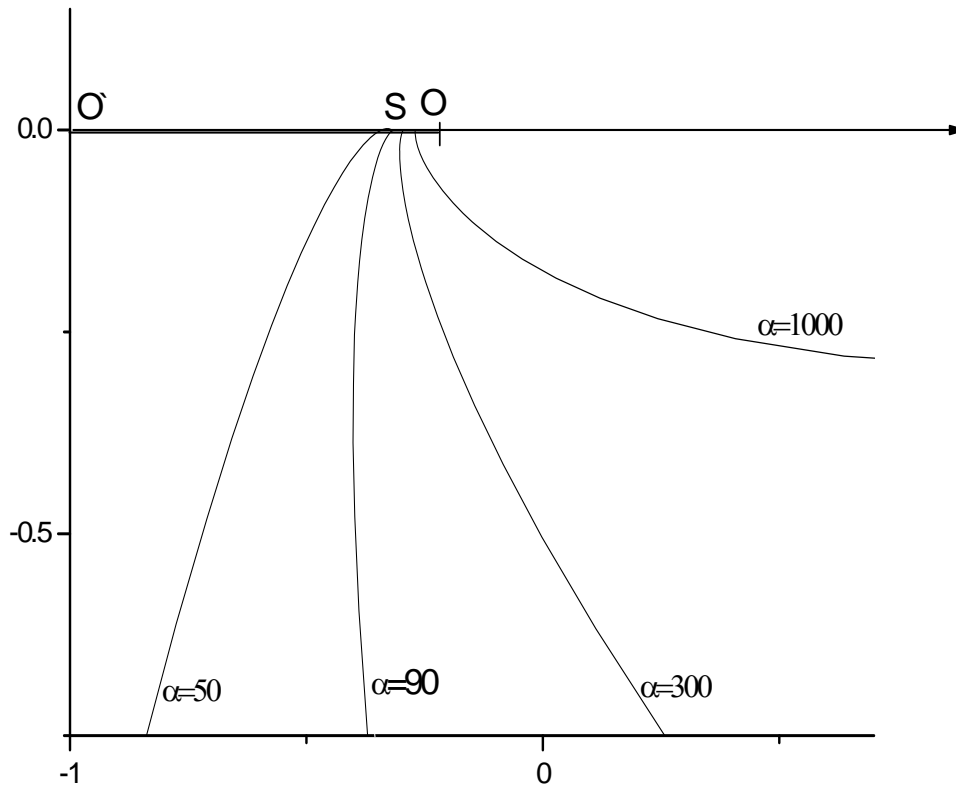


Fig. 14. Forme de la surface libre pour quelques valeurs de  $\alpha$  avec  $F=2$ .

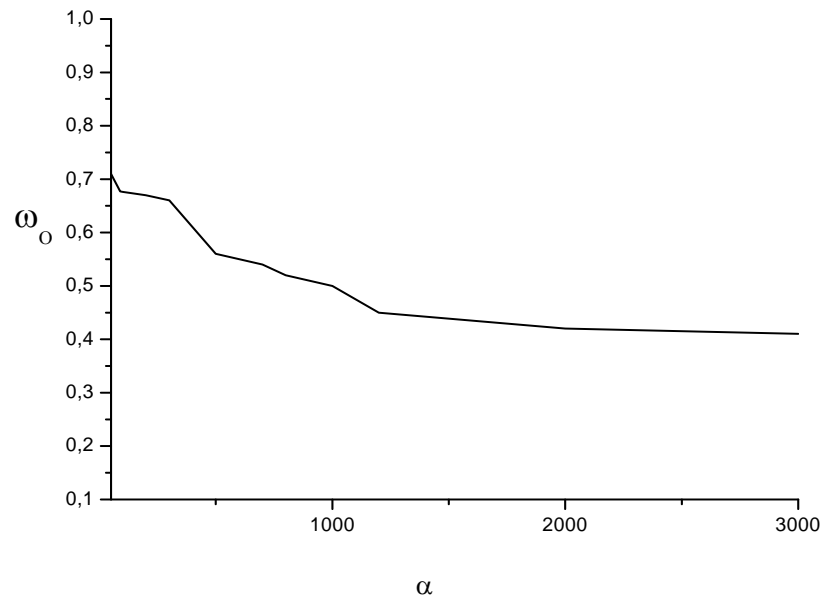


Fig. 15. Variation de la distance de séparation  $\omega_0$  en fonction de  $\alpha$



## ***Conclusion***

L'analyse d'un écoulement plan avec une surface libre a été l'objet d'intérêt pour beaucoup de scientifiques et d'industriels pour une longue période. La détermination de certaines caractéristiques de l'écoulement tel que le coefficient de décharge, le coefficient de contraction et la position de la surface libre sont d'un intérêt particuliers aux ingénieurs à nos jours, très peu de problèmes ont été résolus d'une façon explicite. Même les méthodes numériques sont assez difficiles à élaborer à cause de la condition aux limites imposée sur la frontière "libre", inconnue a priori. Les questions qui peuvent surgir de ce type de problèmes sont, par exemple quelle forme doit avoir une goutte d'un liquide en chute libre ou éjectée sous pression, ou bien encore quelle est la forme de la surface libre d'une chute d'eau d'un récipient ou d'un barrage?

Dans cette thèse, on a étudié un problème d'écoulement bidimensionnel et potentiel, à surface libre d'un liquide versé d'un récipient et s'écoulant le long de la surface extérieure du récipient. Les effets de la tension de surface ainsi que la force de gravité sont pris en considération.

En tenant compte de l'effet de la tension de surface et en négligeant la force de la gravité, le problème est résolu numériquement en utilisant la méthode de l'intégrale curviligne de Cauchy. On a comparé cette méthode avec la méthode de la série. La méthode de la série nous donne des résultats seulement pour  $\alpha \geq 10$ . Cependant, par la méthode de l'intégrale, on a réussi à trouver des solutions pour  $4.16 \leq \alpha < 10$  avec la présence d'ondes capillaires.

En considérant l'effet de la force de gravité, le problème est alors caractérisé par deux nombres, le nombre de Froude  $F$  et le nombre de Weber  $\alpha$ . L'équation de

Bernoulli étant non linéaire et définie sur les surfaces libres de formes inconnues ainsi que les conditions aux limites. On résout le problème numériquement par la procédure de la troncation de série, formulée par Vanden Broeck & Keller [32]. En suivant les étapes suivies par Vanden Broeck & Keller, on a calculé les formes des surfaces libres pour différentes valeurs du  $\alpha$  et de  $F$ .

La méthode utilisée a été vérifiée en comparant la solution obtenue pour  $\alpha \rightarrow \infty$  avec celle trouvée par Dias & Tuck [10].

***Annexe***





Utilisons la méthode de Jordan avec pivotation totale implicite pour résoudre le système linéaire (A.2).

Si  $X^0$  est suffisamment proche de  $X^*$ , on peut espérer que  $X^1$  sera une meilleure approximation de  $X^*$  que  $X^0$ .

Le processus est ensuite itéré à partir de la nouvelle approximation  $X^1$  de  $X^*$  ainsi, l'on passera de l'itération  $n$  à l'itération  $n+1$  par la relation:

$$X^{n+1} = X^n + \Delta X^n$$

$\Delta x_1^n, \dots, \Delta x_n^n$  sont les solutions d'un système similaire de (A.2).

## 2. Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires $f(x) = 0$

Etant donné  $X^0, \varepsilon$

1. Calculer

$$\left. \begin{array}{l} y_{ij}^k = \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=x^k} \\ f_i^k = -f_i(x^k) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}$$

2. Résoudre le système linéaire:

$$\sum_{j=1}^n y_{ij}^k \Delta X_j^k = f_i^k \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. Calculer

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta X_i^k \quad i = 1, 2, \dots, n$$

4. Si

$$|f_i(x^{k+1})| < \varepsilon \quad i = 1, \dots, n \quad \text{est vérifié, arrêter.}$$

### 3. Algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite

- Choix de pivot

$$p_k = y_{l_k c_k} \quad \text{où} \quad y_{l_k c_k} = \max |y_{ij}|$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n & i &\neq l_1, l_2, \dots, l_{k-1} \\ j &= 1, 2, \dots, n & i &\neq c_1, c_2, \dots, c_{k-1} \end{aligned}$$

- Normalisation

$$y_{l_k j} = \frac{y_{l_k j}}{p_k} \quad j = 1, 2, \dots, n+1$$

- Réduction

$$\left. \begin{aligned} w &= y_{i c_k} \\ y_{ij} &= y_{ij} - w \cdot y_{l_k j} \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad i \neq l_k$$

$k = 1, 2, \dots, n$

- Remise en ordre

$$x_{c_k} = y_{l_k, n+1}$$



## ***Bibliographie***

- 
- [1] P.G. Baines and J.A. Whitehead, "On multiple states in single-layer flows" *Physics of Fluids*, 15 (2) (2003).
- [2] G. K Batchelor, "An introduction to fluid dynamics", Cambridge (1967).
- [3] G. Birkhoff and E H. Zarantonello, "Jets, Wakes and Cavities", (New York: Academic) (1957).
- [4] B. Bouderah and H. Mekias, "The effects of surface-tension on the free-surface flow due to a submerged source", *Far East J. Appl. Math.* (2000).
- [5] B. Bouderah, and H. Mekias, "A cybernetic approach to the problem of cusp free-surface flow caused by a line sink on a sloping bottom", *Kybernetes*, Vol.31, No.2, pp.305-316 (2002).
- [6] B. Bouderah, "L'effet de la tension de surface sur quelques écoulements à surface libre dû à une source ou un puit", Thèse de Doctorat d'état, Université Ferhat Abbas de Sétif (2001).
- [7] M. Boumahrat and A. Gourdin, « Méthodes numériques appliquées », O.P.U. (1991).
- [8] S. J. Chapman, J. M. Vanden Broeck, " Exponential asymptotic and capillary waves", *Siam J. Appl. Math.*, 62, No. 6 pp 1872-1898 (2002).
- [9] D. Daboussi, F. Dias and J. M. Vanden Broeck, "Gravity flows with a free surface of finite extent", *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 17 (1), 19-31 (1998).
- [10] F. Dias and E .O Tuck, "Weir flows and waterfalls", *J. Fluid Mech.*, vol. 230, pp. 525-539 (1996).

- [11] L. K. Forbes, “On the effects of non-linearity in the free surface flow about a submerged point vortex”, *J. Eng. Math.*, 19, 139 (1985).
- [12] L. K. Forbes, “Critical free surface flow over a semi-circular obstruction”, *J. Eng. Math.*, 22, 3 (1988).
- [13] A. Gasmi and H. Mekias, “The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet”, *J. Phys. A: Mat. Gen.*, 36, 851-862 (2003).
- [14] F. Guechi, H. Mekias and A. Merzougui, “Two dimensional free surface flow computation”, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 1, no. 44, 2153-2161 (2007).
- [15] F. Guechi, “Ecoulement potentiel et bidimensionnel de l'effet de la tasse de thé”, *Memoire de magister, Univ. Setif* (1997).
- [16] F. Guechi and H. Mekias, “A two dimensional free surface flow analysis considering the surface tension”. *International journal of pure and applied mathematics*, in press, (2007).
- [17] F. Guechi, H. Mekias and A. Merzougui, “Free surface flow with surface tension and gravity”, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 1, no. 49, 2399 – 2408 (2007).
- [18] M. K. Goh, and E .O Tuck, “Thick waterfalls from horizontal slots”, *J. Eng. Maths* 19, pp 341-349 (1985)
- [19] G.C. Hoking, “Steady Prandtl-Batchelor flows past a circular cylinder”, *ANZIAM J.* 48, 165-177 (2006).
- [20] J.B. Keller, “Teapot Effect”, *J. Appl. Phys.* 28, 859 (1957).
- [21] S. F. Kistler and L. E. Scriven, “The Teapot Effect: Sheet forming flows with deflection, wetting and hysteresis”, *J. Fluid Mech.*, Vol 263, pp. 19-62 (1994).

- [22] A. J. Koerber and L. K. Forbes, "Two-dimensional steady free-surface flow into a semi-infinite mat sink", *Phys. Fluids*, 10, 2781 (1998).
- [23] K. Manik, X. Wen and D.B. Ingham, "The flow induced in a three layer stratified fluid by a submerged sink or source with stagnation points on the free surfaces", *Computers and Fluids*, 31, 891 (2002).
- [24] H. Mekias, "Two-dimensional free-surface due to a point singularity", Ph.D. thesis, University of Wisconsin-Madison (1991).
- [25] H. Mekias and J. M. Vanden-Broeck, "Subcritical flow with a stagnation point due to a source beneath a free surface", *Phys. Fluids A*, Vol.3, No. 11 (1991).
- [26] A. Merzougui, H. Mekias and F. Guechi, "Surface tension effect on a two dimensional channel flow against an inclined wall", *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 1, no. 47, 2313-2326 (2007).
- [27] E. Ozugurlu and J. M. Vanden Broeck, "A note on solitary waves with variable surface tension in water of infinite depth", *ANZIAM J.* 48, 225-235 (2006).
- [28] E. Ozugurlu, "The effect of variable surface tension on free surface problems", Ph.D. thesis, University of Wisconsin-Madison (1999).
- [29] M. Reiner, "The teapot effect... a problem," *J. Phys. Today*, 9, 16 (1956).
- [30] A. E. Scheidegger, "Theoretical Geomorphology", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Second, Revised Edition, pp.405-408 (1970).
- [31] M. R. Spiegel, "Variables complexes", McGraw-Hill Inc., New York, 1973.
- [32] J. M. Vanden Broeck and J.B. Keller, "Pouring Flow", *Phys. Fluids* 29, 3958 (1986)

- [33] J. M. Vanden-Broeck, “Flow under a gate”, *Phys. Fluids* 29, 3148 (1986).
- [34] J. M. Vanden-Broeck, “Free streamline model for a rising bubble”, *Phys. Fluids* 29, 2798 (1986).
- [35] J. M. Vanden-Broeck, “Numerical calculations of the free-surface flow under sluice gate”, *J. Fluid Mech.* 330, 339–47 (1997).
- [36] J. M. Vanden-Broeck and J.B. Keller, “Weir flows”, *J. Fluid Mech.* 176, pp. 283-293 (1987).
- [37] X. Wen, and D.B. Ingham, “Flow induced by a submerged source or sink in a three layer fluid”, *Computers and Fluids*, 21, 133 (1992).

**ملخص:** في هذا البحث، لدينا تدفق ذو سطح حر لسائل غير قابل للانضغاط و غير لزج على سطح مستوي. في غياب تأثير الجاذبية ووجود القوى السطحية، تحول المسألة إلى معادلة تكاملية منحنية حيث يكون التكامل على السطح الحر فقط. تحل المعادلة التكاملية عددياً من أجل عدة قيم تعدد ويبر. زيادة على ذلك وفي وجود تأثير الجاذبية نحصل على مسألة تدفق ذو سطحين حرين. نستعمل تقنية السلاسل التي تعتمد أساساً على التحويلات المتطابقة. مجموعة الحلول الناتجة مرتبطة بالوسيطيين الفيزيائيين عدد فرود و عدد ويبر.

**الكلمات المفتاحية:** سطح حر، تدفق كموني، توتر سطحي، عدد فرود، عدد ويبر.

**Abstract:** In the present work, we study a problem of two dimensional free surface flow of a liquid poured from a container. First, the effect of surface tension is taken into consideration and gravity is neglected. We computed numerically the solution for the free surface profiles using boundary-integral equation. The numerical computation shows that the solutions are found for different values of Weber number and a train of capillary waves appeared in the far field for small Weber number. Second, both effects of gravity and surface tension are considered, the flow is a jetlike with two free surfaces, far downstream. We compute a solution numerically via a series truncation method. The solutions are function of two physical parameters, the Froude number and the Weber number.

**Key Words:** Free surface, potential flow, surface tension, Froude number, Weber number.

**Résumé:** Dans le présent travail, on étudie le problème de l'effet de la tasse de thé d'un écoulement potentiel et bidimensionnel à surface libre. Si on s'intéresse à l'effet de la tension de surface en négligeant l'effet de gravité, le problème est réduit à une équation intégrale curviligne ou l'intégrale est uniquement sur la surface libre. L'équation intégrale est résolue numériquement pour différentes valeurs du nombre de Weber. De plus, en tenant compte de l'effet de la force de gravité, l'écoulement est comme un jet à l'infini avec deux surfaces libres. On adopte la procédure numérique de troncation de série. Les solutions sont dépendantes de deux paramètres physiques, le nombre de Froude  $F$  et le nombre de Weber  $a$ .

**Mots-clés:** Surface libre, écoulement potentiel, tension de surface, nombre de Froude, nombre de Weber.