

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

-
UNIVERSITE FERHAT ABBAS- SETIF
UFAS (ALGERIE)

Thèse de Doctorat d'Etat

Présentée au département d'Electrotechnique
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Pour obtenir le titre

De Docteur d'Etat En Automatique

Par

ABDELAZIZ Mourad

Thème

COMMANDE AUTO ADAPTATIVE

Soutenue le 13/05/2007.....devant la commission d'examen composée de :

MOSTEFAI Mohammed	Prof à l'Université de Sétif	Président
DJAHLI Farid	Prof à l'Université de Sétif	Directeur de thèse
BORNE Pierre	Prof à l'Université de Lille1	Co-Directeur de thèse
KHELLAF Abdelhafid	Prof à l'Université de Sétif	Examineur
GOLEA Noureddine	Prof à l'Université d'Oum El Bouaghi	Examineur
GUESSOUM Abderezek	Prof à l'Université de Blida	Examineur

Avant - Propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire d'Automatique, Département d'Electrotechnique, Faculté des Ingénieurs, Université de Sétif, sous la direction du Professeur Farid DJAHLI du Département d'Electronique, Université de Sétif, et co-direction du Professeur Pierre BORNE de l'Ecole Centrale de Lille, France.

Je tiens à remercier très vivement, Mon encadreur le Professeur Farid DJAHLI, pour son aide précieuse, sa disponibilité et son enthousiasme qu'il a su me communiquer durant ces dernières années.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au Professeur Pierre BORNE, de l'honneur qu'il m'a fait en ayant accepté de co-diriger ce travail.

Je remercie également le Professeur Mohammed MOSTEFAI, Directeur du Laboratoire d'Automatique de Sétif, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury d'examen.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Abdelhafid KHELLAF, Professeur au Département d'Electronique, Université de Sétif, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail malgré son calendrier chargé.

Je suis très honoré que Monsieur Nourredine GOLEA, Professeur d'Automatique, Université d'Oum El Bouaghi, ait accepté d'être examinateur de ce mémoire et je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je tiens à assurer de ma reconnaissance à Monsieur Abderrezek GUESSOUM, Professeur en contrôle, Université de Blida pour l'honneur qu'il me fait de bien vouloir juger cette thèse.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes amis et à tous ceux qui ont contribué à ce travail d'une façon directe ou indirecte, continue ou discontinue.

Résumé

Dans cette thèse, on développe trois méthodes de conception du compensateur avec une synthèse d'un nouveau algorithme adaptatif.

Ce compensateur est utilisé pour augmenter des systèmes intervalles afin d'éviter la condition ASPR requise pour l'application du contrôle adaptatif simple (SAC).

La première méthode est une amélioration d'une méthode qui existe déjà dans la littérature, ceci en utilisant le théorème de Kharitonov.

La deuxième utilise la relation entre la positivité des systèmes et la stabilité, elle utilise les minimums des éléments de la première colonne de la table de Routh.

Pour la troisième méthode, l'incertitude sur les paramètres est ramenée à une dynamique inconnue, ensuite une procédure qui prend en compte cette dernière est appliquée.

Enfin, on présente notre contribution dans ce domaine par la synthèse d'un contrôleur adaptatif permettant d'augmenter la classe des systèmes pouvant être commandé par le MRAC classique.

Des simulations sont faites pour témoigner de la robustesse de chaque méthode développée.

Acronymes Anglophones

- APSR** :Almost Strictly Positive Real
Presque Positive Réelle
- BIBO** :Bounded Input Bounded Output
- CGT** :Command Generator Tracker
Générateur de Commande Pour la Poursuite
- DMRAC**: Direct Model Reference Adaptive Control
- LTI** Linear Time Invariant
Système linéaire stationnaire
- MRC** :Model Reference Control
commande à modèle de référence
- MRAC** :Model Reference Adaptive Control
commande adaptative à modèle de référence
- MIMO** Multi Input Multi Output
système à plusieurs entrées et plusieurs sorties
- PR**: Positive Real
Réelle Positive
- SAC** : Simple Adaptive Control
- SISO** Single Input Single Output
système à une entrée et une sortie
- SPR**: Strictly Positive Real
Strictelement Réelle Positive

Notations

- s variable de Laplace
- R ensemble des nombres réels
- C ensemble des nombres complexes
- J $\sqrt{-1}$
- \bar{z} conjugué du nombre complexe
- I_r matrice identité de dimension r
- I matrice identité avec la dimension définie par le contexte
- 0 matrice nulle avec la dimension définie par le contexte
- Im partie imaginaire d'un nombre complexe, c'est à dire $Im(x + jy) = y$
- Re partie réelle d'un nombre complexe, c'est à dire $Re(x + jy) = x$
- M^T transposée de la matrice M
- $\lambda(M)$ Valeur propre de la matrice
- $\|G(s)\|_\infty$ Norme H_∞ la fonction de transfert $G(s)$
- $P > 0$ P Définie Positive
- $P \geq 0$ P Semi Définie Positive
- Deg degré
- Num Numérateur
- Den Dénominateur
- Min minimum
- Max maximum
- PD proportionnel dérivé
- PID proportionne intégral dérivé

Sup supérieure

SVD(X) Décomposition en valeur singulière de la matrice X
(Singular value decomposition)

NORM(X) est la plus grande valeur singulière de la matrice X, $=\max(\text{svd}(X)) = \sqrt{\max(\lambda(V^T V))}$

Variables utilisées

$$x_p, x_p^*, e_x : (n \times 1)$$

$$u_p, u_p^* : (m \times 1)$$

$$y_p, y_p^*, e_y : (q \times 1)$$

$$x_m : (n_m \times 1)$$

$$u_m : (q \times 1)$$

$$y_m : (q \times 1)$$

$$A_p : (n \times n)$$

$$B_p : (n \times m)$$

$$C_p : (q \times n)$$

$$A_m : (n_m \times n_m)$$

$$B_m : (n_m \times q)$$

$$C_m : (q \times n_m)$$

$$s_p, s_m : (n_s \times 1)$$

$$r_p, r_m : (q \times 1)$$

$$A_s : (n_s \times n_s)$$

$$B_s : (n_s \times m)$$

$$C_s : (q \times n_s)$$

$$z_m, z_p, e_{ya} : (q \times 1)$$

$$S_{11} : (n \times n_m)$$

$$S_{12} : (n \times q)$$

$$S_{21} : (m \times n_m)$$

$$S_{22} : (m \times q)$$

$$\Omega_{11} : (n \times n)$$

$$\Omega_{12} : (n \times q)$$

$$\Omega_{21} : (m \times n)$$

$$\Omega_{22} : (m \times q)$$

$$n_r = q + m + q$$

$$K, \tilde{K}_e : (m, q)$$

$$K_e(t) : (m, q)$$

$$K_x(t) : (m, n_m)$$

$$K_u(t) : (m, q)$$

$$K_r(t) : (m, n_r)$$

$$r(t) = (n_r, 1)$$

$$T_p : (n_r \times n_r) \geq 0$$

$$T_i : (n_r \times n_r) > 0$$

TABLE DES ILLUSTRATIONS

FIGURES

- FIG. 1.1 - Schéma de commande adaptative à modèle de référence
- FIG. 1.2 - Schéma de la commande adaptative indirecte
- FIG. 1.3 - Structure d'un MRAC parallèle
- FIG. 1.4 - Structure d'un MRAC en série
- FIG. 2.1 - Forme générale du MRAC
- FIG. 2.2 - Structure du MRC donnée par l'équation (2.15)
- FIG. 2.3 - Structure du MRC donnée par l'équation (2.19)
- FIG. 2.4 - Configuration du système $G_p(s)$ et des correcteurs ($C(s)$ et $F(s)$) dans le cas idéal
- FIG. 2.5.a - Sorties du système et du modèle
- FIG. 2.5.b - Signal de commande
- FIG. 2.5.c - Vecteur des paramètres : $\theta(t) = \{\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \theta_3(t) \ \theta_4(t)\}$
- FIG. 2.6 - Configuration du système $G_p(s)$ et des correcteurs ($C(s)$ et $F(s)$) avec les incertitudes
- FIG. 2.7 - MRAC en présence de dynamique inconnue et de perturbation bornée à l'entrée
- FIG. 2.8.a - Sorties du système et du modèle pour $\mu = \{0 \ 0.1 \ 0.5\}$
- FIG. 2.8.b - Signal de commande pour $\mu = \{0 \ 0.1 \ 0.5\}$
- FIG. 2.8.c - Vecteur des paramètres ($\theta(t) = \{\theta_1(t) \ \theta_2(t)\}$)
- FIG. 2.9.a - Sorties du système et du modèle pour $\mu = \{0 \ 0.1 \ 0.2\}$
- FIG. 2.9.b - Signal de commande pour $\mu = \{0 \ 0.1 \ 0.2\}$
- FIG. 2.9.c - Vecteur des paramètres ($\theta(t) = \{\theta_1(t) \ \theta_2(t)\}$)
- FIG. 3.1 - Système fictif en boucle fermée
- FIG. 3.2 - Le système fictif SPR
- FIG. 3.3 - Schéma fonctionnel du SAC de base
- FIG. 3.4.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1
- FIG. 3.4.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2
- FIG. 3.4.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3
- FIG. 3.4.d - Sorties du système et du modèle, Cas 4
- FIG. 3.5.a - Signal de commande, Cas 1
- FIG. 3.5.b - Signal de commande, Cas 2
- FIG. 3.5.c - Signal de commande, Cas 3

FIG. 3.5.d - Signal de commande, Cas 4

FIG. 3.6 - Norme d'ordre deux de la de la matrice $K_r(t)$, Cas 4

FIG. 3.7.a - Sorties du système et du modèle (première sortie)

FIG. 3.7.b - Sorties du système et du modèle (deuxième sortie)

FIG. 3.8.a - Signal de commande, (première entrée)

FIG. 3.8.b - Signal de commande, (deuxième entrée)

FIG. 3.9 - Norme d'ordre deux de la de la matrice $K_r(t)$

FIG. 3.10 - Système augmenté (ASPR)

FIG. 3.11 - SAC avec augmentation du système pour éviter la condition ASPR

FIG. 3.12.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

FIG. 3.12.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

FIG. 3.12.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

FIG. 3.13 - Augmentation du système et du modèle de référence

FIG. 3.14.a - Sorties du système et du modèle avec augmentation du système et du modèle de référence, Cas 1

FIG. 3.14.b - Sorties du système et du modèle avec augmentation du système et du modèle de référence, Cas 2

FIG. 3.14.c - Sorties du système et du modèle avec augmentation du système et du modèle de référence, Cas 3

FIG. 3.15.a - Signal de commande, Cas 1

FIG. 3.15.b - Signal de commande, Cas 2

FIG. 3.15.c - Signal de commande, Cas 3

FIG. 4.1.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

FIG. 4.1.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

FIG. 4.1.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

FIG. 4.2.a - Signal de commande, Cas 1

FIG. 4.2.b - Signal de commande, Cas 2

FIG. 4.2.c - Signal de commande, Cas 3

FIG. 4.3.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

FIG. 4.3.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

FIG. 4.3.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

FIG. 4.4.a - Signal de commande, Cas 1

FIG. 4.4.b - Signal de commande, Cas 2

FIG. 4.4.c - Signal de commande, Cas 3

FIG. 4.5.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

FIG. 4.5.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

FIG. 4.5.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

FIG. 4.6.a - Signal de commande, Cas 1

FIG. 4.6.b - Signal de commande, Cas 2

FIG. 4.6.c - Signal de commande, Cas 3

FIG. 4.7.a - Module du vecteur $K_r(t)$, Cas 1

FIG. 4.7.b - Module du vecteur $K_r(t)$, Cas 2

FIG. 4.7.c - Module du vecteur $K_r(t)$, Cas 3

FIG. 4.8 - $|\Delta_{\max}(jw)|$ et $|\mathcal{W}(jw)|$ pour 100 valeurs de la fréquence

FIG. 4.9.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

FIG. 4.9.b - Signal de commande, Cas 1

FIG. 4.9.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 1

FIG. 4.9.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 1

FIG. 4.10.a - Sorties du système et du modèle, Cas 2

FIG. 4.10.b - Signal de commande, Cas 2

FIG. 4.10.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 2

FIG. 4.10.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 2

FIG. 4.11.a - Sorties du système et du modèle, Cas 3

FIG. 4.11.b - Signal de commande, Cas 3

FIG. 4.11.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 3

FIG. 4.11.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 3

FIG. 4.12.a - Sorties du système et du modèle, Cas 4

FIG. 4.12.b - Signal de commande, Cas 4

FIG. 4.12.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 4

FIG. 4.12.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 4

FIG. 4.13 - Représentation du système et du filtre

FIG. 4.14 - Sortie du système et du modèle avec des contraintes

FIG. 4.15 - Signal de commande

FIG. 4.16 - Sorties du système et du modèle, Cas 1

FIG. 4.17 - Sorties du système et du modèle, Cas 2

FIG. 4.18 - Sorties du système et du modèle, Cas 3

FIG. 4.19 - Signal de commande, Cas 1

FIG. 4.20 - Signal de commande, Cas 2

FIG. 4.21 - Signal de commande, Cas 3

TABLEAUX

TAB 3.1 - Résumé du SAC de base

TAB 3.2 - Valeurs nominales et intervalles de variations des paramètres

TAB 3.3 - Les cas considérés pour les simulations

TAB 3.4 - Résumé du SAC, avec augmentation du système

TAB 3.5 - Les cas considérés pour la simulation

TAB 3.6 - Résumé du SAC avec augmentation du système et du modèle

TAB 4.1 - Table de Routh pour le polynôme caractéristique de l'équation (4.29)

TAB 4.2 - Valeurs nominales et intervalles de variations des paramètres

TAB 4.3 - Les cas considérés pour les simulations

TAB 4.4 - Paramètres nominaux et intervalles de variation

TAB 4.5 - Les cas considérés pour les simulations

TAB 4.6 - Paramètres nominaux et intervalles de variation

TAB 4.7 - Les cas considérés pour la simulation

Sommaire

INTRODUCTION.....	13
-------------------	----

CHAPITRE I: LA COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE

I.1 Introduction à la commande adaptative :	16
I.1.1 Définition :	16
I.1.2 Domaine d'application de la commande adaptative :	16
I.1.3 Commande conventionnelle à contre-réaction et commande adaptative. Similarités et Différences :	16
I.1.4 Techniques de commande adaptative :	17
I.2 Systèmes de commande adaptative à modèle de référence :	18
I.2.1 Introduction :	18
I.2.2 Principe de la commande adaptative à modèle de référence :	18
I.2.3 Les avantages de la commande adaptative à modèle de référence :	19
I.2.4 Commande adaptative directe et indirecte :	19
I.2.5 Différents schémas de la commande adaptative à modèle de référence :	20

CHAPITRE II: MARAC BASE SUR L'INCORPORATION D'UN ESTIMATEUR D'ETATS (MRAC STANDARD)

II.1 Introduction :	22
II.2 Concepts mathématiques :	22
II.3 Formulation du MRAC :	24
II.3.1 MRC pour Les systèmes SISO à paramètres connus :	25
II.3.2 Suppositions sur le système :	26
II.3.3 Suppositions sur le modèle de référence :	26
II.3.4 Représentation d'état du système adaptatif :	29
II.4 Modèle paramétrique :	31
II.5 Loi d'adaptation :	33
II.5.1 Loi d'adaptation basée sur la technique du gradient :	34
II.5.2 Méthode du gradient avec projection :	35
Exemple 2.1 :	26
II.6. MRAC robuste :	38
II.7 Performances :	42
Exemples:	34

Simulation 1:	45
Simulation 2:	47
II.8 Conclusion :	50

CHAPITRE III : **CONTROLEUR ADAPTATIF SIMPLE (SAC)**

III.1 Introduction :	51
III.2 Poursuite de sortie du modèle :	51
III.3 Générateur de commande pour la poursuite (CGT) :	52
III.3.1 Système à paramètres invariables :	52
III.3.2 Système à paramètres variables:	55
III.4 Concepts de stabilité et de positivité :	56
III.4.1 Stabilité :	56
III.4.2 Positivité :	57
III.5 Contrôleur adaptatif basé sur le CGT :	60
III.5.1 Analyse de la stabilité :	61
Exemple 3.1 :	63
Exemple 3.2 :	67
III.6 Extension du SAC de base pour éviter la contrainte de positivité :	70
III.6.1 Augmentation du système par un compensateur en parallèle :	70
Exemple 3.3 :	73
III.6.2 Augmentation du système et du modèle de référence :	76
Exemple 3.4 :	79
III.7 Conception du compensateur dans le domaine temporel :	81
III.8. Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel :	82
III.9 Conclusion :	83

CHAPITRE IV : **PROCEDURES DE COMPENSATION DES SYSTEMES
****POUR L'APPLICATION DU SAC******

IV.1 Introduction :	84
IV.2 Conception de compensateur par la méthode de Bar Kana :	84
IV.3 Conception dans le domaine temporel en utilisant le théorème de Kharitonov :	85
IV.3.1 Analyse de la robustesse par le théorème de Kharitonov :	86
IV.3.2 Conception du compensateur :	87
IV.4 Conception du compensateur en utilisant la première colonne de la table de Routh ..	90
IV.5 Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel :	93

IV.6 Résultats de simulations	96
Exemple 4.1 :	96
Exemple 4.2 :	99
Exemple 4.3 :	102
Exemple 4.4 :	106
IV.7 Synthèse d'un contrôleur adaptatif stable pour les systèmes non ASPR:.....	113
IV.7.1 Introduction :	113
IV.7.2 Commande adaptative à modèle de référence:.....	113
IV.7.3 Description du système et du compensateur (filtre) :	115
IV.7.4 Synthèse du compensateur robuste:	116
Exemple 4.5 :	118
Exemple 4.6 :	119
IV.7.5 Conclusion :	121
IV.8 : Conclusion :	122
Conclusion générale :	123
Bibliographie :	124
Annexe A : Les équations du C.G.T dans le cas linéaire continu à paramètres variables :..	130
Annexe B : Démonstration du théorème (III.2) :	131

Introduction

Après la deuxième guerre mondiale et les progrès technologiques considérables qui ont suivi cette tragédie, l'automatique a connu un véritable essor. L'élaboration de lois de commande de systèmes a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. L'application de certaines de ces méthodes à des procédés réels a montré leur efficacité. Les systèmes à commander devenant de plus en plus complexes, les lois de commande deviennent elles-mêmes complexes et parfois difficiles à mettre en oeuvre. En outre, l'obtention d'un modèle précis du procédé devient nécessaire. Les méthodes de modélisation traditionnelles s'avèrent souvent incapables de représenter le comportement global d'un système. L'automaticien est alors confronté à un problème de choix pour la construction d'une loi de commande.

Deux hypothèses de base concernant le procédé sont associées à ces travaux.

La première repose sur le fait que les non-linéarités sont suffisamment importantes pour qu'un contrôleur linéaire ne puisse pas donner d'assez bonnes performances. En effet, si cette hypothèse est effectivement respectée, quel que soit le degré de sophistication des régulateurs conventionnels linéaires, leurs performances sont largement détériorées en présence de variations paramétriques ou de perturbations caractérisant de tels systèmes. L'utilisation d'un unique régulateur linéaire est écartée.

La deuxième hypothèse est basée sur le fait que nous avons à notre disposition un minimum d'informations sur le comportement du système. En fait, nous supposons connaître partiellement le procédé. Nous sommes uniquement en mesure de connaître localement son comportement.

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser à la commande adaptative à modèle de référence.

Le contrôle adaptatif à modèle de référence (MRAC), représente l'une des principales configurations utilisées dans les systèmes adaptatifs. Depuis que les problèmes de stabilité et de robustesse ont été partiellement résolus [45,68] plusieurs chercheurs ont tracé pour objectif, l'amélioration des performances d'une part, et la simplification de conception et d'implantation d'autre part. Les MRAC directs qui existent de nos jours, ont émergé de l'une de trois différentes approches. La première décrite par Landau [45], est basée sur le principe d'accessibilité complète des états du système. Elle suppose que tous les états du système sont mesurables. Cette supposition

est très limitative, car la plupart des systèmes réels ne la vérifient pas. Ce type de MRAC est donc très peu utilisé.

La deuxième approche est basée sur l'intégration d'observateur adaptatif des états du système pour contourner le problème de leur accessibilité. Les MRAC basés sur cette approche, sont pratiquement les contrôleurs adaptatifs les plus utilisés et les plus traités dans la littérature de contrôle adaptatif, ce qui explique son appellation "MRAC standard". Ils ont fait l'objet de plusieurs modifications afin d'améliorer leurs performances. Un passage en revue de la littérature concernant ce domaine [1,32,28,33,6,25,2,74], permet de remarquer que ces modifications sont principalement dédiées à l'amélioration de la robustesse. En plus, la majeure partie d'entre elles, sinon toutes, ne donnent pas une indication sur la façon d'améliorer le régime transitoire, dû à l'erreur initiale sur les paramètres. N'ayant aucune autre alternative, ce problème est souvent résolu par des essais, et dans le meilleur des cas, on conseille d'utiliser une excitation persistante. Récemment, des tentatives ont été faites pour améliorer le régime transitoire [80,51] mais une erreur non nulle en régime permanent a été obtenue.

Une nouvelle méthode de conception du MRAC pour l'amélioration du régime transitoire a été proposée dans [72]. Depuis, le régime transitoire dû à l'erreur initiale sur les paramètres reçoit beaucoup d'intérêts [60,27,64]. La méthode proposée dans [72] consiste à augmenter la loi de contrôle par un terme de compensation. Cette idée d'augmenter la loi de contrôle et non la loi d'adaptation constitue une nouvelle issue pour l'amélioration des performances du MRAC.

La dernière approche, introduite par Sobel et al [71], est basée sur le CGT " Command Generator Tracker " [26]. Le MRAC basé sur cette approche présente des caractéristiques très attirantes. Parmi ces caractéristiques la simplicité (ce qui explique son appellation " Simplified Adaptive Controller " SAC), l'indépendance sur l'ordre du système et la possibilité de contrôler des systèmes qui ne sont pas à phase minimale. Cependant, l'inconvénient majeur de ce MRAC est qu'il exige que le système sous contrôle soit ASPR, c'est-à-dire qu'il existe un gain de retour constant qui stabilise le système en boucle fermée. Cette condition constitue un obstacle pour l'applicabilité de ce MRAC. Alors, elle a été allégée en utilisant un compensateur en parallèle avec le système de telle sorte que le système augmenté soit ASPR [8,9]. Cette méthode n'est devenue efficace qu'après les modifications introduites dans [58, 40], où le modèle est aussi augmenté et non seulement le système. Cependant, un nouveau problème apparaît, c'est qu'il faut concevoir un compensateur qui rend le système augmenté ASPR. Il faut alors mettre au point des méthodes de conception d'un tel compensateur. Dans ce domaine, les résultats présentés dans [10], qui montrent la relation entre la stricte positivité des systèmes et la possibilité de les rendre stables, constituent la théorie de base pour l'établissement de telles méthodes. Ainsi, nous proposons trois méthodes pour la conception du compensateur. Ces méthodes sont dédiées principalement aux systèmes intervalles

(leurs paramètres peuvent varier dans des intervalles connus d'avance) [2,22,3,4,79]. Alors, le compensateur doit assurer que le système augmenté reste ASPR sur tous les intervalles de variations des paramètres.

Ozcelik et Kaufman, [61,62,63], ont développé et appliqué une procédure d'adaptation systématique en utilisant une technique d'optimisation pour les systèmes présentant des incertitudes paramétriques ou fréquentielle dans les cas SISO et MIMO.

Des applications de la commande adaptative à modèle de référence sur des processus industriels et des phénomènes réels comme par exemple le contrôle de l'insuline et la pression cardiaque sont décrites dans les références [41,77,81,16,17].

Barkana [18,19,20,21] a présenté une étude sur la convergence des gains d'adaptation et la positivité des systèmes.

Ce travail est organisé en quatre chapitres :

- Le premier chapitre est consacré à la description de la commande adaptative à modèle de référence et les différents schémas utilisés par les chercheurs.
- Le deuxième chapitre traite la commande MRAC en utilisant les estimateurs.
- Le troisième chapitre présente la théorie inhérente au MRAC basée sur la troisième approche (SAC) et une analyse de la condition de positivité qu'il impose pour son applicabilité.
- Dans le dernier chapitre, nous proposons trois méthodes de conception du compensateur pour répondre à la condition ASPR imposée par le SAC. Ces méthodes sont appliquées à des exemples.

On notera que notre contribution par rapport aux autres chercheurs est l'introduction d'un algorithme adaptatif permettant d'augmenter la classe des systèmes pouvant être commandé par le MRAC classique. Cet algorithme est illustré en chapitre quatre avec des exemples d'application montrant la convergence de l'erreur pour des systèmes présentant des incertitudes paramétriques.

La commande adaptative à modèle de référence

I.1 Introduction à la commande adaptative

I.1.1 Définition

La commande adaptative est un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en ligne et en temps réel des régulateurs des boucles de commande afin de réaliser ou de maintenir un certain niveau de performances quand les paramètres du procédé à commander sont soit inconnus soit/et varient dans le temps [46].

Un système de commande adaptative traite l'écart entre l'indice de performance désiré et celui qui est mesuré dans le système réel. Le mécanisme d'adaptation intervient lors de l'ajustement des coefficients du régulateur afin de réaliser un comportement souhaité du système en boucle fermée.

L'utilisation des systèmes de commande adaptative connaît aujourd'hui un essor certain d'une part à cause de leur complexité raisonnable et d'autre part à cause du développement de micro-processeurs pouvant servir de support pour leur mise en œuvre.

A la question : "Quand faut-il utiliser la commande adaptative ?"

On peut répondre comme suit :

- 1 - Quand c'est techniquement nécessaire.
- 2 - Quand c'est économiquement rentable.

L'adaptation est souhaitable pour les raisons principales :

- 1 - Soit pour affiner au cours du temps le réglage initiale du système de commande.
- 2 - Soit pour tenir compte des variations des paramètres à commander.

I.1.2 Domaine d'application de la commande adaptative

Les principales fonctions des systèmes de commande adaptative sont :

- 1 - La détection de la variation des caractéristiques du système à commander.
- 2- Le maintien des performances du système de commande quand les caractéristique du système à commander changent.
- 3 - La détermination automatique des paramètres optimaux des régulateurs dans les divers points de fonctionnement du système à commander.
- 4 - L'ajustement automatique des paramètres au cours du fonctionnement.
- 5 - La commande de nouveaux procédés technologiques dont les modèles sont connus avec beaucoup d'imprécisions.

I.1.3 Commande conventionnelle à contre-réaction et commande adaptative. Similarités et différences

La question suivante est souvent posée :

Quelle est la différence entre les "systèmes de commande adaptative" et les "systèmes conventionnelles de commande à contre-réaction"?

Les variations non-mesurables et inconnues des paramètres d'un procédé affectent les performances d'un système de commande à contre-réaction utilisant un régulateur à paramètres fixes. Ces variations sont provoquées par des perturbations paramétriques agissant sur le procédé en plus des perturbations agissant sur les variables à réguler.

Nous pouvons donc distinguer deux types de perturbations :

1- perturbations agissant sur les variables à réguler

2- perturbations (paramétriques) agissant sur les performances du système de commande.

La contre-réaction est essentiellement utilisée dans les systèmes de régulation conventionnels pour réduire (ou éliminer) l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler. Pour réaliser ceci, on mesure les variables, on les compare aux valeurs désirées et les différences sont appliquées à l'entrée du régulateur qui engendre la commande appropriée.

Une approche conceptuellement similaire peut être considérée pour le problème du maintien des performances désirées d'un système de commande en présence de perturbations paramétriques. Il faut définir d'abord un indice de performance (I.P.) du système qui est une mesure des performances du système (exp : facteur d'amortissement pour des systèmes caractérisés par une fonction de transfert du deuxième ordre). Il faut après mesurer cet I.P. et le comparer avec le I.P. désiré. L'écart entre l'I.P. désiré et l'I.P. mesuré va être traité par un "mécanisme d'adaptation". La sortie du "mécanisme d'adaptation" va agir sur les paramètres du régulateur ou directement sur le signal de commande afin de modifier d'une manière appropriée les performances du système.

I.1.4 Techniques de commande adaptative

Il existe différents types de schémas destinés à assurer des performances acceptables quand les paramètres du procédé sont inconnus ou varient dans le temps, mais seulement celles qui ont une boucle de contre-réaction sur la mesure de performance sont réellement des schémas de commande adaptative.

Par exemple les systèmes utilisant des régulateurs à "gain-programmé" sont des schémas de commande adaptative en boucle ouverte. On suppose une relation rigide entre certaines variables de l'environnement et les paramètres du procédé. Les valeurs des paramètres du régulateur sont lues dans une table associée aux mesures de l'environnement.

Dans ce schéma, les modifications des performances causées par la modification des paramètres du régulateur ne sont pas mesurées et comparées avec les performances désirées.

Les performances de ces schémas peuvent être catastrophiques si pour une raison ou une autre, les relations entre les mesures de l'environnement et les paramètres dynamiques du procédé changent. A noter néanmoins que ce type de schéma est utilisé avec des résultats satisfaisants dans de nombreuses applications. Il faut aussi souligner que malgré la simplicité du principe, sa mise en œuvre peut être coûteuse car elle peut requérir l'introduction de capteurs additionnels. Par contraste, un système de commande adaptative en boucle fermée ne demande pas des mesures additionnelles mais uniquement une puissance de calcul supplémentaire

I.2 Systèmes de commande adaptative à modèle de référence

I.2.1 Introduction

Parmi plusieurs stratégies de commande adaptative, les systèmes de commande adaptative à modèle de référence (MRAC) jouent un rôle important, leur objectif est de concevoir un modèle de référence qui convient aux performances désirées d'un système en boucle fermée.

La fonction de la commande est d'éliminer toute divergence entre la réponse du modèle et celle du système pour n'importe quel signal d'entrée et les conditions de perturbation (internes ou externes).

I.2.2 Principe de la commande adaptative à modèle de référence

Les systèmes de commande adaptative à modèle de référence ont un schéma de base représenté par la figure. 1.1.

Whitaker H. P (en 1958) [82,78] a proposé un système de commande adaptative à modèle de référence (figure.1.1), largement développé par plusieurs spécialistes. De tels systèmes sont composées par deux boucles fermées : une boucle interne (principale) et l'autre externe.

La boucle interne comprend le système à commander et le régulateur dont les paramètres sont ajustés selon un algorithme établi au niveau de la boucle externe de façon à ce que la différence entre la sortie du modèle de référence et celle du processus soit minimale.

Le modèle de référence doit générer la réponse instantanée désirée $y_m(t)$. Les signaux de sortie de la boucle interne (du système à commander) et de la boucle externe (du modèle de référence) sont comparés et leur différence est utilisée pour concevoir la loi d'ajustement des paramètres du régulateur. Cet ajustement est nécessaire pour compenser les changements externes et internes qui provoquent des déviations des caractéristiques de la boucle interne par rapport à celle du modèle de référence [82,78].

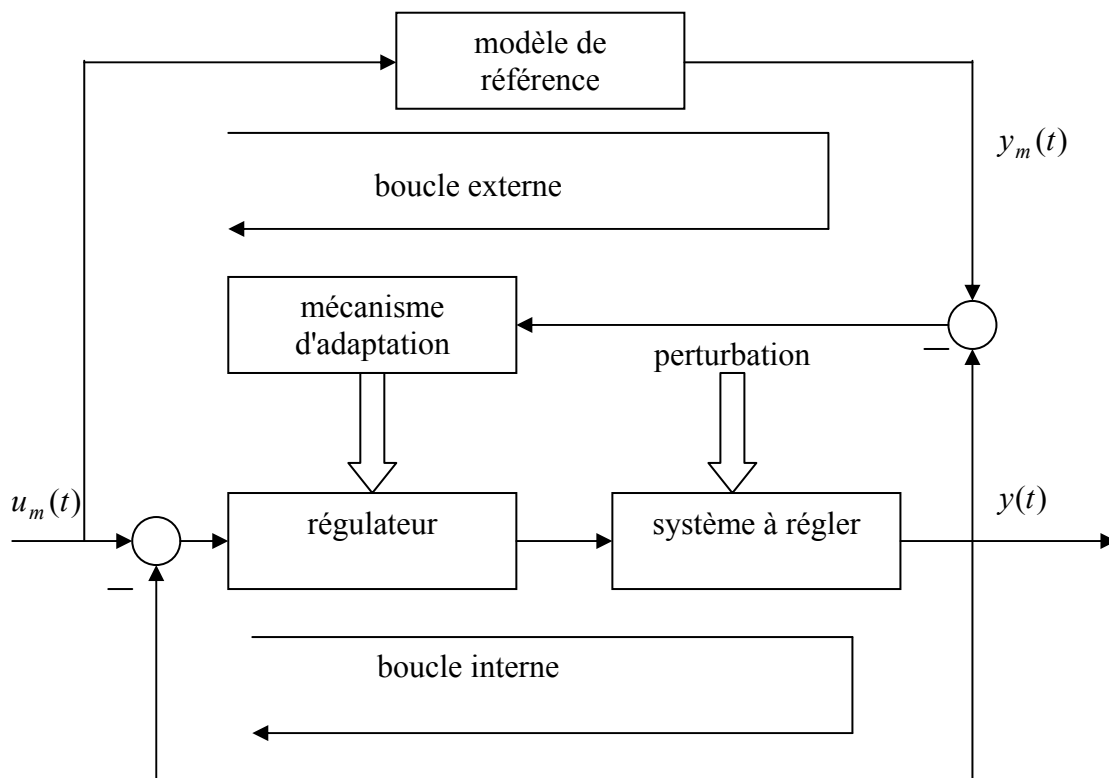


FIG. 1.1 - Schéma de commande adaptative à modèle de référence

1.2.3. Les avantages de la commande adaptative à modèle de référence

L'intérêt suscité de la commande adaptative à modèle de référence par rapport aux systèmes de réglage classique, comprend certains avantages :

- 1-elle assure la stabilité et la qualité de commande pour compenser les variations des caractéristiques du système à commander.
- 2-elle est simple à réaliser.

Par conséquent sa fiabilité est relativement élevée par rapport aux systèmes classiques.

1.2.4 Commande adaptative directe et indirecte

Le schéma de la commande adaptative avec modèle de référence explicite donné (figure 1.1), est un schéma de commande adaptative directe, les paramètres du régulateur étant ajustés en une seule étape.

Dans le schéma de la commande adaptative indirecte (figure.1.2), l'adaptation des paramètres du régulateur se fait en deux étapes :

- 1- estimation des paramètres du modèle du procédé.
- 2- calcul des paramètres du régulateur à partir des paramètres estimés.

La commande se calcule à partir des paramètres estimés des procédés et elle s'applique simultanément au procédé et prédicteur. On déduit que la sortie du prédicteur va se comporter en concordance avec les performances désirées quelles que soient les valeurs des paramètres estimés.

On conclut donc que l'erreur de prédiction devient une mesure de l'écart entre les performances réelles et celles désirées. Dans le cas où les performances désirées sont spécifiées sous la forme d'une fonction de transfert, la commande calculée va assurer l'identité entre la sortie du prédicteur et celle d'un modèle de référence explicite.

La commande adaptative directe est une approche très attrayante en raison de sa simplicité et de l'élimination de certains problèmes numériques associés dans beaucoup de cas aux calculs de la commande à partir des paramètres estimés du procédé [46].

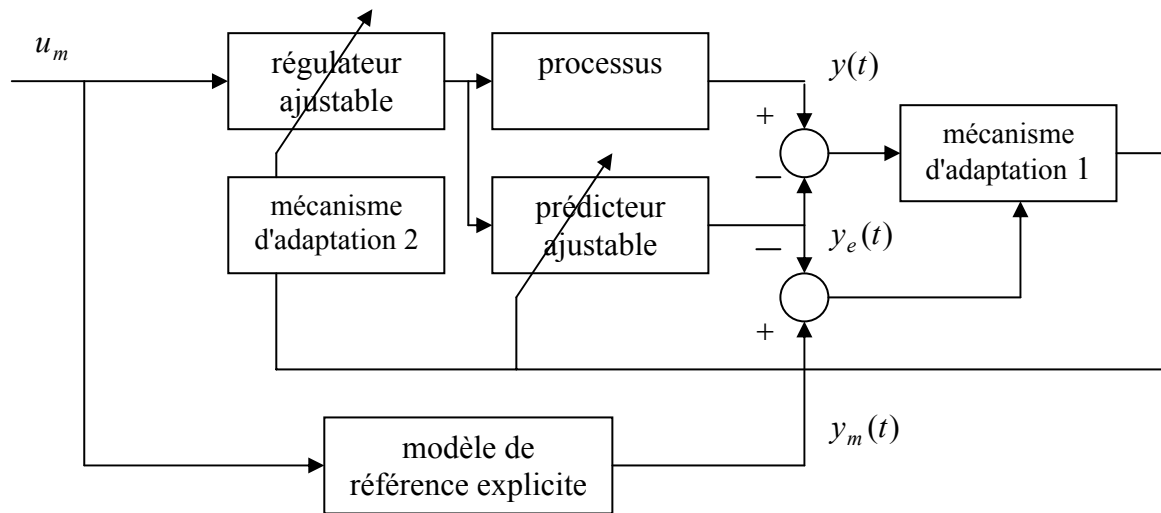


FIG. 1.2 - Schéma de la commande adaptative indirecte

I.2.5 Différents schémas de la commande adaptative à modèle de référence

En plus du schéma de base (figure.1.1), il existe d'autres schémas des M.R.A.C classés suivant plusieurs critères à savoir : la structure, l'indice de performance, le type d'application et le mode d'adaptation.

D'après le premier critère, on distingue deux structures de base des M.R.A.C qui sont :

- 1 - parallèle : est souvent utilisée pour l'asservissement des systèmes (figure.1.3).
- 2 - série : elle trouve une large application en régulation des processus industriels (figure.1.4).

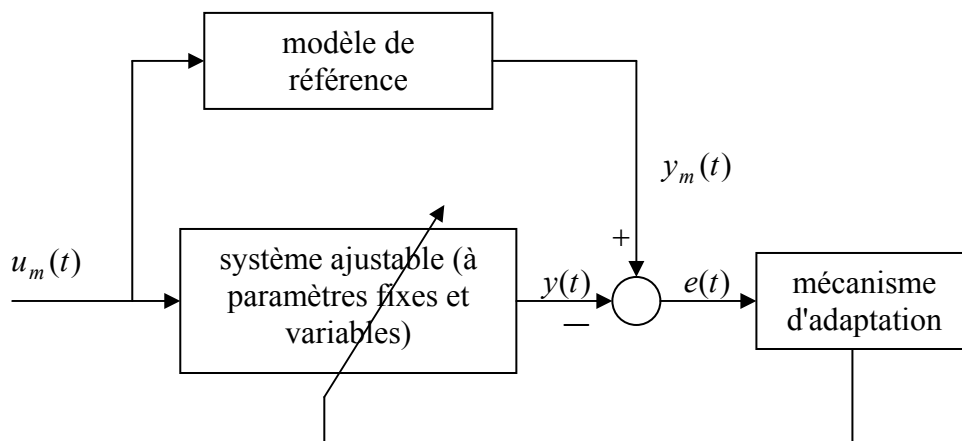


FIG. 1.3 - Structure d'un MRAC parallèle

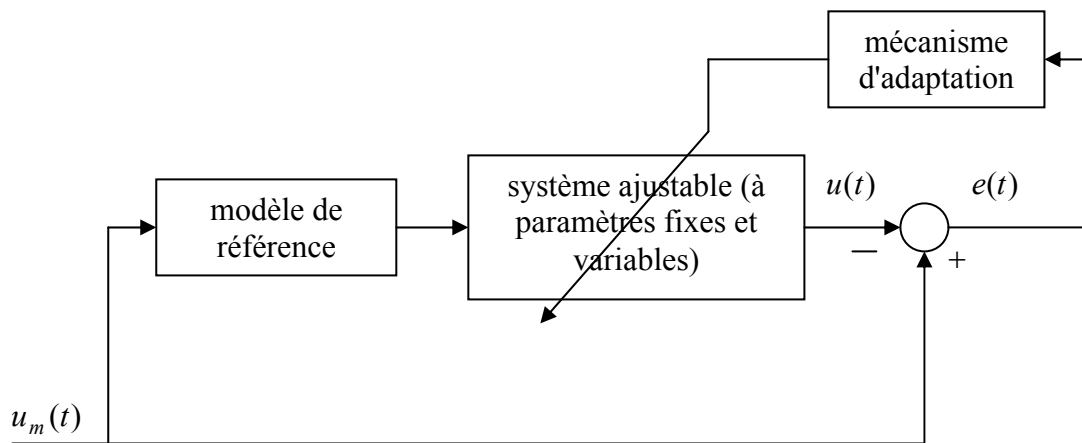


FIG. 1.4 - Structure d'un MRAC en série

MRAC basé sur l'incorporation d'un estimateur d'état (MRAC standard)

II.1 Introduction

Le MRAC traité dans ce chapitre est pratiquement le contrôleur adaptatif le plus utilisé, sa structure de base est présentée sur la figure 2.1. Le modèle de référence est conçu pour générer la trajectoire désirée y_m , que la sortie du système y_p doit suivre. Le système en boucle fermée est formé du système sous contrôle, du contrôleur $C(\theta)$ et du mécanisme d'adaptation qui génère les paramètres θ du contrôleur en-ligne. Selon la structure du contrôleur, et la façon dont les paramètres θ sont définis et générés, il existe plusieurs versions de ce MRAC.

Basé sur la génération des états du système et sur le calcul du contrôleur, de telle sorte que le système en boucle fermée ait la même fonction de transfert que le modèle.

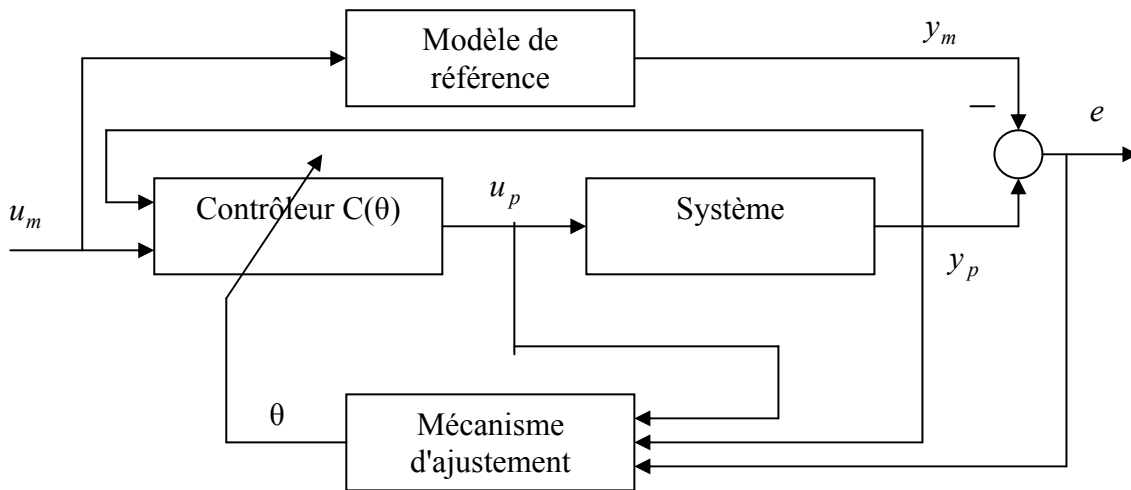


FIG. 2.1 - Forme générale du MRAC

II.2 Concepts mathématiques

Dans cette section, nous allons donner les principaux lemmes et définitions utilisés pour l'analyse du MRAC étudié dans ce chapitre.

Définition (II.1) [33, 23]. Pour un signal $x: [0, \infty[\rightarrow R^n$ et pour $\delta \geq 0, t \geq 0$, la norme L_2 , exponentiellement pondérée du signal x tronqué est donné par :

$$\|x_t\|_2^\delta = \left(\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} [x^T(\tau)x(\tau)] d\tau \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

Quand $t \rightarrow \infty$ et $\delta = 0$, la norme $\|(\cdot)\|_2^\delta$ devient la norme L_2 habituelle et est noté par $\|(\cdot)\|_2$.

Définition (II.2) [23]. Soit $H(s)$ une matrice de transfert dont les composantes sont stables et

propres, alors :

$$\|H(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega} \left| \left\{ \lambda_{\max} \left[H^*(j\omega)H(j\omega) \right] \right\}^{1/2} \right| \quad (2.2.a)$$

où $\lambda_{\max}[\cdot]$ est la plus grande valeur propre (réelle) et H^* est la matrice transposée de la matrice conjuguée de H . $\|(\cdot)\|_{\infty}$ est la norme H_{∞} largement utilisée dans le contrôle robuste.

On définit aussi pour une certaine $\delta \geq 0$

$$\|H(s)\|_{\infty}^{\delta} = \left\| H\left(s - \frac{\delta}{2}\right) \right\|_{\infty} \quad (2.2.b)$$

Définition (II.3) [33]. Considérons le signal $x : [0, \infty[\rightarrow R^n, y : [0, \infty[\rightarrow R^+$, soit

$$S(y) = \left\{ x : [0, \infty[\rightarrow R^n / \int_t^{t+T_p} x^T(\tau)x(\tau)d\tau \leq \int_t^{t+T_p} y(\tau)d\tau + c \right\} \quad (2.3)$$

pour un réel $c \geq 0$ et $\forall t, T_p \geq 0$. On dit que x est y petit si $x \in S(y)$

Lemme (II.1) [1,33]. Soit

$$z = H(s).u_p$$

où $H(s)$ est une matrice de transfert dont les composantes sont propres. Si ces composantes sont analytiques dans $\text{Re}(s) \leq \frac{-\delta}{2}, \delta \geq 0$ et $u \in L_{2e}$, où la norme L_{2e} est donnée par :

$$\|x_t\|_2 = \left(\int_0^t |x(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}$$

alors

$$\|z_t\|_2^{\delta} \leq \|H(s)\|_{\infty}^{\delta} \|u_{pt}\|_2^{\delta} \quad (2.4)$$

où z_t et u_{pt} sont les signaux z et u_p tronqués seulement sur l'intervalle $[0, t[$.

Si en plus les composantes de $H(s)$ sont strictement propres, alors :

$$|z_t| \leq \|H(s)\|_2^{\delta} \|u_{pt}\|_2^{\delta} \quad (2.5)$$

avec

$$\|H(s)\|_2^{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H\left(j\omega - \frac{\delta}{2}\right) \right|^2 d\omega \right\}^{1/2}$$

Lemme (II.2) (Lemme d'échange) [32,33,75]. Soit $\tilde{\theta}_{\omega} : R^+ \rightarrow R^n$. On suppose que $\tilde{\theta}$ est

dérivable. Soit $W(s)$ une fonction de transfert rationnelle, propre et stable, ayant la réalisation minimale (A, B, C, D) , c'est-à-dire :

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.6)$$

alors

$$W(s) \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^T \\ \omega \end{bmatrix} = \tilde{\theta}^T W(s)\omega + W_c(s) \begin{bmatrix} (W_b(s)\omega^T) \tilde{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

où

$$W_c(s) = -C(sI - A)^{-1}, \quad W_b(s) = (sI - A)^{-1}B \quad (2.8)$$

Lemme (II.3) [33,75]. Soit $\tilde{\theta}, \omega : R^+ \rightarrow R^n$ où $\tilde{\theta}$ et ω sont dérivables. Soit $W(s)$ une fonction de transfert rationnelle dont les pôles et les zéros sont stable et dont le degré relatif est n^* , alors :

$$\tilde{\theta}^T \omega = \Lambda_1(s, \alpha) \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}}^T \\ \omega + \tilde{\theta}^T \dot{\omega} \end{bmatrix} + \Lambda_0(s, \alpha) W^{-1}(s) \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^T W(s)\omega + W_c(s) \left[(W_b(s)\omega^T) \tilde{\theta} \right] \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

où les fonctions $W_c(s)$ et $W_b(s)$ sont définies dans le lemme (II.2), et

$$s\Lambda_1(s, \alpha) = 1 - \Lambda_0(s, \alpha) \quad (2.10)$$

$$\Lambda_0(s, \alpha) = \frac{\alpha^{n^*}}{(s + \alpha)^{n^*}}, \quad \alpha > 0 \quad (2.11)$$

en plus, pour α assez grand

$$\|\Lambda_1(s, \alpha)\|_\infty^\delta \leq \frac{c}{\alpha}, \quad \|\Lambda_0(s, \alpha)W^{-1}(s)\|_\infty^\delta \leq c\alpha^{n^*} \quad (2.12)$$

pour $\delta \ll 2\alpha$ et $c \in R^+$

Lemme (II.4) [32]

Si $u_p \in S(\mu)$ pour $\mu \geq 0$, alors $\forall \delta > 0 : \|u_{pt}\|_2^\delta \in L_\infty$

II.3 Formulation du MRC

Nous allons, en premier milieu, formuler le contrôle à modèle de référence (MRC) pour les systèmes dont les paramètres sont connus, ensuite, nous donnons l'extension du (MRC) au cas où les paramètres ne seraient pas connus ou seraient variables dans le temps, en utilisant une loi d'adaptation pour estimer les paramètres du contrôleur.

II.3.1 MRC pour Les systèmes SISO à paramètres connus

Dans le cas général, la conception d'une loi de contrôle n'est pas si directe comme elle le parait. Pour cette raison, nous allons donner le contrôleur à modèle de référence pour les systèmes SISO à paramètres connus exactement. L'extension de solution (MRC) a deux significations.

1. Elle montre qu'étant donné un ensemble de suppositions sur le système et le modèle de référence, il y a une flexibilité structurelle pour atteindre l'objectif du contrôle.
2. Elle donne la forme de la loi de contrôle devant être combinée avec une loi d'adaptation pour former le MRAC dans le cas où les paramètres du système seraient inconnus.

Considérons le système SISO strictement propres et LTI suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u_p \\ y_p &= C_p x_p\end{aligned}\tag{2.13}$$

où $x_p \in R^n$ et $u_p, y_p \in R$. A_p, B_p et C_p ont les dimensions appropriées. La fonction de transfert du système est donnée par :

$$G_p(s) = \frac{y_p(s)}{u_p(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}\tag{2.14}$$

$Z_p(s)$ et $R_p(s)$ sont des polynômes monics et k_p le gain en haute fréquence.

Le modèle de référence choisi par le concepteur pour décrire les caractéristiques désirées du système est donné par l'équation :

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= A_m x_m + B_m u_m \\ y_m &= C_m x_m\end{aligned}\tag{2.15}$$

où $x_m \in R^m$, $u_m, y_m \in R$, A_m, B_m et C_m ont les dimensions appropriées et la commande u_m est une fonction continue par morceaux. La fonction de transfert du modèle de référence est donnée par :

$$W_m(s) = \frac{y_m(s)}{u_m(s)} = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}\tag{2.16}$$

$Z_m(s)$ et $R_m(s)$ sont des polynômes monics et k_m est une constante.

L'objectif du (MRC) est de déterminer l'entrée de contrôle u_p de telle sorte que tous les signaux du système en boucle fermée soient bornés et que la sortie du système y_p suive la sortie du modèle d'une manière raisonnable, ceci pour toute entrée bornée et continue par morceaux u_m .

Dans le but de concevoir une loi de contrôle implémentable et utiliser seulement des grandeurs mesurables, on adopte les suppositions pour le système et le modèle de référence [1,33].

II.3.2 Suppositions sur le système

- S1. $Z_p(s)$ est un polynôme monic et Hurwitz de degré m_p
- S2. Une borne supérieure n_p de $R_p(s)$ est connue.
- S3. Le degré relatif $n_p^* = n_p - m_p$ de $G_p(s)$ est connu.
- S4. Le gain en haute fréquence k_p est connu, cette position peut être allégée à :
- S4'. Le signe de gain en haute fréquence k_p est connu.

II.3.3 Suppositions sur le modèle de référence

- M1. $Z_m(s)$ et $R_m(s)$ sont monic et Hurwitz, de degré q_m et p_m respectivement, ou

$$p_m \leq n_p.$$

- M2. Le degré relatif $n_m^* = p_m - q_m$ de $W_m(s)$ est le même que celui du système $n_m^* = n_p^*$.

La supposition S1 (le système est à phase minimale) est la conséquence de l'objectif de contrôle. Cet objectif est atteint par la conception d'une loi de contrôle qui simplifie les zéros du système et les remplace par ceux du modèle de référence. Ceci pour forcer la fonction de transfert du système en boucle fermée à être la même que celle du modèle de référence. Pour une question de stabilité, cette simplification doit se faire seulement dans le demi-plan gauche.

L'objectif du MRC est atteint si u_p est choisi telle que la fonction de transfert de u_m à y_p ait des pôles stables et soit égale à $W_m(s)$. ($W_m(s)$ est la fonction de transfert du modèle). Une telle égalisation de fonctions de transfert garantit que pour n'importe quel signal $u_m(t)$, la sortie du système converge exponentiellement vers la sortie du modèle.

Considérons la loi de contrôle suivante [32] :

$$\begin{cases} u_p = \theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u_p + \theta_2^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y_p + \theta_3^* y_p + c_0^* u_m \\ \alpha(s) = \alpha_{n-2}(s) = [s^{n-2} \ s^{n-3} \ \dots \ s \ 1]^T & \text{pour } n \geq 2 \\ \alpha(s) = 0 & \text{pour } n = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

$c_0^*, \theta_3^* \in R, \theta_1^*, \theta_2^* \in R^{n-1}$: sont des paramètres constants qui doivent être conçus et $\Lambda(s)$ est un polynôme monic et Hurwitz de degré $n-1$, ayant $Z_m(s)$ comme facteur.

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s)Z_m(s) \quad (2.18)$$

c'est-à-dire que $\Lambda_0(s)$ est un polynôme monic, Hurwitz et de degré $n_0 = n - 1 - q_m$.

Le système en boucle fermée est alors représentée par la figure 2.2.

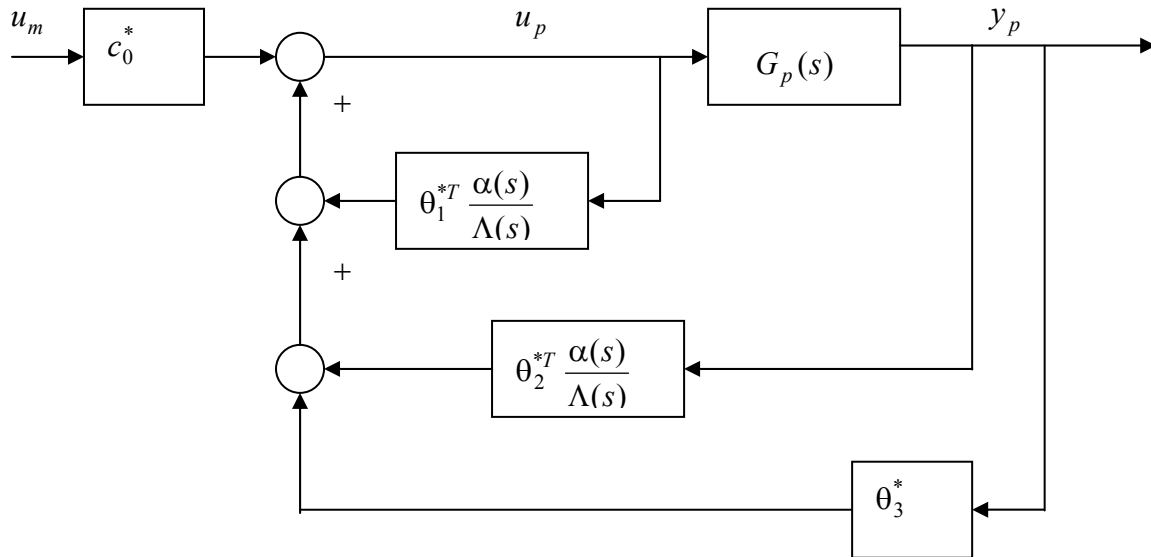


FIG. 2.2 - Structure du MRC donnée par l'équation (2.15)

Le vecteur des paramètres du contrôleur $\bar{\theta}^* = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^*]^T \in R^{2n-1}$ (ou $\theta^* = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^* \quad c_0^*]^T \in R^{2n}$ dans le cas où k_p est inconnu) est à concevoir de telle sorte que la fonction de transfert de u_m à y_p du système, représentée par la figure 2.2, soit égale à $W_m(s)$. C'est-à-dire qu'on peut atteindre l'objectif de contrôle si on choisit θ^* telle que :

$$G_p(s) = \frac{c_0^* k_p Z_p(s) \Lambda^2(s)}{\Lambda(s) [(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) R_p(s) - k_p Z_p(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))]} = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (2.19)$$

Vu que le degré de dénominateur de $G_p(s)$ est supérieur à $R_m(s)$, alors, pour que l'équation (2.19) soit satisfaite, il faut que des simplifications (zéros-pôles) dans $G_p(s)$ soient possible. Ceci est vérifié car $Z_p(s)$ est Hurwitz par supposition et $\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$ est conçue pour être Hurwitz. Tous les zéros de $G_p(s)$ sont à partie réelle négative et toute simplification sera permise. soit

$$c_0^* = \frac{k_m}{k_p} \quad (2.20)$$

et en utilisant l'équation (2.18), c-à-d

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

alors, l'équation (2.19) devient :

$$(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) R_p(s) - k_p Z_p(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s)) = Z_p(s) \Lambda_0(s) R_m(s) \quad (2.21)$$

Le système en boucle fermée de la figure 2.2 peut-être représenté par les équations d'état et de sorties suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= F\omega_1 + gu_p & \omega_1(0) &= 0 \\
\dot{\omega}_2 &= F\omega_2 + gy_p & \omega_2(0) &= 0 \\
u_p &= \bar{\theta}^{*T} \bar{\omega} + c_0^* u_m = \theta^{*T} \omega
\end{aligned} \tag{2.22}$$

avec $\omega_1, \omega_2 \in R^{n-1}$, $\bar{\omega} = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y_p]^T$, $\omega = \begin{bmatrix} \bar{\omega}^T \\ u_m \end{bmatrix}^T$, $\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y_p \ u_m]^T$

$$\bar{\theta}^* = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^*]^T, \quad \theta^* = \begin{bmatrix} \bar{\theta}^{*T} \\ c_0^* \end{bmatrix} = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^* \ c_0^*]^T$$

Les matrices F et g sont données par :

$$F = \begin{bmatrix} -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-3} & \cdots & -\lambda_1 & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les λ_i sont les coefficients du polynôme $\Lambda(s)$ avec

$$\Lambda(s) = s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \lambda_1s + \lambda_0 = \det(sI - F) \tag{2.23}$$

Ainsi, (F, g) est la réalisation d'état du système dont la fonction de transfert est $\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}$

Le bloc diagramme du système en boucle fermée, avec la loi de contrôle donnée par l'équation (2.22), est donné par la figure 2.3.

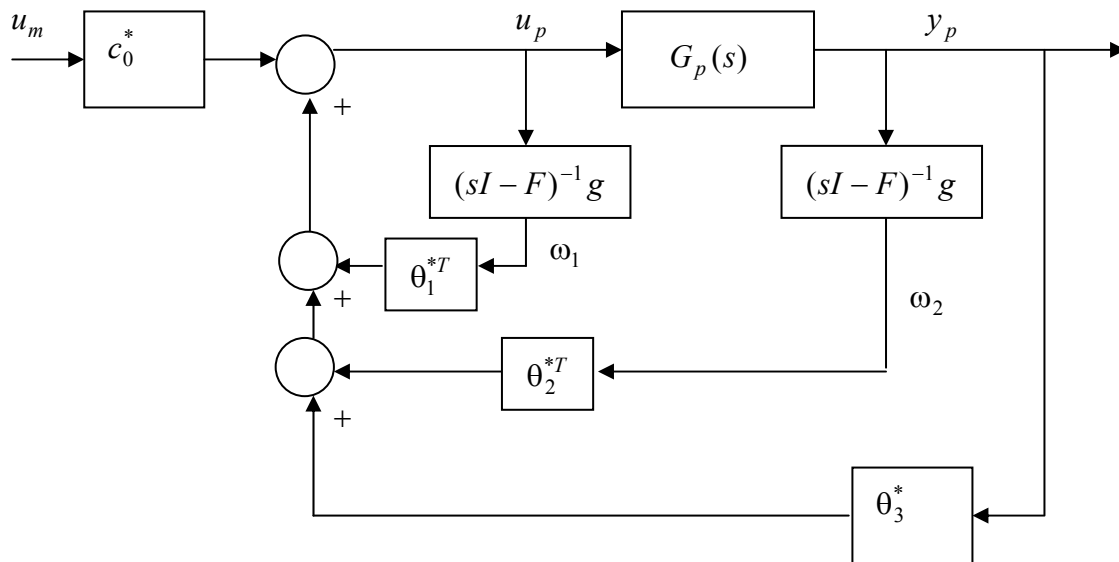


FIG. 2.3 - Structure du MRC donnée par l'équation (2.19)

Le MRC conçu pour contrôler les systèmes dont les paramètres sont connus, sera étendu au cas où les paramètres seraient inconnus. Ceci est effectué en combinant la loi de contrôle du MRC

déjà établie avec une loi d'adaptation pour générer une estimation $\bar{\theta}(t)$ de $\bar{\theta}^*$ (resp $\theta(t)$ de θ^*) en ligne. La conception d'une loi d'adaptation exige le développement d'un modèle paramétrique approprié pour θ^* [32].

En utilisant $\theta(t)$, vecteur des paramètres estimés à l'instant t , au lieu du vecteur θ^* , la loi de contrôle devient :

$$u_p = \theta_1^T(t) \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} [u_p] + \theta_2^T(t) \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} [y_p] + \theta_3^T(t) y_p + c_0(t) u_m \quad (2.24)$$

Quand k_p est connue, $c_0(t)$ est noté tout simplement c_0 .

Les équations d'état de (2.24) sont alors :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= F\omega_1 + gu_p, & \omega_1(0) &= 0 \\ \dot{\omega}_2 &= F\omega_2 + gy_p, & \omega_2(0) &= 0 \\ u_p &= \theta^T(t)\omega \end{aligned} \quad (2.25)$$

II.3.4 Représentation d'état du MRC

Une représentation d'état du système (2.13) et de la loi de commande (2.25) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= A_0 X_c + B_c u_p \\ y_p &= C_c X_c \\ u_p &= \theta^T \omega \end{aligned} \quad (2.26)$$

avec $X_c = [x_p^T \ \omega_1^T \ \omega_2^T]^T$ de dimension $(n_p + 2n - 2 \times 1)$ et

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ gC_p & 0 & F \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} B_p \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [C_p \ 0 \ 0]$$

Si on ajoute et on retranche le terme $B_c \theta^{*T} \omega$ on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= A_0 X_c + B_c \theta^{*T} \omega + B_c (u_p - \theta^{*T} \omega) \\ y_p &= C_c X_c \end{aligned}$$

Sachons que $\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y_p \ u_m]^T$ et $\theta^* = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^* \ c_0^*]^T$, alors l'expression (2.26) devient :

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= A_c X_c + B_c c_0^* u_m + B_c (u_p - \theta^{*T} \omega) \\ y_p &= C_c X_c \end{aligned} \quad (2.27)$$

où A_c est donnée par :

$$A_c = \begin{bmatrix} A_p + B_p \theta_3^* C_p & B_p \theta_1^{*T} & B_p \theta_2^{*T} \\ g \theta_3^* C_p & F + g \theta_1^{*T} & g \theta_2^{*T} \\ g C_p & 0 & F \end{bmatrix}$$

Dans le cas idéal ($u_p = \theta^{*T} \omega$), la fonction de transfert entre u_m et y_p est donnée par :

$$\frac{y_p(s)}{u_m(s)} = \frac{c_0^* k_p Z_p \Lambda}{(\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha) R_p - k_p Z_p (\theta_2^{*T} \alpha + \theta_3^{*T} \Lambda)} = W_m(s)$$

Ce qui implique que :

$$\frac{y_p}{u_m} = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c c_0^* = \frac{c_0^* k_p Z_p \Lambda^2}{\Lambda((\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha) R_p - k_p Z_p (\theta_2^{*T} \alpha + \theta_3^{*T} \Lambda))} = W_m(s) \quad (2.28)$$

Sachons que $C_c (sI - A_c)^{-1} B_c c_0^* = W_m(s)$, le modèle de référence peut être réalisé par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{X}_m &= A_c X_m + B_c c_0^* u_m \\ y_m &= C_c X_m \end{aligned} \quad (2.29)$$

avec X_m de dimension $(n_p + 2n - 2 \times 1)$.

Soit $e_1 = X_c - X_m$ l'erreur sur les états et $e = y_p - y_m$ l'erreur de poursuite des sorties, il s'ensuit des équations (2.27) et (2.28) que :

$$\dot{e}_1 = A_c e_1 - B_c (u_p - \theta^{*T} \omega) \quad (2.30)$$

et

$$e_1 = C_c e \quad (2.31)$$

Puisque $C_c (sI - A_c)^{-1} B_c c_0^* = W_m(s)$, on a :

$$e = W_m(s) \rho^* (u_p - \theta^{*T} \omega) \quad (2.32)$$

où

$$\rho^* = \frac{1}{c_0^*}$$

L'estimé $\hat{e}(t)$ de $e(t)$ basé sur $\theta(t)$, l'estimé de $\theta^*(t)$, est donné par :

$$\hat{e} = W_m(s) \rho (u_p - \theta^T \omega)$$

où ρ est l'estimé de ρ^*

Puisque A_c est une matrice stable, $e(t)$ converge exponentiellement vers zéro. La vitesse de convergence dépend de la position des valeurs propres de la matrice A_c qui sont égales aux pôles de

$$\det(sI - A_c) = \Lambda((\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha)R_p - k_p Z_p (\theta_2^{*T} \alpha + \theta_3^{*T} \Lambda)) = \Lambda(s)\Lambda_0(s)R_m(s)Z_p(s) = 0. \quad \text{On}$$

peut affecter la vitesse de convergence par l'imposition de zéros rapide au polynôme $\Lambda(s)\Lambda_0(s)R_m(s)Z_p(s)$, mais on est limité par la dépendance de A_c sur les zéros de $Z_p(s)$, qui sont fixés par le système.

La figure 2.4 représente la configuration du système $G_p(s)$ et des correcteurs ($C(s)$ et $F(s)$) dans le cas idéal avec :

$$C(s) = \frac{c_0^* \Lambda(s)}{\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)}, F(s) = -\frac{\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s)}{c_0^* \Lambda(s)}$$

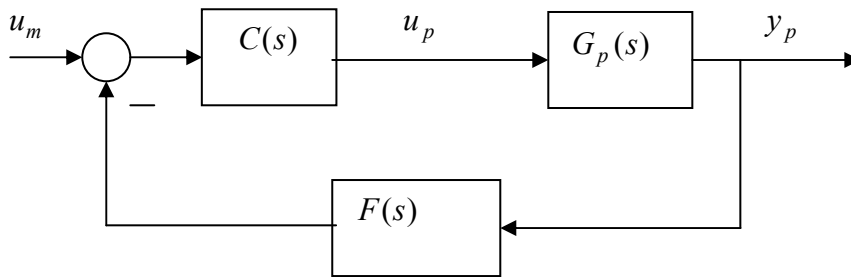


FIG. 2.4 - Configuration du système $G_p(s)$ et des correcteurs ($C(s)$ et $F(s)$) dans le cas idéal

II.4 Modèle paramétrique

La représentation paramétrique a été introduite pour être utilisée par des algorithmes d'estimation des paramètres [67,29]. En contrôle adaptatif, elle est nécessaire pour estimer, soit les paramètres du système, soit ceux du contrôleur en ligne. Ce type de représentation peut être classé en deux catégories principales, la première est le modèle paramétrique linéaire et la deuxième, le modèle paramétrique bilinéaire. L'utilisation de l'un ou l'autre des modèles paramétriques influe sur la formulation de la loi d'adaptation.

Dans le modèle paramétrique linéaire, les paramètres à estimer apparaissent sous une forme linéaire. Ce modèle paramétrique est donné par l'équation suivante :

$$z = W(s) \begin{bmatrix} *^T \\ \theta_x \omega_x + \eta_0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

où

$z \in R$ et $\omega_x \in R^{n_x}$: sont des signaux continus par morceaux et pouvant être mesurés ou calculés à chaque instant.

$W(s)$: est une fonction de transfert propre et stable.

θ_x^* : le vecteur constant et inconnu qui doit être estimé.

η_0 : un signal inconnu dû aux erreurs de modélisation ou aux perturbations.

L'équation (2.33) est appelée modèle paramétrique linéaire.

Le modèle paramétrique bilinéaire est donné par l'équation suivante :

$$z = W(s) \left[\rho^* \begin{bmatrix} *T \\ \theta_x \omega_x + z_0 \end{bmatrix} + \eta_0 \right] \quad (2.34)$$

où z , $W(s)$, θ_x^* , ω_x et η_0 sont ceux déjà définis pour le modèle paramétrique linéaire, $z_0 \in R$ est un signal continu par morceaux et qui peut être mesuré à chaque instant t et ρ^* est une constante inconnue dont le signe est connu.

Pour le problème du MRAC, il faut trouver une représentation paramétrique, dans laquelle les paramètres du contrôleur apparaissent d'une manière linéaire ou bilinéaire. Pour cela, considérant l'équation (2.21) que nous rappelons ici

$$(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) R_p - k_p Z_p (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \Lambda(s) \theta_3^*) = Z_p(s) \Lambda_0(s) R_m$$

Si on remplace $R_p(s)$ de cette équation dans l'équation du système (2.13), on aura alors :

$$G_p(s) = \frac{k_p (\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s))}{\Lambda_0(s) R_m(s) + k_p (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))} = \frac{y_p}{u_p}$$

En développant cette équation et sachant que $\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$ nous obtenons :

$$k_p u_p = k_m W_m^{-1}(s) y_p + k_p \left[\theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u_p + \theta_2^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y_p + \theta_3^* y_p + c_0^* u_m - c_0^* u_m \right]$$

Finalement, nous aurons :

$$e = y_p - y_m = W_m(s) \frac{1}{c_0^*} \left[u_p - \theta^{*T} \omega \right]$$

Soit, en posant $\rho^* = \frac{1}{c_0^*}$

$$e = y_p - y_m = W_m(s) \rho^* \left[u_p - \theta^{*T} \omega \right] \quad (2.35)$$

Cette équation est la représentation paramétrique bilinéaire pour les paramètres du contrôleur du système en boucle fermée.

Une représentation paramétrique linéaire peut être obtenue à partir de la représentation bilinéaire donnée par l'équation (2.35) comme suit :

Puisque

$$\theta^{*T} \omega = \bar{\theta}^{*T} \bar{\omega} + c_0^* u_m$$

$$\text{où } \bar{\theta}^* = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^*]^T \quad \text{et} \quad \bar{\omega} = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y_p]^T$$

On peut écrire l'équation (2.35) comme :

$$W_m(s)u_p = c_0^* e + W_m(s)\bar{\theta}^{*T} \bar{\omega} + c_0^* W_m(s)u_m$$

alors

$$W_m(s)u_p = c_0^* y_p + W_m(s)\bar{\theta}^{*T} \bar{\omega}$$

Cette équation peut être écrite sous la forme :

$$z = \bar{\theta}^{*T} \bar{\phi}_p + c_0^* y_p = \theta^{*T} \phi_p \quad (2.36)$$

$$\text{où } z = W_m(s)u_p, \quad \bar{\phi}_p = [W_m(s)\omega_1^T \ W_m(s)\omega_2^T \ W_m(s)y_p]^T$$

$$\phi_p = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_p^T \\ y_p \end{bmatrix}^T = [W_m(s)\omega_1^T \ W_m(s)\omega_2^T \ W_m(s)y_p \ y_p]^T$$

$$\bar{\theta}^* = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^*]^T, \theta^* = [\bar{\theta}^{*T} \ c_0^*]^T = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^* \ c_0^*]^T$$

L'équation (2.36) est la représentation paramétrique linéaire pour les paramètres du contrôleur du système en boucle fermée.

II.5 Loi d'adaptation

En considérant la loi de contrôle donné par l'équation (2.24) et les modèles paramétriques donnés par les équations (2.35) et (2.36), il reste seulement à établir une loi d'adaptation pour estimer des paramètres du vecteur θ^* . Selon la technique utilisée pour estimer θ^* , les lois d'adaptation peuvent être classées en deux catégories principales [33,25,29,70,65] qui sont les lois d'adaptation basées sur la technique de Lyapunov et les lois d'adaptation basées sur la technique du gradient.

Pour les lois d'adaptation basées sur la technique de Lyapunov, après avoir choisi un modèle paramétrique, on essaye de trouver une fonction de Lyapunov V , ensuite, on choisit une loi d'adaptation (c'est-à-dire une fonction $\hat{\theta}(t)$) de telle sorte que \dot{V} (dérivée de V) soit définie non positive.

Pour la deuxième catégorie, on essaye seulement de trouver une loi d'adaptation qui minimise un critère de performance adéquatement choisi.

II.5.1 Loi d'adaptation basée sur la technique du gradient

Cette loi d'adaptation basée sur le développement d'une équation algébrique de l'erreur et la minimisation d'une certaine fonction de coût $J(\theta, t)$ selon le vecteur des paramètres $\theta(t)$ à chaque instant t . Le modèle paramétrique utilisé est le modèle linéaire donné par l'équation (2.36).

L'utilisation de la méthode du gradient exige le développement d'une équation de l'erreur d'estimation. Cette erreur sera utilisée pour choisir une fonction coût appropriée $J(\theta)$, convexe sur l'espace de $\theta(t)$ à l'instant t . La fonction coût est alors minimisée par rapport à θ en utilisant la méthode du gradient.

L'équation algébrique de l'erreur est développée en utilisant l'équation (2.36), qui donne le modèle paramétrique linéaire pour générer l'estimée $z(t)$ de z^* à chaque instant t , ceci en utilisant $\theta(t)$ au lieu de θ^*

$$z(t) = \theta^T(t)\phi_p, \quad z^* = \theta^{*T}\phi_p$$

Alors, l'erreur d'estimation sera donnée par :

$$e_z = z^* - z(t) = (\theta^{*T} - \theta^T(t))\phi_p \quad (2.37)$$

Cette erreur ne peut pas être utilisée pour générer la fonction coût, car elle peut ne pas être bornée. La loi d'adaptation doit alors garantir que l'erreur soit bornée. Ainsi, nous allons utiliser un signal $m(t)$ pour normaliser cette erreur. Nous parlerons alors de l'erreur d'estimation normalisée, cette erreur sera donnée par :

$$\varepsilon = \frac{z^* - z(t)}{m^2} = \frac{z^* - \theta^T(t)\phi_p}{m^2} \quad (2.38)$$

où $m(t)$ est un signal de normalisation conçu telle que $\frac{\phi_p}{m} \in L_\infty$. Un choix typique de $m(t)$ est :

$$\dot{m}^2 = -\delta_0(m^2 - 1) + u_p^2 + y_p^2 \quad \text{avec} \quad m(0) = 1$$

D'autres choix de $m(t)$ sont possibles. L'erreur d'estimation peut être aussi exprimée en fonction de l'erreur des paramètres comme suit :

$$\varepsilon = \frac{z^* - z(t)}{m^2} = \frac{z^* - \theta^T(t)\phi_p}{m^2} = \frac{(\theta^{*T} - \theta^T(t))\phi_p}{m^2} = -\frac{\tilde{\theta}^T(t)\phi_p}{m^2}$$

avec $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \theta^*$: erreur sur les paramètres

Nous considérons maintenant la fonction du coût quadratique (convexe) suivante :

$$J(\theta) = \frac{\varepsilon^2 m^2}{2} = \frac{(z^* - \theta^T(t)\phi_p)^2}{2m^2} \quad (2.39)$$

Cette fonction doit être minimisée selon le vecteur des paramètres $\theta(t)$. Ceci est possible car la fonction J est convexe. En appliquant la méthode du gradient, le vecteur $\theta(t)$ sera ainsi généré par l'équation :

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla J(\theta)$$

où $\Gamma = \Gamma^T > 0$ est le gain d'adaptation et $\nabla J(\theta)$ est le gradient de $J(\theta)$ par rapport à θ .

$$\nabla J(\theta) = -\frac{(z^* - \theta^T(t)\phi_p)\phi_p}{m^2} = -\varepsilon\phi_p \quad (2.40)$$

Alors, la loi d'adaptation qui génère $\theta(t)$ est donnée par :

$$\dot{\theta} = \Gamma \varepsilon \phi_p \quad (2.41)$$

Théorème (II.1) [32, 33, 29]

La loi d'adaptation (2.40) garantit que :

1. $\varepsilon, \theta, \dot{\theta} \in L_\infty$

2. $\varepsilon, \theta, \dot{\theta} \in L_2$

Ceci, indépendamment, du fait que ϕ_p soit bornée ou non.

3. si ϕ_p ($\phi_p \in L_\infty$) est une excitation persistante alors $\theta(t)$ converge exponentiellement vers θ^* .

Quand k_p est connu, la loi d'adaptation (2.41) garde la même forme et les mêmes caractéristiques. Pour cela, il suffit de remplacer θ par $\bar{\theta}$ et ϕ_p par $\bar{\phi}_p$.

Les performances des lois adaptation, établies pour le cas idéal, sont discutables dans le cas où les perturbations ou des dynamiques inconnues seraient présentes [32, 33, 57,29].

Plusieurs modifications ont été introduites pour améliorer la robustesse des lois adaptation, comme la modification σ [28,57], la modification e [57] etc.

Pour prendre en considération des informations préalables sur les paramètres du système, on introduit plusieurs modifications sur les lois d'adaptation, selon les informations disponibles. Pour le cas des systèmes intervalles, où les paramètres peuvent varier dans des intervalles connus d'avance, on introduit la méthode du gradient avec projection [1,29], qui sera traité dans la prochaine section.

II.5.2 Méthode du gradient avec projection

Pour les problèmes d'estimation ou l'on connaît les régions dans lesquelles les valeurs des paramètres peuvent varier, comme pour le cas des systèmes intervalles, la loi d'adaptation peut être

modifiée de manière à garantir que l'estimée $\theta(t)$ reste toujours dans un domaine convexe C défini comme suit :

$$M_\theta = \{\theta \in R^n / g(\theta) \leq 0\}$$

où $g(\theta) : R^n \rightarrow R$ et $M_\theta^0, \delta(M_\theta)$ sont respectivement l'intérieure du domaine M_θ et la surface qui le limite.

La loi d'adaptation (2.41) peut être modifiée de telle sorte que le vecteur $\theta(t)$ reste toujours dans M_θ . L'idée principale dans cette modification est de choisir $\theta(0) = \theta_0 \in M_\theta$ et de projeter la direction d'adaptation ($\dot{\theta}(t)$ dérivée de $\theta(t)$) de telle sorte que $\theta(t)$ reste dans M_θ dans le cas où $\theta(t) \in \delta(M_\theta)$ et $\theta(t)$ à tendance à sortir de M_θ . Pour cela, il existe plusieurs méthodes, nous nous contenterons de présenter la méthode du gradient avec projection, car pour cette méthode, les propriétés données par le théorème (II.1) restent satisfaites.

Le problème est décrit par :

minimiser $J(\theta)$

soumise à : $\theta \in M_\theta$

La solution à ce problème est donnée par l'équation suivante [32,29] :

$$\dot{\theta} = \text{Pr}(-\Gamma \nabla J) = \begin{cases} -\Gamma \nabla J & \text{si } \theta \in M_\theta^0 \text{ ou } \theta \in \delta(M_\theta) \text{ et } -(\Gamma \nabla J)^T \nabla g(\theta) \leq 0 \\ -\Gamma \nabla J + \Gamma \frac{\nabla g(\theta) \nabla g(\theta)^T}{\nabla g(\theta)^T \nabla g(\theta)} \Gamma \nabla J & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.42)$$

où en utilisant un gain d'adaptation et en développant $\nabla J(\theta)$:

$$\dot{\theta} = \text{Pr}(-\Gamma \nabla J) = \begin{cases} \Gamma \varepsilon \phi_p & \text{si } \theta \in M_\theta^0 \text{ ou } \theta \in \delta(M_\theta) \text{ et } (\Gamma \varepsilon \phi_p)^T \nabla g(\theta) \leq 0 \\ \Gamma \varepsilon \phi_p - \Gamma \frac{\nabla g(\theta) \nabla g(\theta)^T}{\nabla g(\theta)^T \nabla g(\theta)} \Gamma \varepsilon \phi_p & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.43)$$

avec $\Gamma = \Gamma^T > 0$

Pr : Projection

L'équation (2.43) donne la loi d'adaptation basée sur la méthode du gradient avec projection. La combinaison de la loi de contrôle (2.25) et la loi d'adaptation (2.43) donne le contrôleur adaptatif à modèle de référence standard.

Théorème (II.2) [4]

Tous les signaux dans le système en boucle fermée (2.14) commandé par les lois d'adaptation (2.25) et (2.43) sont uniformément bornés et l'erreur de poursuite $e = y_p - y_m$ tend

vers zéro quand t tend vers l'infini.

Exemple 2.1

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode de conception du compensateur par la méthode du gradient.

Le système à contrôler est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_p(s) = \frac{-2(s+5)}{(s-1)^2}$$

Le modèle de référence est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_m(s) = \frac{3}{s+3}$$

L'algorithme de la commande MRAC développée par la méthode du gradient est résumé dans le tableau suivant :

Description du système	$\frac{y_p}{u_p} = G_p(s)$
Description du modèle de référence	$\frac{y_m}{u_m} = G_m(s)$
Paramètres du polynôme caractéristique	$F = -1, g = 1$
Représentation d'état du système et du compensateur en boucle fermée	$\dot{\omega}_1 = F\omega_1 + g.u_p, \omega_1(0) = 0$ $\dot{\omega}_2 = F\omega_2 + g.y_p, \omega_2(0) = 0$
Calcul de la grandeur de commande	$u_p = \theta^T(t).\omega$ avec $\theta(t) = [\theta_1^T(t) \ \theta_2^T(t) \ \theta_3(t) \ c_0(t)]^T$ $\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y_p \ u_m]^T$
Calcul de l'erreur et adaptation des paramètres	$e = y_p - y_m, \dot{\theta} = \Gamma \varepsilon \phi_p$

Tableau 2.1- Algorithme du MRAC par la méthode du gradient

L'entrée de référence est un signal carré d'amplitude $u_m = \pm 1$ et de période 20 secondes

Les figures 2.5.a et 2.5.b représentent la sortie du système et du modèle de référence, ainsi que la grandeur de commande correspondante.

La figure 2.5.c représente l'évolution des paramètres du compensateur et leurs convergence vers des constantes.

On remarque que pour le cas considéré pour la simulation, le compensateur assure un suivi parfait avec une convergence des paramètres.

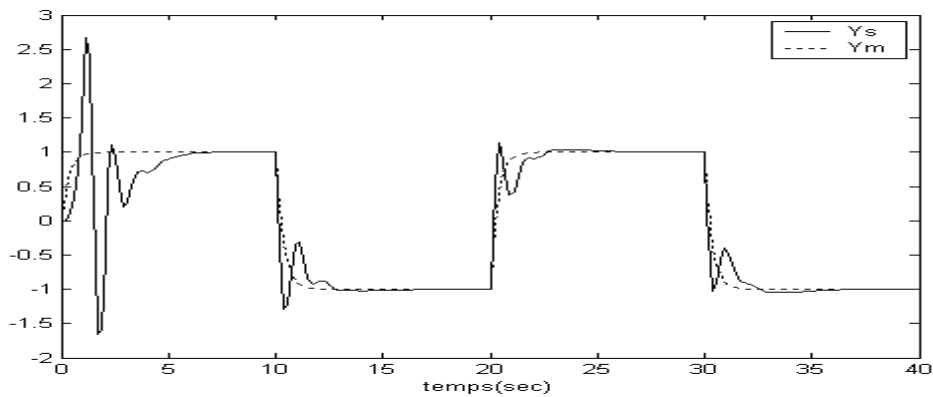


FIG. 2.5.a - Sorties du système et du modèle

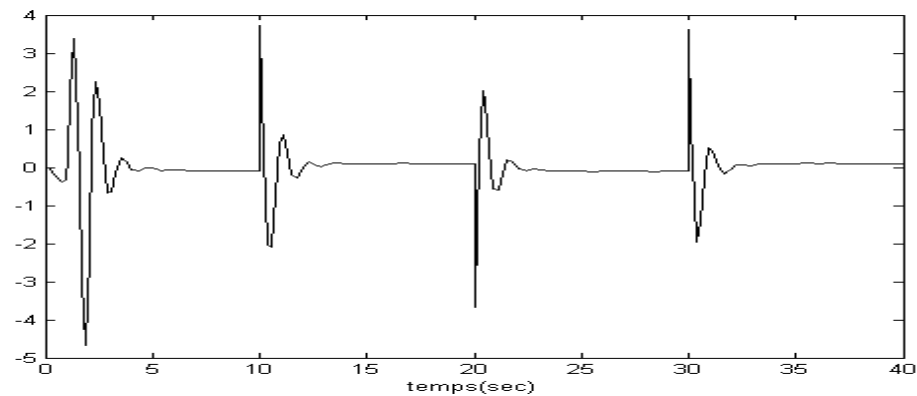


FIG. 2.5.b - Signal de commande

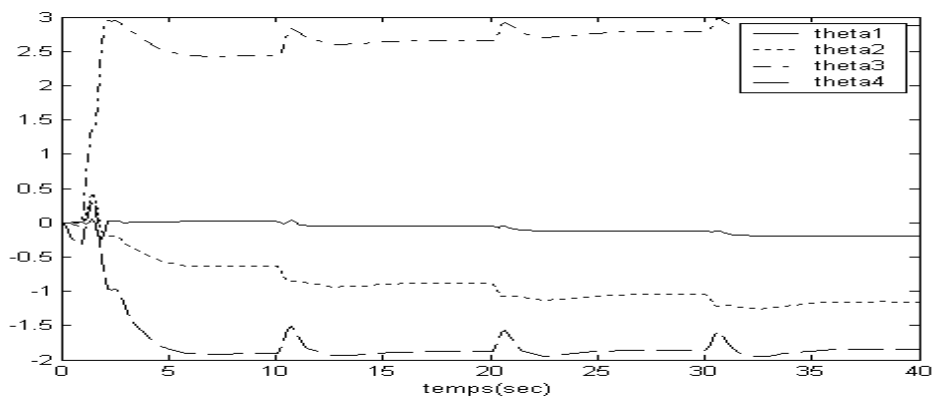


FIG. 2.5.c - Vecteur des paramètres : $\theta(t) = \{\theta_1(t) \theta_2(t) \theta_3(t) \theta_4(t)\}$

II.6 MRAC robuste [33]

Dans la section précédente, nous avons considéré le cas idéal, où ni des perturbations à l'entrée ni des erreurs de modélisation sont présentes. Dans cette section nous allons traiter le cas réel.

Le système sera alors donné par l'équation suivante :

$$y_p = G_0(s)[1 + \Delta_m(s)] \times [u_p + d_u] \quad (2.44)$$

où $G_0(s)$ décrit la partie modélisée du système c-à-d :

$$G_0(s) = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

et vérifie les suppositions S1 à S4 données dans la section (II.3.2).

d_u est une perturbation bornée appliquée à l'entrée et $\Delta_m(s)$ est l'incertitude multiplicative qui vérifie les suppositions suivantes :

D1. $\Delta_m(s)$ est analytique dans $\text{Re}[s] \geq -\frac{\delta_0}{2}$ pour un certain $\delta_0 > 0$

D2. Il existe une fonction de transfert strictement propre $W(s)$, analytique dans

$\text{Re}[s] \geq -\frac{\delta_0}{2}$ telle que $W(s)\Delta_m(s)$ est strictement propre.

Ces deux suppositions assurent que :

$$\Delta_\infty = \|W(s)\Delta_m(s)\|_\infty^{\delta_0} \text{ et } \Delta_2 = \|W(s)\Delta_m(s)\|_2^{\delta_0} \quad (2.45)$$

soient finis. La figure 2.6 représente la configuration du système réel avec les compensateurs $C(s)$ et $F(s)$ comme dans le cas idéal, mais avec l'incertitude multiplicative et la perturbation à l'entrée.

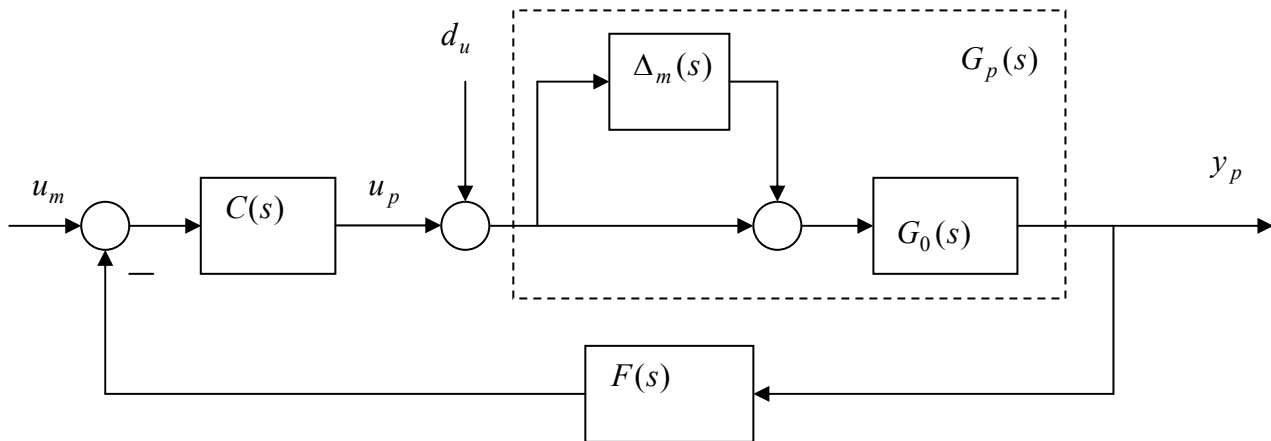


FIG. 2.6 - Configuration du système $G_p(s)$ et des correcteurs ($C(s)$ et $F(s)$) avec les incertitudes

Le système de la figure 2.6, est mis sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C}{1+FCG} & -\frac{FCG}{1+FCG} \\ \frac{CG}{1+FCG} & \frac{G}{1+FCG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m \\ d_u \end{bmatrix}$$

où $G = G_0(1 + \Delta_m)$ est supposé être strictement propre.

Le MRAC utilisé pour ce cas est appelé MRAC robuste, sa procédure de conception est la même que celle pour le cas idéal (sans perturbation et sans dynamique inconnue). Ainsi, on utilise la même loi de contrôle que pour le cas idéal, mais cette fois-ci, les paramètres sont générés par une loi d'adaptation robuste. Cette dernière est basée sur un modèle paramétrique établi pour l'équation (2.44). Les procédures de conception et d'analyse pour ce cas sont similaires à celles du cas idéal.

L'objectif du contrôle est de choisir u_p et satisfaire les bornes pour Δ_∞ et Δ_2 (équation 2.45) de façon à ce que tous les signaux en boucle fermée soient bornés et que la sortie y_p suive la sortie du modèle de référence y_m donnée par l'équation (2.16), c-à-d :

$$y_m = W_m(s)u_m = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} u_m$$

La fonction de transfert $W_m(s)$ du modèle de référence satisfait les suppositions M1 et M2 données dans la section (II.3.3)

La synthèse du contrôle u_p est basée sur le modèle du système avec $\Delta_m(s) = 0$ et $d_u = 0$. Cependant le contrôle est à concevoir pour $\Delta_m(s) \neq 0$ et $d_u \neq 0$.

On commence avec la loi de contrôle donnée par les équations (2.25), développée dans la section (II.3.3) pour le modèle du système avec $\Delta_m(s) \neq 0$ et $d_u \neq 0$, c-à-d

$$u_p = \theta^T \omega \tag{2.46}$$

avec $\theta = [\theta_1^T \ \theta_2^T \ \theta_3 \ c_0]^T$, $\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y_p \ u_m]^T$.

Le vecteur des paramètres θ devra être généré en-ligne par une loi d'adaptation. Les signaux ω_1 et ω_2 (équation 2.25) sont générés par le filtrage de la commande u_p et la sortie y_p . La loi de contrôle (2.46) est robuste par rapport aux incertitudes $\Delta_m(s)$ et d_u si on arrive à trouver une loi d'adaptation appropriée qui tient en compte ces incertitudes.

Afin de trouver cette loi, on procède ainsi :

On écrit le système sous la forme :

$$R_p y_p = k_p Z_p (1 + \Delta_m)(u_p + d_u) \tag{2.47}$$

Et en utilisant l'égalité (2.21), c-à-d :

$$(\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha) R_p - k_p (\theta_2^{*T} \alpha + \Lambda \theta_3^*) Z_p = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{2.48}$$

où $\alpha(s) = \alpha_{n-2}(s) = [s^{n-2} \ s^{n-3} \ \dots \ s \ 1]^T$ (donnée par l'équation (2.17))

De l'équation (2.47) on a :

$$(\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha) R_p y_p = (\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha) k_p Z_p (1 + \Delta_m)(u_p + d_u)$$

qui avec l'équation (2.48) donne :

$$Z_p (k_p (\theta_2^{*T} \alpha + \Lambda \theta_3^*) + \Lambda_0 R_m) y_p = (\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha) k_p Z_p (1 + \Delta_m)(u_p + d_u)$$

Filtrons chaque coté par le filtre stable $\frac{1}{\Lambda Z_p}$ et réarrangeons les termes, on obtient :

$$k_p (\theta_2^{*T} \frac{\alpha}{\Lambda} + \theta_3^*) y_p + \frac{R_m}{Z_m} y_p = k_p u_p - k_p \theta_1^{*T} \frac{\alpha}{\Lambda} u_p + k_p \frac{\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha}{\Lambda} (\Delta_m (u_p + d_u) + d_u)$$

Ou bien

$$(\theta_1^{*T} \frac{\alpha}{\Lambda} u_p + \theta_2^{*T} \frac{\alpha}{\Lambda} y_p + \theta_3^* y_p - u_p) = -\frac{k_m}{k_p} W_m^{-1} y_p + \frac{\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha}{\Lambda} (\Delta_m (u_p + d_u) + d_u)$$

Puisque
$$c_0^* = \frac{k_m}{k_p} \quad (2.49)$$

il s'en suit que :

$$W_m (\theta_1^{*T} \frac{\alpha}{\Lambda} u_p + \theta_2^{*T} \frac{\alpha}{\Lambda} y_p + \theta_3^* y_p - u_p) = -c_0^* y_p + W_m (s) \eta_0 \quad (2.50)$$

avec
$$\eta_0 = \frac{\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha}{\Lambda} (\Delta_m (u_p + d_u) + d_u)$$

est l'erreur de modélisation due aux termes Δ_m et d_u .

Comme dans le cas idéal, l'équation (2.50) peut être écrite sous la forme :

$$W_m (s) u_p = \theta^{*T} \phi_p - \eta \quad (2.51)$$

avec
$$\theta^* = \left[\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^* \quad c_0^* \right]^T, \quad \phi_p = \left[W_m \frac{\alpha^T}{\Lambda} u_p, W_m \frac{\alpha^T}{\Lambda} y_p, W_m y_p, y_p \right]^T$$

$$\eta = W_m (s) \eta_0 = \frac{\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha}{\Lambda} W_m (s) [(\Delta_m (u_p + d_u) + d_u)]$$

L'équation (2.51) est dans une forme linéaire, une autre configuration est obtenue en ajoutant le terme $c_0^* y_m = c_0^* W_m u_m$ des deux cotés de l'équation (2.50), on obtient :

$$W_m (\theta_1^{*T} \frac{\alpha}{\Lambda} u_p + \theta_2^{*T} \frac{\alpha}{\Lambda} y_p + \theta_3^* y_p + c_0^* u_m - u_p) = -c_0^* y_p + c_0^* y_m + W_m (s) \eta_0$$

où

$$W_m (\theta^{*T} \omega - u_p) = -c_0^* e + W_m (s) \eta_0$$

Ce qui conduit à :

$$e = y_p - y_m = W_m(s)\rho^*(u_p - \theta^{*T}\omega + \eta_0) \quad (2.52)$$

avec $\rho^* = \frac{1}{c_0^*}$, $\omega = \left[\frac{\alpha^T}{\Lambda} u_p, \frac{\alpha^T}{\Lambda} y_p, y_p, u_m \right]^T$ qui est dans une forme bilinéaire.

La loi d'adaptation reste inchangée, c'est-à-dire :

$$\dot{\theta} = \Gamma \varepsilon \phi_p \quad (2.53)$$

Les équations (2.16), (2.17), (2.44) et (2.53) définissent la version robuste du MRAC standard.

Une représentation intéressante et utile pour l'analyse du MRAC étudié dans ce chapitre est donnée par la figure 2.7, elle est valable pour le cas idéal en posant $\Delta_m(s) = 0$ et $d_u = 0$.

avec

$$u_p = \theta^T \omega = (\theta^* + \theta - \theta^*)^T \omega = (\theta^* + \tilde{\theta})^T \omega = \theta^{*T} \omega + \tilde{\theta}^T \omega = \theta_1^{*T} \omega_1 + \theta_2^{*T} \omega_2 + \theta_3^* y_p + c_0^* u_m + \tilde{\theta}^T \omega$$

II.7 Performances

D'habitude, les performances exigées des MRAC sont :

1. L'erreur doit tendre vers zéro quand t tend vers l'infini.
2. Tous les signaux en boucle fermée doivent être bornés.

Mais ces deux mesures de performance ne donnent pas une information sur le comportement du signal erreur dans le temps.

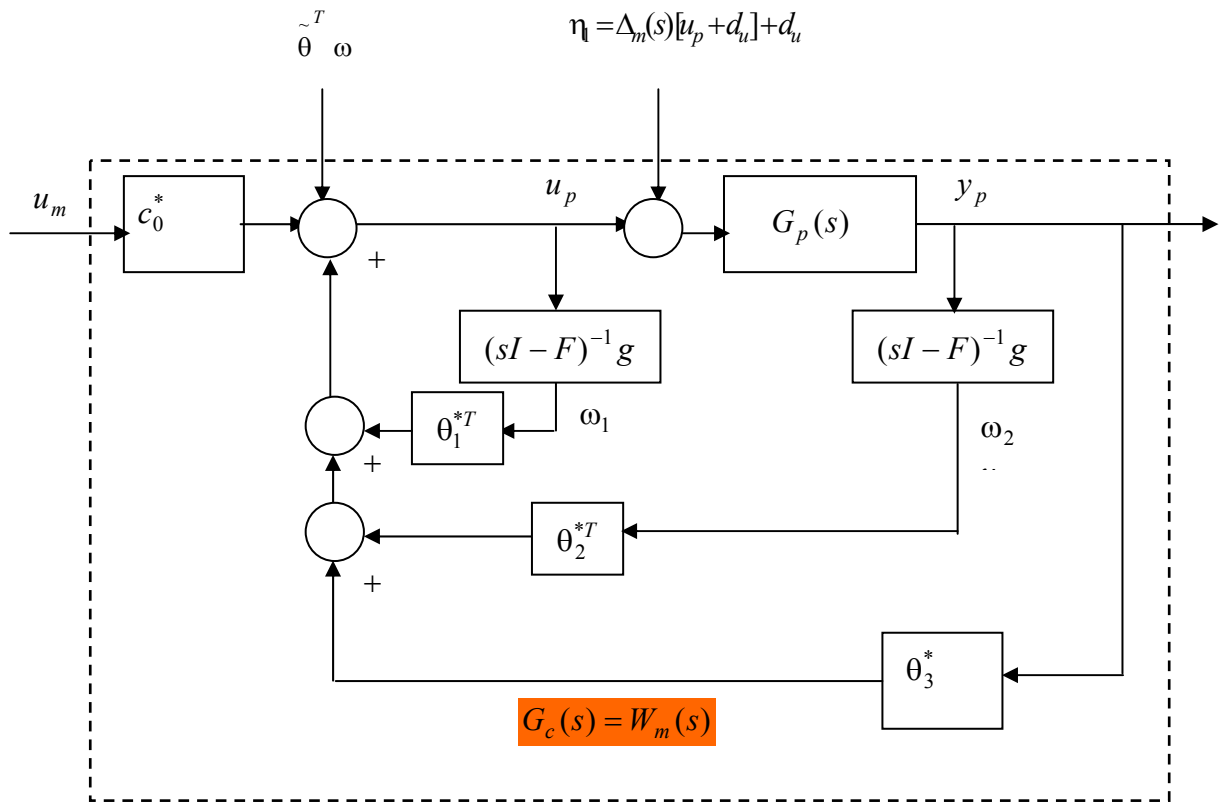


FIG. 2.7 - MRAC en présence de dynamique inconnue et de perturbation bornée à l'entrée

Ainsi, pour pouvoir analyser le comportement dans le temps du signal erreur, deux autres mesures de performances sont utilisées [33,75].

1'. La valeur moyenne du carré de l'erreur (énergie moyenne) donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{t} \int_0^t e^2(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (2.54)$$

2'. La borne L_∞ du signal erreur donné par :

$$\bar{E} = \sup_{t \geq 0} |e(t)| \quad (2.55)$$

Le premier critère donne une information sur l'énergie moyenne du signal erreur, tandis que le deuxième caractérise le comportement dans le temps de ce signal. Ces deux critères sont formulés par le théorème suivant :

Théorème (II.3) [33]

Supposons que $\theta^* = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^* \ c_0^*]^T$ est choisit telle que pour $\Delta_m(s) = 0$, $d_u = 0$, le système en boucle fermée de la figure 2.6 est stable et l'équation $\frac{CG_0}{1+FCG_0} = W_m$ est satisfaite avec

$W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$ est la fonction de transfert du modèle, c-à-d la loi du MRC (équation (2.22))

$$u_p = \theta^{*T} \omega \text{ avec } \theta^* = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^* \ c_0^*]^T \text{ et } \omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y_p \ u_m]^T$$

établi pour le cas idéal et appliquée au système perturbé (2.44).

Si

$$\left\| \frac{\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s)}{\Lambda(s)} \frac{k_p}{k_m} W_m(s) \Delta_m(s) \right\|_\infty < 1 \quad (2.56)$$

Alors le système en boucle fermée (2.44) est stable. En plus, il existe une constante $\delta^* > 0$ telle que pour tout $\delta \in [0, \delta^*]$ l'erreur de poursuite $e = y_p - y_m$ satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow \infty, \tau \geq t} \sup |e(\tau)| \leq \Delta u_{m0} + c d_0 \quad (2.57)$$

avec u_{m0} , d_0 sont les bornes supérieures pour $|u_m(t)|$ et $|d_u(t)|$, $c \geq 0$ est une constante finie.

$$\Delta = \left\| \frac{W_m(s)(\Lambda(s) - C_1^*(s))R_p(s)}{Z_p(s)[k_m \Lambda(s) - k_p W_m(s)D_1^*(s)\Delta_m(s)]} W_m(s) \Delta_m(s) \right\|_\infty^\delta$$

où $C_1^*(s) = \theta_1^{*T} \alpha(s)$, $D_1^*(s) = \theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s)$ et $y_m = W_m(s)u_m$ est la sortie du modèle de référence

Remarque

L'erreur de poursuite $e = y_p - y_m$ est donnée par :

$$e = \frac{W_m \Delta_m}{1 + FCG_0(1 + \Delta_m)} u_m + \frac{G_0(1 + \Delta_m)}{1 + FCG_0(1 + \Delta_m)} d_u \quad (2.58)$$

Donc, pour diminuer l'erreur de poursuite, on devra augmenter le gain FCG_0 tout en respectant l'égalité suivante :

$$(\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha) R_p - k_p Z_p (\theta_2^{*T} \alpha + \theta_3^* \Lambda) = Z_p \Lambda_0 R_m \quad (2.59)$$

En utilisant l'équation (2.59), c-à-d :

$$(\Lambda - C_1^*) R_p - k_p Z_p D_1^* = Z_p \Lambda_0 R_m \text{ avec } C_1^* = \theta_1^{*T} \alpha, D_1^* = \theta_2^{*T} \alpha + \theta_3^* \Lambda$$

on peut sélectionner $\Lambda(s)$ et $W_m(s)$ afin de minimiser la norme H_∞ dans la borne L_{2e} de e , c-à-d :

$$\|e\|_2 \leq \left\| \frac{W_m \Delta_m}{1 + FCG_0(1 + \Delta_m)} \right\|_\infty \|u_m\|_2 + \left\| \frac{G_0(1 + \Delta_m)}{1 + FCG_0(1 + \Delta_m)} \right\|_\infty \|d_u\|_2 \quad (2.60)$$

sous la contrainte de l'égalité (2.59).

Exemples

Soit le système

$$y = \frac{1}{s + a} (1 + \Delta_m(s)) u_p = G_p(s) u_p \quad (2.61)$$

où $G_p(s)$ est la fonction de transfert strictement propre du système réel et $\Delta_m(s)$ est l'incertitude multiplicative. L'objectif est de choisir u_p telle que tous les signaux sont stable et la sortie du système y_p suit la sortie du modèle de référence donné par :

$$y_m = \frac{b_m}{s + a_m} u_m \text{ avec } a_m > 0, b_m > 0$$

Le système (2.61) peut être modélisé par :

$$y = \frac{1}{s + a} u_p \quad (2.62)$$

La loi du MRC basée sur (2.62) est donnée par :

$$u_p = \theta^* y + b_m u_m$$

avec $\theta^* = a - a_m$ satisfait l'objectif de la poursuite pour le modèle du système (2.62).

La boucle fermée est donnée par :

$$y = \frac{b_m(1 + \Delta_m(s))}{s + a_m - \theta^* \Delta_m(s)} u_m$$

L'équation caractéristique est donnée par :

$$s + a_m - \theta^* \Delta_m(s) = 0 \quad \text{où} \quad 1 - \frac{\theta^* \Delta_m(s)}{s + a_m} = 0$$

Puisque $\frac{\theta^* \Delta_m(s)}{s + a_m}$ est strictement propre avec des pôles stables, il s'ensuit du critère de Nyquist que la condition suffisante de stabilité du système en boucle fermée est que $\Delta_m(s)$ vérifie :

$$\left\| \frac{\theta^* \Delta_m(s)}{s + a_m} \right\|_{\infty} = \left\| \frac{(a - a_m) \Delta_m(s)}{s + a_m} \right\|_{\infty} < 1 \quad (2.63)$$

L'erreur de poursuite $e = y_p - y_m$ vérifie :

$$e = \frac{b_m}{s + a_m} \frac{(s + a_m + \theta^*)}{(s + a_m - \theta^* \Delta_m(s))} \Delta_m(s) u_m$$

Puisque $u_m \in L_{\infty}$ et la fonction de transfert $\frac{e(s)}{u_m(s)}$ possède des pôles stables pour tout Δ_m vérifiant (2.63), on a alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty, \tau \geq t} \sup |e(\tau)| \leq \Delta u_{m0}$$

avec

$$|u_m(t)| \leq u_{m0} \text{ et } \Delta = \left\| \frac{b_m}{s + a_m} \frac{(s + a_m + \theta^*)}{(s + a_m - \theta^* \Delta_m(s))} \Delta_m(s) \right\|_2^{\delta}$$

en plus

$$\|e_t\|_2 \leq \left\| \frac{b_m \Delta_m (1 + \frac{\theta^*}{s + a_m})}{(s + a_m)(1 - \theta^* \frac{\Delta_m}{s + a_m})} \right\|_{\infty} \|u_m\|_2$$

et donc, plus le terme $\left\| \frac{\Delta_m}{s + a_m} \right\|_{\infty}$ est petit, plus la stabilité marginale est grande et plus l'erreur de poursuite est performante.

Considérons le cas où $\Delta_m(s) = -\frac{2\mu s}{1 + \mu s}$ avec $\mu > 0$ est petite, cette incertitude provient du système réel

$$y_p = \frac{1 - \mu s}{(s + a)(1 + \mu s)} u_p = \frac{1}{(s + a)} \left(1 - \frac{2\mu s}{1 + \mu s}\right) u_p \quad (2.64)$$

Pour cette $\Delta_m(s)$, la condition (2.63) devient :

$$\left\| \frac{(a - a_m) 2\mu s}{s + a_m 1 + \mu s} \right\|_{\infty} < 1$$

qui est satisfaite pour

$$\mu < \frac{1}{2|a - a_m|}$$

Et donc, si $\mu \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty, \tau \geq t} \sup |e(\tau)| \rightarrow 0$

Simulation 1

Pour la première simulation, on prend $a = 2, a_m = 3, b_m = 3, u_m = 1$, c-à-d le système réel

est donné par :

$$y = \frac{1}{s+2}(1 + \Delta_m(s))u_p = G_p(s)u_p,$$

le modèle de référence est donné par

$$y_m = \frac{3}{s+3}u_m.$$

L'entrée est un signal carré d'amplitude $u_m = \pm 1$ et de période 20 secondes. La perturbation Δ_m est donnée par :

$$\Delta_m(s) = -\frac{2\mu s}{1 + \mu s}.$$

Pour différentes valeurs de μ ($\mu = 0.5, \mu = 0.1, \mu = 0$), on a relevé les courbes suivantes :

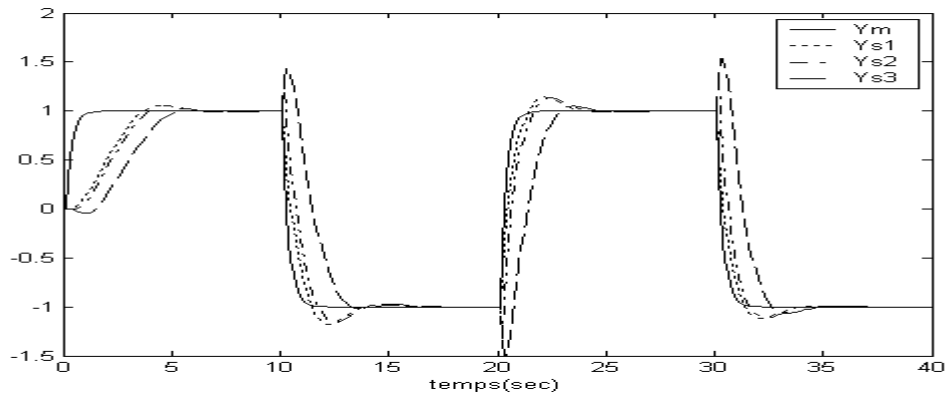


FIG. 2.8.a - Sorties du système et du modèle pour $\mu = \{0 \ 0.1 \ 0.5\}$

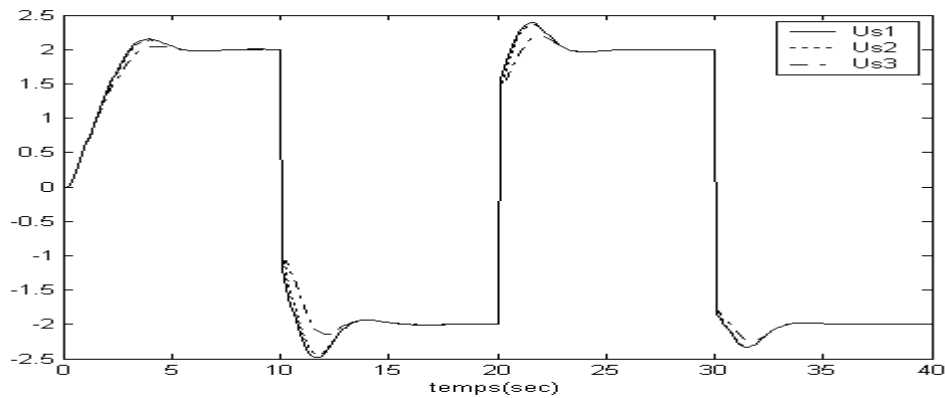


FIG. 2.8.b - Signal de commande pour $\mu = \{0 \ 0.1 \ 0.5\}$

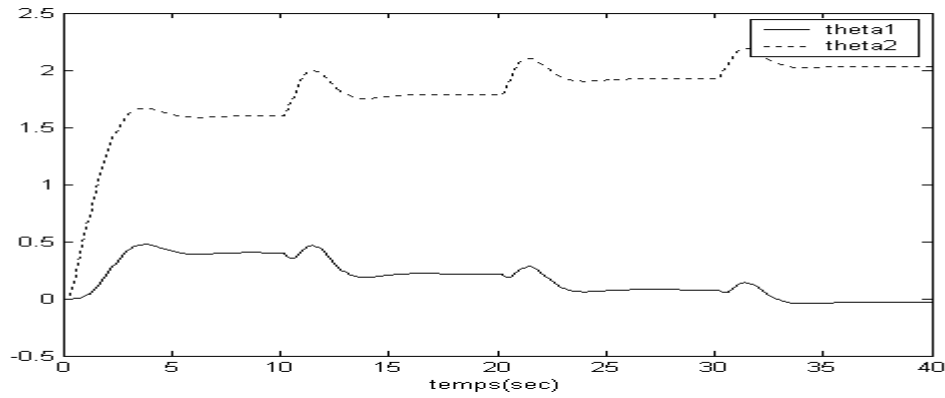


FIG. 2.8.c - Vecteur des paramètres ($\theta(t) = \{\theta_1(t) \theta_2(t)\}$)

On voit d'après ces courbes qu'à chaque fois que μ diminue, la perturbation disparaît, et le système se rapproche du système réel sans perturbation et la commande s'approche de la commande idéale.

$$\text{si } \mu \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0, \lim_{t \rightarrow \infty, \tau \geq t} \sup |e(\tau)| \rightarrow 0$$

Simulation 2 Pour la deuxième simulation, on prend le même système et la même perturbation que le cas précédent, c-à-d :

$$y = \frac{1}{s+2}(1 + \Delta_m(s))u_p = G_p(s)u_p, y_m = \frac{3}{s+3}u_m \text{ et } \Delta_m(s) = -\frac{2\mu s}{1 + \mu s}$$

ce qui change c'est la grandeur de commande u_p .

Au niveau de la simulation 1, la grandeur de commande a été calculée par la loi du MRC, $u_p = \theta^{*T} \omega$ (voir équation (2.22)), mais au niveau de la simulation 2, la grandeur de commande est donnée par $u_p = \theta^T \omega$ avec $\theta(t)$ adaptée suivant la formule déjà vue auparavant, c-à-d: $\dot{\theta} = \Gamma \varepsilon \phi_p$.

L'entrée est un signal carré d'amplitude $u_m = \pm 1$ et de période 30 secondes.

Pour différentes valeurs de μ ($\mu = 0.2, \mu = 0.1, \mu = 0$), on a relevé les courbes suivantes :

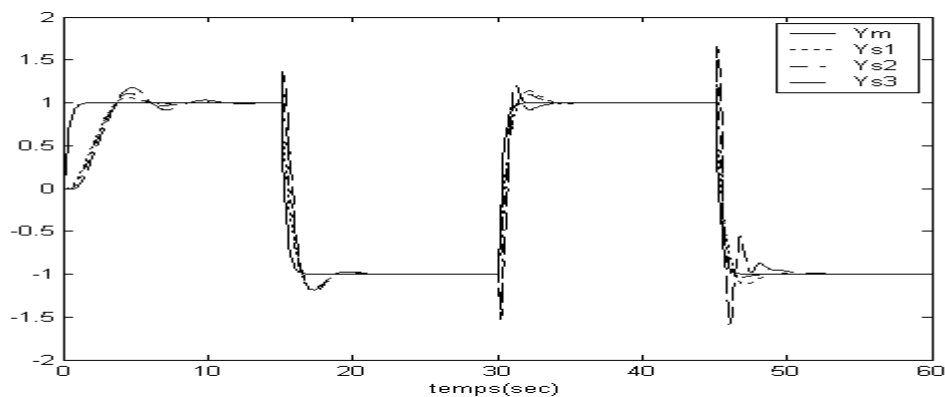


FIG. 2.9.a - Sorties du système et du modèle pour $\mu = \{0 \ 0.1 \ 0.2\}$

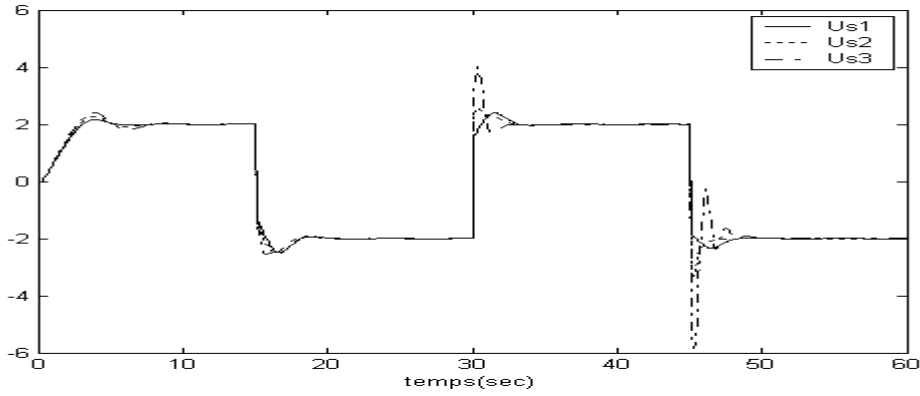


FIG. 2.9.b - Signal de commande pour $\mu = \{0 \ 0.1 \ 0.2\}$

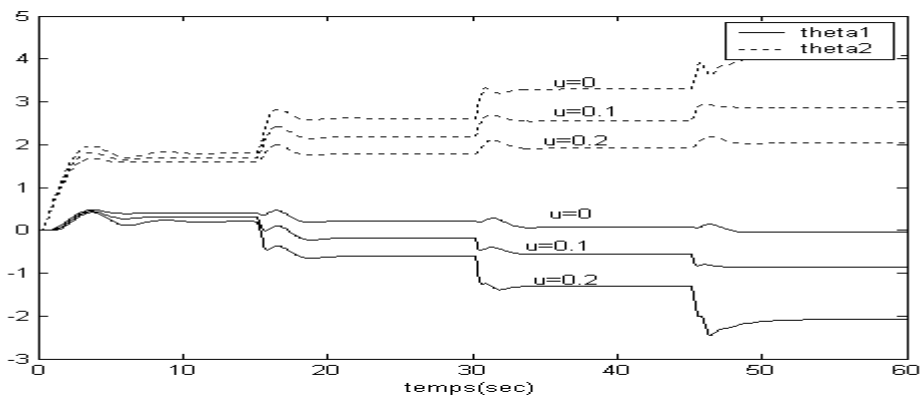


FIG. 2.9.c - Vecteur des paramètres ($\theta(t) = \{\theta_1(t) \ \theta_2(t)\}$)

On voit bien que le vecteur des paramètres θ se stabilise à une constante et sa valeur finale dépend de la grandeur μ .

Pour $\mu \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$, la perturbation disparaît, et le système se rapproche du système réel sans perturbation et la commande s'approche de la comande idéale. Pour des valeurs de μ supérieurs à 0.2, le système devient instable.

Théorème (II.4) [33]

Considérons le système en boucle fermée donné par les équations (2.14), (2.25), alors, $\forall t > 0$, l'erreur $e = y_p - y_m$ satisfait :

$$\frac{1}{t} \int_0^t e^2(\tau) d\tau \leq c \left[\frac{1}{\alpha^2} (\bar{m}^2 + 1) + \alpha^{2n^*} \bar{m}^2 \frac{|\tilde{\theta}(0)|^2}{t} \right] \quad (2.65)$$

où \bar{m} est une borne supérieure du signal $m(t)$, c'est-à-dire $m(t) \leq \bar{m}$, $\forall t \geq 0$.

$\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \theta^*$ est l'erreur sur les paramètres, $\alpha > 0$ est une constante arbitraire très grande et $c > 0$ est une constante positive dont la valeur n'est pas intéressante.

On a aussi :

$$\sup |e(t)| \leq c\bar{m} \quad (2.66)$$

où c dépend du choix du modèle de référence, des filtres et du domaine M_θ dans lequel varient les paramètres.

Le théorème (II.4) donne une information sur le comportement dans le temps du signal erreur (sa borne L_∞ et son énergie moyenne). On voit de l'équation (2.65) que la valeur moyenne du carré de ce signal est affectée par $\tilde{\theta}(0)$ (L'erreur initiale sur les paramètres). Alors, une valeur de

$|\tilde{\theta}(0)|$ très grande donne une énergie moyenne $E(t)$ très grande, surtout durant les premières étapes

d'adaptation, car quand t augmente, l'effet de $\tilde{\theta}(0)$ sur l'énergie moyenne du signal erreur diminue. Ceci se manifeste par une mauvaise réponse en régime transitoire (qui est une caractéristique des contrôleurs adaptatifs), observée assez souvent en simulations quand l'erreur initiale sur les paramètres $\tilde{\theta}(0)$ est très grande. D'autre part l'équation (2.66) donne une borne uniforme sur l'erreur de poursuite $e(t)$, ($e(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$). Cette borne peut devenir conservatrice surtout pour t grand. Cependant, elle donne une limite sur les oscillations qui peuvent être rencontrées durant la phase initiale (régime transitoire).

On voit que, ni l'équation (2.65), ni l'équation (2.66) ne donne une information sur la manière dont le comportement du signal erreur sera amélioré. Si une bonne information préalable sur le vecteur θ^* est disponible, alors on peut choisir $\theta(0)$ très proche de θ^* telle que $\tilde{\theta}(0)$ soit assez petite. Ceci donnera une énergie moyenne $E(t)$ petite. Une erreur initiale petite sur le vecteur des paramètres $\tilde{\theta}(0)$ donnera une borne supérieure sur le signal de normalisation \bar{m} petite. Elle donnera, par conséquent un comportement transitoire meilleur. Cependant, l'intérêt du contrôle adaptatif apparaît surtout, quand l'incertitude sur les paramètres est très élevée.

Ce comportement de l'erreur de sorties due à l'erreur initiale sur les paramètres ou tout simplement à l'état initial $\theta(0)$ du vecteur des paramètres, est appelé régime transitoire. Il ne faut pas confondre ce régime transitoire avec celui dû aux états initiaux du système, du modèle de référence et des filtres, car celui-ci est un problème de tout le contrôle et non seulement celui du contrôle adaptatif.

II.8 Conclusion

Sous certaines conditions, parmi lesquelles le système doit être à phase minimale, le MRAC standard donne un système en boucle fermée stable et dont la robustesse peut être amélioré en utilisant les modifications adéquates. Cependant, ce MRAC devient de plus en plus complexe si l'ordre du système augmente. En plus, si l'incertitude initiale sur les paramètres est élevée, les performances de ce MRAC seront médiocres ou même inacceptables. En l'absence de solution à ce problème, l'ajustement des valeurs initiales des paramètres par des essais est le seul choix disponible pour le concepteur.

Ainsi, et avec ces contraintes, la complexité du MRAC standard sera difficilement justifiée par ses performances. Ce qui le rend non compétitif avec les autres stratégies de contrôle dont les systèmes experts ou même avec les autres MRAC. D'autres améliorations des performances doivent alors être explorées, par exemple, le régime transitoire dû au choix des paramètres initiaux.

Contrôleur Adaptatif Simple (SAC)

III.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons analyser le contrôleur adaptatif direct à modèle de référence présenté sous sa forme originelle par Sobel et al. [71]. Ce type de MRAC présente par rapport aux autres MRAC les avantages suivants :

1. Les conditions suffisantes pour assurer la stabilité et une poursuite asymptotique sont indépendantes de l'ordre du système.
2. Le calcul des entrées de contrôle n'impose ni l'utilisation d'un observateur, ni un retour d'états, en plus, le nombre des paramètres adaptativement ajustés, ne dépend pas de l'ordre du système
3. Facilité d'implantation par rapport aux autres MRAC.
4. Une validation expérimentale réussie [7,11, 12, 16,17,41,42 ,77,81].
5. Applicabilité directe aux systèmes multi-entrées multi-sorties (MIMO).

Ce MRAC est basé sur le principe de poursuite de sortie du modèle, mais pas celle des états, il présente une extension au cas adaptatif du générateur de commande pour la poursuite "Command Generator Tracker CGT " présenté dans [26].

A cause de la simplicité d'implantation qu'il présente et de l'indépendance du nombre de paramètres devant être ajustés sur l'ordre du système, ce contrôleur adaptatif est appelé "Simplified Adaptive Controller, (SAC)".

III.2 Poursuite de sortie du modèle

Le problème de contrôle linéaire à modèle de référence est résolu pour l'équation de processus linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $x_p(t)$ est le vecteur d'état de dimension $(n \times 1)$, $u_p(t)$ est le vecteur de contrôle de dimension $(m \times 1)$, $y_p(t)$ est le vecteur de sortie de dimension $(q \times 1)$. A_p , B_p et C_p sont des matrices de dimension appropriée. Le rang de variation des paramètres est supposé borné comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{a}_{ij} \leq a_p(i, j) \leq \bar{a}_{ij}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots n \\ \underline{b}_{ij} \leq b_p(i, j) \leq \bar{b}_{ij}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots m \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $a_p(i, j)$ et $b_p(i, j)$ sont les i, j ième élément de A_p et B_p respectivement. Il est aussi supposé que :

1. Toutes les paires possibles A_p, B_p sont contrôlables et stabilisables par un gain de retour de sortie.
2. Toutes les paires possibles A_p, C_p sont observables.
3. B_p est une matrice de rang maximal.

L'objectif est de trouver, sans connaissance explicite de A_p et B_p , le vecteur de contrôle $u_p(t)$ telle que le vecteur de sortie du système $y_p(t)$ serait une approximation raisonnable du vecteur de sortie du modèle de référence défini par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t)\end{aligned}\tag{3.3}$$

où $x_m(t)$ est le vecteur d'état de dimension $(n_m \times 1)$, $u_m(t)$ est le vecteur de contrôle de dimension $(q \times 1)$, $y_m(t)$ est le vecteur de sortie du modèle de dimension $(q \times 1)$. A_m, B_m et C_m sont des matrices de dimension appropriée. Le modèle est supposé "BIBO" stable. Il est important de noter que la dimension de l'état du modèle peut être inférieure à celle du processus, mais les deux doivent avoir le même nombre de sorties.

III.3 Générateur de commande pour la poursuite (CGT)

Le CGT est une loi de contrôle à modèle de référence destinée aux systèmes linéaires invariants ou variants dont les paramètres sont connus, cette loi de contrôle est une combinaison entre les états du modèle, l'entrée de référence et l'erreur entre la sortie de modèle et celle du système [26].

III.3.1 Système à paramètres invariables

Quand une poursuite parfaite de sortie est atteinte, c-à-d $y_p(t) = y_m(t)$ pour $t \geq 0$, les trajectoires de contrôle et d'états correspondants sont dites trajectoires idéales et sont notées $x_p^*(t)$ et $u_p^*(t)$ et par définition, le système idéal est tel qu'il satisfait la même dynamique que celle du système réel. En plus, la sortie du système idéal est identiquement égale à la sortie du modèle de référence, mathématiquement parlant :

$$\dot{x}_p^*(t) = A_p x_p^*(t) + B_p u_p^*(t) \quad \text{pour } t \geq 0\tag{3.4.a}$$

$$y_p^*(t) = y_m = C_p x_p^*(t) = C_m x_m(t)\tag{3.4.b}$$

Il est supposé [26] que les trajectoires idéales sont des fonctions linéaires des états et des

entrées du modèle de référence :

$$\begin{bmatrix} x_p^*(t) \\ u_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Ici $u_m(t)$ est supposée constante, sinon ses dérivées doivent être disponibles, cette supposition peut être allégée. La trajectoire idéale vérifie l'équation (3.1), c-a-d :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p^*(t) \\ y_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p^*(t) \\ u_p^*(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

En remplaçant (3.5) dans (3.6), on aura :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p^*(t) \\ y_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La dérivation de l'équation (3.5), en considérant que $u_m(t)$ est une constante donne :

$$\dot{x}_p^*(t) = S_{11}(t)\dot{x}_m(t) + S_{12}\dot{u}_m(t) = S_{11}\dot{x}_m(t) \quad (3.8)$$

Si on remplace $\dot{x}_m(t)$ de (3.3) dans (3.8), on trouve :

$$\dot{x}_p^*(t) = S_{11}A_m x_m(t) + S_{11}B_m u_m(t) \quad (3.9)$$

La forme compacte de (3.9) et (3.4) est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p^*(t) \\ y_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}A_m & S_{11}B_m \\ C_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De (3.7) et (3.10) et sachant que $x_m(t)$ et $u_m(t)$ sont arbitraire, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} S_{11}A_m & S_{11}B_m \\ C_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

L'équation matricielle (3.11) représente un système d'équations linéaires qui doit être résolu pour les matrices S_{ij} . Il ya $(n+q) \times (n+m)$ équations avec $(mn_m + nm + mn + m^2)$ inconnus. Quand mn le nombre d'entrée de contrôle est supérieure à q (le nombre de sortie du système), il y a au moins autant d'équations que d'inconnus, alors, la solution CGT existe presque toujours. Dans le cas très rare ou une situation singulière est présente, on peut changer les valeurs des paramètres du modèle de référence pour éliminer la singularité.

Une méthode élégante mais qui ne donne pas toujours de solution, consiste à définir :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p(t) & B_p(t) \\ C_p & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.12)$$

Alors, l'équation (3.11) est équivalente au système d'équations suivant :

$$S_{11} = \Omega_{11} S_{11} A_m + \Omega_{12} C_m \quad (3.13)$$

$$S_{12} = \Omega_{11} S_{11} B_m \quad (3.14)$$

$$S_{21} = \Omega_{21} S_{11} A_m + \Omega_{22} C_m \quad (3.15)$$

$$S_{22} = \Omega_{21} S_{11} B_m \quad (3.16)$$

L'existence de la matrice inverse dans (3.12) impose que le nombre d'entrées m soit être égal au nombre de sorties q . Si $m > q$, on peut alors utiliser la pseudo- inverse.

Notons que l'équation (3.13) est une équation de Lyapunov [35,67] qui n'a de solution que si aucune valeur propre de Ω_{11} n'est égale à l'inverse d'une valeur propre de A_p .

Pour voir sous quelles conditions une poursuite asymptotique est assurée, écrivons l'équation de l'erreur sous la forme :

$$\dot{e}_x = \dot{x}_p^* - \dot{x}_p = A_p x_p^* + B_p u_p^* - A_p x_p - B_p u_p = A_p e_x + B_p (u_p^* - u_p) \quad (3.17)$$

Si la loi de contrôle à la forme suivante :

$$u_p = u_p^* + K(y_m - y_p) = u_p^* + K C_p e_x \quad (3.18)$$

Alors, l'équation de l'erreur devient :

$$\dot{e}_x = (A_p - B_p K C_p) e_x \quad (3.19)$$

Ainsi, l'erreur e_x tend vers zéro quand t tend vers l'infini, s'il existe un gain constant K qui stabilise le système en boucle fermée. Quand e_x tend vers zéro et en prenant en considération l'équation (3.4), on peut écrire :

$$y_p(t) = C_p x_p(t) = C_p x_p^*(t) = y_m(t) = C_m x_m(t)$$

Ce qui est l'objectif du CGT.

Si on remplace u_p^* par son équivalent de (3.5) dans (3.18) on aura la forme finale de la loi de contrôle :

$$u_p(t) = S_{21} x_m(t) + S_{22} u_m(t) + K(y_m(t) - y_p(t)) \quad (3.20)$$

où S_{21} et S_{22} sont les solutions des équations (3.13) à (3.16) avec :

$$R_e[\lambda(A_p - B_p K C_p)] < 0 \quad (3.21)$$

On note que le CGT établi pour le cas où u_m est une constante peut être étendu à une entrée plus générale [26]. Pour les problèmes réels, il est possible qu'un système d'ordre très élevé doit suivre un modèle d'ordre très petit et avec une entrée de référence arbitraire. Cela est pratiquement impossible à atteindre par un contrôleur à gains fixes. Alors, il

est raisonnable et pratiquement suffisant de ne pas imposer une poursuite parfaite du modèle, mais seulement que l'erreur entre le modèle et le système soit bornée et assez petite. En plus, les gains ne seront pas fixes mais adaptatifs.

III.3.2 Système à paramètres variables

Le système linéaire à paramètres variables peut être décrit par les équations suivantes :

$$\dot{x}_p(t) = A_p(t) x_p(t) + B_p(t) u_p(t) \quad (3.22)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t) \quad (3.23)$$

Le modèle linéaire continue invariant à suivre est décrit par :

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \quad (3.24)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \quad (3.25)$$

Les variables et les matrices sont comme dans le cas précédent à l'exception que les matrices A_p et B_p sont dans ce cas fonction du temps.

Si le suivi parfait s'établit, c-à-d, $y_p(t) = y_m(t)$ pour $t \geq 0$, les trajectoires résultantes du contrôle et de l'état sont notées respectivement $u_p^*(t)$ et $x_p^*(t)$.

Par définition, les variables idéales doivent satisfaire :

$$(i) \quad C_p x_p^*(t) = C_m x_m(t) \quad (3.26)$$

$$(ii) \quad \dot{x}_p^*(t) = A_p(t) x_p^*(t) + B_p(t) u_p^*(t) \quad (3.27)$$

$$(iii) \quad \begin{bmatrix} x_p^*(t) \\ u_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

avec S_{11} , S_{12} , S_{21} et S_{22} sont des matrices dépendantes du temps, de dimension appropriée.

Sous la supposition que $\dot{u}_m(t) = 0$, Les équations à résoudre sont :

$$A_p(t) S_{11}(t) + B_p(t) S_{21}(t) = \dot{S}_{11}(t) + S_{11}(t) A_m \quad (3.29)$$

$$A_p(t) S_{12}(t) + B_p(t) S_{22}(t) = \dot{S}_{12}(t) + S_{11}(t) B_m \quad (3.30)$$

$$C_p S_{11}(t) = C_m \quad (3.31)$$

$$C_p S_{12}(t) = 0 \quad (3.32)$$

(pour les détails, voir l'annexe A).

Les équations (3.29) – (3.32) peuvent être mises sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} A_p(t) & B_p(t) \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{S}_{11}(t) + S_{11}(t) A_m & \dot{S}_{12}(t) + S_{11}(t) B_m \\ C_m & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

On assume que $m = q$, donc, si la matrice

$$\begin{bmatrix} A_p(t) & B_p(t) \\ C_p & 0 \end{bmatrix}$$

est inversible, l'équation (3.33) donne :

$$\begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(t) & \Omega_{12}(t) \\ \Omega_{21}(t) & \Omega_{22}(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{S}_{11}(t) + S_{11}(t)A_m & \dot{S}_{12}(t) + S_{11}(t)B_m \\ C_m & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

avec

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}(t) & \Omega_{12}(t) \\ \Omega_{21}(t) & \Omega_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p(t) & B_p(t) \\ C_p & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.35)$$

On voit que le produit

$$C_p \Omega_{11}(t) = 0, \quad \forall t$$

et comme C_p est une matrice différente de l'identité, La matrice $\Omega_{11}(t)$ est alors singulière pour tout t .

Le développement de l'égalité (3.34) donne le système différentiel algébrique suivant :

$$\Omega_{11}(t) \dot{S}_{11}(t) = S_{11}(t) - \Omega_{11}(t) S_{11}(t) A_m - \Omega_{12}(t) C_m \quad (3.36)$$

$$\Omega_{11}(t) \dot{S}_{12}(t) = S_{12}(t) - \Omega_{11}(t) S_{11}(t) B_m \quad (3.37)$$

$$S_{21}(t) = \Omega_{21}(t) \dot{S}_{11}(t) + \Omega_{21}(t) S_{11}(t) A_m + \Omega_{22}(t) C_m \quad (3.38)$$

$$S_{22}(t) = \Omega_{21}(t) \dot{S}_{12}(t) + \Omega_{21}(t) S_{11}(t) B_m \quad (3.39)$$

On voit bien que $S_{21}(t)$ et $S_{22}(t)$ dépendent de $S_{11}(t)$ et $S_{12}(t)$ via les équations (3.38) et (3.39), donc, seulement l'équation (3.36) nécessite d'être résolue.

Pour la résolution des système d'équations (3.36-3.39), on transforme les équations différentielles en équations aux différences en appliquant la formule d'approximation de la dérivée.

$$\dot{x}(kT) = \frac{x(kT + T) - x(kT)}{T}$$

avec T la période d'échantillonnage.

III.4 Concepts de stabilité et de positivité

Dans cette section, nous présentons les concepts nécessaires à l'analyse du MRAC développé dans ce chapitre. Ces concepts seront utilisés pour l'analyse de la stabilité du SAC et pour montrer les conditions de son applicabilité.

III.4.1 Stabilité

Quand on traite des contrôleurs adaptatifs ou non linéaires, on ne peut pas utiliser les

procédures d'analyse de stabilité dans le domaine fréquentiel qui sont devenus très intuitives. Par contre, les techniques de Lyapunov [33,35,44] constituent des moyens très utiles et convenables pour la démonstration de la stabilité et de la robustesse du MRAC. Pour illustrer ce concept, on considère le système :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.40)$$

Pour démontrer la stabilité du système défini par l'équation (3.40), on lui associe une fonction définie positive $V(x, t)$, dite "fonction de Lyapunov", qui doit décroître quand x décroît et croître quand x croît. C'est à dire que sa dérivée :

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) \quad (3.41)$$

est une fonction définie négative.

Ainsi il est facile de montrer que pour le système linéaire présenté par l'équation (3.1), la fonction :

$$V(x) = x^T(t)Px(t) \quad (3.42)$$

est une fonction de Lyapunov pour ce système seulement si P est définie positive et :

$$\dot{V}(x) = x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)Px(t) = x^T(t)[PA_p + A_p^T P]x(t) \quad (3.43)$$

est définie négative, ceci est vérifiée si :

$$PA_p + A_p^T P = -Q \quad (3.44)$$

où Q est une matrice définie positive.

Théorème (III.1) [35,44]

Le système défini par l'équation (3.1) est asymptotiquement stable si pour toute matrice Q définie positive, il existe une matrice P définie positive, telle que l'équation (3.44) est vérifiée. Si Q est seulement semi définie positive, alors, le système est seulement stable.

Les différentes formes de la stabilité (asymptotique, uniforme, globale, locale) sont données dans [33,35,44].

III.4.2 Positivité

Nous donnons ici des lemmes utiles concernant la positivité des systèmes linéaire invariant dans le temps. Quelques définitions sur la positivité sont d'abord présentées dans le domaine temporel, ensuite dans le domaine fréquentiel. Les conditions de positivité difficiles à tester pour les systèmes réels sont ramenées à des conditions de stabilité faciles à tester en utilisant les méthodes conventionnelles.

La fonction de transfert donnée par $G(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p + D_p$ est propre si $D_p \neq 0$, sinon, elle est dite strictement propre.

Définition (III.1)

La réalisation minimale (A_p, B_p, C_p, D_p) et propre du système à m entrées et m sorties est dite strictement réelle positive si [10, 13,44,39] :

$$\begin{cases} PA_p + A_p^T P = -Q - L^T L < 0 \\ PB_p = C_p^T - L^T W \\ D_p + D_p^T = W^T W \end{cases} \quad (3.45)$$

où $A_p \in R^{n \times n}$, $B_p \in R^{n \times m}$, $C_p \in R^{m \times n}$, $D_p \in R^{m \times m}$, $D_p > 0$, B_p et C_p sont de rang maximal, $L \in R^{m \times n}$, $W \in R^{m \times m}$, $P \in R^{n \times n}$ est définie positive et $Q \in R^{n \times n}$ est strictement définie positive. Si le système est strictement propre, il suffit de mettre $L = W = D_p = 0$.

Définition (III.2) [34]

Une fonction de transfert $G(s)$ est réelle positive si :

1. $G(s)$ est réelle pour s réelle.
2. $\text{Re}\{G(s)\}_{\text{Re}(s) \geq 0} \geq 0$

On peut montrer [1,39] que la fonction de transfert réelle positive $G(s)$ est stable et à phase minimale.

La stricte positivité est très utile pour la démonstration de la stabilité des systèmes adaptatifs, mais les systèmes réels ne satisfont pas cette condition, alors, plusieurs techniques ont été proposées pour palier à ce problème.

Définition (III.3) [9,73]

Soit $G(s)$ une matrice de transfert de dimension $m \times m$, et supposons qu'il existe une matrice de gain constante K_e telle que la fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$G_a(s) = [I + G(s)K_e]^{-1}G(s) \quad (3.46)$$

soit SPR. Puisque seulement un gain de retour constant est requis pour satisfaire la stricte positivité, la matrice de transfert $G(s)$ est dite " Presque strictement réelle positive ", "Almost Strictly Positive Real "ASPR.

Lemme (III.1) [10]

Soit $G(s)$ une matrice de transfert strictement à phase minimale, de dimension $m \times m$, et de degré relatif $(n - m) / n$ (pour plus de détail sur les pôles et les zéros et le degré relatif pour les systèmes MIMO (voir [24]). Soit (A, B, C) une réalisation minimale de $G(s)$. Si $CB > 0$ (défini positif), alors $G(s)$ est ASPR.

Lemme (III.2) [10]

Toute matrice de transfert $G(s)$ de dimension $m \times m$ propre et strictement à phase minimale est ASPR.

Lemme (III.3) [10,14]

Soit $G(s)$ une matrice de transfert ASPR et soit $K_{e\min}$ une matrice de gain constante qui satisfait la condition (3.46). Alors $G_a(s)$ reste SPR pour toute matrice de gain $K_e > K_{e\min}$

Lemme (III.4) [10]

Soit la matrice de transfert $G(s)$ de dimension $m \times m$ et ayant un degré de McMilan (l'extension du degré relatif de systèmes SISO aux système MIMO [24]) arbitraire, $G(s)$ n'est pas nécessairement stable ou à phase minimale. On suppose que $G(s)$ est strictement propre. Soit K_y une matrice de gain de retour constante et non singulière telle que le système en boucle fermée :

$$G_{BF}(s) = [I + G(s)K_y]^{-1} G(s) \tag{3.47}$$

soit asymptotiquement stable. Alors la matrice de transfert augmentée suivante :

$$G_a(s) = G(s) + K_y^{-1} \tag{3.48}$$

est ASPR.

Lemme (III.5) [10]

Soit $G(s)$ définie comme dans lemme (III.4) et soit :

$$H(s) = K(1 + qs) \tag{3.49}$$

un contrôleur telle que le système en boucle fermée de la figure 3.1 soit stable. Alors le système augmenté :

$$G_a(s) = G(s) + H^{-1}(s) = G(s) + \frac{K^{-1}}{1 + qs} \tag{3.50}$$

est ASPR.

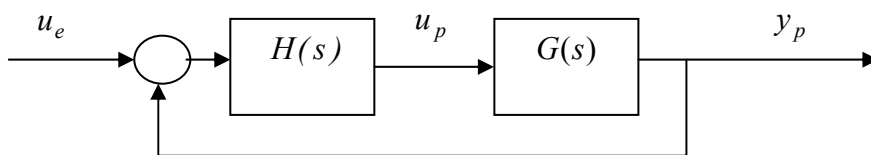


FIG. 3.1 - Système fictif en boucle fermée

Lemme (III.6) [10]

Soit $G(s)$ définie comme dans lemme (III.4). Soit $H(s)$ une dynamique arbitraire qui stabilise le système de la figure 3.1, alors le système :

$$G_a(s) = G(s) + H^{-1}(s) \tag{3.51}$$

est ASPR si le degré de McMillan du $G_a(s)$ est p/p ou $(p-m)p$ quel que soit p . Si $G(s)$ et $H(s)$ sont des systèmes SISO, alors pour que le système augmenté $G_a(s)$ soit ASPR, il suffit que son degré relatif soit égal à l'unité et que le système de la figure 3.1 soit stable.

Pour les lemmes (III.5) et (III.6), le système fictif qui sera strictement positif réel (SPR) est représenté par la figure 3.2.

Il est à noter que dans la figure 3.2, $H^{-1}(s)$ n'est pas une partie du système réel (dont l'entrée peut être un débit d'un liquide et la sortie une concentration ou une température). $H^{-1}(s)$ est en réalité une partie du contrôleur et n'affecte que les valeurs mesurées, comme le fait n'importe quel contrôleur

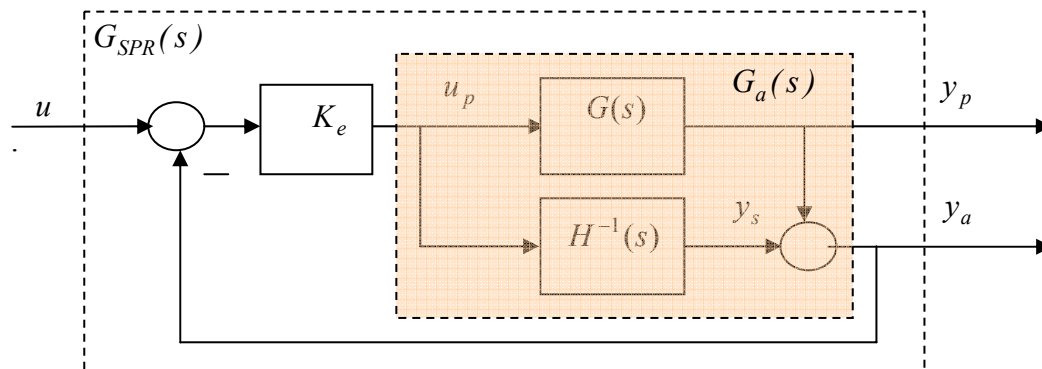


FIG. 3.2 - Le système fictif SPR

III.5 Contrôleur adaptatif basé sur le CGT

Nous allons voir maintenant l'extension du CGT au cas adaptatif [71]. Pour ce MRAC, seulement les sorties du système sous contrôle et les états du modèle de référence doivent être mesurables. Plus encore, l'ordre du système peut être très grand par rapport à l'ordre du modèle de référence. L'algorithme de base présenté dans cette section suppose que le système sous contrôle est ASPR. Cette restriction sera allégée par la suite.

Rappelons la loi de contrôle du CGT pour les systèmes à paramètres connus, déjà donnée par l'équation (3.20)

$$u_p(t) = S_{21}x_m(t) + S_{22}u_m(t) + K(y_m(t) - y_p(t))$$

La loi de contrôle du MRAC adaptatif basée sur l'approche CGT est choisie comme ayant la même forme que celle donnée par (3.20)

$$u_p(t) = K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) + K_e(t)(y_m(t) - y_p(t)) \quad (3.52)$$

En substituant (3.4) dans (3.52) nous obtenons :

$$u_p(t) = K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) + K_e(t)C_p e_x(t) \quad (3.53)$$

où les gains $K_x(t)$, $K_u(t)$ et $K_e(t)$ sont adaptés progressivement de telle sorte que l'erreur s'annule. Pour simplifier la présentation, les trois gains précédents sont compactés sous forme d'une seule matrice K_r de dimension $m \times n_r$:

$$K_r(t) = [K_e(t), K_x(t), K_u(t)] \quad (3.54)$$

et de la même manière, on écrit le vecteur :

$$r(t) = \begin{bmatrix} C_p e_x(t) \\ x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_m(t) - y_p(t) \\ x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

de dimension $n_r \times 1$, alors :

$$u_p(t) = K_r(t)r(t) \quad (3.56)$$

Le gain $K_r(t)$ est défini comme étant la somme d'un gain proportionnel et d'un gain intégral. Chacun de ces deux gains est adapté comme suit :

$$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t) \quad (3.57)$$

$$K_p(t) = v(t)r^T(t)T_p, \quad v(t) = y_m(t) - y_p(t) \quad (3.58)$$

$$\dot{K}_I(t) = v(t)r^T(t)T_i \quad (3.59)$$

$$K_I(0) = K_{I0} \quad (3.60)$$

où T_i et T_p sont des matrices de pondération, invariantes dans le temps de dimension $n_r \times n_r$, K_{I0} est le gain intégral initial et C_p est la matrice de sortie du système de dimension $q \times n$. La sélection des matrices T_i et T_p est limitée par les conditions suffisantes pour la stabilité.

III.5.1 Analyse de la stabilité

La stabilité asymptotique de l'erreur de sortie du SAC peut être examinée en utilisant l'approche de Lyapunov qui exige :

1. L'existence d'une fonction candidate de Lyapunov V , définie positive.
 2. L'analyse de la stabilité asymptotique du système en boucle fermée en examinant le signe de \dot{V}
- Le théorème (III.2) suivant donne les résultats de stabilité du SAC.

Théorème (III.2) [8, 9,71]

Supposons qu'il existe une matrice réelle symétrique et définie positive P et des matrices réelles Q et \tilde{K}_e telles que :

$$P(A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p)^T P = -Q \leq 0 \quad (3.61)$$

$$C_p = B_p^T P \quad (3.62)$$

et supposons que les matrices T_i et T_p sont respectivement symétrique définie positive et symétrique semi définie positive, alors, tous les signaux du système en boucle fermée sont bornés, de plus, l'erreur entre la sortie du modèle et celle du système est asymptotiquement stable.

Les contraintes données par les équations (3.61) et (3.62) impliquent que le système sous contrôle doit être ASPR. La démonstration du théorème (III.2) est dans l'annexe B.

Le résumé du SAC est donné par le tableau 3.1 et le schéma fonctionnel de ce contrôleur est représenté sur la figure 3.3.

Système et Modèle	$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) & \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) & y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned}$
Loi de contrôle	$u_p(t) = K_r(t)r(t) \text{ où}$ $K_r(t) = [K_e(t) \ K_x(t) \ K_u(t)] r^T(t) = [(y_m - y_p)^T \ x_m^T \ u_m^T]$
Loi d'adaptation	$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t)$ $\dot{K}_I(t) = (y_m(t) - y_p(t))r^T(t)T_i, T_i > 0$ $K_p(t) = (y_m(t) - y_p(t))r^T(t)T_p, T_p \geq 0$
Propriétés	$y_p \rightarrow y_m \text{ ii } H(s) = C_p (sI - A_p + B_p K_e C_p)^{-1} B_p \text{ est SPR et les}$ <p>équations (3.12) à (3.16) ont une solution</p>

TAB 3.1 - Résumé du SAC de base

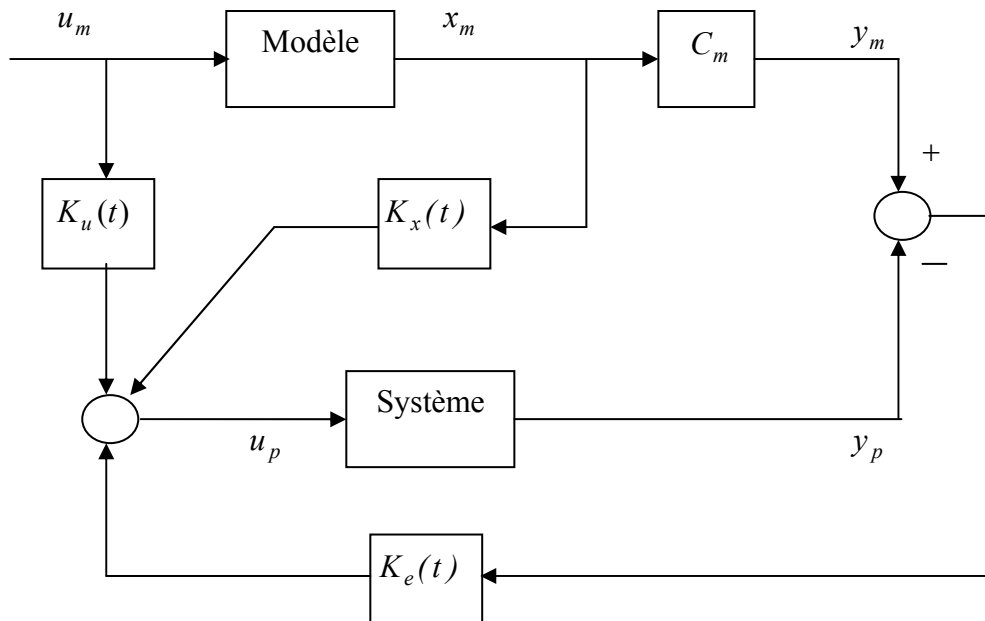


FIG. 3.3 - Schéma fonctionnel du SAC de base

Afin de montrer l'efficacité du contrôleur adaptatif basé sur le CGT, deux exemples ont été pris pour les cas SISO et MIMO.

Exemple 3.1

Soit un système SISO de fonction de transfert

$$G(s) = \frac{k(s+c)}{s^2 + a_1s + a_0}$$

Sa représentation d'état est donnée par :

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t)$$

où

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_p = [k.c \quad k]$$

La fonction de transfert du modèle de référence est donnée par :

$$G_m(s) = \frac{1}{0.2s + 1}$$

Sa représentation d'état est donnée par :

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t)$$

où

$$A_m = [-5], B_m = [5], C_m = [1]$$

Le déterminant de la matrice

$$S = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix}$$

(voir l'équation 3.12) vaut $k.c$ et donc la matrice est inversible pour $k \neq 0$ et $c \neq 0$.

Les matrices S_{ij} , solutions des équations (3.13-3.16) sont données par :

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 1/x \\ -5/x \end{bmatrix}, S_{12} = \begin{bmatrix} -5/(cx) \\ 5/x \end{bmatrix}, S_{21} = (-5a_1 + 25 + a_0)/x, S_{22} = 5((a_1 - 5).c - a_0)/(c.x)$$

avec $x = k(c - 5)$

et on voit bien que l'équation (3.11) est vérifiée.

D'autre part, le système est de degré relatif égal à un et est à phase minimale pour $c > 0$, et donc, il est ASPR.

L'application du contrôleur adaptatif basé sur le CGT à ce système (voir équation 3.52) conduit à une erreur asymptotiquement stable, ce qui a comme conséquence la convergence de l'algorithme adaptatif.

La simulation a été faite en prenant $c=4$ et la variation permise des paramètres est donnée par le tableau 3.2.

Paramètres	Valeurs nominales	Intervalles de variation
k	1.5	1 à 2
a_1	0	-3 à 3
a_0	0	-2 à 2

TAB 3.2 - Valeurs nominales et intervalles de variations des paramètres

Les cas considérés pour la simulation sont donnés par le tableau 3.3.

Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4
k	1	1.5	2	2
a_1	3	3	-3	-3
a_0	2	-2	2	-2
c	4	4	4	4
K_e	3	1	60	50
P	$\begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 25 & 6 \\ 6 & 1.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 33 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 33 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$
Q	$\begin{bmatrix} 112 & 21 \\ 21 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 48 & 8 \\ 8 & 1.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7712 & 1867 \\ 1867 & 452 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6368 & 1539 \\ 1539 & 372 \end{bmatrix}$
$\lambda_1(A_p)$	-1	-3.5616	1	3.5616
$\lambda_2(A_p)$	-2	0.5616	2	-0.5616

TAB 3.3 - Les cas considérés pour les simulations

Les figures 3.4 et 3.5 représentent les sorties du système et du modèle et les commandes correspondantes pour une entrée carré d'amplitude ± 1 et de période 60 secondes. La figure 3.6 montre la norme d'ordre deux de la matrice des gains $K_r(t)$ pour le cas 4 (voir équation 3.54). De l'équation (3.56), on conclut que la grandeur de commande est aussi bornée.

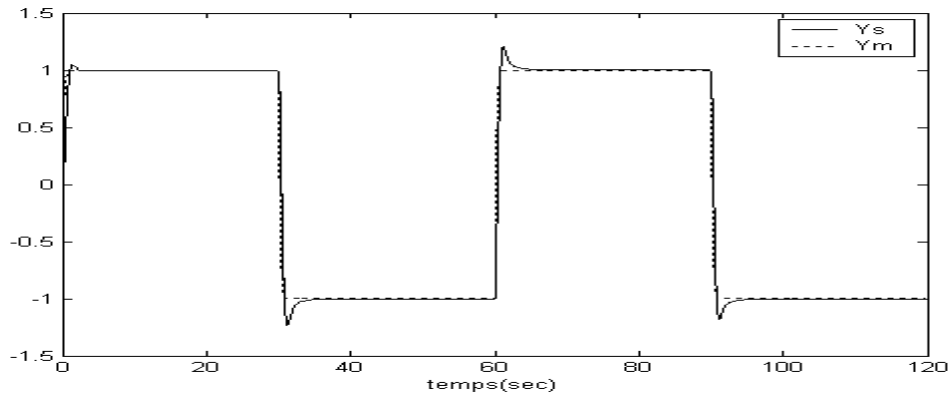


FIG. 3.4.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

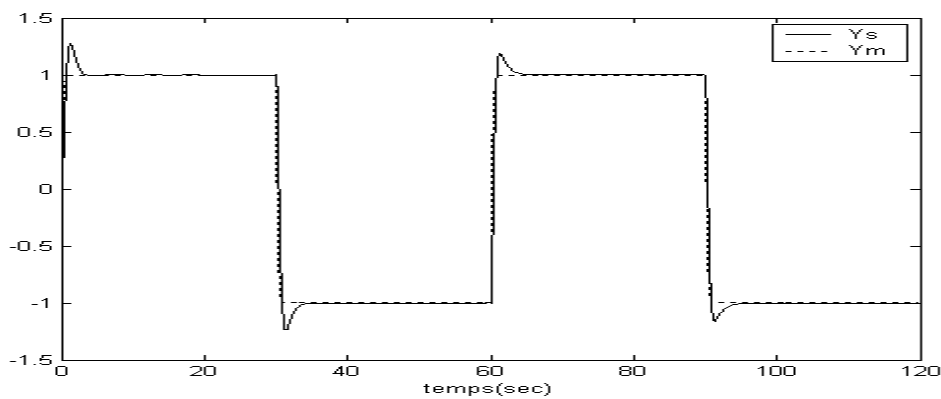


FIG. 3.4.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

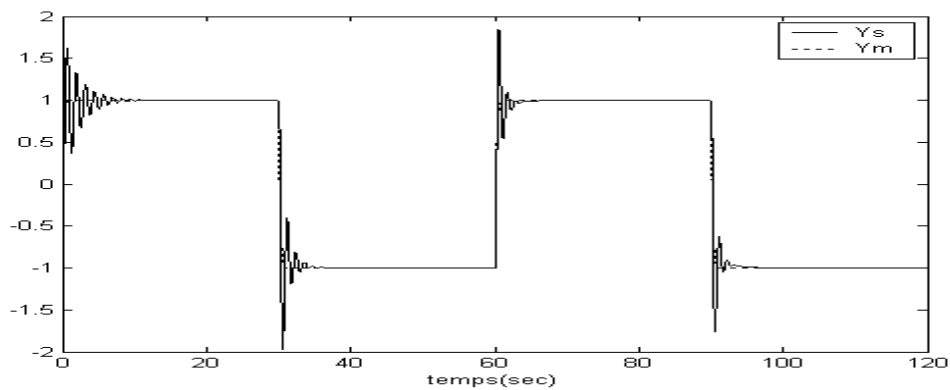


FIG. 3.4.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

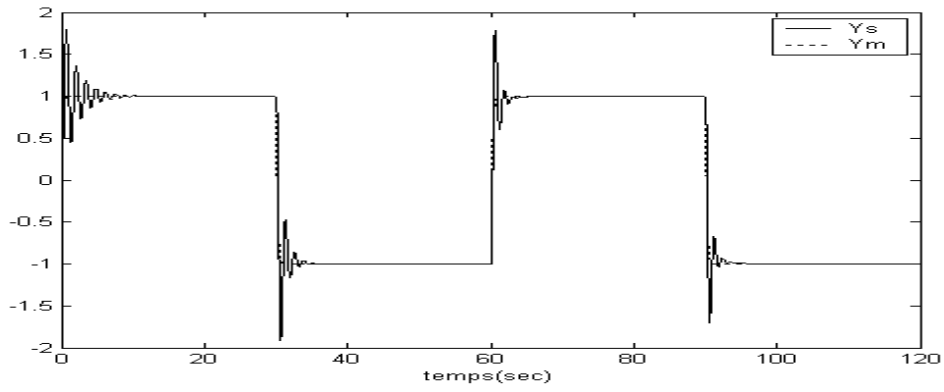


FIG. 3.4.d - Sorties du système et du modèle, Cas 4

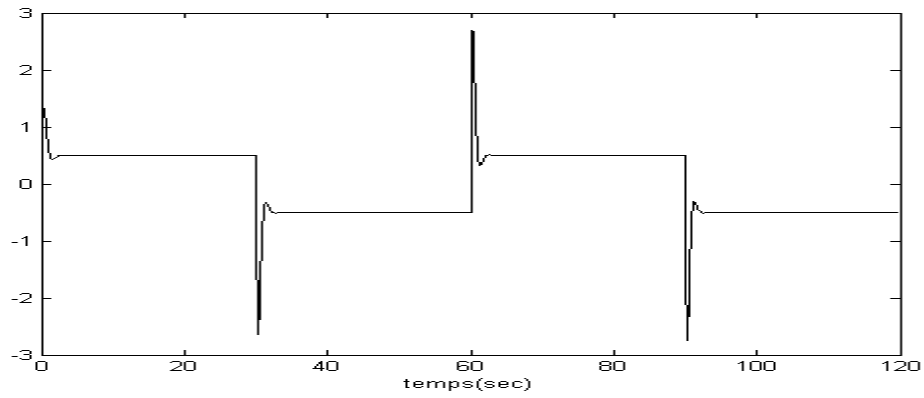


FIG. 3.5.a - Signal de commande, Cas 1

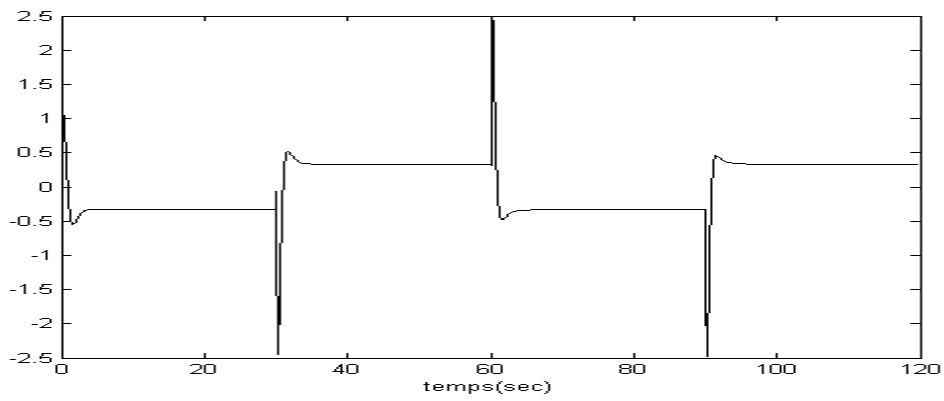


FIG. 3.5.b - Signal de commande, Cas 2

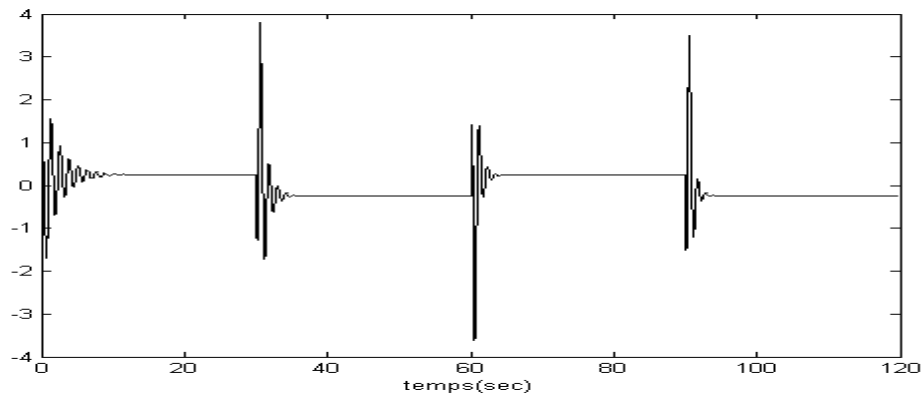


FIG. 3.5.c - Signal de commande, Cas 3

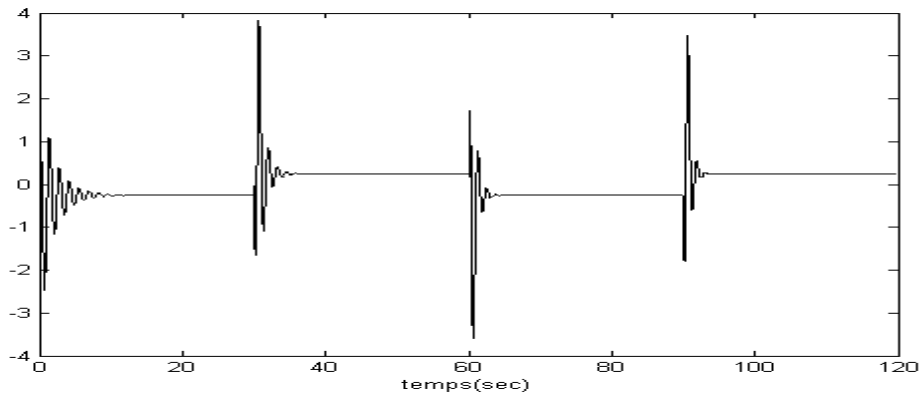


FIG. 3.5.d - Signal de commande, Cas 4

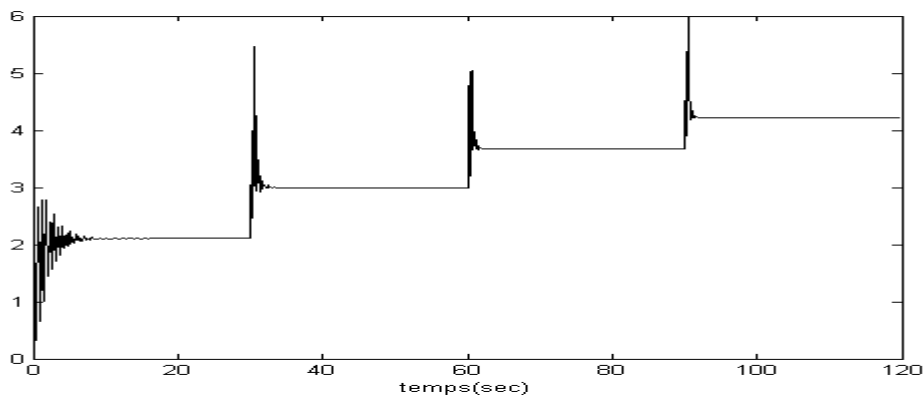


FIG. 3.6 - Norme d'ordre deux de la de la matrice $K_r(t)$, Cas 4

Exemple 3.2

Soit un système MIMO à deux entrées et deux sorties représenté par :

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t)$$

avec

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_p = C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sa matrice de transfert est donnée par :

$$G_p(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p = \frac{1}{s^2 - 0.5s + 1} \begin{bmatrix} s - 0.5 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix},$$

avec I la matrice identité

Les valeurs propres sont données par :

$$\lambda(A_p) = \begin{bmatrix} 0.25 + j0.96 \\ 0.25 - j0.96 \end{bmatrix}$$

C'est un système instable

Le modèle de référence est donné par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t)\end{aligned}$$

avec

$$A_m = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_m = C_m = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sa matrice de transfert est donnée par :

$$G_m(s) = C_m (sI - A_m)^{-1} B_m = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{s+4} \end{bmatrix}$$

C'est un modèle découplé, donc, facile à commander et de gain

$$G_m(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et donc, les valeurs finales sont données par :

$$y_m(\infty) = G_m(0)u_m = \begin{bmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \end{bmatrix}$$

1- Vérification des conditions du CGT (voir équation 3.11).

Les conditions du CGT sont vérifiées pour les matrices

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S_{21} = \begin{bmatrix} -9 & -4 \\ 3 & -18 \end{bmatrix}, S_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2- Vérification des conditions ASPR.

Si on choisit les matrices positives

$$Q = P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et pour

$$\tilde{K}_e = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors

$$P(A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p)^T P = -Q < 0$$

et

$$C_p = B_p^T P$$

et donc, le système est ASPR (voir théorème III.2)

Les conditions (1) et (2) impliquent que le contrôleur donné par l'équation (3.56) conduit à une erreur de poursuite asymptotiquement stable entre les sorties du système et celles du modèle.

Les figures 3.7 et 3.8 représentent le résultat de la simulation pour des entrées u_{m1} et u_{m2} en forme d'onde carrée d'amplitude 1.5 et 2 et de période 60 secondes.

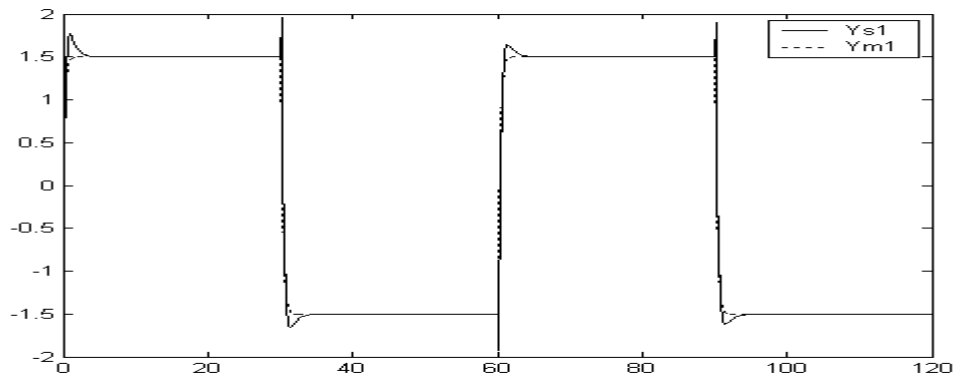


FIG. 3.7.a - Sorties du système et du modèle (première sortie)

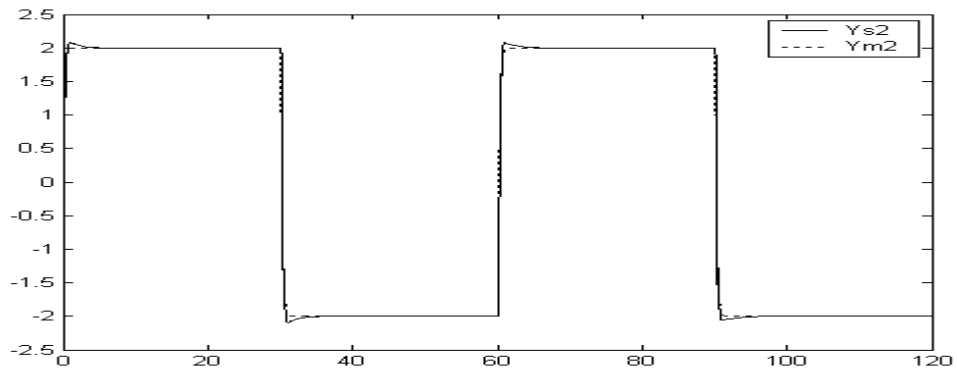


FIG. 3.7.b - Sorties du système et du modèle (deuxième sortie)

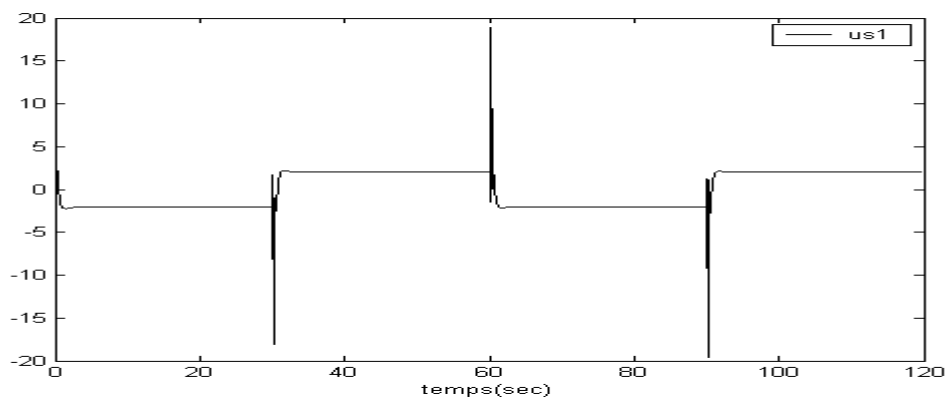


FIG. 3.8.a - Signal de commande, (première entrée)

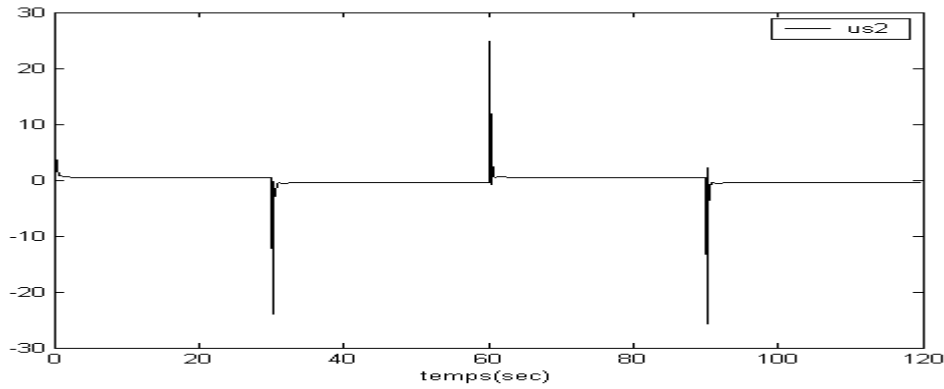


FIG. 3.8.b - Signal de commande, (deuxième entrée)

La figure 3.9 représente la norme d'ordre deux de la matrice des gains $K_r(t)$ (voir équation 3.54). On voit bien que les gains sont bornés, d'où des grandeurs de commande bornées elles aussi (voir équation 3.56).

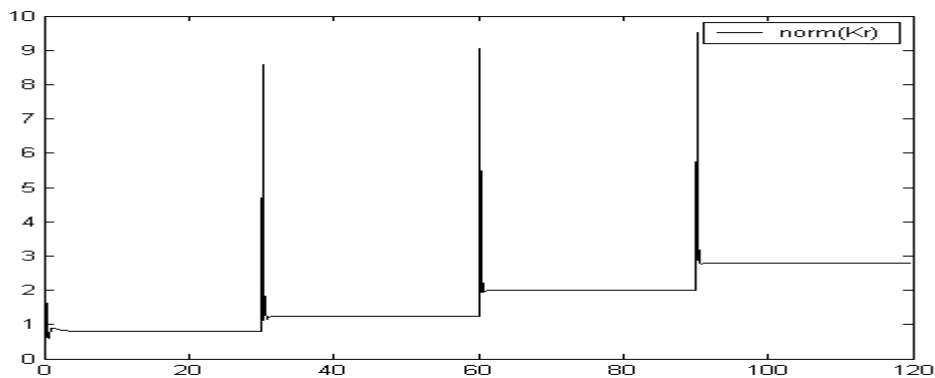


FIG. 3.9 - Norme d'ordre deux de la de la matrice $K_r(t)$

III.6 Extension du SAC de base pour éviter la contrainte de positivité

Vu que le SAC n'est applicable que pour les systèmes qui satisfont les conditions ASPR, plusieurs modifications de base lui ont été introduites [40,58,89]. Ceci pour étendre la classe des systèmes pouvant être contrôlés par ce MRAC. Ces modifications utilisent les propriétés de base de stabilisation des systèmes, pour augmenter soit le système soit l'algorithme d'adaptation dans le but de satisfaire les conditions ASPR. Dans cette section nous discutons les principales modifications du SAC.

III.6.1 Augmentation du système par un compensateur en parallèle

En utilisant les lemmes (III.4) à (III.6), on peut concevoir un compensateur $H(s)$ de telle sorte que le système augmenté par la figure 3.10 soit ASPR.

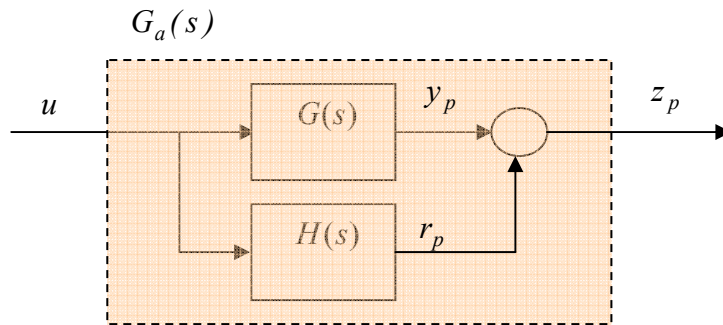


FIG. 3.10 – Système augmenté (ASPR)

Il faut aussi veiller à ce que la sortie du système augmenté soit une approximation acceptable de la sortie du système réel, c-à-d, qu'il faut que la contribution du compensateur soit minimale.

L'utilisation d'un compensateur en parallèle avec le processus sous contrôle suppose que le concepteur peut concevoir une dynamique qui stabilise le système fictif en boucle fermée de la figure 3.1. Il est en réalité raisonnable de supposer que parmi les méthodes de contrôle robuste, on peut trouver au moins une configuration stabilisante.

Système	$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t)$ $y_p(t) = C_p x_p(t)$
Modèle de référence	$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t)$ $y_m(t) = C_m x_m(t)$
Compensateur	$\dot{s}_p(t) = A_s s_p(t) + B_s u_p(t)$ $r_p(t) = C_s s_p(t)$
Sortie augmentée	$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t)$
Erreur augmentée	$e_{ya}(t) = y_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) - r_p(t)$
Loi de contrôle	$u_p(t) = K_r(t)r(t)$ <p>Où</p> $K_r(t) = [K_e(t) \quad K_x(t) \quad K_u(t)]$ $r^T(t) = [(y_m - z_p)^T \quad x_m^T \quad u_m^T]$
Loi d'adaptation	$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t)$ $\dot{K}_I(t) = (y_m(t) - y_p(t))r^T(t)T_i, T_i > 0$ $K_p(t) = (y_m(t) - y_p(t))r^T(t)T_p, T_p \geq 0$

TAB 3.4 - Résumé du SAC, avec augmentation du système

L'idée d'utiliser un compensateur en parallèle a été introduite pour la première fois dans [7,9], ou un compensateur de type PD a été utilisé.

Ensuite, on a utilisé un compensateur qui contient un zéro à l'origine (dérivé) [58] pour minimiser la contribution du filtre et par conséquent l'erreur en régime permanent. La forme du compensateur est mieux élaborée après les résultats de [36] où on commence à établir des méthodes pour sa conception.

Le nouveau contrôleur est pratiquement le même que celui résumé dans le tableau 3.1, la seule différence est que cette fois ci c'est le système présenté par la figure 3.10 qui est adaptativement contrôlé et non le système réel.

Cette approche est susceptible de produire une erreur en régime permanent constante et non nulle. Le schéma fonctionnel du nouveau contrôleur ainsi obtenu est représenté par la figure 3.11. Cette approche n'est utile que si l'objectif du contrôle n'est pas une poursuite parfaite du modèle (l'erreur tend vers zéro à l'infini), mais seulement une poursuite asymptotique (erreur en régime permanent constante mais non nulle).

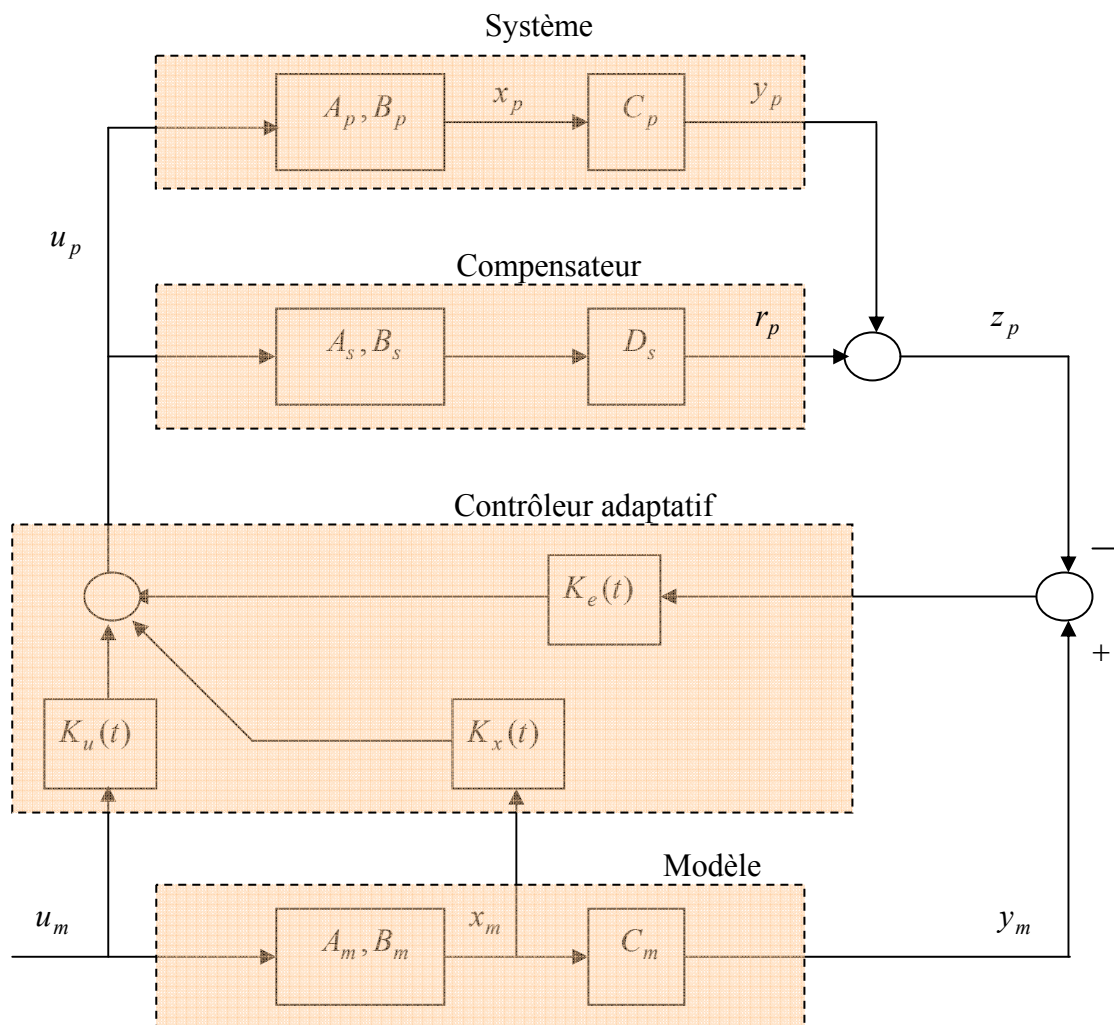


FIG. 3.11 - SAC avec augmentation du système pour éviter la condition ASPR

Exemple 3.3

Pour montrer l'inconvénient de cette approche, nous allons l'utiliser pour le contrôle du système suivant :

$$G_p(s) = \frac{y_p(s)}{u_p(s)} = \frac{k}{s^3 + a_3s^2 + a_2s + a_1}$$

dont les paramètres peuvent varier dans certains intervalles :

Les valeurs nominales des paramètres sont : $k = 1, a_3 = 3, a_2 = 4, a_1 = 2$.

La variation permise de ces paramètres est $\Delta a_i = 2, i = 1, 2, 3, \Delta k = 2$.

Ce système doit suivre le modèle suivant :

$$G_m(s) = \frac{y_m(s)}{u_m(s)} = \frac{1}{2s + 1}$$

L'entrée de référence $u_m(t)$ est un signal carrée de période 60 sec et d'amplitude ± 1 .

Notons que pour la simulation nous avons considéré les cas suivants :

Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3
k	1	1	3
a_3	3	4	1
a_2	4	5	5
a_1	2	1	1

TAB 3.5 - Les cas considérés pour la simulation

Le plus crucial pour cette méthode est la conception du compensateur pour assurer la condition ASPR sur tous les intervalles de variation des paramètres. Si on choisit un compensateur de la même forme que celui proposé par Bar kana [8], alors :

$$H(s) = \frac{D}{1 + \tau s}$$

où D est le gain du compensateur et τ sa constante de temps. La constante de temps du compensateur est choisie très inférieure à celle du modèle de référence car on veut que le régime transitoire du compensateur s'annule plus vite par rapport à celui du modèle, ici on choisi $\tau = 0.2$. Le gain D est choisi de manière à assurer la condition ASPR sur tout l'intervalle de variation des paramètres du processus. Une analyse de cet exemple sur tout l'intervalle des paramètres donne comme condition sur D : $D \geq 0.7$.

Les simulations avec les trois cas, montrent qu'un compromis est obtenu pour $D = 10$ quand les matrices T_i et T_p sont des matrices identité.

$$H(s) = \frac{D}{1 + \tau s} \text{ où } D=10 \text{ et } \tau=0.2.$$

Cas 1)

$$G_a(s) = G(s) + H(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} + \frac{10}{0.2s + 1} = \frac{10s^3 + 30s^2 + 40.2s + 21}{0.2s^4 + 1.6s^3 + 3.8s^2 + 4.4s + 2}$$

Deg (den)- Deg (num)=1

Les zéros sont données par :

$$Z_1 = -1$$

$$Z_2 = -5$$

$$Z_3 = -1 - j$$

$$Z_4 = -1 + j$$

Cas 2)

$$G_a(s) = G(s) + H(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 1} + \frac{10}{0.2s + 1} = \frac{10s^3 + 40s^2 + 50.2s + 11}{0.2s^4 + 1.8s^3 + 5s^2 + 5.2s + 1}$$

Deg (den)- Deg (num)=1

Les zéros sont données par :

$$Z_1 = -0.2451$$

$$Z_2 = -5$$

$$Z_3 = -1.8774 - j 0.7449$$

$$Z_4 = -1.8774 + j 0.7449$$

Cas 3)

$$G_a(s) = G(s) + H(s) = \frac{3}{s^3 + s^2 + 5s + 1} + \frac{10}{0.2s + 1} = \frac{10s^3 + 10s^2 + 50.6s + 13}{0.2s^4 + 1.2s^3 + 2s^2 + 5.2s + 1}$$

Deg (den)- Deg (num)=1

Les zéros sont données par :

$$Z_1 = -0.2068$$

$$Z_2 = -5$$

$$Z_3 = -0.3966 - j 2.1630$$

$$Z_4 = -0.3966 + j 2.1630$$

Tous les zéros se trouvent dans le demi plan gauche, donc le système est à phase minimale et par conséquent $G_a(s)$ est ASPR.

La figure 3.12 représente la sortie du système et celle du modèle pour cet exemple et pour les trois cas déjà spécifiés.

Elle montre aussi l'existence d'une erreur importante en régime permanent entre la sortie du système et celle du modèle, quoique le système augmenté suive parfaitement le modèle, ceci est dû à la contribution du compensateur qui est importante.

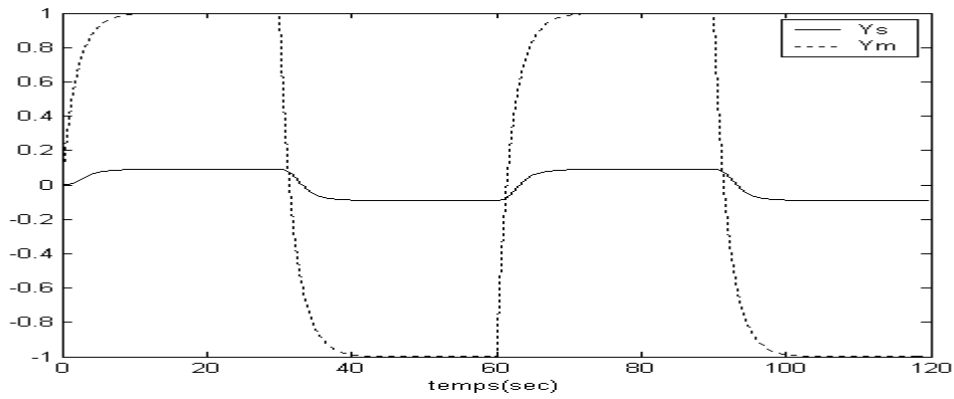


FIG. 3.12.a - Sorties du système et du modèle, Cas1

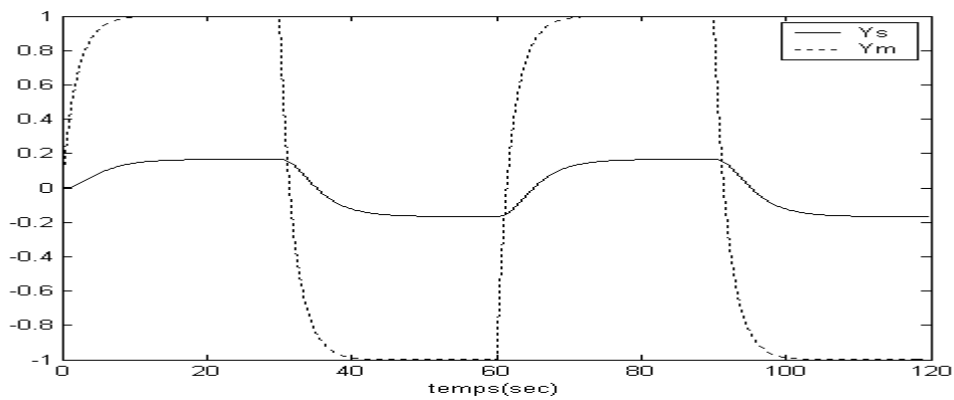


FIG. 3.12.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

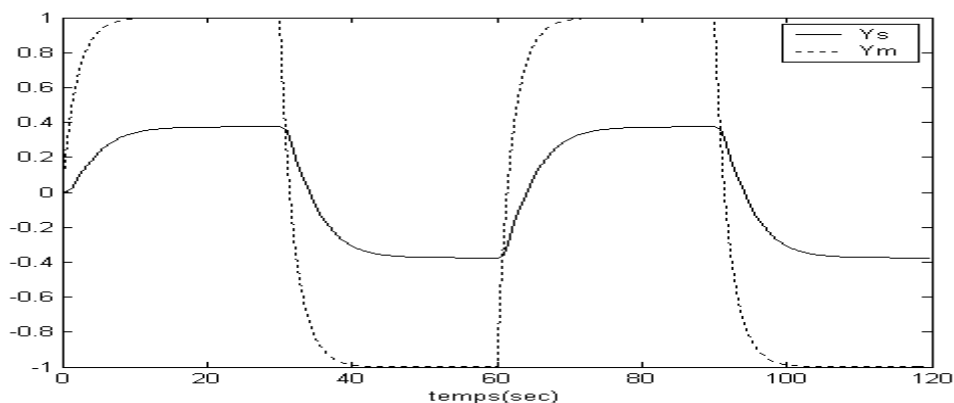


FIG. 3.12.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

On constate que l'erreur entre le système et le modèle de référence est constante et afin d'annuler cette erreur on procède à la compensation du système et du modèle.

III.6.2 Augmentation du système et du modèle de référence

Pour éviter le problème rencontré en augmentant seulement le système, une autre modification a été introduite sur l'algorithme de base [58,40]. Cette fois ci, en plus de l'augmentation du système, le modèle de référence est aussi augmenté. Ceci de telle sorte que si une poursuite parfaite entre le système augmenté et le modèle augmenté est atteinte, alors, une poursuite parfaite entre le système réel et le modèle de référence est aussi atteinte.

Pour généraliser cette approche, nous allons utiliser le compensateur $H(s)$ en parallèle avec le processus de la figure 3.10. Ainsi, la sortie du système modifié sera encore :

$$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t) \quad (3.63)$$

où $r_p(t)$ est le résultat de l'application de l'opérateur $H(s)$ sur l'entrée de contrôle $u_p(t)$.

Il faut noter aussi que le système augmenté de la figure 3.10 doit être ASPR.

D'une manière similaire, la sortie du modèle de référence augmenté est définie par :

$$z_m(t) = y_m(t) + r_m(t) \quad (3.64)$$

où la nouvelle composante $r_m(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{s}_m(t) &= A_s s_m(t) + B_s [u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))] \\ r_m(t) &= C_s s_m(t) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Notons que $r_m(t) = H[u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))]$

où

$$H[u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))]$$

est l'opérateur qui correspond au compensateur $H(s)$ et $K_e(t)$ le gain adaptatif qui est une fonction de l'erreur augmenté $e_z(t)$. Cette dernière est donnée par :

$$e_z(t) = z_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) + r_m(t) - r_p(t) \quad (3.66)$$

Soit enfin :

$$e_z(t) = y_m(t) - y_p(t) - H[K_e(t)e_z(t)] \quad (3.67)$$

Il est devient de l'équation (3.67), que si $e_z(t) \rightarrow 0$ et $H(s)$ est stable, alors, $e_y(t) = y_m(t) - y_p(t) \rightarrow 0$ aussi, ce qui est le résultat désiré.

Le schéma fonctionnel du contrôleur adaptatif ainsi obtenu est représenté par la figure 3.13.

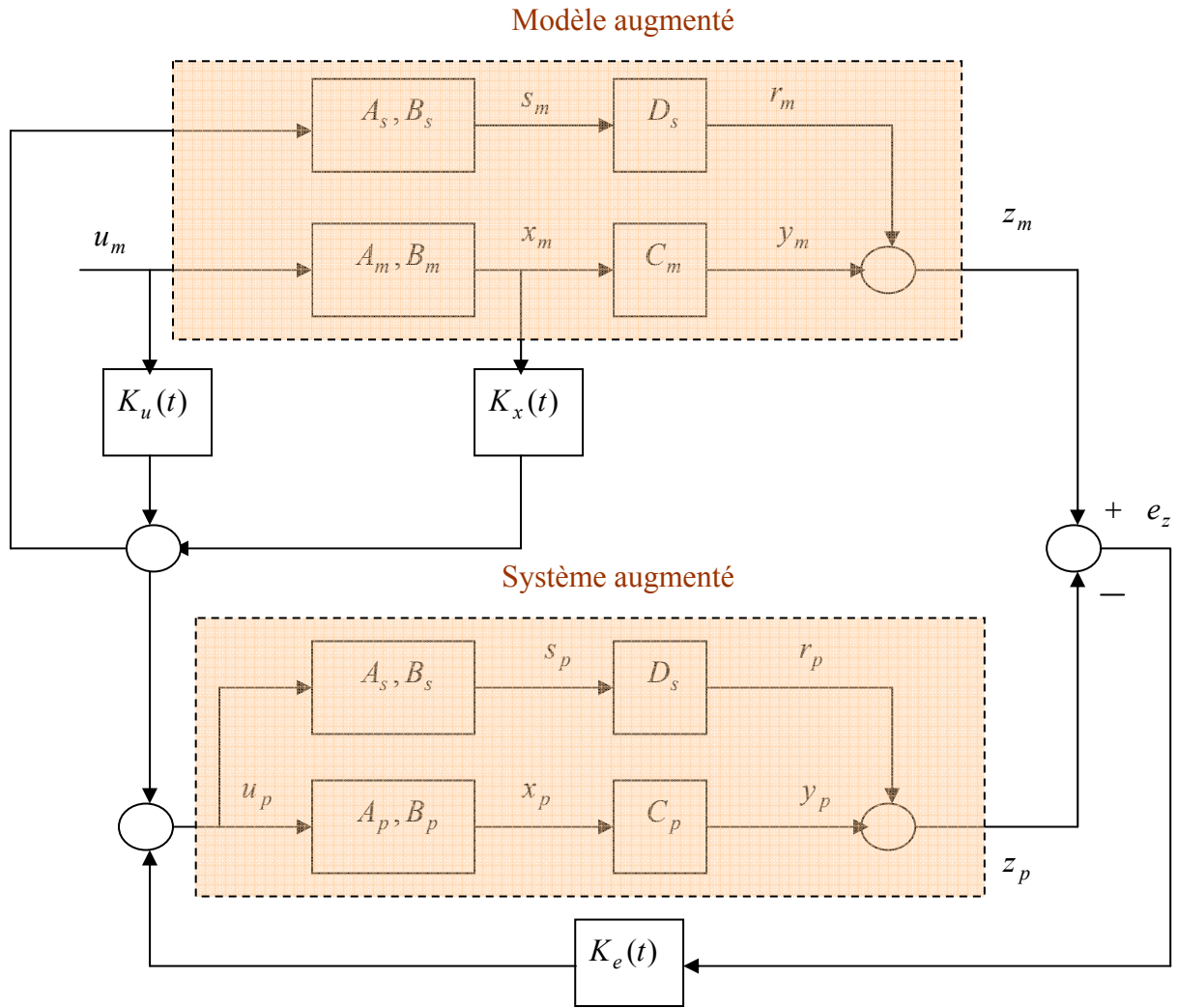


FIG. 3.13 - Augmentation du système et du modèle de référence

Le théorème suivant résume la stabilité de ce MARC.

Théorème (III.3)

Considérons le contrôleur adaptatif suivant :

$$u_p(t) = K_e(t)((z_m(t) - z_p(t)) + K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) = K_r(t)r(t) \quad (3.68)$$

avec

$$K_r(t) = [K_e(t) \quad K_x(t) \quad K_u(t)] \quad (3.69)$$

$$r^T(t) = [(z_m(t) - z_p(t))^T, x_m^T, u_m^T] \quad (3.70)$$

où le gain $K_r(t)$ est généré par la loi d'adaptation suivante :

$$K_r(t) = K_I(t) + K_p(t) \quad (3.71)$$

$$\dot{K}_I(t) = v(t)r^T(t)T_i, \quad T_i > 0, \quad v(t) = y_m(t) - y_p(t) \quad (3.72)$$

$$K_p(t) = v(t)r^T(t)T_p, \quad T_p \geq 0 \quad (3.73)$$

Si

1. $G_a(s) = G(s) + H(s)$ est ASPR, où $G_a(s) = G(s) + H(s)$ est la fonction de transfert du système et $H(s)$ la fonction de transfert de compensateur.
2. Une solution existe au système d'équation du CGT variable dans le temps [13], (voir paragraphe III.3.2).
- 3- Le compensateur $H(s)$ est stable, c-à-d $H(s)$ a toutes ses valeurs propres dans le demi plan gauche.

Alors, l'erreur de sortie $y_m(t) - y_p(t)$ s'annule asymptotiquement et tous les états et les gains seront bornés [58,40].

Le MRAC ainsi obtenu est résumé dans le tableau 3.6.

Système et modèle de référence	$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) & \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) & y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned}$
Compensateur	$\begin{aligned} \dot{s}_p(t) &= A_s s_p(t) + B_s u_p(t) & \text{pour le système} \\ r_p(t) &= C_s s_p(t) \\ \dot{s}_m(t) &= A_s s_m(t) + B_s [u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))] & \text{pour le modèle} \\ r_m(t) &= C_s s_m(t) \end{aligned}$
Sortie augmentée du système et du modèle	$\begin{aligned} z_p(t) &= y_p(t) + r_p(t) \\ z_m(t) &= y_m(t) + r_m(t) \end{aligned}$
Erreur augmentée	$e_{ya}(t) = z_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) + r_m(t) - r_p(t)$
Loi de contrôle	$u_p(t) = K_r(t)r(t) \text{ avec}$ $K_r(t) = [K_e(t) \quad K_x(t) \quad K_u(t)], r^T(t) = [(z_m - z_p)^T \quad x_m^T \quad u_m^T]$
Loi d'adaptation	$K_r(t) = K_p(t) + K_I(t)$ $\dot{K}_I(t) = (y_m(t) - y_p(t))r^T(t)T_i, T_i > 0$ $K_p(t) = (y_m(t) - y_p(t))r^T(t)T_p, T_p \geq 0$

TAB 3.6 - Résumé du SAC avec augmentation du système et du modèle

Exemple 3.4

Pour montrer l'avantage du SAC utilisé avec augmentation du système et modèle de référence, nous allons l'appliquer au système de l'exemple 3.3, en gardant le même modèle de référence, les mêmes cas pour les paramètres du système (trois cas) et le même compensateur

$$H(s) = \frac{10}{0.2s + 1}$$

Les matrices T_i et T_p sont aussi des matrices identité.

Les figures 3.14 et 3.15 représentent le résultat de la simulation pour des entrées u_{m1} et u_{m2} en forme d'onde carrée d'amplitude 1.5 et 2 et de période 60 secondes.

On remarque que l'erreur entre la sortie du système et celle du modèle $e_y(t) = y_m(t) - y_p(t) \rightarrow 0$. Dans le cas de l'exemple 3.3, cette erreur tendait vers une constante.

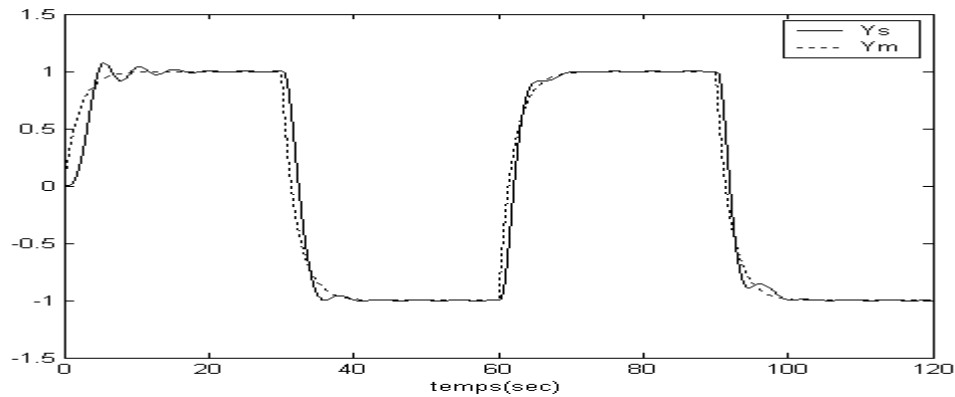


FIG. 3.14.a - Sorties du système et du modèle avec augmentation du système et du modèle de référence, Cas 1

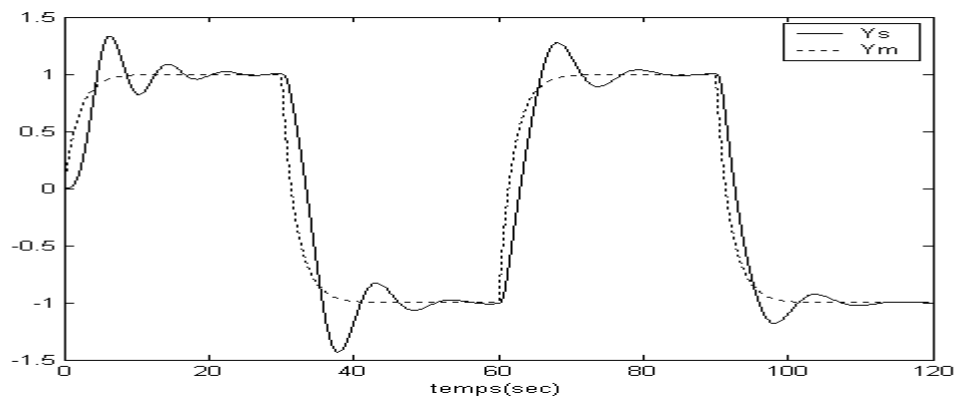


FIG. 3.14.b - Sorties du système et du modèle avec augmentation du système et du modèle de référence, Cas 2

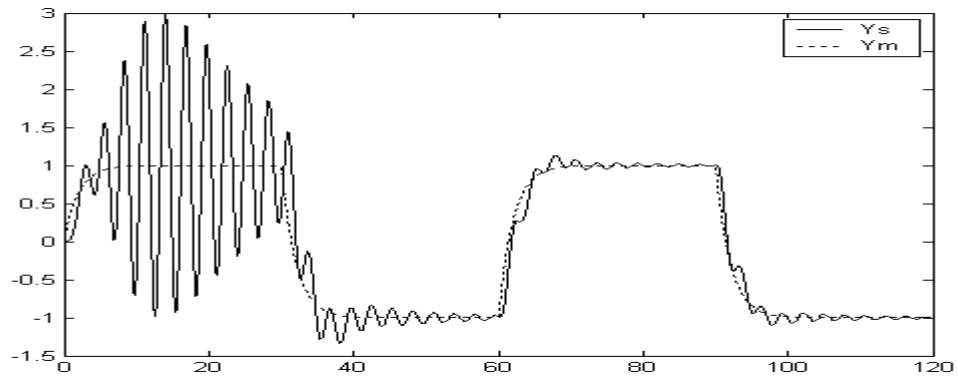


FIG. 3.14.c - Sorties du système et du modèle avec augmentation du système et du modèle de référence, Cas 3

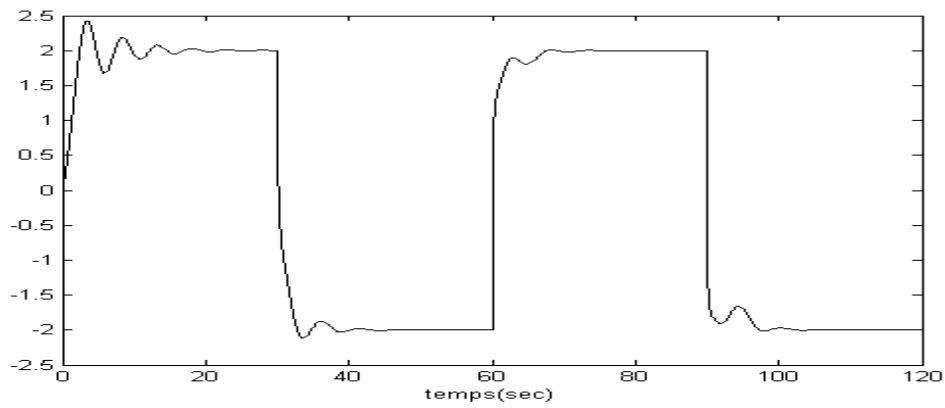


FIG. 3.15.a - Signal de commande, Cas 1

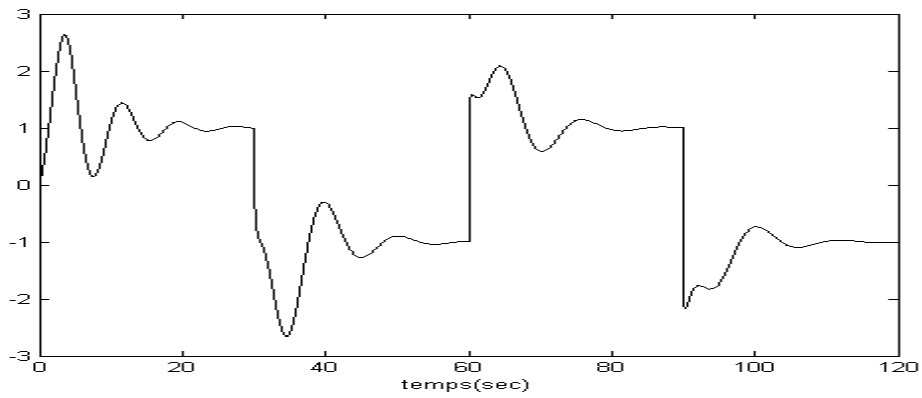


FIG. 3.15.b - Signal de commande, Cas 2

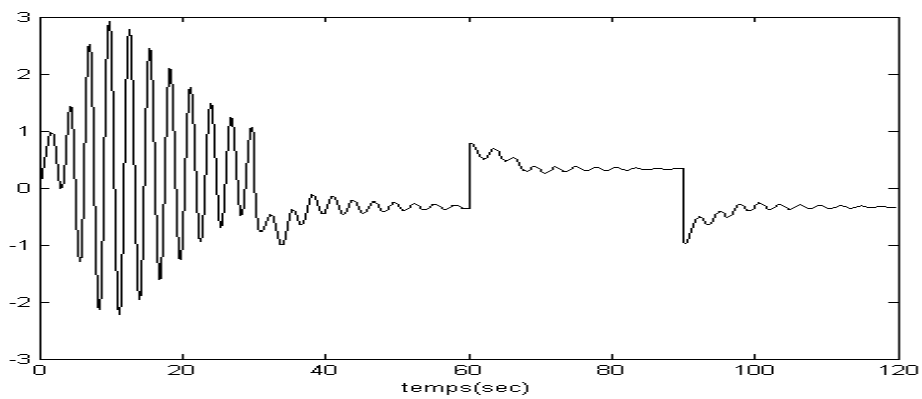


FIG. 3.15.c - Signal de commande, Cas 3

L'apparition de l'idée qui concerne l'augmentation du système et du modèle de référence en même temps a rendu très critique le problème de conception du compensateur.

Ainsi plusieurs recherches ont pour objective la mise au point de méthodes assurant ceci. Les principaux résultats dans ce domaine sont ceux établis dans [36,38,52,53,54,55].

Dans [36,38,52], on trouve une méthode de conception du compensateur domaine temporelle, tandis que dans [53,54,55], on trouve une méthode de conception de ce compensateur dans le domaine fréquentiel.

III.7 Conception du compensateur dans le domaine temporel

Cette méthode est une méthode paramétrique, elle concerne les systèmes décrit par :

$$G_p(s) = k_p \frac{B_p(s)}{A_p(s)}, \quad k_p \geq 0 \quad (3.74)$$

où

$B_p(s), A_p(s)$ sont des polynômes monics d'ordre m et n respectivement et leurs paramètres varient dans des intervalles prédéfinis.

On suppose que :

1. Une borne supérieure γ^* de degré relatif $n^* = n - m$ du système est connue.
2. $B_p(s)$ est un polynôme stable.
3. Des valeurs approximatives de k_p et $|G_p(j0)|$ sont connues.

La procédure de conception du compensateur est donnée par le théorème suivant :

Théorème (III.4) [36,38, 52]

Considérons le système augmenté suivant :

$$G_a(s) = G_p(s) + F(s)$$

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\gamma^*-1} F_i(s), \quad \gamma^* \geq 2$$

$$F_i(s) = \frac{f_i}{D_i(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, \gamma^* - 1$$

où

$D_i(s)$ est un polynôme monic et stable avec $\deg(D_i(s)) = \gamma^* - i$.

$F(s)$ est conçue telle que :

$$1. k_p \gg f_1 \gg \dots \gg f_{\gamma^*-1} > 0$$

$$2. |G_p(j0)| \geq |F(j0)|.$$

Alors $G_a(s)$ est ASPR et $\exists \omega_0 > 0$ telle que pour un $\varepsilon > 0$, $\|G_a(j\omega) - G_p(j\omega)\| \leq \varepsilon$ pour tout ω vérifiant $0 \leq \omega \leq \omega_0$.

III.8 Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel

Cette méthode est très utile dans le cas où une dynamique inconnue serait présente, elle concerne les systèmes décrits par :

$$G_p(s) = G_{p0}(s)[1 + \Delta(s)], \text{ pour une incertitude multiplicative} \quad (3.75.a)$$

$$G_p(s) = G_{p0}(s) + \Delta(s), \text{ pour une incertitude additive.} \quad (3.75.b)$$

où $\Delta(s)$ est l'erreur de modélisation.

On suppose que :

1. Les paramètres du système nominal sont connue, c'est-à-dire $G_{p0}(s)$ est connu.
2. $\Delta(s)$ est une fonction rationnelle à paramètres réels, en plus, elle est stable et au moins propre.
3. Il existe une fonction rationnelle et connue $W(s)$ vérifiant elle aussi, la condition 2 telle que : $|\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega$.

Théorème (III.5) [53,54,55]

Avec les suppositions (1,2,3), le système augmenté $G_a(s) = G_p(s) + H(s)$ serait ASPR si $H(s)$ est conçu selon les conditions suivantes :

1. $H(s)$ est stable et son degré relatif est zéro ou un.
2. Le système nominal en boucle fermée est stable.
3. Les coefficients de la fonction de transfert rationnelle $\Delta(s)$ sont réels. $\Delta(s)$ est propre ou strictement propre et n'a pas de pôles dans le demi plan droit. Elle est définie par :

$$\Delta(s) = \frac{G_{p0}(s)W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)} \quad (3.76)$$

pour une incertitude multiplicative et

$$\Delta(s) = \frac{W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)} \quad (3.77)$$

pour une incertitude additive.

4. Le gain H_∞ de $\Delta(s)$ est inférieur à l'unité ($\|\Delta(s)\|_\infty < 1$)

III.9 Conclusion

Le SAC constitue un contrôleur adaptatif à modèle de référence direct. Il présente de précieux avantages par rapport aux autres MRAC. Parmi ces avantages, la simplicité d'implantation et d'analyse, l'indépendance de l'ordre du système et de ses états et la possibilité de contrôler des systèmes qui ne sont pas à phase minimale. En plus, toutes les modifications introduites pour l'amélioration de la robustesse du MRAC standard peuvent être appliquée au SAC pour le même objectif.

Cependant, le SAC sous sa forme initiale, ne constitue pas une solution générale à un problème général. Ceci du fait qu'il impose que le système sous contrôle soit ASPR ou au moins, qu'il existe un compensateur pouvant rendre le système augmenté ASPR. Alors, la conception d'un tel compensateur est une tâche qui accompagne toujours l'application du SAC aux systèmes réels qui ne sont pas généralement ASPR. Ainsi des méthodes systématiques pour la conception de ce compensateur s'imposent.

Procédures de compensation des systèmes

Pour l'application du SAC

IV.1 Introduction

Nous avons vu dans le troisième chapitre que le SAC constitue un contrôleur adaptatif à modèle de référence simple, du point de vue implémentation. Il n'exige ni la connaissance de l'ordre de système ni celle de son gain en haute fréquence. Il n'exige pas non plus que le système soit à phase minimale. La seule condition exigée du système pour garantir une poursuite asymptotique est qu'il soit ASPR (concept déjà défini dans le troisième chapitre). Cette condition peut être contournée en augmentant le système et le modèle de référence comme présenté dans le même chapitre.

Avec cette solution, une tâche supplémentaire apparaît : on doit concevoir un compensateur pour rendre le système dont les paramètres varient dans certains intervalles connus d'avance ASPR pour toutes les valeurs permises de ces paramètres. Aussi, pour que la supposition que le système augmenté est une approximation raisonnable du système réel soit valable, il est préférable que la contribution de ce compensateur soit assez petite.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour la conception d'un tel compensateur [10,14,24,40], mais aucune de ces méthodes n'est procédurale pour le cas des systèmes intervalles. Certaines méthodes [12,36,38] ne prennent pas en considération d'une manière stricte la condition de stabilité de système en boucle fermée fictif représenté par la figure 3.1. Ainsi, elles ne garantissent pas que le système augmenté soit ASPR sur tout l'intervalle de variation des paramètres du système réel.

Dans ce chapitre, en se basant sur les lemmes cités dans le troisième chapitre, nous allons étendre l'application de certaines méthodes de conception du compensateur et les rendre plus procédurales. Ceci, en prenant en compte les variations des paramètres du système et la robustesse en présence de dynamique inconnue. Certaines de ces procédures sont propres aux systèmes SISO, d'autres peuvent être étendues aux systèmes MIMO.

L'efficacité de ces méthodes est testée en les appliquant à certains exemples.

IV.2 Conception de compensateur par la méthode de Bar Kana

Le compensateur proposé par Bar Kana est de la forme suivante :

$$H(s) = \frac{D}{1 + \tau s}$$

où D est le gain du compensateur et τ sa constante de temps. La constante de temps du compensateur est choisie très inférieure à celle du modèle de référence, car on veut que le régime transitoire du compensateur s'annule plus vite par rapport à celui du modèle.

Le gain D est choisi de manière à assurer la condition ASPR sur tout l'intervalle de

variation des paramètres.

IV.3 Conception dans le domaine temporel en utilisant le théorème de Kharitonov

Dans cette section, nous considérons le théorème (III.4) établi dans [36]. Ce théorème exploite la relation entre la positivité et la stabilité, et ne prend en compte qu'une forme particulière du compensateur. Quoique ce théorème se base sur le lemme (III.6), il ne prend pas en compte d'une manière stricte, en réalité, la stabilité du système fictif en boucle fermée (figure 3.1) pendant le choix des paramètres du compensateur. Ceci rend le système augmenté conçu en se basant sur ce théorème non ASPR pour certaines valeurs permises des paramètres du système réel. Nous utilisons ici le théorème de Kharitonov (dédié à l'analyse de la robustesse) pour guider le choix des paramètres du compensateur, de telle manière que le système soit ASPR pour toutes les valeurs des paramètres.

Le système sous contrôle est donné par sa fonction de transfert :

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = K_p \frac{N(s)}{D(s)} \quad K_p > 0 \quad (4.1)$$

où $N(s)$ et $D(s)$ sont des polynômes "monics" d'ordres m et n respectivement.

On suppose que :

1. Une borne supérieure de degré relatif $\gamma_p = n - m$ est connue et est notée n^* .
2. $N(s)$ est stable (le système est à phase minimale).
3. Des valeurs approximatives de K_p et de $|G_p(j0)|$ sont connues.

Nous utilisons la forme du compensateur donnée par le théorème (III.4).

Le système augmenté est donné par sa fonction de transfert :

$$G_a(s) = G_p(s) + H(s) \quad (4.2)$$

Le compensateur est décrit par :

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n^*-1} F_i(s) \quad n^* \geq 2 \quad (4.3)$$

où

$$F_i(s) = \frac{f_i}{Q_i(s)} \quad i = 1, \dots, n^* - 1 \quad (4.4)$$

$Q_i(s)$ est un polynôme "monic" stable avec degré $(Q_i(s)) = n^* - i$.

$$K_p \gg f_i \gg \dots \gg f_{n^*-1} \quad \text{et} \quad |G_p(j0)| \gg |H(j0)| \quad (4.5)$$

$Q_i(s)$ peut être choisi comme étant égal à $(s + \alpha_i)^{n^* - i}$, $\alpha_i > 0$ [38].

Alors, $H(s)$ prend la forme :

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n^*-1} F_i(s) = \sum_{i=1}^{n^*-1} \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \quad i=1,2,\dots,n^*-1 \quad (4.6)$$

où f_i et α_i sont des paramètres à calculer.

Le système augmenté s'écrit alors :

$$G_i(s) = G_{i-1}(s) + F_i(s) = G_{i-1}(s) + \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \quad (4.7)$$

Ici, selon l'estimation de n^* , on obtient deux cas

1. Si $n^* - i \geq \gamma_p$, le degré relatif de $G_i(s)$ est γ_p .
2. Si $n^* - i \leq \gamma_p - 1$, le degré relatif de $G_i(s)$ est $\gamma_p - 1$ (il diminue d'une unité).

Ainsi, à la fin de la procédure de conception du compensateur, nous aurons un système augmenté dont le degré relatif égal à un.

Dans [36], la condition imposée est que si les paramètres f_i sont choisis suffisamment petits à chaque itération, le système

$$G_{CL_i}(s) = \frac{G_{i-1}(s)}{1 + G_{i-1}(s)F_i^{-1}(s)}$$

sera stable.

Alors le système augmenté à l'étape i

$$G_i(s) = G_{i-1}(s) + F_i(s)$$

sera à phase minimale.

Ainsi, si ces conditions sont satisfaites pour toutes les itérations, le système augmenté global

$$G_a(s) = G_p(s) + H(s)$$

sera à phase minimale et de degré relatif égal à un. Ceci remplit les conditions du lemme (III.6) et garantit que le système augmenté soit ASPR. Mais il n'y a pas de méthode permettant de tester si les paramètres f_i choisis sont suffisamment petits pour garantir que $G_{CL_i}(s)$ soit stable. Nous proposons donc, d'utiliser le théorème de Kharitonov [11] pour tester la stabilité de ce système pour toutes les valeurs des paramètres du processus. Ceci permettra de décider quant à la validité du choix du paramètre f_i .

IV.3.1 Analyse de la robustesse par le théorème de Kharitonov

Considérons la famille suivante de polynômes:

$$P(s, a) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, \quad 0 \leq \underline{a}_k \leq a_k \leq \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

où les nombres réels \underline{a}_k et \bar{a}_k sont respectivement, les valeurs minimale et maximale du paramètre a_k . Soit $a = (a_0, \dots, a_n)$, alors, on définit la famille de polynôme

$$A = \left\{ a \in R^{n+1}, \quad \underline{a}_k \leq a_k \leq \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (4.9)$$

A est "Hurwitz" si tous les polynômes appartenant à A le sont. On définit les quatre polynômes de Kharitonov comme suit [22, 42, 79].

$$\begin{aligned} K_{11}(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \underline{a}_5 s^5 + \dots \\ K_{12}(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \bar{a}_5 s^5 + \dots \\ K_{21}(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \underline{a}_5 s^5 + \dots \\ K_{22}(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \bar{a}_5 s^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Théorème (IV.1) . Théorème de Kharitonov [22, 79, 42].

La famille de polynômes A définie ci-dessus est stable si et seulement si les quatre polynômes de Kharitonov sont stables.

IV.3.2 Conception du compensateur

Considérons maintenant le système non ASPR à une seule entrée et une seule sortie :

$$G_p(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{C_m s^m + C_{m-1} s^{m-1} + \dots + C_0}{s^n + B_{n-1} s^{n-1} + \dots + B_0} \quad (4.11)$$

où les coefficients peuvent varier dans les intervalles définis comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{C}_i &\leq C_i \leq \bar{C}_i & i = 0, 1, \dots, m \\ \underline{B}_j &\leq B_j \leq \bar{B}_j & j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

on suppose que :

1. Une valeur maximale de n^* est connue.
2. Le polynôme $N(s)$ est "Hurwitz".

Soit le compensateur déjà cité de la forme :

$$F_i(s) = \frac{f_i}{Q_i(s)} = \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \quad i = 1, \dots, n^* - 1 \quad (4.13)$$

où f_i et α_i sont les paramètres de conception. Les paramètres α_i sont initialement choisis de telle sorte que le compensateur soit plus rapide que le modèle de référence.

Ceci permet au régime transitoire du compensateur de s'annuler très vite devant celui du modèle de référence . Les autres paramètres f_i peuvent être choisis tels que [36] :

$$\begin{aligned} f_i &\ll f_{i-1} \quad \text{pour } i = 2, 3, \dots, n^* - 1 \\ f_1 &\ll \min\{C_j > 0, j = 0, 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ainsi, la fonction de transfert du système augmenté à l'étape i peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} G_i(s) &= \frac{N_i(s)}{D_i(s)} = G_{i-1}(s) + F(s) = G_{i-1}(s) + \frac{f_i}{(s + \alpha_i)^{n^* - i}} \\ &= \frac{N_{i-1}(s)(s + \alpha_i)^{n^* - i} + f_i D_{i-1}(s)}{D_{i-1}(s)(s + \alpha_i)^{n^* - i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

où

$$G_0(s) = G_p(s)$$

Soit la fonction

$$G_i(s) = \frac{N_i(s)}{D_i(s)} = \frac{C_{m_i}^i s^{m_i} + C_{m_i-1}^i s^{m_i-1} + \dots + C_0^i}{s^{n_i} + B_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + B_{n_i-2}^i s^{n_i-2} + \dots + B_0^i} \quad (4.16)$$

telle que :

$$n_i = \deg(D_i(s)) \text{ et } m_i = \deg(N_i(s)), \quad m_0 = m, n_0 = n, C_j^0 = C_j, B_j^0 = B_0$$

Cette fonction de transfert est strictement définie par le vecteur suivant :

$$V_i = [C_{m_i}^i \quad C_{m_i-1}^i \quad \dots \quad C_0^i \quad B_{n_i-1}^i \quad \dots \quad B_0^i] \quad (4.17)$$

avec

$$V_0 = [C_m \quad C_{m-1} \quad \dots \quad C_0 \quad B_n \quad \dots \quad B_0] \quad (4.18)$$

Il faut noter que chaque composante du vecteur V_i est une fonction des composantes du vecteur V_{i-1} et du paramètre f_i , choisis à l'étape i . Ainsi, ces paramètres peuvent varier dans des intervalles qu'on peut calculer connaissant les intervalles donnés par l'équation (4.12).

Les valeurs minimales et maximales de ces paramètres sont écrites comme suit :

$$\bar{V}_i = [\bar{C}_{m_i}^i \quad \bar{C}_{m_i-1}^i \quad \dots \quad \bar{C}_0^i \quad \bar{B}_{n_i-1}^i \quad \dots \quad \bar{B}_0^i] \quad (4.19)$$

$$\underline{V}_i = [\underline{C}_{m_i}^i \quad \underline{C}_{m_i-1}^i \quad \dots \quad \underline{C}_0^i \quad \underline{B}_{n_i-1}^i \quad \dots \quad \underline{B}_0^i] \quad (4.20)$$

Les composantes de ces deux vecteurs sont données par les équations suivantes :

$$\underline{C}_l^i = \min_{V_{i-1}} [C_l^i], \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \quad l = 0, 1, \dots, m_i$$

Soumise à :

$$\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \overline{C}_r^{i-1}, & r = 0,1,2,\dots,m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \overline{B}_p^{i-1}, & p = 0,1,2,\dots,n_{i-1}-1 \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\overline{C}_l^i = \max_{V_{i-1}} [C_l^i] \quad i = 1,2,\dots,n^* - 1, \quad l = 0,1,\dots,m_i$$

Soumise à :

$$\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \overline{C}_r^{i-1}, & r = 0,1,2,\dots,m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \overline{B}_p^{i-1}, & p = 0,1,2,\dots,n_{i-1}-1 \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\underline{B}_k^i = \min_{V_{i-1}} [B_k^i] \quad i = 1,2,\dots,n^* - 1, \quad k = 0,1,\dots,n_i - 1$$

Soumise à :

$$\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \overline{C}_r^{i-1}, & r = 0,1,2,\dots,m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \overline{B}_p^{i-1}, & p = 0,1,2,\dots,n_{i-1}-1 \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\overline{B}_k^i = \max_{V_{i-1}} [B_k^i] \quad i = 1,2,\dots,n^* - 1, \quad k = 0,1,\dots,n_i - 1$$

Soumise à :

$$\begin{cases} \underline{C}_r^{i-1} \leq C_r^{i-1} \leq \overline{C}_r^{i-1}, & r = 0,1,2,\dots,m_{i-1} \\ \underline{B}_p^{i-1} \leq B_p^{i-1} \leq \overline{B}_p^{i-1}, & p = 0,1,2,\dots,n_{i-1}-1 \end{cases} \quad (4.24)$$

Le polynôme caractéristique du système fictif en boucle fermée formé de $G_{i-1}(s)$ dans la chaîne directe et de $F_i^{-1}(s)$ dans la chaîne de retour est :

$$P_i(s) = N_{i-1}(s)(s + \alpha_i)^{n^* - i} + f_i D_{i-1}(s) = \sum_{j=1}^n q_j^i s^j \quad (4.25)$$

$$i = 1,2,\dots,n^* - 1 \quad \text{et} \quad q_j^i = q_j^i(V_i, f_i), \quad j = 0,1,\dots,p_i$$

où p_i est le degré de P_i .

Les coefficients de $P_i(s)$ dépendent des composantes de V_i et du paramètre choisi f_i .

Les valeurs maximale et minimale des paramètres du polynôme caractéristique $P_i(s)$ sont déterminées par la procédure d'optimisation des fonctions avec contraintes :

$$q_{-j}^i = \min_{V_i} [q_j^i(V_i, f_i)], \quad i = 1,2,\dots,n^* - 1, \quad j = 0,1,2,\dots,p_i. \quad (4.26)$$

Soumise à :

$$\underline{V}_i(h) \leq V_i(h) \leq \bar{V}_i(h), \quad h = 0, 1, 2, \dots, m_i + n_i + 1$$

$$\bar{q}_j^i = \max_{V_i} [q_j^i(V_i, f_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n^* - 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p_i. \quad (4.27)$$

Soumise à :

$$\underline{V}_i(h) \leq V_i(h) \leq \bar{V}_i(h), \quad h = 0, 1, 2, \dots, m_i + n_i + 1$$

où $X(h)$ est la h ième composante du vecteur X .

Les quatre polynômes de Kharitonov correspondants au polynôme $P_i(s)$ peuvent être formés et la stabilité de $P_i(s)$ peut être testée sur tout l'intervalle de variation des paramètres du système $G_p(s)$. En effet, les paramètres de $P_i(s)$ sont fonctions des paramètres de $G_p(s)$. Si ces quatre polynômes sont stables, on passe à l'étape $i+1$. Sinon, il faut changer les valeurs de α_i et de f_i déjà choisis et refaire le test. Dans ce cas et conformément à l'inégalité (4.14), une petite diminution de f_i et une petite augmentation de α_i résolvent généralement le problème. La procédure est répétée jusqu'à ce que toutes les fonctions $F_i(s)$ soient calculées.

IV.4 Conception du compensateur en utilisant la première colonne de la table de Routh

La méthode proposée dans la section précédente est utilisée pour guider le choix des paramètres du compensateur ayant la forme particulière donnée dans [36,38]. Dans cette section, nous proposons une autre procédure de conception basée sur le lemme (III.6). Ensuite, nous utilisons des contraintes générées à partir de la première colonne de la table de Routh pour assurer que le système fictif en boucle fermée soit stable pour toutes les valeurs permises des paramètres du processus. Le système peut ne pas être à phase minimale, dans ce cas, seulement son ordre et les valeurs nominales des paramètres ainsi que leurs intervalles de variation doivent être connus.

Le système est décrit par la fonction de transfert donnée par l'équation (4.11). Les intervalles de variation des paramètres sont définis par l'équation (4.12). Pour répondre aux

conditions du lemme (III.6), il faut que le système augmentée ait un degré relatif égal à l'unité et que le système fictif en boucle fermée soit stable.

On suppose que :

1. Les valeurs nominales des paramètres du système sont connues, ainsi que les intervalles dans lesquels ces paramètres peuvent varier.
2. L'ordre du système est connu, ceci pour pouvoir répondre à la condition sur le degré relatif du système augmenté.

La condition 2 n'est pas nouvelle en contrôle adaptatif et peut être satisfaite pour les systèmes linéaires. Une méthode pour l'estimation de l'ordre des systèmes est donnée dans [69].

Le compensateur est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$R_p(s) = \frac{f_{n-1}s^{n-1} + f_{n-2}s^{n-2} + \dots + f_0}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_0} = \frac{N_R(s)}{D_R(s)} \quad (4.28)$$

Notons que ce compensateur satisfait la condition imposée sur le degré relatif du système augmenté par le lemme (III.6). Le dénominateur de $R_p(s)$ doit être choisi d'avance de telle sorte que les constantes de temps du compensateur soient plus petites que celles du modèle de référence. Les coefficients du numérateur sont des paramètres à concevoir. La deuxième condition devant être vérifiée est que $R_p^{-1}(s)$ stabilise le système fictif en boucle fermée. En d'autres termes, il faut que le polynôme caractéristique de ce système soit stable. Ce polynôme est donné par l'équation suivante :

$$P(s) = a_{2n-1}s^{2n-1} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + a_0 = N(s)D_R(s) + D(s)N_R(s) \quad (4.29)$$

où

$$a_k = f(C_i, B_j, \dots, f_l) \text{ avec } \begin{cases} k = 0, 1, \dots, 2n-1 \\ i = 0, 1, \dots, m \\ j = 0, 1, \dots, n-1 \\ l = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (4.30)$$

On sait déjà que la contribution du compensateur doit être minimale pour garantir que l'erreur en régime permanent soit suffisamment petite. Il faut alors trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour garantir que le système augmenté soit ASPR et que la contribution du filtre soit minimale. Il faut noter que la fonction de transfert du compensateur peut être écrite sous la forme :

$$R_p(s) = \frac{f_{n-1}s^{n-1}}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_0} + \frac{f_{n-2}s^{n-2}}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_0} + \dots + \frac{f_0}{s^n + h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_0} \quad (4.31)$$

Ainsi, pour minimiser la contribution du compensateur, il faut que la gain dchacune de ses composantes soit minimisée, c'est-à-dire qu'il faut minimiser tous les paramètres $f_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$. Alors il suffit de minimiser le critère suivant :

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \quad (4.32)$$

La minimisation de ce critère est effectuée pour toutes les valeurs permises des paramètres du processus en prenant en compte la stabilité du polynôme caractéristique donné par l'équation (4.29). Ceci est accompli par la procédure de minimisation avec contrainte suivante :

$$\min|_F \left[\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \right]$$

$$\text{soumise à : } \left[\begin{array}{l} \min|_V [R_{1,k}(V, F)] \\ \text{soumise à } \underline{V} \leq V \leq \bar{V} \end{array} \right] \geq 0, k = 1, 2, \dots, 2n \quad (4.33)$$

où $F = [f_{n-1} \ f_{n-2} \ \dots \ f_0]$ est un vecteur formé des paramètres du compensateur et les vecteurs \underline{V}, V et \bar{V} ont été déjà défini. $R_{1,k}(V, F), k = 0, 1, \dots, 2n$, sont les éléments de la première colonne de la table de Routh qui correspond au polynôme (4.29).

Il faut noter que la calcul explicite des gradients des éléments de la première colonne de la table de Routh est très bénéfique pour leurs minimisations [48, 66, 76]. Nous allons établir une telle procédure de calcul en se basant sur la récursivité de calcul de la table de Routh elle-même [56]. La table de Routh correspondant au polynôme donné par l'équation (4.29) est donnée par la tableau 4.1.

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ R_{2n,1} & R_{2n,2} & R_{2n,3} & \dots & R_{2n,n} \end{bmatrix}$$

TAB 4.1 - Table de Routh pour le polynôme caractéristique de l'équation (4.29)

Les éléments des deux premières lignes sont établis directement des coefficients du polynôme caractéristique de l'équation (4.29) et sont donnés par la convolution suivante :

$$p(s) = N \otimes D_R + D \otimes N_R = a_{2n-1}s^{2n-1} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + a_0 \quad (4.34)$$

où \otimes dénote l'opération de convolution et

$$N = [C_m \ C_{m-1} \ \dots \ C_0], \quad D = [B_{n-1} \ B_{n-2} \ \dots \ B_0]$$

$$N_R = [f_{n-1} \ f_{n-2} \ \dots \ f_0], \quad D_R = [h_{n-1} \ h_{n-2} \ \dots \ h_0]$$

On peut alors directement déduire les dérivées partielles

$$\frac{\partial a_k}{\partial V(i)}, k = 0, 1, \dots, 2n-1, i = 1, 2, \dots, n+m+1$$

Les autres éléments sont donnés par :

$$R_{i,j} = R_{i-2,j+1} - \frac{R_{i-2,1}R_{i-1,j+1}}{R_{i-1,1}} \quad (4.35)$$

Alors, leurs dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial R_{i,j}}{\partial V(k)} = \frac{\partial R_{i-2,j+1}}{\partial V(k)} - \frac{\left(\frac{\partial R_{i-2,1}}{\partial V(k)} R_{i-1,j+1} + \frac{\partial R_{i-1,j+1}}{\partial V(k)} R_{i-2,1} \right) R_{i-1,1} - \frac{\partial R_{i-1,1}}{\partial V(k)} (R_{i-2,1} R_{i-1,j+1})}{(R_{i-2,1})^2} \quad (4.36)$$

$$i = 3, 4, \dots, 2n, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n+m+1, \quad \frac{\partial R_{i,n}}{\partial V(k)} = 0$$

Ainsi, les gradients des fonctions $R_{i,k}(V, F), k = 1, 2, \dots, 2n$ peuvent être calculés et leurs minimisations seront rapides

Il faut noter que f_{n-1} donné dans l'équation (4.28) doit être non nul pour satisfaire la condition sur le degré relatif. Dans la procédure de l'équation (4.33), pendant que la contrainte assure que le système fictif en boucle fermée reste stable, la minimisation du critère de performance assure que la contribution du compensateur sera minimale. Ainsi, cette procédure réalise un compromis entre ces deux contraintes.

Remarque

Supposons que les éléments $R_{i,k}, k = 2, \dots, 2n$ peuvent varier dans leurs intervalles correspondants

$\left[R_{-1,k}, \bar{R}_{1,k} \right]$, alors l'opération d'optimisation définie par l'équation (4.33) s'arrête au premier intervalle

$\left[R_{-1,k}, \bar{R}_{1,k} \right]$ contenant un zéro [3], car l'élément $R_{1,k}$ étant un pivot pour la prochaine ligne de la

table de Routh, les éléments de cette ligne ne seront pas bornés. Ainsi, il faut changer la vecteur F donné comme valeur initiale à l'opération d'optimisation de l'équation (4.33).

IV.5 Conception du compensateur dans le domaine fréquentiel

Dans cette section, nous allons considérer une méthode de conception du compensateur pour les systèmes contenant une dynamique inconnue. Cette méthode est étendue de manière à être applicable aux systèmes intervalles déjà donnés par les équations (4.11) et (4.12). L'incertitude sur les paramètres du système est ramenée à une dynamique supplémentaire sous forme d'une incertitude multiplicative ou additive. Cette dynamique est ajoutée au système nominal supposé connu ou multiplié par celui-ci.

L'incertitude de modélisation des systèmes est généralement divisée en deux catégories, incertitudes structurées et incertitudes non structurées. Pour l'incertitude structurée, le modèle de l'incertitude et le rang de variation de ses paramètres sont supposés connus. Par exemple, lorsqu'un modèle valide pour la fonction de transfert d'un système est connu, mais l'emplacement exact des pôles, des zéros ou la valeur de son gain ne sont pas connues. Pour l'incertitude non structurées, le

système est moins connu et on suppose seulement que le réponse fréquentielle reste toujours entre deux bornes.

L'incertitude structurée peut être modélisée de plusieurs façons dont l'incertitude additive et l'incertitude multiplicative. Supposons que le système est modélisé par la fonction de transfert $G(s)$ et le système réel par la fonction de transfert $\tilde{G}(s)$ avec :

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta_a(s)$$

où l'erreur de modélisation ou incertitude additive est donnée par :

$$\Delta_a(s) = \tilde{G}(s) - G(s)$$

L'incertitude additive est utilisée pour modéliser les erreurs en haute fréquence qui sont négligées soit par ignorance soit par réduction du modèle.

Dans le cas de l'incertitude multiplicative, on suppose que le système réel est décrit par :

$$\tilde{G}(s) = G(s)[1 + \Delta_m(s)]$$

où l'incertitude multiplicative (l'erreur de modélisation) est donnée par :

$$\Delta_m(s) = \frac{\tilde{G}(s) - G(s)}{G(s)}$$

Ce type d'incertitude peut être utilisé pour modéliser les erreurs dues à la dynamique des actionneurs ou à celle des capteurs.

On remarque que l'incertitude multiplicative représente l'erreur relative de modélisation, tandis que l'incertitude additive représente l'erreur absolue [5].

Considérons maintenant le système intervalle donné par les équations (4.11) et (4.12). Quand les paramètres prennent leurs valeurs nominales, le système est dit nominal et est décrit par :

$$G_{p0}(s) = \frac{C_m^0 s^m + C_{m-1}^0 s^{m-1} + \dots + C_0^0}{s^n + B_{n-1}^0 s^{n-1} + B_{n-2}^0 s^{n-2} + \dots + B_0^0} \quad (4.37)$$

L'incertitude sur les paramètres peut être représentée par une incertitude multiplicative $\Delta_m(s)$ telle que :

$$G_p(s) = G_{p0}(s)[1 + \Delta_m(s)] \quad (4.38)$$

ainsi

$$\Delta_m(s) = \frac{G_p(s) - G_{p0}(s)}{G_{p0}(s)} \quad (4.39)$$

On peut aussi la représenter sous forme d'incertitude additive :

$$G_p(s) = G_{p0}(s) + \Delta_a(s) \quad (4.40)$$

avec

$$\Delta_a(s) = G_p(s) - G_{p0}(s) \quad (4.41)$$

Les équations (4.39) et (4.41) montrent que les incertitudes multiplicative et additive dépendent des paramètres du système réel. Ces paramètres varient pour les systèmes intervalles dans des intervalles connus d'avance. Alors, dans la conception du compensateur qui assure que le système augmenté (contenant la dynamique inconnue supplémentaire) soit ASPR, on considère le cas le plus défavorable pour cette incertitude.

A cet effet, nous introduisons une procédure d'optimisation qui détermine le maximum de l'incertitude pour chaque fréquence (c'est-à-dire pour un nombre convenable de fréquences).

Considérons le vecteur V déjà défini

$$V = [C_m \ C_{m-1} \dots \ C_0 \ B_{n-1} \dots \ B_0]$$

et le vecteur Z contenant les échantillons de fréquence pour lesquelles s'effectue l'optimisation

$$Z = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_n] \quad (4.42)$$

alors

$$\begin{aligned} |\Delta_{\max}(j\omega_k)| &= \underset{V}{\text{maximiser}} [|\Delta(j\omega_k)|] \quad k = 1, 2, \dots, p \\ \text{soumise à } &\begin{cases} C_i \leq C_i \leq \bar{C}_i & i = 0, 1, \dots, m \\ B_j \leq B_j \leq \bar{B}_j & j = 0, 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Il est important de noter que cette optimisation est effectuée pour chaque fréquence du vecteur dont les composantes doivent être choisies de telle manière que Δ_{\max} décrive bien le maximum de $\Delta(j\omega), \forall \omega$. La quantité $\Delta(j\omega)$ représente soit l'incertitude multiplicative soit l'incertitude additive selon la modélisation considérée ou les paramètres du système varient dans les intervalles prédéfinis.

Pour pouvoir appliquer la méthode de conception du compensateur dédiée aux systèmes contenant une dynamique inconnue (qui est dans notre cas, l'incertitude sur les paramètres) [52,53,54,55], nous supposons qu'il existe une fonction de transfert rationnelle connue $W(s)$, vérifiant les conditions suivantes.

1. $W(s)$ est une fonction rationnelle à paramètres réels.
2. $W(s)$ est propre ou strictement propre ($|W(j\omega)|$ est fini) et n'a pas de pôles dans le demi plan droit ($W(s)$ stable), en plus, $W(s)$ vérifie :

$$|W(j\omega)| \geq |\Delta_{\max}(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (4.44)$$

Nous supposons que le système nominal $G_{p0}(s)$ décrit par l'équation (4.37) est connu. Considérons maintenant le système augmenté :

$$G_a(s) = G_{p0}(s) + R_p(s) \quad (4.45)$$

Alors le théorème (III.5) peut être appliqué au système intervalle représenté par $G_{p0}(s)$ et $\Delta_{\max}(s)$.

Ainsi, pour que le système augmenté $G_a(s) = G_{p0}(s) + R_p(s)$ contenant l'incertitude $\Delta(s)$ soit ASPR, le compensateur $R_p(s)$ doit être conçu selon les conditions suivantes :

1. $R_p(s)$ est stable avec un degré relatif égal à un ou zéro.
2. Le système nominal fictif en boucle fermée est stable.
3. Les coefficients de la fonction de transfert rationnelle $\tilde{\Delta}(s)$ sont réels. $\tilde{\Delta}(s)$ est propre ou strictement propre et n'a pas de pôles dans le demi-plan droit, elle est définie par :

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{G_{p0}(s)W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)} \quad (4.46)$$

pour une incertitude multiplicative et

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{W(s)}{G_{p0}(s) + R_p(s)} \quad (4.47)$$

pour une incertitude additive.

4. Le gain H_∞ de $\tilde{\Delta}(s)$ est inférieur à l'unité ($\|\tilde{\Delta}(s)\|_\infty < 1$).

Ainsi, il suffit de choisir $R_p(s)$ de telle sorte que $\|\tilde{\Delta}(s)\|_\infty < 1$ et $\tilde{\Delta}(s)$ soit stable. Le compensateur que nous considérons ici, a la même forme que celui donné par l'équation (4.28).

Les paramètres du dénominateur du compensateur sont toujours choisis d'avance de telle sorte que les constantes de temps du compensateur soient plus petites que celles du modèle de référence. Ensuite, on choisit une combinaison des paramètres f_i qui vérifie à la fois que $\tilde{\Delta}(s)$ est stable et que $\|\tilde{\Delta}(s)\|_\infty < 1$. Les méthodes classiques pour la stabilisation des systèmes peuvent être utilisées [5, 83].

IV.6 Résultats de simulations

Exemple 4.1

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode de conception du compensateur, proposée par Bar Kana [8].

Le système à contrôler est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_p(s) = \frac{C_0}{s^2 + B_1s + B_0}$$

Les paramètres de ce système peuvent varier dans les intervalles du tableau suivant :

Paramètres	Valeurs nominales	Intervalles de variation
C_0	2	1.5 à 2
B_1	4	2 à 4
B_0	3	2 à 3

TAB 4.2 - Valeurs nominales et intervalles de variations des paramètres

Le modèle de référence est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_m(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

L'entrée de référence est un signal carré d'amplitude ± 1 et de période 60 secondes.

Après les essais (variation des valeurs de D et τ), le compensateur est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{30}{1 + 0.4s}$$

Les cas considérés pour les simulations sont donnés par le tableau 4.3.

Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3
C_0	1.5	2	2
B_1	4	4	2
B_0	3	3	2

TAB 4.3 - Les cas considérés pour les simulations

On remarque que pour les cas considérés pour la simulation, le compensateur assure un suivi parfait malgré le changement des paramètres du système.

Les figures 4.1.(a,b,c) représentent les sorties du système et du modèle de référence, tandis que les figures 4.2.(a,b,c) représentent les grandeurs de commande correspondantes.

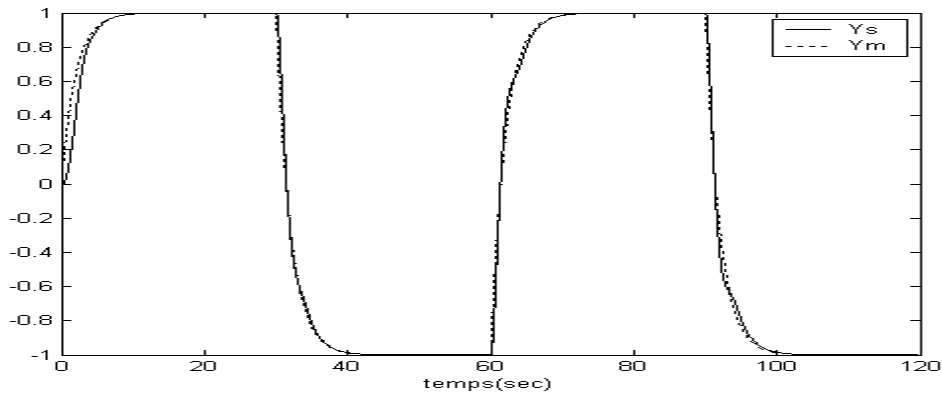


FIG. 4.1.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

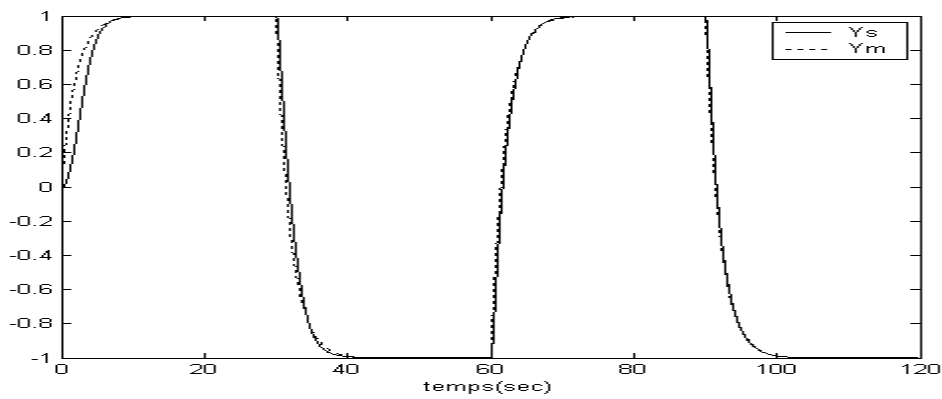


FIG. 4.1.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

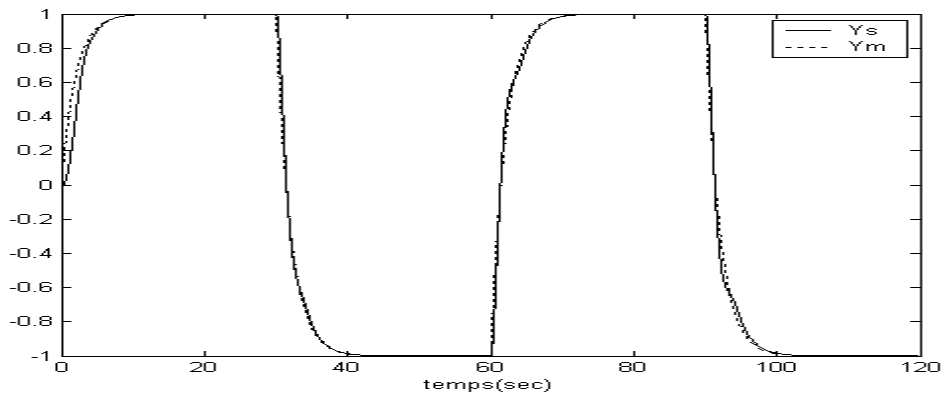


FIG. 4.1.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

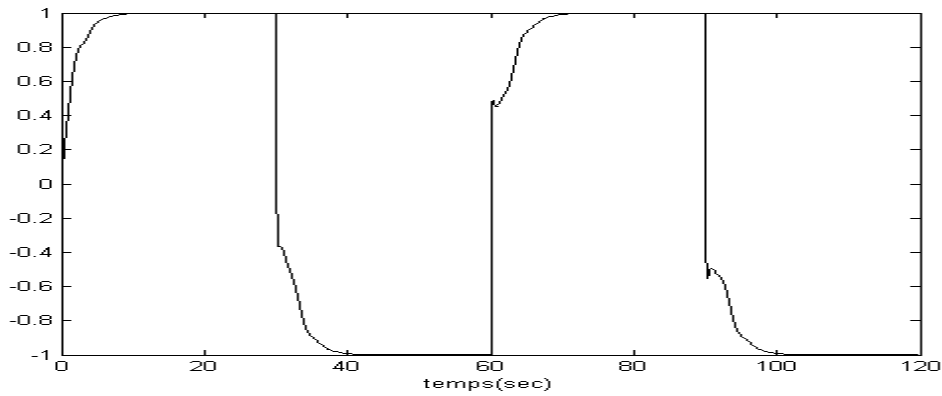


FIG. 4.2.a - Signal de commande, Cas 1

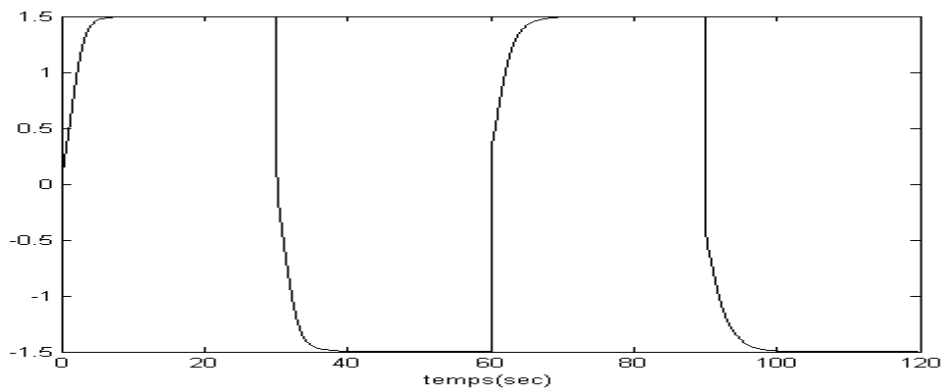


FIG. 4.2.b - Signal de commande, Cas 2

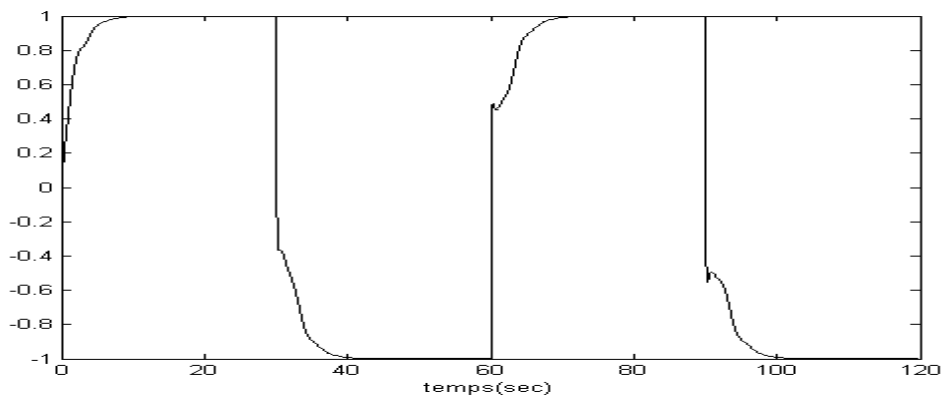


FIG. 4.2.c - Signal de commande, Cas 3

Exemple 4.2

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode de conception du compensateur proposée par le théorème de Kharitonov en gardant le même système et le même modèle que l'exemple 4.1.

La fonction de transfert du système est de la forme :

$$G_p(s) = \frac{C_0}{s^2 + B_1s + B_0}$$

Le modèle de référence est donné par :

$$G_m(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

L'entrée de référence est un signal carré d'amplitude ± 1 et de période 60 secondes.

Pour l'élaboration du compensateur en utilisant le théorème de Kharitonov, on procède ainsi :

1. D'après l'équation (4.7)

Pour l'étape $i=1$

$$G_1(s) = G_0(s) + F_1(s) = G_0(s) + \frac{f_1}{(s + \alpha_1)}$$

avec $G_0(s) = G_p(s)$

On a sélectionné $f_1=0.5$, $\alpha_1=2$.

En utilisant le polynôme $P(s, a)$ (équation 4.8), les quatre polynômes de Kharitonov sont donnés par :

$$K_{11}(s) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1s + \bar{a}_2s^2 + \bar{a}_3s^3 + \underline{a}_4s^4 + \underline{a}_5s^5 + \dots = 4 + 2.5s + 0.5s^2$$

$$K_{12}(s) = \underline{a}_0 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2s^2 + \underline{a}_3s^3 + \underline{a}_4s^4 + \bar{a}_5s^5 + \dots = 4 + 4s + 0.5s^2$$

$$K_{21}(s) = \bar{a}_0 + \underline{a}_1s + \underline{a}_2s^2 + \bar{a}_3s^3 + \bar{a}_4s^4 + \underline{a}_5s^5 + \dots = 5.5 + 2.5s + 0.5s^2$$

$$K_{22}(s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1s + \underline{a}_2s^2 + \underline{a}_3s^3 + \bar{a}_4s^4 + \bar{a}_5s^5 + \dots = 5.5 + 4s + 0.5s^2$$

Et on vérifie qu'ils sont stables.

Alors le système $G_1(s)$ est à phase minimale et de degré relatif égal à un.

Finalement, le compensateur est donné par :

$$F(s) = \frac{f_1}{(s + \alpha_1)} = \frac{0.5}{(s + 2)}$$

Les résultats de la simulation avec augmentation du système et du modèle pour chaque cas sont donnés par les figures suivantes :

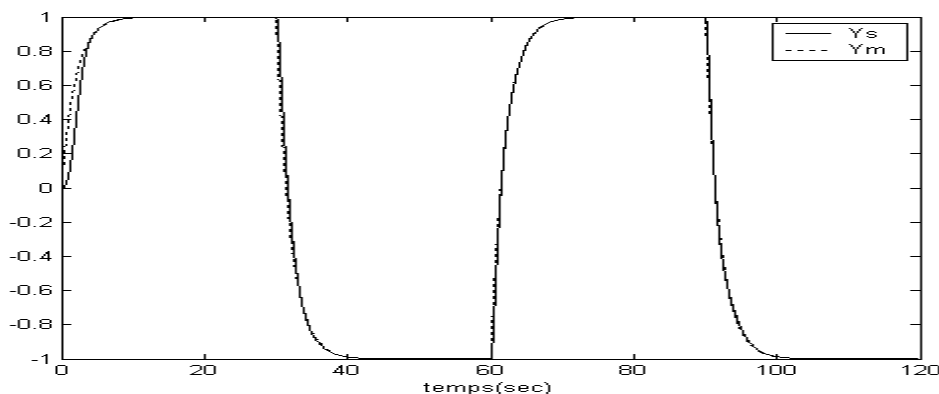


FIG. 4.3.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

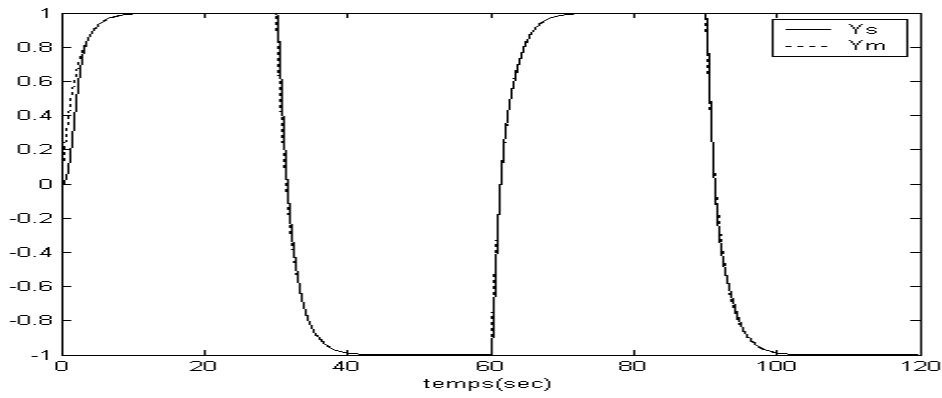


FIG. 4.3.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

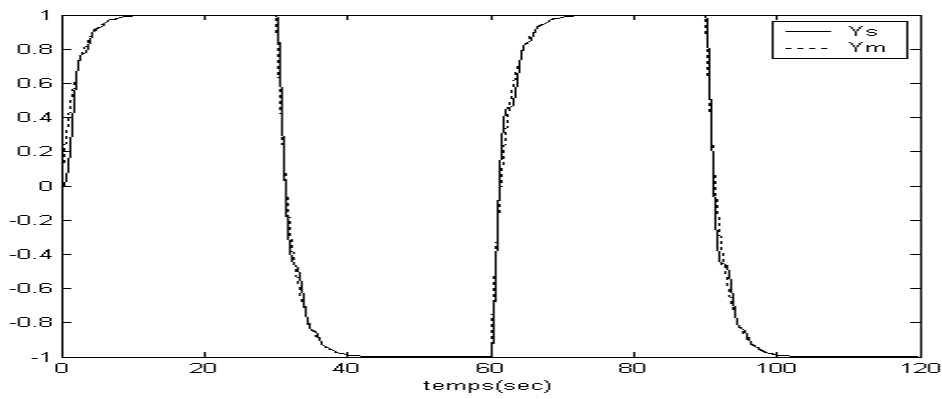


FIG. 4.3.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

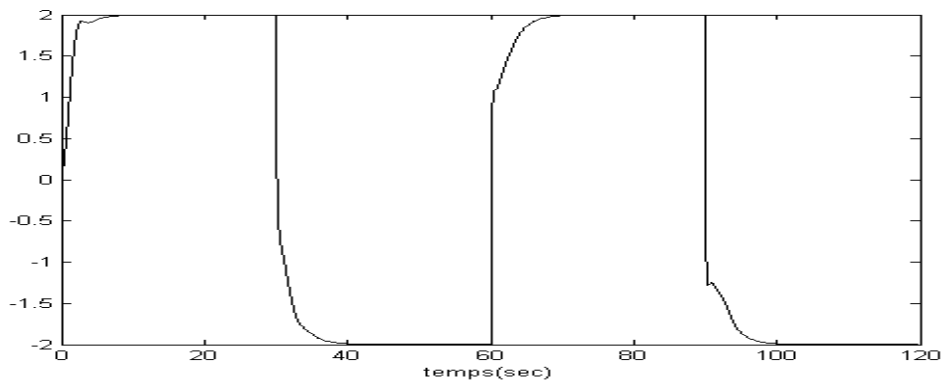


FIG. 4.4.a - Signal de commande, Cas 1

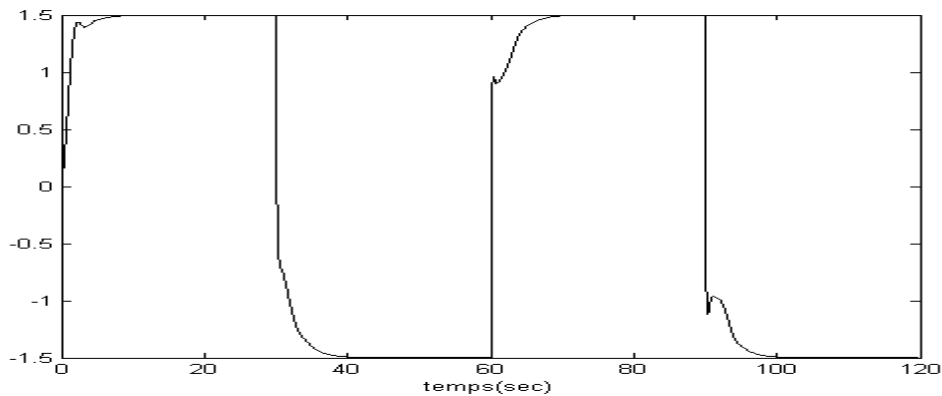


FIG. 4.4.b - Signal de commande, Cas 2

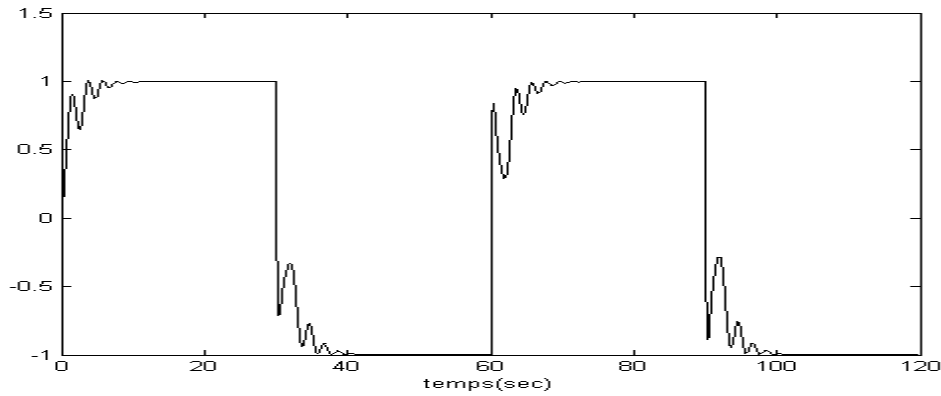


FIG. 4.4.c - Signal de commande, Cas 3

Exemple 4.3

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode de conception du compensateur proposée dans la section (IV.4) pour contourner la condition ASPR. Le système à contrôler est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_p(s) = \frac{C_0 + C_1s}{s^2 + B_1s + B_0}$$

Les paramètres de ce système peuvent varier dans les intervalles du tableau 4.4.

Paramètres	Valeurs nominales	Intervalles de variation
C_0	1.5	1 à 2
C_1	1.4	0 à 2
B_0	0	-2 à 2
B_1	0	-3 à 3

TAB 4.4 - Paramètres nominaux et intervalles de variation

Il est important de noter que le degré relatif du système peut changer de 1 à 2 selon la variation des paramètres du système.

Le modèle de référence est donné par :

$$G_m(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

Le compensateur est choisi de la forme que celle de l'équation 4.31.

Pour le calcul des paramètres f_i du compensateur, l'opération d'optimisation donnée par l'équation (4.33) a été effectuée. Il faut noter que le plus intéressant n'est pas de trouver un minimum global exact pour l'équation (4.33), mais c'est qu'il n'y a pas violation de la contrainte.

Le compensateur ainsi conçu est donné par :

$$R_p(s) = \frac{f_0}{s+3}$$

Ainsi, la constante de temps du compensateur est petite par rapport à celle du modèle de référence.

Le système augmenté est donné par :

$$G_a(s) = G_p(s) + R_p(s) = \frac{N_a(s)}{D_a(s)} = \frac{s^2(C_1 + f_0) + s(C_0 + 3C_1 + f_0B_1) + 3C_0 + f_0B_0}{s^3 + s^2(3 + B_1) + s(3B_1 + B_0) + 3B_0}$$

Le système augmenté $G_a(s)$ est ASPR si :

1) le degré relatif vaut un

2) $N_a(s)$ stable

La première condition est vérifiée si $C_1 + f_0 > 0$ pour toute variation de C_1 et donc, f_0 devra vérifier $f_0 > \max(-C_1)$.

La deuxième condition est vérifiée en sélectionnant le paramètre f_0 afin de stabiliser le polynôme

$N_a(s)$ en utilisant la méthode de Routh et en minimisant le critère $J = \frac{1}{2} f_0^2$

Et donc, $N_a(s)$ est stable si

$$C_1 + f_0 > 0$$

$$C_0 + 3C_1 + f_0B_1 > 0$$

$$3C_0 + f_0B_0 > 0$$

Pour toute variation des paramètres C_0, C_1, B_0 et B_1 .

Dans notre exemple, les paramètres du système varient suivant le tableau 4.4 ci-dessus. Le critère $J = \frac{1}{2} f_0^2$ est minimisé pour toute valeur petite de f_0 , donc, en sélectionnant $f_0 = 0.5/3$,

les inégalités ci-dessus sont vérifiées pour toute variation permise des paramètres C_0, C_1, B_0 et B_1 .

L'entrée de référence est un signal carré d'amplitude ± 1 et de période 60 secondes.

Les cas considérés pour les simulations sont donnés par le tableau 4.5 ou les matrices de pondération sont choisis comme: $T_i = T_p = I$.

Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3
C_0	1.5	1	1
C_1	1.4	0	0
B_0	0	-2	2
B_1	0	3	-3

TAB 4.5 - Les cas considérés pour les simulations

Les figures 4.5.(a,b,c) représentent les sorties du système et du modèle de référence.

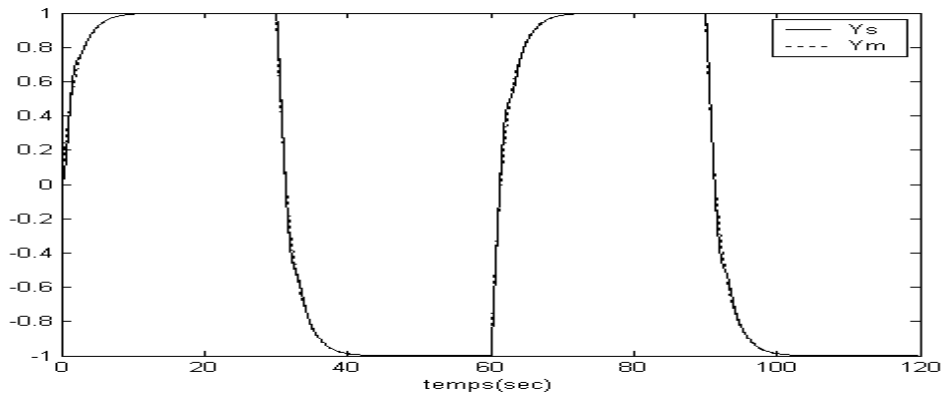


FIG. 4.5.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

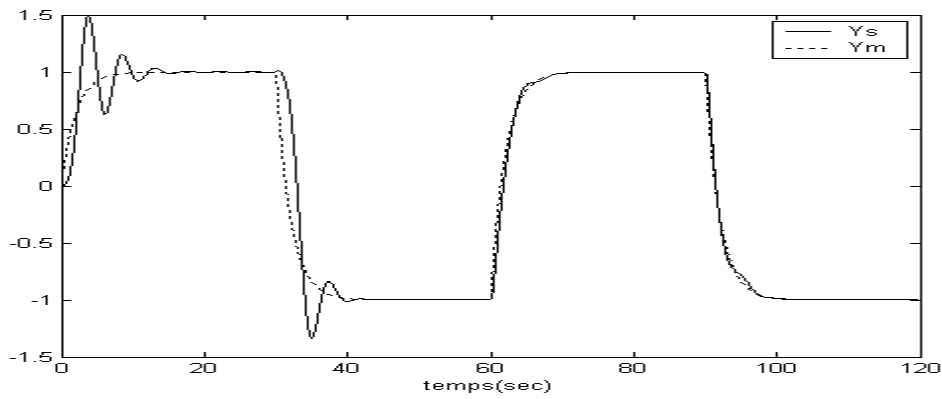


FIG. 4.5.b - Sorties du système et du modèle, Cas 2

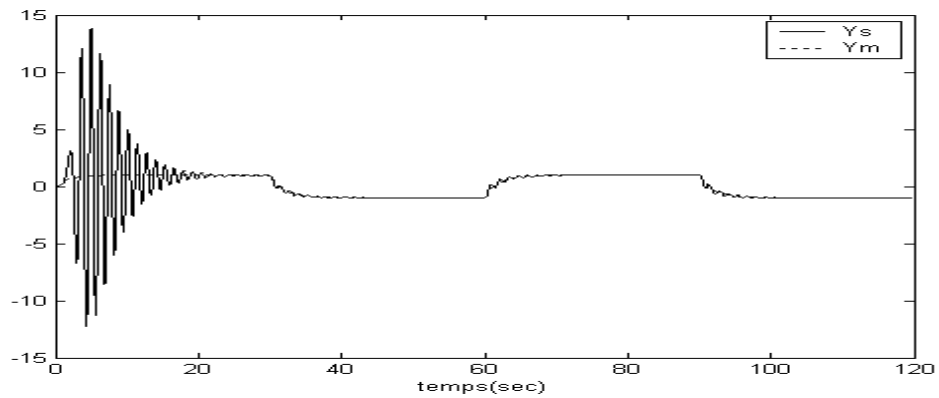


FIG. 4.5.c - Sorties du système et du modèle, Cas 3

Les commandes correspondantes sont données en figures 4.6.(a,b,c).

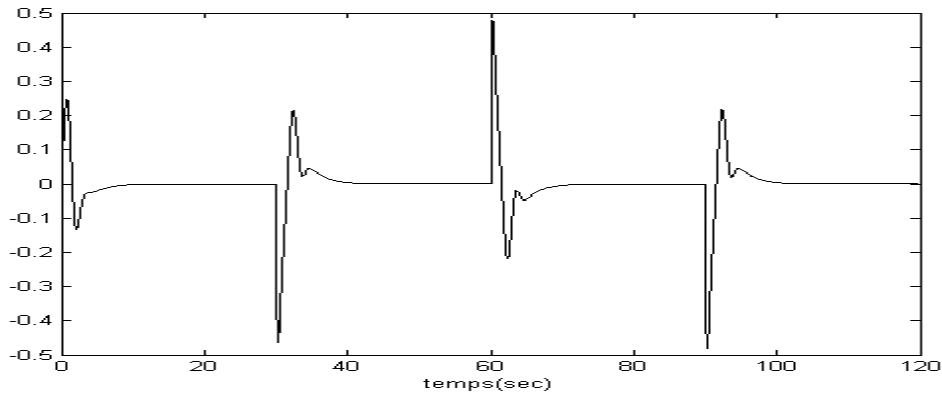


FIG. 4.6.a - Signal de commande, Cas 1

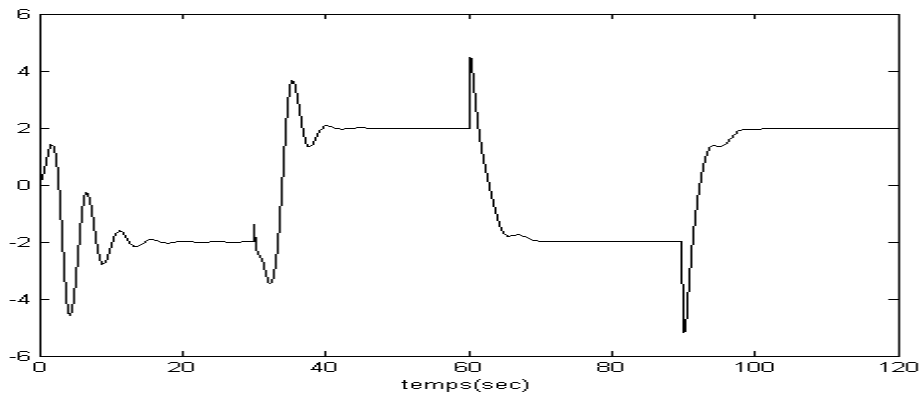


FIG. 4.6.b - Signal de commande, Cas 2

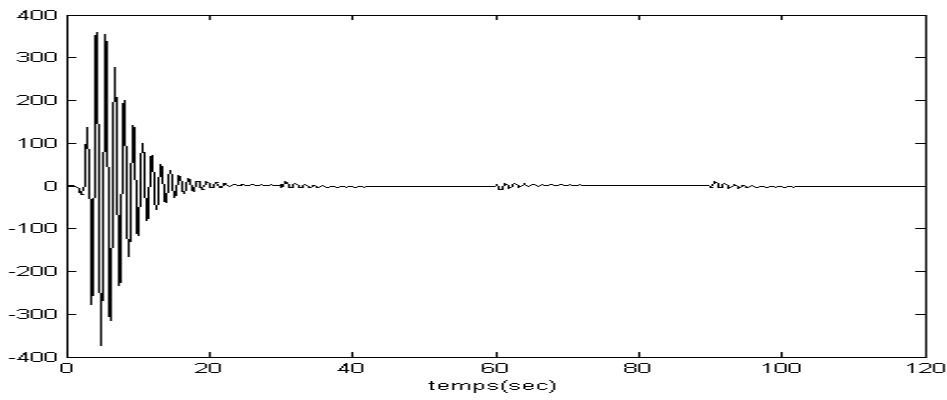


FIG. 4.6.c - Signal de commande, Cas 3

La norme d'ordre deux de la matrice K_r , et pour chaque cas est donnée en figures 4.7.(a,b,c).

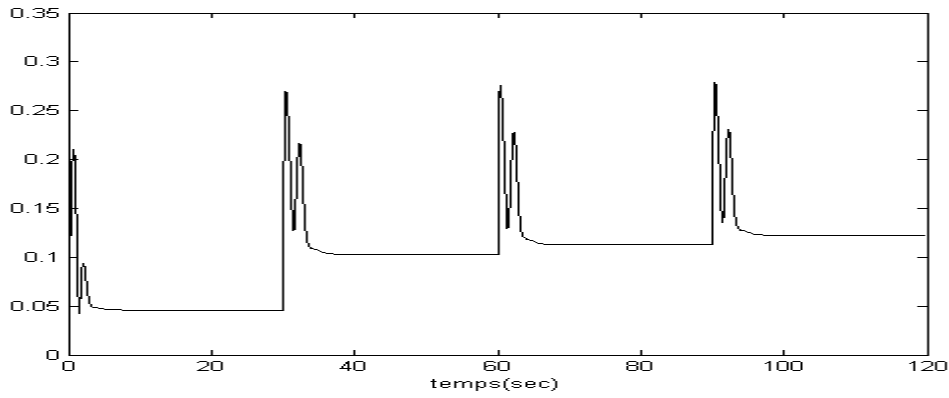


FIG. 4.7.a - Module du vecteur $K_r(t)$, Cas 1

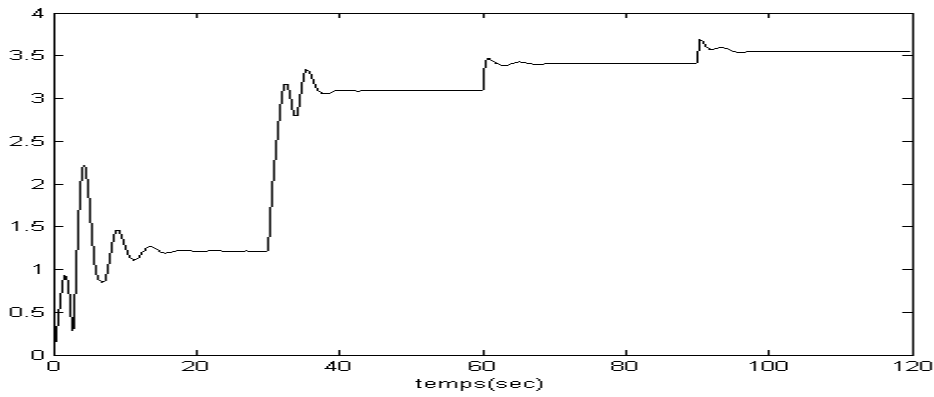


FIG. 4.7.b - Module du vecteur $K_r(t)$, Cas 2

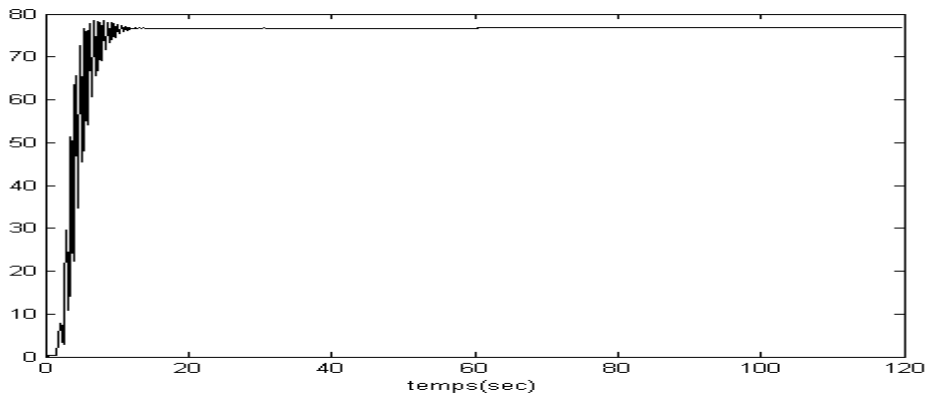


FIG. 4.7.c - Module du vecteur $K_r(t)$, Cas 3

Exemple 4.4

Dans cet exemple, nous appliquons la méthode de conception du compensateur proposée dans la section (IV.5)

Le système réel considéré dans cet exemple est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G_p(s) = \frac{C_1s + C_0}{B_2s^2 + B_1s + B_0}$$

Les valeurs nominales des paramètres et leurs rangs de variation sont donnés par le tableau 4.6.

Paramètre	Valeur nominale	Rang de variation
C_1	0	-0.1 à 2
C_0	1	0.8 à 3
B_2	1	0.5 à 5
B_1	1	0.5 à 5
B_0	4	1 à 8

TAB 4.6 - Paramètres nominaux et intervalles de variation

Le modèle de référence est donné par :

$$G_m(s) = \frac{1}{s+1}$$

L'entrée de référence est un signal carré de période 60 sec et d'amplitude ± 1 .

Le système est modélisé comme suit :

$$G_p(s) = G_{p0}(s) + \Delta_a(s)$$

où $\Delta_a(s)$ est donnée par :

$$\Delta_a(s) = \frac{C_1s^3 + (C_1 - B_2 + C_0)s^2 + (4C_1 + C_0 - B_1)s + 4C_0 - B_0}{B_2s^4 + (B_1 + B_2)s^3 + (B_0 + B_1 + 4B_2)s + 4B_0}$$

Ainsi, $\Delta_a(s)$ dépend des paramètres du système réel.

Le maximum sur l'incertitude additive a été calculé pour 100 fréquences différentes par la procédure d'optimisation donnée par les équations (4.43), il est représenté sur la figure 4.8.

La fonction $W(s)$ définie par l'équation (4.44) est choisie comme étant :

$$W(s) = \frac{2.55}{1 + 0.5s}$$

Le module de cette fonction est représenté sur la figure 4.8. On remarque qu'il vérifie bien l'inégalité (4.44).

Pour assurer que le système nominal fictif en boucle fermée soit stable, nous avons utilisé le lieu d'Evans correspondant à ce système afin de choisir les paramètres du compensateur. Ceci permet aussi de déterminer le gain du compensateur de telle sorte que la norme H_∞ de $\tilde{\Delta}(s)$, donnée par l'équation (4.47) soit inférieure à l'unité.

Le compensateur conçu est donné par la fonction de transfert suivante :

$$R_p(s) = \frac{3.75}{1 + 0.5s}$$

La norme H_∞ de $\tilde{\Delta}(s)$ est $\left\| \tilde{\Delta}(s) \right\|_\infty = 0.6800 < 1$.

Les matrices de pondération T_i et T_p sont choisies comme étant des matrices identité

Les cas considérés pour la simulation sont donnés par le tableau 4.7. Pour chaque cas, nous représentons les sorties du système et du modèle, les grandeurs de commande et le module du vecteur $K_r(t)$.

Paramètre	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4
C_1	-0.1	0	2	0
C_0	0.8	3	3	0.8
B_2	1	0.5	0.5	1
B_1	5	0.5	0.5	5
B_0	8	1	1	8

TAB 4.7 - Les cas considérés pour la simulation

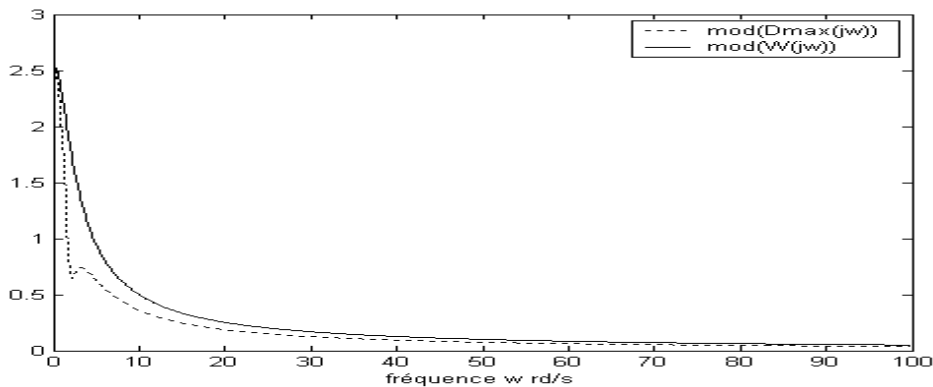


FIG. 4.8 - $|\Delta_{\max}(j\omega)|$ et $|W(j\omega)|$ pour 100 valeurs de la fréquence

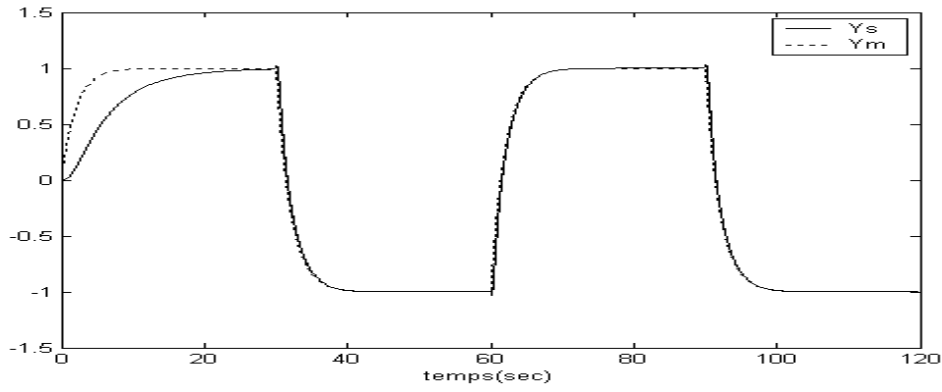


FIG. 4.9.a - Sorties du système et du modèle, Cas 1

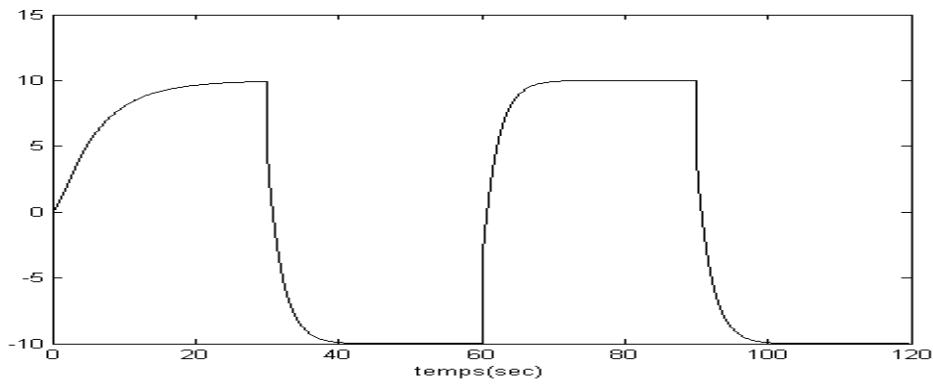


FIG. 4.9.b - Signal de commande, Cas1

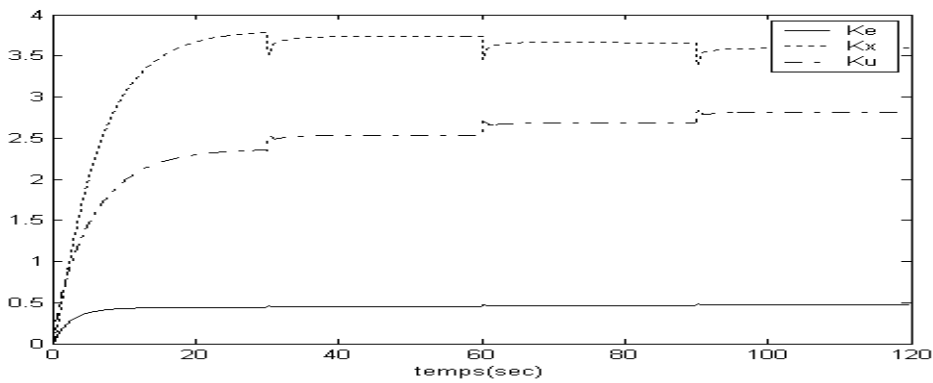


FIG. 4.9.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 1

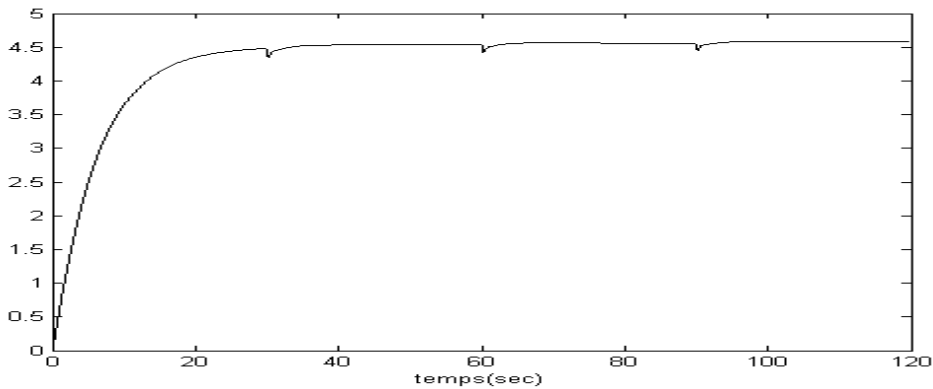


FIG. 4.9.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 1

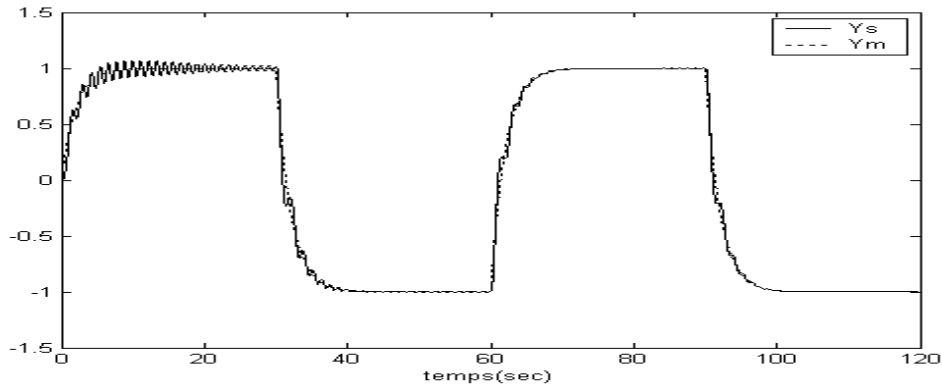


FIG. 4.10.a - Sorties du système et du modèle, Cas 2

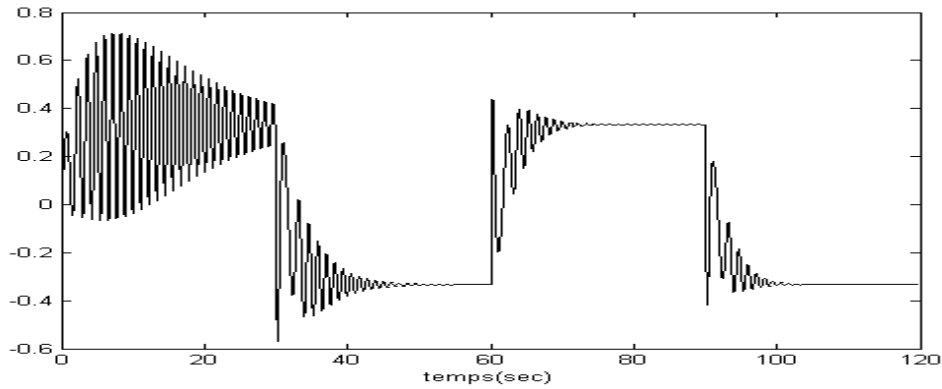


FIG. 4.10.b - Signal de commande, Cas 2

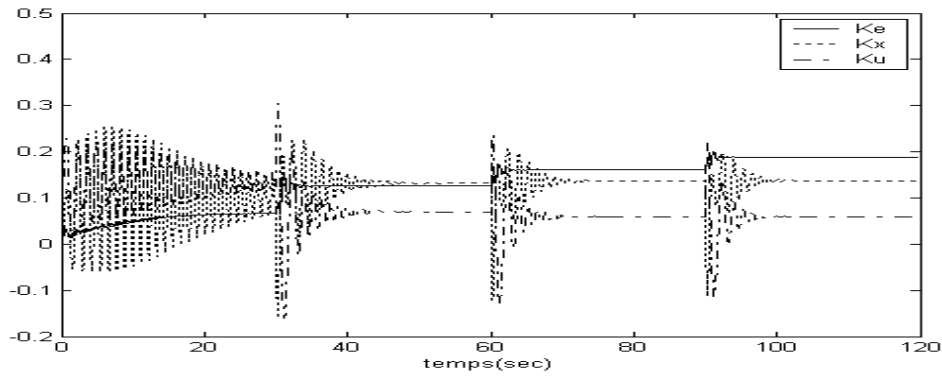


FIG. 4.10.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 2

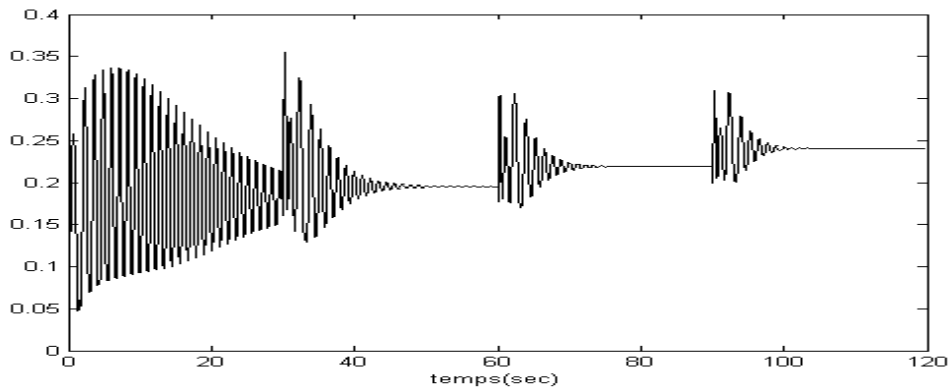


FIG. 4.10.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 2

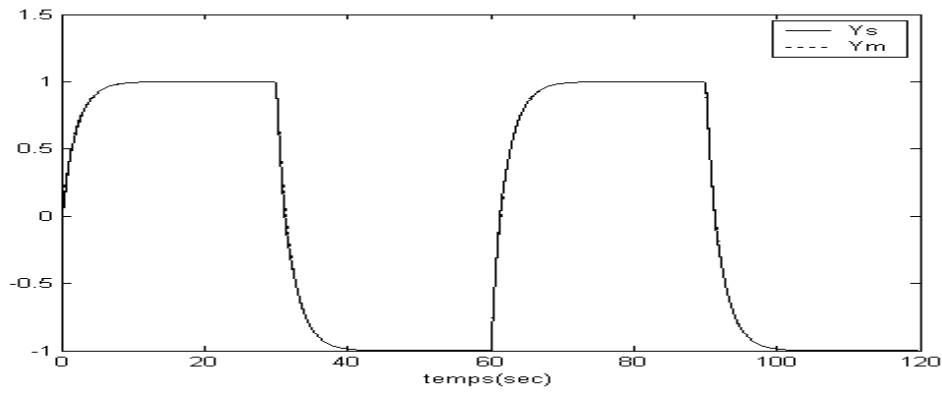


FIG. 4.11.a - Sorties du système et du modèle, Cas 3

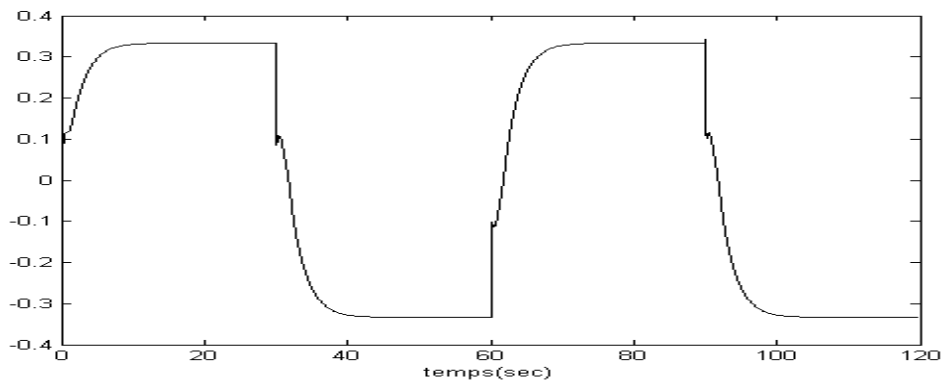


FIG. 4.11.b - Signal de commande, Cas 3

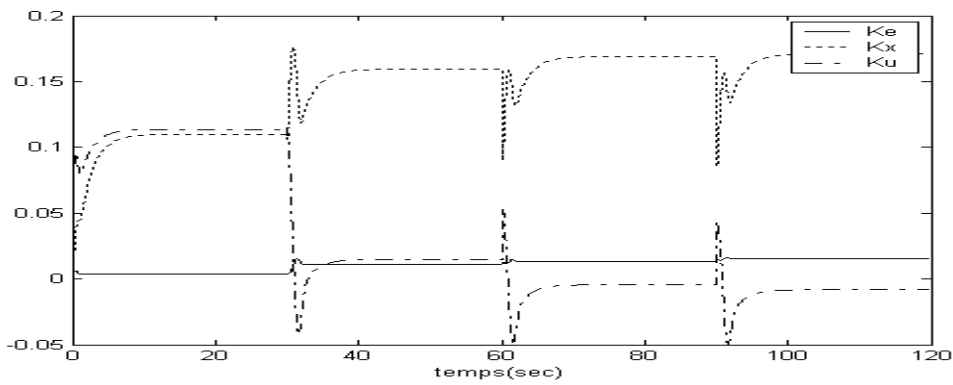


FIG. 4.11.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 3

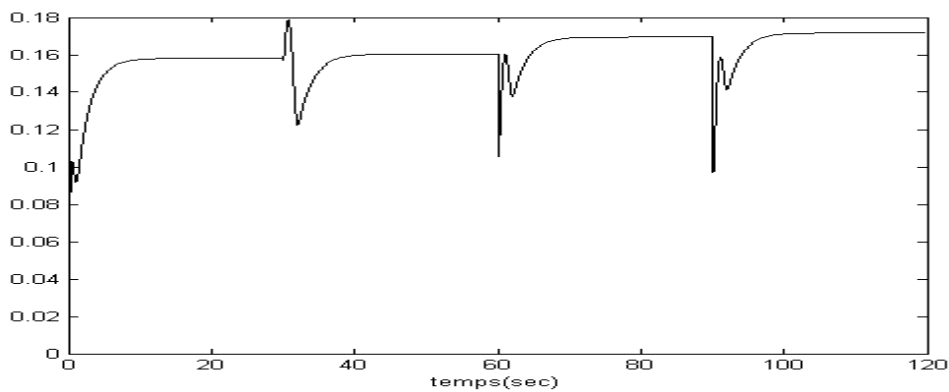


FIG. 4.11.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 3

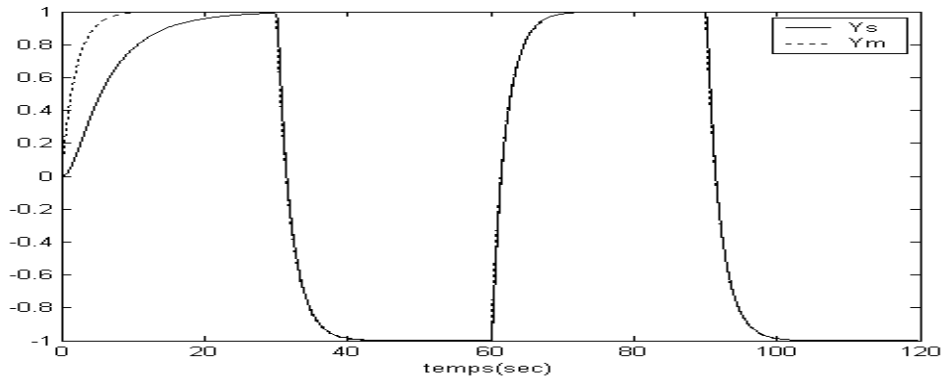


FIG. 4.12.a - Sorties du système et du modèle, Cas 4

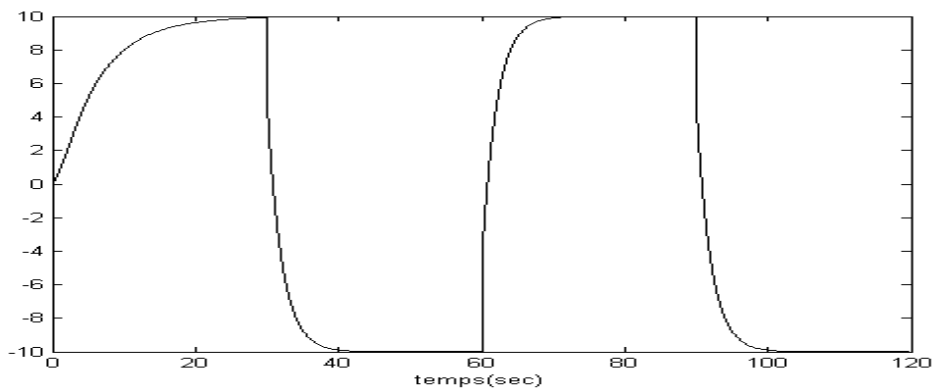


FIG. 4.12.b - Signal de commande, Cas 4

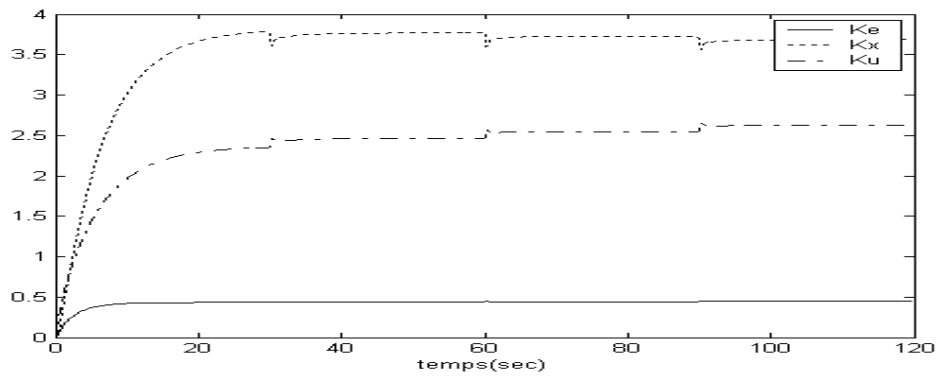


FIG. 4.12.c - Signaux $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$, Cas 4

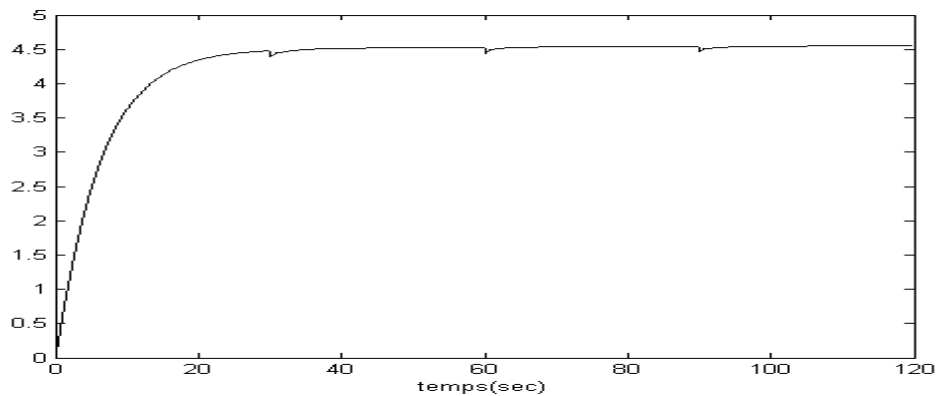


FIG. 4.12.d - Module du vecteur $K_r(t) = \sqrt{K_e^2 + K_x^2 + K_u^2}$, Cas 4

Ainsi, nous remarquons que malgré le changement du degré relatif et même si le système devient instable et n'est pas à phase minimale, le SAC assure de bonnes performances. Ces performances ne sont pratiquement pas altérées par les changements des paramètres du système sous contrôle (figures 4.9 à 4.12). Alors, la robustesse que présente le SAC en présence de dynamique inconnue est vraiment exploitée pour surmonter le problème de variation des paramètres dans des intervalles connus au préalable.

IV.7 Synthèse d'un contrôleur adaptatif stable pour les systèmes non ASPR

IV.7.1 Introduction

Dans cette section nous présentons un algorithme de contrôle adaptatif garantissant une erreur de poursuite asymptotique qui est une modification de l'algorithme de commande directe à modèle de référence MRAC. Cette modification qui étend la classe des systèmes pouvant être maintenant contrôlé avec une erreur de sortie nulle.

Le nouveau algorithme est appliqué sur les systèmes SISO (une entrée une sortie) avec une variation significative des paramètres et une dynamique inconnue. Des exemples de simulation sont donnés pour démontrer l'efficacité de l'algorithme.

IV.7.2 Commande adaptative à modèle de référence

La commande à modèle de référence est conçue pour le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p(t) u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t)\end{aligned}\tag{4.48}$$

où $x_p(t)$ ($n \times 1$) est le vecteur l'état, $u_p(t)$ ($m \times 1$) est le vecteur de contrôle, $y_p(t)$ ($q \times 1$) est le vecteur de sortie. A_p , B_p et C_p sont des matrices de dimension appropriée. On suppose que les paramètres du système sont bornés et varient comme suit :

$$\underline{a}_{-ij} \leq a_p(i, j) \leq \bar{a}_{ij} \quad i, j = 0, 1, \dots, n\tag{4.49}$$

$$\underline{b}_{-ij} \leq b_p(i, j) \leq \bar{b}_{ij} \quad i, j = 0, 1, \dots, n\tag{4.50}$$

L'objectif est de trouver, sans connaissance explicite de A_p et B_p , le contrôle $u_p(t)$ telle que le vecteur de sortie $y_p(t)$ suive le modèle de référence.

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m(t) u_m \\ y_m(t) &= C_m x_m(t)\end{aligned}\tag{4.51}$$

La sortie y_m est la réponse désirée à une consigne u_m . Le modèle incorpore le comportement désiré du système, mais son choix n'est pas restreint, en particulier, l'ordre du système peut être beaucoup plus grand que l'ordre du modèle de référence.

La loi du contrôle idéale u_p^* qui génère une sortie idéale y_p^* et un état idéal x_p^* est supposée être une combinaison linéaire de l'état et de l'entrée du modèle, c-à-d :

$$\begin{bmatrix} x_p^* \\ u_p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

où les matrices S_{ij} satisfont

$$\begin{aligned} S_{11}A_m &= A_p S_{11} + B_p S_{21} \\ S_{11}B_m &= A_p S_{12} + B_p S_{22} \\ C_m &= C_p S_{11} \\ 0 &= C_p S_{12} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Alors la loi de la commande adaptative basé sur le concept du (CGT) est donnée comme [43].

$$u_p(t) = K_e(t)e_y(t) + K_x(t)x_m(t) + K_u(t)u_m(t) \quad (4.54)$$

où $e_y(t) = y_m(t) - y_p(t)$ et $K_e(t)$, $K_x(t)$ et $K_u(t)$ sont des gains adaptatifs qui peuvent être condensés dans la matrice $K(t)$ comme suit :

$$K(t) = [K_e(t) \quad K_x(t) \quad K_u(t)] \quad (4.55)$$

Définissons le vecteur $r(t)$ comme :

$$r(t) = \left[(y_m(t) - y_p(t))^T \quad x_m^T(t) \quad u_m^T(t) \right]^T \quad (4.56)$$

Le contrôle $u_p(t)$ est écrit sous une forme compacte comme :

$$u_p(t) = K(t)r(t) \quad (4.57)$$

où

$$K(t) = K_p(t) + K_i(t) \quad (4.58)$$

$$K_p(t) = [y_m(t) - y_p(t)]r^T(t)T_p, T_p \geq 0 \quad (4.59)$$

$$\dot{K}_i(t) = [y_m(t) - y_p(t)]r^T(t)T_i, T_i > 0 \quad (4.60)$$

La conditionne suffisance pour une poursuite asymptotique est :

1. Il existe une solution au problème CGT (équation 4.53).
2. Le système est presque strictement réelle positive (ASPR), c'est-à-dire qu'il existe une

matrice de gain constante \tilde{K}_e , définie positive, qui n'est pas nécessaire pour l'implémentation de l'algorithme, telle que la fonction de transfert en boucle fermée

$$G(s) = [I + G_p(s)\tilde{K}_e]^{-1} G_p(s) \quad (4.61)$$

est strictement réelle positive (SPR) [31].

IV.7.3 Description du système et du compensateur (filtre)

Soit $G_p(s)$ la fonction de transfert du système

$$G_p(s) = \frac{Y_p(s)}{U_p(s)} = \frac{k_s}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, a_n = 1, k_s > 0 \quad (4.62)$$

Une représentation de la fonction de transfert (4.62) est donné par :

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_p = [k_s \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad (4.63)$$

le système (4.62) n'est pas ASPR, nous essayons de trouver une commande $u_p(t)$ afin que le système (4.62) suive le modèle de référence (4.51).

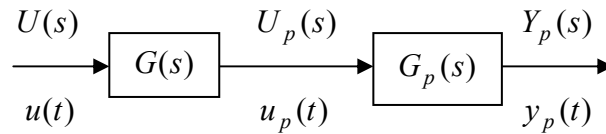


FIG. 4.13 - Représentation du système et du filtre

L'entrée de contrôle $u_p(t)$ est choisie comme la sortie d'un filtre $G(s)$ forcée par une entrée $u(t)$ (figure 4.13), où $G(s)$ est donnée par :

$$G(s) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i \quad (4.64)$$

$G(s)$ est un polynôme Hurwitz (ses zéros sont dans le demi plan de gauche),

alors

$$U_p(s) = G(s)U(s) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i U(s) \quad (4.65)$$

La fonction de transfert de $y_p(t)$ à $u(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{Y_p(s)}{U(s)} &= G_p(s)G(s) \\ &= \frac{k_s \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}\end{aligned}\quad (4.66)$$

La fonction de transfert (4.66) est à phase minimale et de degré relatif égale à un et d'après le lemme III.1, elle est ASPR et la commande (4.57) peut être appliquée à notre système et conduit à une erreur asymptotiquement stable.

IV.7.4 Synthèse du compensateur robuste

De (4.65), le contrôle $u_p(t)$ est donné par :

$$u_p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{d^i(u(t))}{dt^i} \quad (4.67)$$

Si nous choisissons $u(t)$ de la même forme que (4.57), on obtient :

$$\begin{aligned}u_p(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{d^i(K(t)r(t))}{dt^i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i K r^{(i)} + f(K^{(j)} \times r^{(l)}), \\ &j = 0..n-1, l = 0..n-2\end{aligned}\quad (4.68)$$

avec $X^{(m)}$ est la $m^{\text{ième}}$ dérivé de X .

La fonction $f(\cdot)$ est formée par la somme du produit $K^{(j)} \times r^{(l)}$ et si la poursuite se produit, les gains $K(t)$ sont bornés et par conséquent $K^{(j)}$ disparaît et donc la fonction $f(\cdot)$ approche zéro.

L'erreur entre l'état idéal x_p^* et l'état réel x_p est donné par :

$$e_x = x_p^* - x_p \quad (4.69)$$

La dérivée de (4.69) donne :

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= \dot{x}_p^* - \dot{x}_p = A_p x_p^* + B_p u_p^* - A_p x_p - B_p u_p \\ &= A_p (x_p^* - x_p) + B_p (u_p^* - u_p) \\ &= A_p e_x + B_p (u_p^* - u_p)\end{aligned}\quad (4.70)$$

Si nous remplaçons u_p^*, u_p, K et r par leurs expressions données par (4.52), (4.68), (4.55) et (4.56), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= A_p e_x + \\ & B_p [S_{21}x_m + S_{22}u_m - c_0(K_e(y_m - y_p) \\ & + K_x x_m + K_u u_m) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i K r^{(i)} - f(\cdot)] \end{aligned} \quad (4.71)$$

En régime permanent, la sortie du modèle y_m est égale à la sortie idéale y_p^* , on a donc :

$$y_m - y_p = y_p^* - y_p = C_p x_p^* - C_p x_p = C_p e_x \quad (4.72)$$

et le contrôle u est égale au contrôle idéal u_p^*

$$c_0(K_x x_m + k_u u_m) = S_{21}x_m + S_{22}u_m \quad (4.73)$$

Par conséquent, l'expression de l'erreur est donnée par :

$$\dot{e}_x = A_p e_x - B_p \sum_{i=0}^{n-1} c_i K_e C_p e_x^{(i)} + f_1(t) \quad (4.74)$$

où la fonction $f_1(t)$ est donnée par :

$$f_1 = -B_p \left[\sum_{i=1}^{n-1} (c_i K_x x_m^{(i)} + K_u u_m^{(i)}) + f \right] \quad (4.75)$$

L'entrée de contrôle u_m est une constante, alors $u_m^{(i)}$ est égale à zéro. L'état $x_m(t)$ est borné et par conséquent lorsque le temps t augmente l'expression $x_m^{(i)}$ approche zéro, encore et comme $f(t)$ tend vers zéro, la fonction $f_1(\cdot)$ est asymptotiquement stable et approche zéro et la stabilité de l'erreur dépend de l'équation différentielle

$$\dot{e}_x - A_p e_x + \sum_{i=0}^{n-1} B_p c_i K_e C_p e_x^{(i)} = 0 \quad (4.76)$$

Soit

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T = e_x = [ex_1 \ ex_2 \ \dots \ ex_n]^T \quad (4.77)$$

Donc, la relation (4.74) donne :

$$\dot{x} = \Delta x \quad (4.78)$$

où

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - K_e c_0 & -a_1 - K_e c_1 & -a_2 - K_e c_2 & \dots & -a_{n-1} - K_e c_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Ce système est stable pour tout a_i et c_i ($c_i \geq 0$) ssi $a_i + K_e c_i \geq 0$, cela est satisfait en choisissant un haut gain positif K_e .

Exemple 4.5

Pour démontrer que l'algorithme développé conduit à une erreur de poursuite asymptotique stable, deux exemples ont été considérés. Le premier considère le contrôle d'un système à phase non-minimale

$$\frac{y_p(s)}{u_p(s)} = \frac{1}{s^2 + sb + a}$$

Celui ci correspond à un système d'ordre deux non ASPR.

Les valeurs des paramètres a et b sont choisis ainsi.

$$-3 \leq a \leq 3, \quad -2 \leq b \leq 2.$$

Le modèle de référence est donné par :

$$\frac{y_m(s)}{u_m(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

où u_m est un échelon unitaire. Le filtre $G(s)$ est choisi comme $G(s) = 2 + 3s$ et l'entrée de contrôle est donnée par $u_p(t) = 2Kr + 3K\dot{r}$ où r est donné par (4.56) et nous pouvons calculer facilement \dot{r} . Le gain K est donné par les relations (4.55-4.60). Les poids T_p et T_i de (4.59) et (4.60) sont pris égales à l'identité et tous les gains initiaux sont égalisés à zéro. La réponse du système avec une variation des paramètres à chaque 40 secondes est donnée en figure 4.14. Nous voyons que la poursuite a eu lieu quelque soit les paramètres de notre système. La figure 4.15 représente le contrôle qui est borné et stable après quelques secondes.

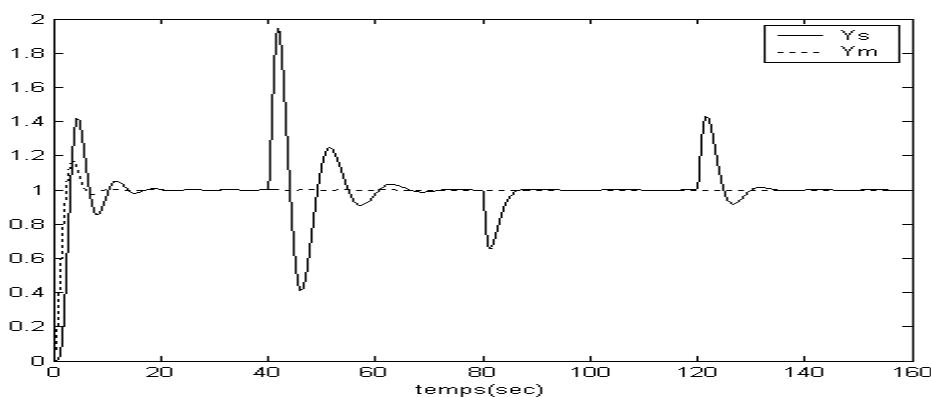


FIG. 4.14 - Sortie du système et du modèle avec des contraintes

si $t < 40$ $a = 2, b = 3$; si $t \geq 40, a = -2, b = 3$,
 si $t \geq 80, a = 2, b = -3$; si $t \geq 120, a = -2, b = -3$,

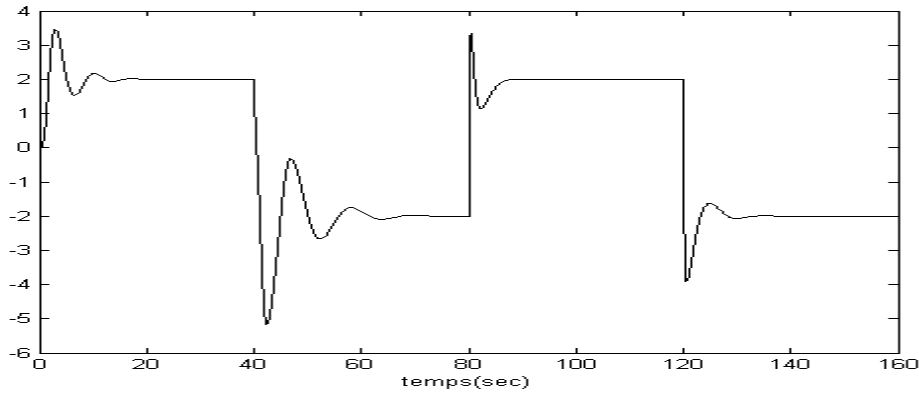


FIG. 4.15 - Signal de commande

Exemple 4.6

Dans le but d'évaluer l'algorithme sur un système variant dans le temps et faire une comparaison avec l'algorithme développé par Neat *et al* [40], le système suivant est considéré. C'est la même système que celui donné dans [40].

$$\frac{y_p(s)}{u_p(s)} = \frac{k_s}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

où

$$1 \leq k_s \leq 3, \quad 1.75 \leq a_2 \leq 4.75, \quad 2.15 \leq a_1 \leq 5.15, \quad 1 \leq a_0 \leq 4$$

Ce système est telle que des limites finies existent sur tout gain stabilisateur.

Le modèle de référence est donné par :

$$\frac{y_m(s)}{u_m(s)} = \frac{1}{2s + 1}$$

où u_m est la commande du modèle pris comme une onde carré unitaire de période 60 secondes. Le filtre $G(s)$ est donné par :

$$G(s) = (4 + s)(5 + s) = 20 + 9s + s^2$$

et donc l'entrée de contrôle est donnée par :

$$u_p(t) = 20Kr + 9K\dot{r} + K\ddot{r}$$

Pour l'évaluation, les trois cas suivant ont été considérés.

$$\text{Cas 1 : } k_s = 1, \quad a_2 = 1.75, \quad a_1 = 2.15, \quad a_0 = 1$$

$$\text{Cas 2 : } k_s = 3, \quad a_2 = 1.75, \quad a_1 = 2.15, \quad a_0 = 1$$

$$\text{Cas 3 : } k_s = 3, \quad a_2 = 4.75, \quad a_1 = 5.15, \quad a_0 = 4$$

Dans tous les cas, les poids T_p et T_i de (4.59) et (4.60) ont été pris égales à l'identité. Les sorties du système et du modèle pour les trois cas sont données dans les figures (416-4.18).

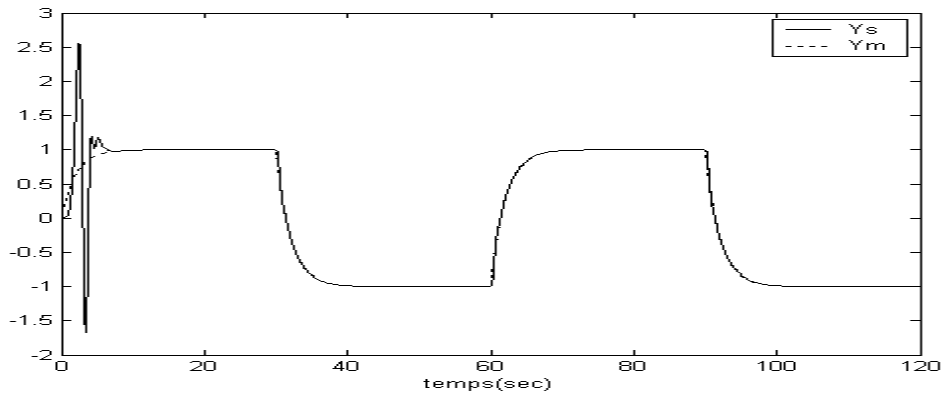


FIG. 4.16 - Sorties du système et du modèle, Cas 1

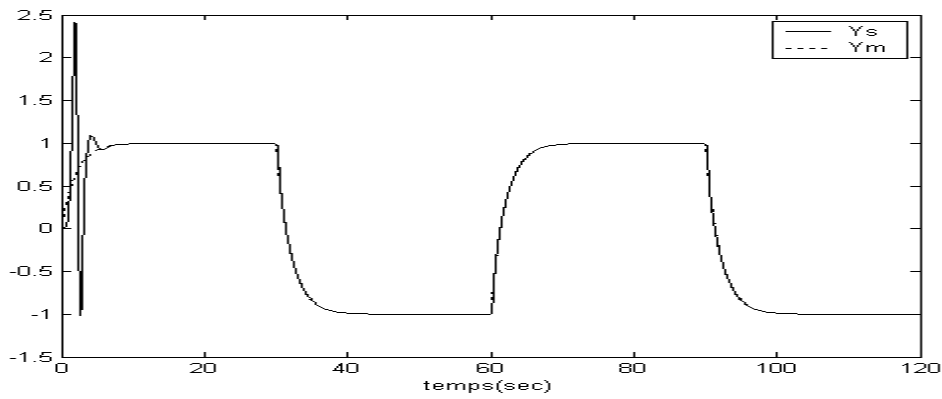


FIG. 4.17 - Sorties du système et du modèle, Cas 2

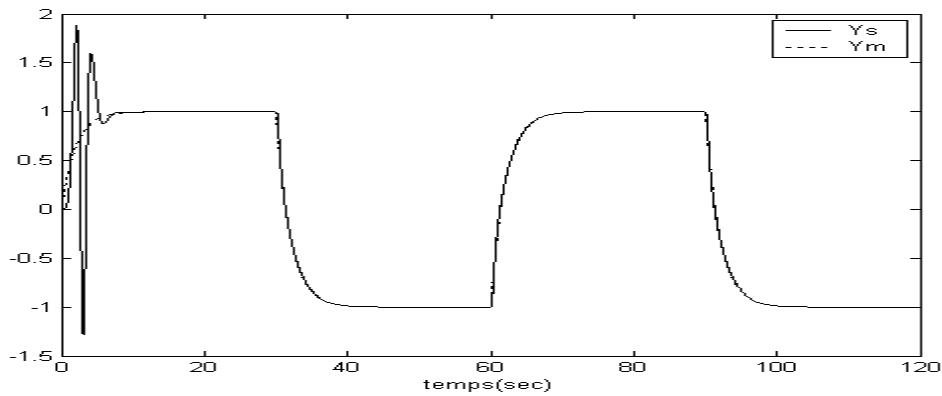


FIG. 4.18 - Sorties du système et du modèle, Cas 3

Dans tous les cas, la poursuite se produit après quelques secondes et afin de comparer avec les figures données dans [40], qui présentent une dégradation à chaque changement de la commande u_m (passage de +1 à -1 ou vice versa), nos figures ne présentent pas cette dégradation et donc notre algorithme donne une erreur asymptotiquement stable quelque soit la variation de la commande u_m et donc la sortie du système suit parfaitement la sortie du modèle.

Les figures 4.19 à 4.21 représentent les signaux de commande appliqués à notre système (Cas1,2,3), ils sont bornés et stable.

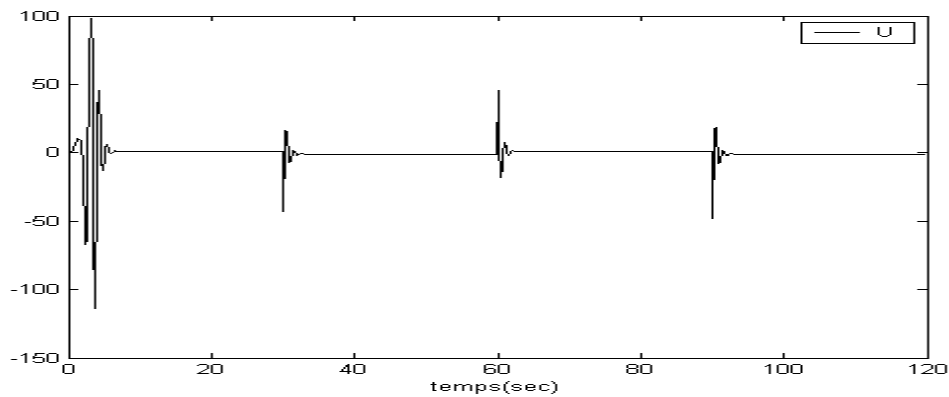


FIG. 4.19 - Signal de commande, cas 1

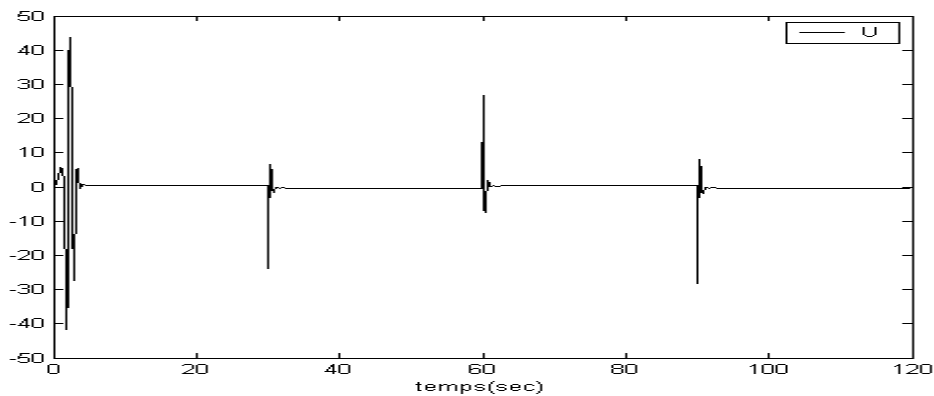


FIG. 4.20 - Signal de commande, cas 2

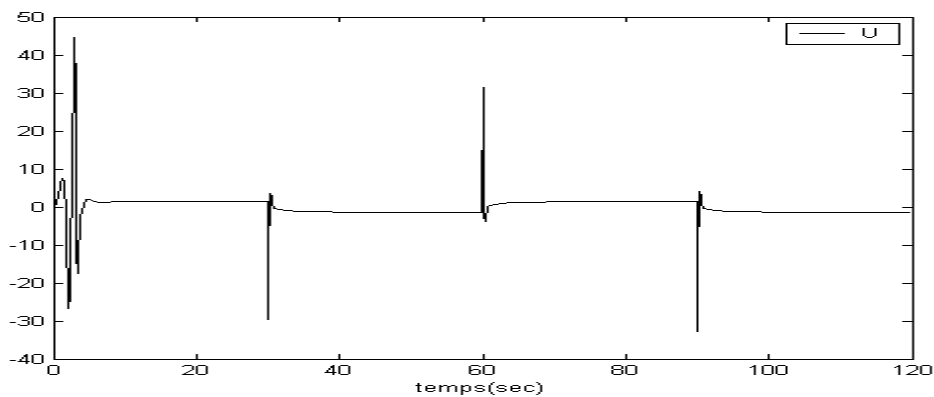


FIG. 4.21 - Signal de commande, cas 3

IV.7.5 Conclusion

Un nouveau algorithme de poursuite asymptotique qui est une modification de l'algorithme de commande directe à modèle de référence (MRAC) a été développé. Cet algorithme qui implique l'incorporation en série d'un filtre, conduit à une erreur asymptotiquement stable pour les systèmes

non ASPR. Un tel avancement élargi la classe des systèmes pouvant être commandé par les algorithmes adaptatifs. Des recherches sont en cours afin d'étendre l'applicabilité de l'algorithme développé aux systèmes MIMO.

IV.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de contrôle des systèmes intervalles en utilisant le SAC. Nous avons alors proposé trois méthodes pour la compensation de ces systèmes afin de contourner la condition ASPR.

La première méthode est basée sur le théorème (III.4). Elle ne considère alors que la forme particulière du compensateur proposé par ce théorème et elle exige qu'une borne supérieure du degré relatif du système soit connue. Le choix des paramètres du compensateur est guidé par le théorème de Kharitonov. Cette méthode permet de concevoir une infinité de compensateur, ceci permet le choix du compensateur le plus adéquat en simulant le système en boucle fermée

La deuxième méthode est basée sur le lemme (III.6). La forme du compensateur est plus générale pourvue que le degré relatif du système augmenté soit l'unité. Pour vérifier la condition du lemme (III.6) concernant la stabilité du système fictif en boucle fermée, la méthode génère des contraintes à partir de la première colonne de la table de Routh. Ces contraintes seront utilisées pour générer une combinaison optimale des paramètres du compensateur. Cependant, cette méthode n'est pas très robuste car les éléments de la première colonne de la table de Routh peuvent ne pas être sur tous les intervalles de variation des paramètres du système.

Pour la troisième méthode, l'incertitude sur les paramètres est ramenée à une dynamique inconnue, pour laquelle nous avons considéré le cas le plus défavorable. Le système intervalle est alors représenté par un système nominal, qui doit être connu et une dynamique inconnue, qui est fonction de l'incertitude sur les paramètres, ensuite nous appliquons le théorème (III.5) dédié à ce cas

Les résultats de la simulation montrent que ces méthodes constituent des procédures systématiques pour la compensation des systèmes intervalles. Ce qui étend le domaine d'applicabilité du SAC en surmontant la condition ASPR et en bénéficiant de tous les avantages de ce dernier.

La dernière section de ce chapitre traite un nouveau algorithme développé pour les systèmes non ASPR, ceci permettra d'étendre la classe des systèmes pouvant être commandé par le contrôleur adaptatif MRAC, les résultats de simulation témoignent de la robustesse de l'algorithme développé.

Conclusion générale

Nous avons proposé trois méthodes pour la compensation des systèmes intervalles afin d'éviter la condition ASPR requise pour l'applicabilité du SAC.

La première méthode utilise le théorème Kharitonov et le modèle du compensateur proposé par Iwai & al [36,38]. L'utilisation du théorème de Kharitonov guide le choix des paramètres du compensateur et assure le presque positivité du système augmenté sur tout l'intervalle de variation des paramètres.

La deuxième méthode utilise une forme de compensateur qui assure que le degré relatif du système augmenté soit l'unité, et tente de minimiser son gain en prenant en compte la stabilité du système fictif en boucle fermée. Cette méthode est plus procédurale mais elle ne garantit pas toujours une solution pour les paramètres du compensateur.

La troisième méthode ramène l'incertitude sur les paramètres du système intervalle à une dynamique inconnue et applique ensuite la méthode de compensation dédiée à ce cas.

Ces méthodes ont été utilisées afin de concevoir des compensateurs pour des exemples de systèmes intervalles qui ne sont pas forcément ASPR sur tout l'intervalle de variation des paramètres. Ensuite, le SAC a été utilisé pour contrôler le système augmenté résultant. Les simulations ont été effectuées dans l'environnement MATLAB [30]. Les résultats obtenus montrent qu'avec ces méthodes le SAC peut être utilisé pour le contrôle des systèmes non ASPR ce qui permet de profiter de ses avantages.

Enfin, on présente notre contribution dans ce domaine par le développement d'un nouveau algorithme de poursuite asymptotique qui est une modification de l'algorithme de commande directe à modèle de référence (MRAC)

La synthèse d'un tel contrôleur adaptatif permet d'augmenter la classe des systèmes pouvant être commandé par le MRAC classique.

Comme perspective, on prévoit l'extension du contrôleur développé aux systèmes MIMO ainsi que les systèmes à retards avec une étude sur la saturation des commandes.

Bibliographie

- [1] Astrom K.J. and Wittenmark B., "Adaptive control," Adisson-Wesley, 1989
- [2] Bakker R. and Annaswamy A.M., "Stability and robustness properties of a simple adaptive controller," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.41, n° 9, pp. 1352-1358, 1996
- [3] Bandyopadhyay B., Ismail O. and Gorez R., "Routh- Pade approximation for interval systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.39, n° 12, pp.2454-2456, 1994.
- [4] Bandyopadhyay B., Upadhye A. and Ismail o., " Routh approximation for interval systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.43, n°2, pp.273-278, 1998.
- [5] Baram S, Hassul M., " Control system design using MATLAB," Prentice-Hall, Englwood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [6] Bar-Kana I., "Absolute stability and robust discrete adaptive control of multivariable systems," Contr. And Dynamique Systems, vol.31, Part1, pp.157-183, 1989
- [7] Bar-Kana I. and Kaufman H., " Robuste simplified adaptive control for a class of multivariable continuous time systems, " Proceedings of the 24th Conference On Decision and Control, Lauderdal, pp.141-146, 1985.
- [8] Bar-Kana I., "Adaptive control- A simplified approach," in C. Leondes (Ed), "Control and Dynamic systems –Advances in theory and Applications," academic Press, vol. XXXI, pp.187-236, 1987.
- [9] Bar-Kana I., Kaufman H., " Global stability and performance of a simplified adaptive algorithm," Int.J.Control, vol 42, n°6, pp.1491-1505, 1985.
- [10] Bar-Kana I., " Positive realness in multivariable stationary linear systems," j.of the Franklin Institute, vol.238, n° 4, pp. 403-417, 1991.
- [11] Bar-Kana I., "Comments on a paper by Kidd, " Int.J.Contr., vol.48, n° 1 pp.1011-1023, 1988
- [12] Bar-Kana I. and Guez A., "Simple adaptive control for a class of non-linear systems with application to robotics " Int.J.Contr., vol.52, n° 1, pp.77-99, 1990
- [13] Bar-Kana I., "Almost-passivity and simple adaptive control of non-stationary continuous linear systems," Int.J.Systems Sci., vol,21, n°5, pp. 835-862, 1990
- [14] Bar-Kana I. and Kulick and Soffa, "Parallel feedforward and robustness of simple adaptive control," Draxel University, pp. 1-15, 1996.

- [15] Bar-Kana I, "Reduction of bursting phenomena without external excitation," Proceedings of the Conference on Information Sciences and Systems, Princeton New Jersey, 1990.
- [16] Bar-Kana I. and Fischl R., "A Simple Adaptive Enhancer of Voltage Stability for Generator Excitation Control", Proceedings of American Control Conference, pp. 1705-1709. (1992)
- [17] Bar-Kana I. and I. Guez A., "Simplified Techniques for Adaptive Control of Robots", in Control and Dynamic Systems - Advances in Theory and Applications (C. Leondes, ed.), 40, pp. 147-203, (1991)
- [18] Bar-Kana I. "Comments on 'Design of Strictly Positive Real Systems Using Constant Output Feedback'", IEEE Transactions on Automatic Control, 49, pp. 2091-2093. (2004a)
- [19] Bar-Kana I. "Simple Adaptive Control for Non-Minimum Phase Autopilot Design", AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Providence, RI, paper AIAA 2004-4868. (2004b)
- [20] Bar-Kana I. "Gain Conditions and Convergence of Simple Adaptive Control", International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 19, pp. 13-40. (2005a)
- [21] Bar-Kana I. "On Output Feedback Stability and Passivity in Discrete Linear Systems" Proceedings of The 16th Triennial IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, (2005b)
- [22] Barmish B.R., Hollot C.V., Kraus F.J. and Tempo R, "Extreme point results For robust stabilization of interval plants with the first order compensators, "IEEE Trans. Automat Contr., vol.37, n° 6, pp.707-714, 1992.
- [23] Bernussou J., "Commande robuste, développement et applications" Hermes, Paris, 1996.
- [24] Borne P., Dauphin G., Richard J.P., Rotella F., Zambettakis I., "Modélisation et identification de processus," Tome 1, Edition Technip, 1992
- [25] Boyd S., Sastry S. S, "Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control," automatica, vol.22, n° 9, pp.629-639, 1986.
- [26] Broussard J.R , O'Brien S.J., " Feedforward control to track the output of a forced model," Proceedings of the 17th Conference on Decision and Control, pp.1149-1155, 1979.
- [27] Datta A., "On the transient behavior in discrete-time model reference adaptive control: Analysis and possible improvement;" Automatica,

- vol.30, n^o 3, pp.527-563,1994.
- [28] Feng G., "A robust approach to adaptive control algorithms," IEEE Trans. Automat Contr., vol.39, n^o 8, pp. 1738-1742, august 1994.
- [29] Goodwin G.C. and Mayne D.Q., " A parameter estimation perspective of continuous model reference adaptive control," Automatica, vol.23, n^o1, pp.57-70,1987.
- [30] Hsu L. and Costa R.R., " Bursting phenomena in continuous-time adaptive systems with a σ -modification," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC 32, n^o1, pp.84-86, January 1987.
- [31] Huang C-H, Ioannou P.I., Maroulas J, Safonov M.G., "Design of strictly positive real systems using constant output feedback, IEEE Trans Autom. Control, 44, No. 3, pp. 569–573, (1999).
- [32] Ioannon P.A. and Datta A., "Robust adaptive control:A unified approche", Proceedings of the IEEE, vol. 79, n^o 12, pp 1736-1786, Decembre 1991.
- [33] Ioannou P.A, Sun J., "Robuste adaptive control," Prentice-Hall,1996
- [34] Ioannou P. and Tao G., "Frequency domain conditions for strictly positive real functions," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, n^o1, pp 53-54, 1987.
- [35] Isidori A., "Nonlinear control systems, "Third edition, Springer-Verlag, 1995.
- [36] Iwai Z. and Mizumoto I., "Robust and simple Adaptive Control Systems," Int.J.of Contr., vol.55, n^o6, pp 1453-1470, 1992
- [37] Iwai Z., Mizumoto I., Douzono H., "Decentralized simple adaptive control," 12th Word Congress, IFAC, Sydney, vol.33, pp.9-16, 1993.
- [38] Iwai Z. and Mizumoto I., "Realisation of simple Adaptive Control by using a parallel feedforward compensator," Int.J.of Contr., vol.59, n^o6, pp 1534-1565, 1994.
- [39] Joshi S.M. and Gupta S., " On a class of marginally stable positive-real systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.41, n^o1, pp.152-155, 1996
- [40] Kaufman H., Neat G.W., "Asymptotically stable Multi input Multi output Direct model reference adaptive controller for processes not necessarily satisfying a positive real constraint," Int.J.Contr., vol.58, n^o 5, 1011-1031, 1993.
- [41] Kaufman H, Roy R.J. and Xu X., "Model reference adaptive control of Drug infusion rate, Automatica, vol.20, pp.205-210, 1984.
- [42] Kaufman H, Gulberson C, Ultiana C, " Model reference and optimal design of digital drives for computerized numerical control machine tools," Proceeding of the 24th Conference on Decision and Control, Laudered, pp.1701-1702, 1985.

- [43] Kaufman H., Barkana I. and Sobel K., K. Direct Adaptive Control Algorithms –Theory and Applications, Second Edition, Springer, New-York, 1998.
- [44] Kurstic M, Kannelakopoulos ,I. and Kokotovic P., "Nonlinear and adaptive control design," John Willey and Sons,1995.
- [45] Landau I.D, "Adaptive control: The model reference approche," Marcel Dekker,Inc.,New york, 1979.
- [46] Landau I. D, Dugard L." Commande adaptative aspects pratiques et théorique " Masson (1989).
- [47] Masten M.K. and Cohen H.E., " An advanced showcase of adaptive controller designs,"Int.J.Adaptive Control and Signal Processing, vol.4,pp.424-429,1990.
- [48] Math Works Inc., "MATLAB Optimization Toolbox," User's Guide, version 5, 1997
- [49] MATLAB For Windows, User's Guide, Math Works Inc., Version 6.5. modèle et adaptative. Office des publications universitaires 2000.
- [50] Michino R, Mizumoto I., Iwai Z. and Kumon M.: "Robust High Gain Adaptive Output Feedback Control for Nonlinear Systems with Uncertain Nonlinearities in Control Input Term", International Journal of Control, Automation and Systems, Vol.1, No.1, pp.19-26, 2003
- [51] Miller D.E. and Davison E.J,"An Adaptive controller which provides an arbitrary transient and steady state response,"IEEE Trans. Automat.Contr.,vol.36,n°1,pp.68-81,1991.
- [52] Mizumoto I., Deng M. and Iwai Z., "A parallel feedforward compensator for MIMO plants virtually realizing an almost strictly positive real plant," 13th IFAC Triennial Word Congress, San Fransisco,USA,pp.355,360,1996.
- [53] Mizumoto I., Iwai Z., "Adaptive model output following control for plants with unmodeled dynamics," Proceeding of the 33rd Conference on Decision and Control,Lake Buena Vista,pp. 1177-1182,1994.
- [54] Mizumoto.I., Iwai Z.," Simplified model output following control for plants with unmodeled dynamics ," Int.J.of Contr.,vol.64,n° 1,pp.61-80,1994.
- [55] Mizumoto.I., Egashira T.,and Iwai Z.," Simple adaptive control for MIMO plants with unmodeled dynamics and its application to process with higher order lag elements."ADCHEM,IFAC,pp.409-414,1997.
- [56] Nagrath I.J. and glocal M., " Control systems engineering"Seconde Edition, John willey and Sons, New york,1982
- [57] Narendra K.S., Annaswamy A.M.," A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation;" IEEE Trans.Automat.Contr.vol.AC-

- 32, n^o2, pp.134-145, 1987.
- [58] Neat G.W, Kaufman .H, Steinvorth. R., " Comparison and extension of direct model reference adaptive control procedure," *Int.J.Contr.*, vol.55,n^o4,pp.945-967,1992.
- [59] Nurges U., " On discrete Kharitonov's theorem and robuste controller design," *CESA'98*,vol.1,pp.495-499,1998.
- [60] Ortega R, " On Morse's new adaptive controller: Parameter convergence and transient performance," *IEEE Trans. Automat.Contr.*, vol 38, n^o 8, pp.1191-1202,1993.
- [61] Ozcelik S and Kaufman H. "Robust direct model reference adaptive controllers, "in *Proceedings, CDC,IEEE*, pp. 3955-3960. 1995
- [62] Ozcelik S and Kaufman H. "Design of mimo robust direct model reference adaptive controllers," in *Proceedings CDC, IEEE*.(1997)
- [63] Ozcelik S and Kaufman. H."Frequency domain design conditions for robust direct model reference adaptive controllers," in *Proceedings ACC, IEEE*, pp. 1652-1656.,1997
- [64] Papadakis I.N.M and Thomopoulos S.C.A., "Improved performance model reference adaptive control with parameter mismatch compensation," *IEEE Trans.Automat.Contr.*, vol.41, n^o 2 ,pp.224-228, February 1996.
- [65] Pintelon R. Schoukens J., " Identification of continuous-time systems using arbitrary signals,"*automatica*,vol.33,n^o5,pp991-994,1997
- [66] Press W.H., Flannery B.P., Teukolesky S.A. and Vetterling W.T., "Numerical recipes: The art of scientific computing," *Combridge university Press*,1988.
- [67] Ramirez W.F., "Process control and identification," *Academic Press,Harcourt Brace and Company,California*,1994.
- [68] Rohers C.E., Valavani L, Athans M., Stein G., "Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the Presence of unmodeled dynamics, " *IEEE Trans.Automat.Contr.*,vol.30,n^o 9,pp.881-889,1985.
- [69] Rolain Y, Schoukens J., Pintelon R., " Order estimation for linear time – invariant systems using frequency domain identification methods," *IEEE Trans.Automat.Contr.*, vol.42,n^o 10,pp 1408-1417,1997.
- [70] Scoukens J., Pintelon R. and Hamme V., "Identification of linear dynamic system using piecewise excitations: Use, misuse and alternatives," *Automatica*, vol.30, n^o7, pp.1153-1169,1994.

- [71] Sobel K., Kaufman H. and Mabius L., Implicit adaptive control for a class of MIMO systems;" IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems,vol. 18, pp.576-590,1982
- [72] Sun J. ," Amodified model reference adaptive control scheme for improved transient performance," IEEE Trans.Automat. Contr., vol.38,n^o 8,pp.1255-1259,1993.
- [73] Sun W, Khargonekar P.P. and Shim D.,"Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems,"IEEE Trans.Automat.Contr.,vol.39,n^o 10,pp.2034-2046,1994.
- [74] Tsakalis K. and Ioannou P., " Adaptive control of linear time varying plants" Auomatica, vol.23, n^o 4 .pp. 459-468.1987
- [75] Tsakalis K.S., " Robustness of model reference adaptive controllers: An Input-Output approach,"IEEE Trans.Automat.Contr.,vol.37,n^o5,1992.
- [76] Vatterling W.T, Teukolskey S.A., W.H.Press and B.P.Flannery,"Numerical recipes: Example book," Combridge University Press,1988.
- [77] Westvold S.S.."Model Reference Adaptive Control of Cardiac Output and Mean Arterial Pressure in a Realistic Model of a Circulatory System", Master's thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, (1992)..
- [78] Whitaker H.P "A new developments in the Design of Adaptive Control Systems". Institute of Aeronautical Sciences Paper 61-39, 1961.
- [79] Xu S.J., Rachid A.and Darouach M.,"Robustness analysis of interval matrices based on Karitonov's theorem," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.n^o 2, pp.273-278,1998
- [80] Ydstie B.E., " Transient performance and robustness of direct adaptive control, " IEEE. Trans. Automat.Contr., Lauderdal,pp.141-146,1985.
- [81] Yu, C., Roy R., Kaufman H., and Bequette B.."Multiple-model adaptive predictive control of meanarterial pressure and cardiac output", IEEE Trans. BME, pp. 765778. (1992).
- [82] Zelmat M.. "Automatisation des processus industriels".Tome 2 Commande
- [83] Zeheb E., " A sufficient condition for output feedback stabilisation of uncertain systams," IEEE Trans. Automat. Contr,vol.31,n^o11,pp.1055-1057,1986.

Annexe A

LES EQUATIONS DU C.G.T DANS LE CAS LINEAIRE CONTINU A PARAMETRES VARIABLES

De l'équation (3.28) on a :

$$x_p^*(t) = S_{11}(t) x_m(t) + S_{12}(t) u_m(t) \quad (A.1)$$

On prend la dérivé des deux cotés en supposant que $\dot{u}_m = 0$, on obtient :

$$\dot{x}_p^*(t) = \dot{S}_{11}(t) x_m(t) + \dot{S}_{12}(t) u_m + S_{11} \dot{x}_m \quad (A.2)$$

En utilisant l'équation (3.24), on obtient :

$$\dot{x}_p^* = (\dot{S}_{11} + S_{11}A_m)x_m + (\dot{S}_{12} + S_{11}B_m)u_m \quad (A.3)$$

De l'équation (3.27) à savoir :

$$\dot{x}_p^* = A_p x_p^* + B_p u_p^*$$

Et, en utilisant encore l'équation (3.28), on obtient :

$$\dot{x}_p^* = (AS_{11} + BS_{21})x_m + (AS_{12} + BS_{22})u_m \quad (A.4)$$

Egalisons les parties droites des deux équations (A.3) et (A.4) et combinons les équations (3.23) et (3.25), on abouti au système différentiel algébrique suivant :

$$A_p S_{11} + B_p S_{21} = \dot{S}_{11} + S_{11}A_m \quad (A.5)$$

$$A_p S_{12} + B_p S_{22} = \dot{S}_{12} + S_{11}B_m \quad (A.6)$$

$$C_p S_{11}(t) = C_m \quad (A.7)$$

$$C_p S_{12}(t) = 0 \quad (A.8)$$

Annexe B

Démonstration du théorème (III.2)

La première étape dans la démonstration est de former une fonction quadratique positive définie selon les variables d'états du système adaptative $e_x(t)$ et $K_I(t)$. Avant de faire ceci, il est supposé que T_i^{-1} est une matrice positive définie, selon la première condition suffisante. Alors un choix approprié de la fonction de Lyapunov est :

$$V = e_x^T P e_x + Tr \left[S(K_I - \tilde{K}) T_i^{-1} (K_I - \tilde{K})^T S^T \right] \quad (\text{B.1})$$

où Tr : représente la trace d'une matrice

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V} = e_x^T P \dot{e}_x + \dot{e}_x^T + 2Tr \left[S(K_I - \tilde{K}) T_i^{-1} (\dot{K}_I - \dot{\tilde{K}}) S^T \right] \quad (\text{B.2})$$

où P est une matrice définie positive de dimension $n \times n$, \tilde{K} est une matrice de dimension $m \times n_r$, et S est une matrice non singulière de dimension $m \times m$.

Puisque la matrice \tilde{K} apparaît seulement dans la fonction V et non dans l'algorithme de contrôle, elle est dite matrice de gain fictif. Elle a la même dimension que $K_r(t)$

$$\tilde{K}_r = \tilde{K}_e C_p e_x + \tilde{K}_u u_m + \tilde{K}_x x_m \quad (\text{B.3})$$

où les trois gains \tilde{K}_x , \tilde{K}_u et \tilde{K}_e sont comme \tilde{K} fictif.

Ensuite nous allons tirer l'équation de l'erreur en utilisant le fait que $e_x = x_p^* - x_p$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= A_p x_p^* + B_p u_p^* - A_p x_p - B_p u_p \\ &= A_p [x_p^* - x_p] + B_p [u_p^* - u_p] \\ &= A_p e_x + B_p [u_p^* - u_p] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En substituant la définition pour u_p^* de (3.5) et u_p de (3.53), nous obtenons :

$$\dot{e}_x = A_p e_x + B_p [S_{21} x_m + S_{22} u_m - K_x x_m - K_u u_m - K_e C_p e_x] \quad (\text{B.5.a})$$

$$= A_p e_x + B_p [S_{21} x_m + S_{22} u_m - K_I r - C_p e_x r^T T_p r] \quad (\text{B.5.b})$$

Alors le système adaptative sera décrit par :

$$\dot{e}_x = A_p e_x + B_p \left[S_{21} x_m + S_{22} u_m - K_I r - C_p e_x r^T T_p r \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{K}_I = C_p e_x r^T T_i \quad (\text{B.7})$$

La substitution de (B.6) et (B.7) dans (B.2) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T P \left[A_p e_x - B_p C_p e_x r^T T_p r - B_p K_I r B_p S_{21} x_m + B_p S_{22} u_m \right] \\ + \left[A_p e_x - B_p C_p e_x r^T T_p r - B_p K_I r + B_p S_{22} u_m \right]^T P e_x + 2e_x^T C_p^T S^T S (K_I - \tilde{K}) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T (P A_p + A_p P) e_x - e_x^T (P B_p C_p + C_p^T B_p^T P) e_x r^T T_p r - 2e_x^T P B_p K_I r \\ + 2e_x^T P B_p (S_{21} x_m + S_{22} u_m) + 2e_x^T C_p^T S^T S (K_I - \tilde{K}) r \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T (P A_p + A_p P) e_x - e_x^T (P B_p C_p + C_p^T B_p^T P) e_x r^T T_p r \\ + 2e_x^T \left[C_p^T S^T S - P B_p \right] K_I r - 2e_x^T C_p^T S^T S \tilde{K} r \\ + 2e_x^T P B_p (S_{21} x_m + S_{22} u_m) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

En posant :

$$C_p = Q B_p^T P \quad \forall A_p, B_p \text{ où } Q = (S^T S)^{-1}$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T (P A_p + A_p P) e_x - 2e_x^T P B_p (S^T S)^{-1} B_p^T P e_x r^T T_p r \\ - 2e_x^T C_p^T S^T S \tilde{K} r + 2e_x^T P B_p (S_{21} x_m + S_{22} u_m) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

En substituant

$$\tilde{K} r = \tilde{K}_e C_p e_x + \tilde{K}_u u_m + \tilde{K}_x x_m$$

dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T \left[P (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + A_p - B_p \tilde{K}_e C_p \right]^T P e_x \\ - 2e_x^T P B_p (S^T S)^{-1} B_p^T P e_x r^T T_p r + \\ 2e_x^T P B_p \left[(S_{21} - \tilde{K}_x) x_m + (S_{22} - \tilde{K}_u) u_m \right] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Ainsi, si on pose $\tilde{K}_x = S_{21}$ et $\tilde{K}_u = S_{22}$ (aucune d'elles n'est requise pour l'implémentation), la dérivée de V devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_x^T & \left[P(A_p - B_p \tilde{K}_e C_p) + (A_p - B_p \tilde{K}_e C_p)^T P \right] e_x \\ & - 2e_x^T P B_p (S^T S)^{-1} B_p^T P e_x r^T T_p r \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Cette dérivée consiste en deux termes. Si T_p est une matrice positive semi-définie (la troisième condition suffisante), alors le deuxième terme est négatif semi-défini en e_x^T . La première condition suffisante implique que le premier terme quadratique est négatif défini en e_x^T . Ce qui implique que la dérivée de V est négative définie en e_x^T , c'est-à-dire que la sortie du système tend asymptotiquement vers la sortie du modèle de référence. De même pour l'état augmenté $[e_x^T, K_I(t)]$ ainsi les gains d'adaptation sont bornés.