

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ferhat Abbas–SETIF

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de Physique

Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Option : Physique Théorique

Par

CHAABI NADIR

THEME

Théorie des invariants d'un oscillateur harmonique à deux dimensions (2D) à masse et fréquence variables en présence de l'effet Aharonov-Bohm (AB)

Soutenu Publiquement le 23/06/2007

Devant la commission d'examen :

Président :	H. Hachemi	Professeur	UFAS- Sétif.
Rapporteur :	M. Maâmache	Professeur	UFAS- Sétif.
Examineur :	A. Mansouri	M. C.	UFAS- Sétif.
Examineur :	H. Choutri	M. C.	CUBBA- BBA

REMERCEMENTS

***Je tiens tout d'abord à remercier monsieur
le professeur***

***Mustapha MAAMACHE pour m'avoir
encadré, conseillé et soutenu pendant toute la
durée de ce travail.***

***Je remercie les membres de jury qui ont
accepté de juger ce travail et d'y apporter leur
caution :***

***Monsieur H. HACHEMI, professeur à
l'université de Sétif, qui me fait le grand
honneur d'accepter la présidence du jury.***

***Monsieur A. MANSOURI, maître de
conférence à l'université de Sétif, pour
l'honneur qu'il me fait en acceptant de
participer à ce jury.***

***Madame H. CHOUTRI, maître de conférence
au centre universitaire de Bordj Bou Arreridj,
pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant
également de participer à ce jury.***

***Je tiens enfin à remercier mes amis, Yahia
SAADI et Sohaib MEDJEDEL.***

DEDICACES

Je dédie ce travail à, mes parents, mes beaux-parents, le frangin maître Abdelhak et à mes sœurs.

Je dédie aussi ce travail à ma femme et à mes enfants Amel et Mustapha.

Nadir

TABLE DES MATIERES

<i>RESUME EN FRANÇAIS</i>	iii
<i>RESUME EN ANGLAIS</i>	v
TABLE DES MATIERES	vii
LE RESUME	ix
INTRODUCTION	11
L'EQUATION DE SCHRÖDINGER DEPENDANTE DU TEMPS	15
I. L'équation de Schrödinger :	15
II. Quelques méthodes mathématiques de résolution de l'équation de Schrödinger : 17	
1) <i>Les méthodes analytiques :</i>	17
1. théorie de perturbation de Poincaré :	17
2. La méthode de centrage (Kryloff-Bogoliuboff-Haag) :	17
3. Les méthodes topologiques :	18
4. La méthode de séparation de variables :	18
2) <i>Les méthodes numériques :</i>	19
1. Méthode d'Euler :	19
2. La méthode de Heun :	19
3. La méthode d'Euler améliorée	19
4. La méthode de Runge et Kutta	19
5. Méthode des approximations successives	19
III. L'équation de Schrödinger dépendante du temps :	19
1) <i>Les méthodes exactes :</i>	21
1. Recherche de l'opérateur d'évolution :	21
2. Changement de représentation :	22
3. Les transformations unitaires :	22
4. La théorie des invariants :	22
2) <i>Les méthodes approximatives :</i>	22
1. La théorie des perturbations :	23
2. Méthode variationnelle :	23
3. Approximation soudaine :	24
4. Approximation adiabatique :	24
5. La phase de Berry :	25
a) <i>Systèmes non cycliques :</i>	27
b) <i>Systèmes non adiabatiques :</i>	27
c) <i>Systèmes non hermitiens :</i>	27
LA THEORIE DES INVARIANTS	30
I. Exposition de la méthode :	30
II. Recherche des Solutions :	32
L'EFFET AHARONOV-BOHM	36

I. Introduction :	36
II. Description du phénomène :	37
1) <i>Aspect ondulatoire des électrons :</i>	37
2) <i>L'effet Aharonov-Bohm magnétique :</i>	39
3) <i>L'effet Aharonov-Bohm électrostatique :</i>	41
III. Structure du vide :	42
IV. Les confirmations expérimentales :	44
1) <i>Expérience de Chambers :</i>	44
2) <i>L'expérience de Tomonura et al :</i>	44
V. Les applications de l'effet Aharonov-Bohm :	46
THEORIE DES INVARIANTS D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE A 2D EN PRESENCE DE L'EFFET AB	50
I. Description du système quantique :	50
II. Recherche de l'invariant :	53
III. Recherche des vecteurs propres :	58
1) <i>Discussion des solutions possibles :</i>	61
1. Cas où $C = 0$:	61
2. Cas où $C > 0$:	66
3. Cas où $C < 0$:	70
IV. Solutions de l'équation de Schrödinger :	71
CONCLUSION	80
APPENDICE : Calcul des constantes de raccordement :	82
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	85

LE RESUME

Dans les dernières années, le problème des systèmes dépendants du temps a joué un rôle très important dans l'étude des plusieurs phénomènes physiques. Quelques problèmes spécifiques des oscillateurs dépendants du temps, ont fait l'objet de plusieurs études et en particulier la méthode des invariants. Si le système quantique admet un invariant $I(t)$, il est possible de trouver une base privilégiée des états propres de cet opérateur, une fois multiplié par un facteur de phase dépendant du temps, évoluent selon l'équation de Schrödinger dépendante du temps.

Dans notre travail, on considère la théorie des invariants d'un oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables à deux dimensions (2D) en présence de l'effet Aharonov-Bohm (AB), où le flux magnétique ν le long de l'axe OZ est dans le sens positif.

L'effet AB décrit une particule chargée qui interagis avec le potentiel vecteur d'un solénoïde droit infiniment long qui enferme un flux magnétique (AB potentiel), suscite toujours l'intérêt considérable avec des applications dans les divers domaines dans la littératures.

On détermine la solution exacte de l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables à deux dimensions (2D) en présence de l'effet AB. Trois cas particuliers seront discutés. On constate que l'équation auxiliaire est indépendante du flux magnétique d'AB.

Dans le cas particulier où le flux magnétique d'AB est quantifié, les fonctions d'ondes coïncident exactement avec les fonctions d'ondes de l'oscillateur harmonique dépendant du temps à deux dimensions (2D).

Mots-clés : Oscillateur harmonique, effet Aharonov-Bohm, champs magnétique.

Introduction

INTRODUCTION

Dans les dernières années, le problème des systèmes dépendant du temps a joué un rôle très important dans l'étude des plusieurs phénomènes physiques [1, 2, 3].

Les systèmes Hamiltoniens dépendant du temps sont difficiles à résoudre. Parmi les méthodes utilisées pour trouver des solutions à de tels problèmes on cite : L'approximation adiabatique qui conduit à la phase géométrique de Berry [4] et son analogue classique l'angle de Hannay [5], les perturbations dépendant du temps et la méthode la plus utilisées qui donne une solution exacte est celle introduite par H. R. Lewis et W. B Riesenfeld [6], elle consiste à faire évoluer les états propres de l'opérateur invariant I vérifiant l'équation de Liouville suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} I = [H, I]$$

Quelques problèmes spécifiques des oscillateurs dépendants du temps ont tiré l'attention des chercheurs dans ce domaine, en particulier l'oscillateur singulier dépendant du temps. En fait ce problème spécifique a été étudié dans différentes manières par beaucoup d'auteurs [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

La construction des invariants [6], a attiré beaucoup d'attention, pour décrire un système quantique régi par un Hamiltonien dépendant du temps.

Lewis et Riesenfeld [6] ont montré que si le système admet un invariant $I(t)$, il est possible de trouver une base privilégiée des états propres de cet opérateur, une fois multiplié par un facteur de phase dépendant du temps, évoluent selon l'équation de Schrödinger dépendant du temps.

L'effet Aharonov-Bohm (AB) [15], c'est-à-dire les systèmes dans lesquels une particule chargée interagis avec le potentiel vecteur d'un solénoïde droit infiniment long qui enferme un flux magnétique (AB potentiel), suscite toujours l'intérêt

considérable avec des applications dans les divers domaines dans la littérature [16, 17, 18, 19, 20, 21].

Dans notre travail, On considère la théorie de Lewis-Riesenfeld pour déterminer la solution exacte de l'équation de Schrödinger d'un oscillateur harmonique en présence de l'effet Aharonov-Bohm (AB). Travail fait très récemment par Y. Bouguerra, M. Maâmache et A. Bounames (B. M. B). Ce problème, ainsi que tout problème du type AB représente des cas idéals. Ils considèrent un fil « solénoïde » de rayon zéro, une chose impossible à réaliser dans la pratique. Dans la pratique on a affaire à des solénoïdes de rayon R très petit mais non nul. Le but de ce travail est de traiter le cas réel où on a un solénoïde de rayon R .

Le chapitre I constitue un rappel de l'équation de Schrödinger dépendante du temps et quelques méthodes mathématiques approximatives et exactes de résolution de cette équation. La théorie des invariants est considérée dans le chapitre II. On examine dans Le chapitre III l'effet Aharonov-Bohm. Le chapitre IV consacré à la théorie des invariants d'un oscillateur harmonique à deux dimensions (2D) en présence de l'effet Aharonov-Bohm qui constitue le résultat essentiel de ce mémoire.

CHAPITRE

I

L'équation
de
Schrödinger
dépendante du temps

L'EQUATION DE SCHRÖDINGER DEPENDANTE DU TEMPS

I. L'équation de Schrödinger :

Le 19^{ème} siècle a connu l'apparition de l'une des deux grandes théories physiques du siècle ; la physique quantique. Tout au début de la mécanique quantique on a été confronté au problème de l'explication des états discrets d'un atome.

En mécanique classique l'état d'un système physique est donné par la résolution des équations du mouvement du système [23, 24]. Par contre, en mécanique quantique l'état du système est déterminé par la résolution de l'équation de Schrödinger [25, 22, 26]. Cette équation a été proposée par E. Schrödinger en 1926 [26]. De Broglie et Schrödinger ont ainsi pu développer un parallélisme entre la mécanique classique et l'optique et parvenir à la conception de la mécanique ondulatoire [22, 25, 26].

Dans cette théorie, l'étude du mouvement d'un électron - ou d'un système atomique quelconque - ne doit pas être fondée sur les trajectoires classiques, solutions des équations de Newton, ce mouvement est décrit par une onde associée à l'électron, l'onde de De Broglie, que définit une fonction complexe des coordonnées d'espace et de temps, $\psi(\vec{r}, t)$, solution d'une équation aux dérivées partielles, l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (\text{I-1})$$

L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace à laquelle on doit associer des conditions aux limites convenables. Dans cette équation, l'hamiltonien $H(t)$ est un opérateur linéaire tiré de la fonction hamiltonienne classique, en y remplaçant la quantité de mouvement \vec{P} par l'opérateur:

$$\vec{P} = -i\vec{\nabla}_{\vec{r}} \quad (\text{I-2})$$

Pour une particule de masse $m(t)$ et d'impulsion \vec{P} en mouvement dans un potentiel $V(\vec{r}, t)$ l'hamiltonien ci-dessus s'écrit:

$$H(t) = \frac{\vec{P}^2}{2m(t)} + V(\vec{r}, t) \quad (\text{I-3})$$

A cause de l'interprétation probabiliste due à M. Born en 1926 [27, 28] des fonctions d'onde, les solutions de l'équation de Schrödinger doivent appartenir à l'espace de Hilbert. En plus de l'équation de Schrödinger, les solutions de cette dernière doivent vérifier l'équation de continuité suivante [22, 25, 26] :

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{I-4})$$

avec

$$\rho(x, t) = \psi^*(x, t) \psi(x, t) \quad (\text{I-5})$$

représente la densité de probabilité, et

$$\vec{j}(x, t) = \frac{-i\hbar}{2m} [\psi^*(x, t) \cdot \vec{\nabla} \psi(x, t) - \psi(x, t) \cdot \vec{\nabla} \psi^*(x, t)] \quad (\text{I-6})$$

est la densité du courant.

Schrödinger a démontré l'équivalence du formalisme développé par De Broglie et Schrödinger d'une part, et de celui de Heisenberg, de Born et de Jordan d'autre part. Dès lors la fonction d'onde n'a aucune signification physique propre ; elle est un système abstrait opératoire qui représente l'état physique d'un système elle contient toutes les informations sur celui-ci et permet le calcul de la probabilité qu'une variable physique ait une valeur donnée dans une mesure de la probabilité de transition d'un système physique entre deux états possibles des valeurs moyennes des grandeurs physiques d'un système dans un état donné. Malgré son importance physique, l'équation de Schrödinger n'appartient pas à un type particulier d'équations, à savoir hyperboliques ou paraboliques.

II. Quelques méthodes mathématiques de résolution de l'équation de Schrödinger :

Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie. Dans les premières investigations, l'on s'attachait surtout à en calculer les solutions au moyen de fonctions déjà connues, très vite ce point de vue s'affirma trop étroit ; c'est qu'en effet le problème fondamental de la théorie des équations différentielles est de déduire les propriétés des solutions d'une équation ou d'un système donné de la forme analytique de ceux-ci ; or, en général, les équations qui résultent d'une investigation théorique en mathématiques ou en physique ne sont pas explicitement intégrables et constituent, bien souvent, la principale source pour la définition de nouvelles fonctions dont les propriétés peuvent être prévues par une analyse systématique de grandes classes d'équations ou de systèmes.

Les méthodes mathématiques de résolution de l'équation de Schrödinger se divisent en deux catégories analytiques ou numériques :

1) *Les méthodes analytiques :*

Parmi ces méthodes on peut citer par exemple :

1. théorie de perturbation de Poincaré :

Elle permet de donner une description satisfaisante du phénomène de synchronisation des oscillateurs quasi linéaires, comme permet aussi de rendre compte du phénomène de démultiplication de fréquence, c'est-à-dire l'existence de solutions sous-harmoniques périodiques.

2. La méthode de centrage (Kryloff-Bogoliuboff-Haag) :

Cette méthode permet de prévoir l'existence de solutions périodiques et d'étudier leur stabilité.

3. Les méthodes topologiques :

Les méthodes topologiques ont reçu dans les dernières décennies un développement considérable et ont rendu possible la recherche de solutions périodiques de systèmes différentiels dans de nombreux cas. L'application de cette méthode à l'étude des systèmes dynamiques, constitue un prolongement naturel de la théorie des équations différentielles et a donné lieu à de nombreux travaux : problèmes de stabilité, problèmes ergodiques, ... etc.

Une autre généralisation importante consiste à considérer des équations différentielles dans lesquelles la fonction inconnue a des valeurs dans un espace métrique, par exemple un espace de Hilbert ou un espace de Banach, ce qui est le cas de la mécanique quantique.

4. La méthode de séparation de variables :

Elle consiste à la recherche des valeurs propres $o_\alpha(t)$ et vecteurs propres $|\varphi_\alpha(t)\rangle$ correspondant à un problème aux valeurs propres [6, 29, 30] :

$$\hat{O}(t)|\varphi_\alpha(t)\rangle = o_\alpha(t)|\varphi_\alpha(t)\rangle \quad (\text{I-7})$$

où le nombre quantique α peut être un indice discret ou continu selon la nature du système quantique considéré, et l'opérateur $\hat{O}(t)$ est un opérateur hermitien dont les fonctions propres forment une base de l'espace de Hilbert [25]. Il peut représenter par exemple l'hamiltonien, le spin, le moment cinétique ... etc.

D'après le principe de superposition, la solution de l'équation de Schrödinger, dite fonction d'onde [26], n'est que la superposition de ces vecteurs propres. La nature de la superposition, c'est à dire une série, une intégrale ou bien les deux dépend de la nature de l'indice α . Les valeurs propres d'un tel opérateur sont des nombres réels et figurent les résultats numériques possibles des mesures de la grandeur physique correspondante. Dans le cas de l'hamiltonien les valeurs propres représentent les énergies du système. Une valeur propre est dite dégénérée si il lui correspond plus

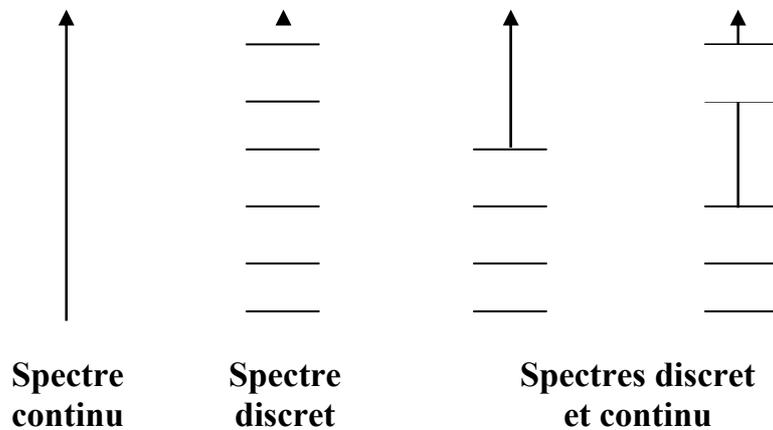


Figure I-1 : différents types du spectre d'un opérateur.

d'un seul vecteur propre. L'ensemble des valeurs propres $\sigma_\alpha(t)$ constitue le spectre de l'opérateur. Les différents types de ce spectre sont donnés par la figure ci dessus.

2) Les méthodes numériques :

On cite par exemple :

- 1. Méthode d'Euler :**
- 2. La méthode de Heun :**
- 3. La méthode d'Euler améliorée**
- 4. La méthode de Runge et Kutta**
- 5. Méthode des approximations successives**

III. L'équation de Schrödinger dépendante du temps :

Dans le paragraphe précédent on a donné quelque méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger (I-1) dans sa forme la plus générale, dans la suite de ce paragraphe on va s'intéresser d'un cas particulier de l'équation de Schrödinger ; le cas dépendant explicitement du temps.

La résolution de l'équation de Schrödinger dépendante explicitement du temps revient à déterminer les coefficients de développement $\Gamma_n(t)$ tels que :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \Gamma_n(t) |\varphi_n(t)\rangle \quad (\text{I-8})$$

avec les $|\varphi_n(t)\rangle$ représentent les vecteurs propres de l'hamiltonien vérifiant l'équation aux valeurs propres suivante :

$$H(t)|\varphi_n(t)\rangle = E_n(t)|\varphi_n(t)\rangle \quad (\text{I-9})$$

L'injection de (I-8) dans l'équation de Schrödinger (I-1) donne :

$$\sum_n i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_n(t) |\varphi_n(t)\rangle + \sum_n \Gamma_n(t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_n(t)\rangle = \sum_n \Gamma_n(t) E_n(t) |\varphi_n(t)\rangle \quad (\text{I-10})$$

en projetant sur l'état $|\varphi_m(t)\rangle$ et en appliquant la relation d'orthonormalisation :

$$\langle \varphi_m(t) | \varphi_n(t) \rangle = \delta_{nm} \quad (\text{I-11})$$

tel que δ_{nm} est le symbole de Kronecker, on obtient donc :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_m(t) = \Gamma_m(t) E_m(t) - \sum_n \Gamma_n(t) \langle \varphi_m(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_n(t) \rangle \quad (\text{I-12})$$

si on prend comme exemple le cas particulier suivant :

$$\forall n, \quad |\varphi_n(t)\rangle = |\varphi_n\rangle \quad (\text{I-13})$$

on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_m(t) = \Gamma_m(t) E_m(t) \quad (\text{I-14})$$

Le système d'équation (I-12) s'intègre facilement et on trouve :

$$\Gamma_m(t) = \Gamma_m(t_0) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t E_m(t') dt'} \quad (\text{I-15})$$

et la solution (I-8) de l'équation de Schrödinger (I-1) est donnée par :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \Gamma_n(t_0) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t E_n(t') dt'} |\varphi_n(t)\rangle \quad (\text{I-16})$$

Dans le cas général, le système d'équation (I-12) n'admet pas de solutions analytiques. Dans les paragraphes suivants on va rappeler les différentes méthodes, exactes ou approximatives, de résolution de l'équation de Schrödinger (I-1).

Commençons par les méthodes exactes :

1) Les méthodes exactes :

1. Recherche de l'opérateur d'évolution :

En générale, résoudre l'équation de Schrödinger (I-1) revient de trouver un opérateur linéaire, soit $U(t, t_0)$, qui vérifie :

$$U(t, t_0) = U^+(t, t_0) \quad (\text{I-17})$$

et qui est défini comme suit [22, 25]:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (\text{I-18})$$

avec $|\psi(t_0)\rangle$ représente l'état initial du système.

Par définition, le rôle de cette opérateur est de déterminer l'évolution de l'état $|\psi(t_0)\rangle$ à tout l'instant t , d'où l'appellation opérateur d'évolution [25].

En injectant (I-18) dans l'équation de Schrödinger (I-1), $U(t, t_0)$ vérifie l'équation différentielle suivante:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0) \quad (\text{I-19})$$

avec la condition initiale :

$$U(t_0, t_0) = 1 \quad (\text{I-20})$$

Alors résoudre l'équation de Schrödinger (I-1) est équivalent à résoudre l'équation (I-19), cette dernière s'intègre formellement en donnant :

$$U(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t H(t')U(t', t_0)dt' \quad (\text{I-21})$$

L'avantage de cette écriture est qu'elle permet d'établir des solutions approximées en utilisant les différentes méthodes d'approximations, comme on va le voir dans les paragraphes suivants.

2. Changement de représentation :

Les résultats donnés jusqu'ici ont été obtenus dans ce qu'on appelle la représentation de Schrödinger, cette représentation n'est pas la seule possible ;

En mécanique, le changement de représentation à l'aide de certains opérateurs unitaires peut apporter plus d'avantages et faciliter la résolution de l'équation de Schrödinger, ou, au moins, il permet d'extraire quelques informations sur le système étudié [22]. Parmi ces représentations on a : la représentation de Heisenberg et la représentation interaction ou représentation intermédiaire.

3. Les transformations unitaires :

En appliquant des transformations unitaires sur un système dépendant du temps on peut le rendre indépendant du temps, à condition de trouver de tels opérateurs unitaires. Une étude d'une classe d'hamiltoniens non linéaires dépendants du temps à un seul degré de liberté et faite par [31], dans laquelle, de tels systèmes sont transformés à des systèmes indépendants du temps, à des facteurs dépendants du temps près, à l'aide de quelques transformations appropriés.

4. La théorie des invariants :

Parmi les méthodes les plus puissantes qui donnent des solutions exactes de l'équation de Schrödinger dépendante du temps on a la méthode des invariants [32]. A cause de son importance dans ce travail, on va l'étudier avec plus de détails. Mais avant de faire, on va donner quelques méthodes d'approximations utilisées pour résoudre l'équation de Schrödinger (I-1).

2) Les méthodes approximatives :

Des fois, lorsqu'on ne peut pas trouver des résultats exacts on fait appel à des méthodes d'approximation, ces méthodes sont généralement très puissantes et

applicables à de nombreux systèmes physiques, elles sont beaucoup plus utilisées dans les domaines de la physique appliquée ; tels que la physique du solide, physique des plasmas, l'information quantique...etc. Parmi ces méthodes on a :

1. La théorie des perturbations :

Si on considère le cas particulier suivant [22] :

$$H(t) = H_0(t) + \lambda V(t) \quad (\text{I-22})$$

où $H_0(t)$ est un hamiltonien d'une équation de Schrödinger que l'on sait intégrer exactement et $V(t)$ un potentiel quelconque, et λ vérifie [33]:

$$\lambda \ll 1 \quad (\text{I-23})$$

Il est montré que la solution de l'équation (I-21) est donnée par la série suivante [22] :

$$U(t, t_0) = U^{(0)}(t, t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0) \quad (\text{I-24})$$

avec $U^{(0)}(t, t_0)$ est la solution de l'équation non perturbé. Les $U^{(n)}(t, t_0)$, $\forall n \geq 1$ sont données par [22] :

$$U^{(n)}(t, t_0) = (i\hbar)^{-n} \lambda^n \int_{t > t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t_0} dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 U^{(0)}(t, t_n) V(t_n) U^{(0)}(t_n, t_{n-1}) V(t_{n-1}) \dots U^{(0)}(t_2, t_1) V(t_1) U^{(0)}(t_1, t_0) \quad (\text{I-25})$$

Cette théorie consiste à ne prendre que les premiers ordre en λ .

La théorie des perturbations dépendant du temps permet donc de calculer approximativement les fonctions d'ondes à partir des états stationnaires du système non perturbé [26], et les différentes grandeurs physiques sont obtenues en calculant les valeurs moyennes des opérateurs correspondants.

2. Méthode variationnelle :

Cette méthode appuie sur le théorème de Ritz [25] qui stipule que la valeur moyenne de l'hamiltonien calculer par rapport à une fonction d'onde $|\chi(t)\rangle$, c'est-à-dire :

$$\langle H(t) \rangle = \frac{\langle \chi(t) | H(t) | \chi(t) \rangle}{\langle \chi(t) | \chi(t) \rangle} \quad (\text{I-26})$$

est stationnaire si elle est voisine à l'une de ces valeurs propres.

Alors, pour trouver les valeurs propres de l'hamiltonien on choisit une fonction d'essai appropriée dépendant d'un certain paramètre α , et en variant par rapport au paramètre les valeurs propres de l'hamiltonien correspondent aux valeurs α_i pour lesquelles la valeur moyenne (I-26) est extrémale.

3. Approximation soudaine :

Supposant que le système est soumis à un champ extérieur pendant un intervalle de temps T , On appelle approximation soudaine, l'approximation appliquée dans le cas limite $T \rightarrow 0$, elle s'énonce comme suit [22, 33] : « ... A la limite où $T \rightarrow 0$, c'est-à-dire dans le cas du passage infiniment rapide, l'état dynamique du système reste inchangé ... ».

4. Approximation adiabatique :

En étendant les travaux d'Ehrenfest [34] sur l'approximation adiabatique en mécanique classique et l'ancienne théorie des Quanta [22, 33, 35] à la mécanique quantique, M. Born et V. Fock [36] ont ouvert un domaine de recherche qui a attiré un grand intérêt dans le comité scientifique soit sur le plan théorique ou pratique, on peut citer par exemple : physique des plasmas, fibres optique, information quantique ... etc.

Supposons que l'hamiltonien du système considéré dépend du temps à travers un ensemble de paramètres $\vec{X}(t)$ tel que la masse, la charge, un champ externe ...etc. ici les paramètres $\vec{X}(t)$ dépendent de manière adiabatique du temps.

Le but de l'approximation adiabatique est la détermination de l'évolution du système entre deux instants t_0 et t_1 avec :

$$T = t_1 - t_0 \quad (\text{I-27})$$

représente ce qu'on appelle le paramètre adiabatique, et qui vérifie

$$T \gg \quad (I-28)$$

Le but de l'approximation adiabatique est de trouver l'opérateur d'évolution $U(t_1, t_0)$, lorsque $T \rightarrow \infty$, dans ce cas le théorème adiabatique stipule que [22] : « si le système se trouve à l'instant initial dans un état propre $|\varphi_n(\vec{X}(t_0))\rangle$ de $H(\vec{X}(t_0))$, il passe au temps t_1 dans l'état propre $|\varphi_n(\vec{X}(t_1))\rangle$, à un facteur de phase près, de $H(\vec{X}(t_1))$ qui s'en déduit par continuité » donc, les vecteurs propres constituent de bonnes approximations de la solution exacte pour un système adiabatique [37].

5. La phase de Berry :

L'application du théorème adiabatique a connu un intérêt croissant dans les différents domaines de la physique [38, 35], Parmi ces applications les plus importantes on a la phase géométrique de Berry [4]. D'après le théorème adiabatique le système, préparé initialement dans un état propre de l'hamiltonien, reste à tout instant dans le même état propre à un facteur de phase près, c'est-à-dire la solution de l'équation de Schrödinger (I-1) s'écrit dans le cadre de l'approximation adiabatique comme suit :

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{i\alpha_n(\vec{X})} |\varphi_n(\vec{X})\rangle \quad (I-29)$$

la période T est supposée très grande pour qu'on puisse appliquer l'approximation adiabatique précédente, de plus, on suppose effectuée une évolution le long d'une courbe fermée C dans l'espace des paramètres \vec{X} , c'est-à-dire :

$$\vec{X}(t_1) = \vec{X}(t_0) \quad (I-30)$$

Berry a montré qu'en plus de la phase dynamique le système admet une nouvelle phase, en effet, en injectant (I-29) dans l'équation de Schrödinger (I-1) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_n(\vec{X}) |\varphi_n(\vec{X})\rangle = -\frac{1}{\hbar} E_n(\vec{X}) |\varphi_n(\vec{X})\rangle + i \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_n(\vec{X})\rangle \quad (\text{I-31})$$

en projetant sur $|\varphi_n(\vec{X})\rangle$ on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_n(\vec{X}) = -\frac{1}{\hbar} E_n(\vec{X}) + \langle \varphi_n(\vec{X}) | i \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_n(\vec{X}) \rangle \quad (\text{I-32})$$

d'où, on a :

$$\alpha_n(\vec{X}) = \gamma_n^D(\vec{X}) + \gamma_n^G(\vec{X}) \quad (\text{I-33})$$

Ici la phase supplémentaire $\gamma_n^G(\vec{X})$ représente la phase célèbre de Berry, elle est donnée d'après (I-32) et (I-33) par :

$$\gamma_n^G(\vec{X}) = \int_{t_0}^t \langle \varphi_n(\vec{X}(t')) | i \frac{\partial}{\partial t'} | \varphi_n(\vec{X}(t')) \rangle dt' \quad (\text{I-34})$$

qui s'écrit encore après une période T :

$$\gamma_n^G = \oint_C \langle \varphi_n(\vec{X}) | i \vec{\nabla}_{\vec{X}} | \varphi_n(\vec{X}) \rangle d\vec{X} \quad (\text{I-35})$$

Simon [39] a mis cette phase en relation avec le transport naturel défini sur le fibré des rayons de Hilbert. Ce transport peut être interprété en introduisant une distance entre les rayons dans l'espace projectif de Hilbert. Cette distance définit, dans le cas où les deux rayons sont infiniment voisins, la métrique Fubini-Study.

Le lien avec le transport de Berry a été fait par Maamache et al [40], en moyennant et minimisant la distance de Bures.

Pour cette raison, la phase de Berry s'appelle aussi phase géométrique [41, 37].

Depuis sa découverte en 1983, la phase de Berry a connue une multitude d'applications théoriques ou expérimentales [42]. Parmi ces applications on a : l'effet Hall quantique [35], l'effet Young-Taylor [43], le modèle de Landau-Ginzburg-Wilson [44], l'effet Güoy [45], l'information quantique [44], et le célèbre effet Aharonov-

Bohm qui constitue le contexte principal de ce travail et auquel on va consacrer le troisième chapitre.

La phase de Berry a connu de différentes généralisations, Parmi ces généralisations on cite :

a) Systemes non cycliques :

Comme on l'a vu précédemment, la phase de Berry est calculée lorsque le système effectue une évolution le long d'une courbe fermée C , ce résultat a été généralisé par J. Samuel, R. Bhandari [46] dans le cas d'une évolution non cyclique et non unitaire [37].

b) Systemes non adiabatiques :

En 1987, Y. Aharonov et J. Anandan [41] ont montré qu'une phase géométrique peut émerger dans le cas des systèmes non adiabatiques [20], la découverte de cette phase a permis d'enlever le mystère de pourquoi la phase de Aharonov-Bohm [15], devrait émerger de la phase de Berry malgré que l'effet de Aharonov-Bohm soit indépendant de l'approximation adiabatique [41].

c) Systemes non hermitiens :

Il est montré que les systèmes non hermitique ou dissipatives admettent aussi une phase analogue à la phase de Berry [4].

On note vers la fin que la phase de Berry admet un analogue classique qui est l'angle de Hannay découverte par J. H. Hannay [5].

CHAPITRE

II

La
théorie
des
Invariants

LA THEORIE DES INVARIANTS

I. Exposition de la méthode :

La théorie des invariants pour des Hamiltoniens Hermitiens a été introduite par Lewis et Riesenfeld (1969) [6], où ils ont dérivé une simple relation entre les vecteurs propres de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger.

Considérons l'évolution d'un état propre de l'invariant $I(t)$; un certain opérateur qui vérifie l'équation :

$$\frac{dI}{dt} = 0 \quad (\text{II-1})$$

D'après l'équation de Liouville-Von Neumann [47] cette équation est équivalente à l'équation suivante [6, 22, 26, 32] :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [I(t), H(t)] \quad (\text{II-2})$$

Cette dernière équation est déduite de (II-1) en dérivant la valeur moyenne de l'invariant, c'est-à-dire :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\overline{dI(t)}}{dt} = \langle \psi(t) | \frac{\partial I(t)}{\partial t} - i[I(t), H(t)] | \psi(t) \rangle = 0 \quad (\text{II-3})$$

d'où

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} [I(t), H(t)] = 0 \quad (\text{II-4})$$

L'invariant $I(t)$ a un nombre infini de vecteurs propres $|\psi_\lambda(t)\rangle$ qui satisfont :

$$I(t)|\psi_\lambda(t)\rangle = \lambda|\psi_\lambda(t)\rangle \quad (\text{II-5})$$

Les λ représentent les valeurs propres de l'opérateur $I(t)$ correspondant aux vecteurs propres $|\psi_\lambda(t)\rangle$ respectivement.

Pour un système conservatif régi par un Hamiltonien hermitien on a :

$$I(t) = I^+(t) \quad (\text{II-6})$$

portons notre attention sur le fait que l'invariant est hermitien nous constatons que ces valeurs propres sont réelles.

Les vecteurs propres $|\psi_\lambda(t)\rangle$ satisfont aux conditions d'orthonormalité et de fermeture suivantes :

$$\langle \psi_\nu(t) | \psi_\lambda(t) \rangle = \delta_{\nu\lambda} \quad (\text{II-7})$$

$$\sum_\lambda |\psi_\lambda(t)\rangle \langle \psi_\lambda(t)| = 1 \quad (\text{II-8})$$

d'après l'équation (II-5) on peut écrire :

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\psi_\lambda(t)\rangle + I \frac{\partial |\psi_\lambda(t)\rangle}{\partial t} = \frac{\partial I_\lambda(t)}{\partial t} |\psi_\lambda(t)\rangle + I_\lambda \frac{\partial |\psi_\lambda(t)\rangle}{\partial t} \quad (\text{II-9})$$

En utilisant les équations (II-3), (II-5) on obtient :

$$i\hbar \langle \psi_\nu | \frac{\partial I}{\partial t} | \psi_\lambda \rangle + (\nu - \lambda) \langle \psi_\nu | H | \psi_\lambda \rangle = 0 \quad (\text{II-10})$$

ce qui donne :

$$\langle \psi_\lambda | \frac{\partial I}{\partial t} | \psi_\lambda \rangle = 0 \quad (\text{II-11})$$

On projette l'équation (II-9) sur l'état $\langle \psi_\nu |$ et on utilise l'équation (II-10) on obtient :

$$\langle \psi_\nu | \frac{\partial I}{\partial t} | \psi_\lambda \rangle + \langle \psi_\nu | I \frac{\partial}{\partial t} | \psi_\lambda \rangle = \langle \psi_\nu | \frac{\partial I_\lambda}{\partial t} | \psi_\lambda \rangle + \langle \psi_\nu | I_\lambda \frac{\partial}{\partial t} | \psi_\lambda \rangle \quad (\text{II-12})$$

On sait que les valeurs propres de l'opérateur invariant ne dépendent pas du temps, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-13})$$

donc l'équation (II-12) devient :

$$i\hbar\langle\psi_\nu|\frac{\partial I}{\partial t}|\psi_\lambda\rangle+(\nu-\lambda)\langle\psi_\nu|\frac{\partial}{\partial t}|\psi_\lambda\rangle=0 \quad (\text{II-14})$$

et d'après les deux équations (II-10) et (II-14) on obtient :

$$i\hbar\langle\psi_\nu|\frac{\partial}{\partial t}|\psi_\lambda\rangle=\langle\psi_\nu|H|\psi_\lambda\rangle \quad \nu \neq \lambda \quad (\text{II-15})$$

II. Recherche des Solutions :

On définit la phase $\alpha_\lambda(t)$ correspondant à l'état $|\Psi_\lambda(t)\rangle$ au cours de son évolution par rapport aux états de référence $|\psi_\lambda(t)\rangle$ par :

$$|\Psi_\lambda(t)\rangle = \exp i\alpha_\lambda(t)|\psi_\lambda(t)\rangle \quad (\text{II-16})$$

la phase $\alpha_\lambda(t)$ représente la phase de Riesenfeld.

D'après les équations (II-3), (II-10), et (II-14) et pour que $\nu = \lambda$

$$\alpha_\lambda(t) = \int_0^t \langle\psi_\lambda(t')|i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - H(t')|\psi_\lambda(t')\rangle dt' \quad (\text{II-17})$$

et par conséquent $|\Psi_\lambda(t)\rangle$ satisfait l'équation :

$$i\hbar\langle\Psi_\lambda(t)|\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_\lambda(t)\rangle = \langle\Psi_\lambda(t)|H|\Psi_\lambda(t)\rangle \quad (\text{II-18})$$

Utilisant les équations (II-16) et (II-17) on obtient :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_\lambda(t)\rangle = H(t)|\Psi_\lambda(t)\rangle \quad (\text{II-19})$$

D'après l'expression précédente de $\alpha_\lambda(t)$ dans l'équation (II-17), le vecteur d'état $|\Psi_\lambda(t)\rangle$ devient une solution particulière de l'équation de Schrödinger.

La solution générale de l'équation de Schrödinger pour un système hermitien est obtenue sous la forme :

$$|\Psi_\lambda(t)\rangle = \sum_\lambda C_\lambda \exp(i\alpha_\lambda(t)) |\psi_\lambda(t)\rangle \quad (\text{II-20})$$

Remarquons ici que cette formule est générale. On peut passer à l'évolution cyclique par un invariant approprié qui satisfait la condition :

$$I(T) = I(0) \quad (\text{II-21})$$

dont ses vecteurs propres $|\psi_n(t)\rangle$ peuvent être choisis de sorte que :

$$|\psi_n(T)\rangle = |\psi_n(0)\rangle \quad (\text{Cyclique}) \quad (\text{II-22})$$

Donc on peut définir l'évolution cyclique sous la forme :

$$|\Psi_n(T)\rangle = \sum_n C_n \exp i(\alpha_n(T)) |\psi_n(0)\rangle \quad (\text{II-23})$$

$|\psi_n(0)\rangle$ représente l'état de référence, lorsque $I(t)$ est connu, dans ce cas toute phase α_n peut être établie facilement.

On remarque dans cette partie que la phase $\alpha_n(t)$ représente une somme de deux termes, l'un représente la phase dynamique et l'autre on l'interprète comme une phase géométrique. Donc un état propre de l'invariant évolue comme un état propre de l'Hamiltonien dans le cas adiabatique dont on a vu précédemment, c'est l'une des raisons majeures que la théorie des invariants a pris une place très importante dans les travaux sur la phase géométrique non adiabatique [8, 48].

CHAPITRE

III

L'effet Aharonov-Bohm

L'EFFET AHARONOV-BOHM

I. Introduction :

L'effet Aharonov-Bohm est un effet de déplacement des franges d'interférence dû à un champ magnétique, qui persiste même si le champ magnétique est localisé dans une région infiniment petite de l'espace.

Bien que la théorie quantique a environ un siècle, sa capacité de produire de contre perspicacités intuitives dans la nature de la matière demeure non diminuée. Telle surprise a commencé par une expérience provocatrice proposée par Yakir Aharonov et David Bohm en 1959 [15]. D'après leur résultat, un aimant protégé d'une telle manière qu'il ne pourrait pas exercer une force sur un autre aimant tout près ; En d'autres termes, aucune manifestation conventionnelle du gisement de l'aimant protégé n'a pu être détectée, pourtant si un faisceau des électrons devaient propager par la proximité de cet aimant protégé, Aharonov et Bohm ont prévu que la phase de la fonction d'onde d'électron changeraient.

Aharonov et Bohm ont prévu que cet effet est dû à une entité physique plus fondamentale que les champs électriques et magnétiques : un potentiel, dont le taux de variation dans l'espace et le temps rapporte les champs électriques et magnétiques. Après trois décennies l'effet Aharonov-Bohm a été mis en évidence expérimentalement en utilisant des électrons se propageant dans un vide.

L'effet Aharonov-Bohm a eu une influence considérable sur la façon dont les physiciens pensent de l'électrodynamique. On a longtemps su qu'une charge positive passant près mais sans jamais toucher une charge stationnaire et négative néanmoins accélèrent et changent la direction. Afin d'expliquer un tel phénomène, connu sous le nom d'action à distance, Michael Faraday a proposé en 1846 que les charges rencontrent les champs qui exercent les forces électriques et magnétiques. D'après ce qui a été connue à ce temps, les champs décrivent la dynamique des charges complètement. Quand les théories de relativité et la mécanique quantique ont été

introduites, les potentiels, et non pas les champs électriques et magnétiques, apparaissent dans les équations de la mécanique quantique, et les équations de la relativité simplifiées dans une forme mathématique compacte si les champs étaient exprimés en termes de potentiels. Les expériences suggérées par Aharonov et Bohm [15] ont indiqué la signification physique des potentiels : une particule chargée passant près mais sans aucune rencontre avec un champ magnétique ou électrique néanmoins changera sa dynamique d'une manière subtile mais mesurable. La conséquence de l'effet Aharonov-Bohm est que les potentiels, pas les champs, agissent directement sur les charges.

Les physiciens avaient exploré de larges implications de l'effet dans les secteurs s'étendant de l'effet Hall quantifié par la supraconductivité à la théorie superbe de corde.

II. Description du phénomène :

Les expériences d'interférence ont fourni une démonstration élégante de la nature ondulatoire des électrons [22, 25, 26] et ont permis aussi de fournir une base pour comprendre l'effet Aharonov-Bohm. Dans de telles expériences, un générateur de particules émet un faisceau d'électrons ayant la même énergie. Le faisceau est dirigé à un plat qui absorbe les électrons. Deux fentes verticales étroitement espacées percent le plat. Un film centré derrière les fentes sert à enregistrer une tache lumineuse à chaque fois reçoit un impact d'électron. Après que le générateur de particules ait émis beaucoup d'électrons, un ordre de bande sombres et claires parallèles aux fentes apparaissent sur le film. Au centre on a une bande lumineuse qui se trouve entre deux bandes sombres sur les côtés, ces dernières à leur tour sont bornées par des bandes claires, et ainsi de suite.

1) *Aspect ondulatoire des électrons :*

Si les électrons agissaient comme des balles, ils ricocheraient outre des fentes ou passeraient directement par elles. Le film, donc, enregistre une concentration des

impacts directement derrière les fentes ; il y aurait relativement peu de coups à un côté ou à l'autre. Clairement un tel effet ne peut pas expliquer le modèle complexe qui est observé.

Une meilleure approche (conformes à la théorie quantique du comportement attribué aux électrons) seraient de supposer que les particules se comportent comme des ondes [22, 25, 26]. La grandeur qui caractérise une onde pendant sa propagation dans l'espace et le temps est son amplitude qui change périodiquement d'un maximum à un minimum. La variation instantanée de l'amplitude et d'autres caractéristiques de l'onde sont commodément décrites par une fonction mathématique d'onde.

La fonction mathématique d'une onde qui décrit un électron est représentée en termes de son amplitude maximale et de sa phase. L'amplitude de l'onde de l'électron décrit une probabilité, qui est liée au fait que la position et la vitesse d'une particule peuvent être déterminées à un certain degré de précision. Spécifiquement, la valeur maximale de l'amplitude de la fonction d'onde de l'électron représente la probabilité de trouver l'électron à un endroit particulier à un moment particulier [22, 27, 28]. L'angle de phase de la fonction d'onde d'un électron est particulièrement utile pour décrire la relation entre deux ondes. Si deux ondes soit en phase à un endroit ou à un moment particulier. Les deux ondes soient dans la même partie de leur cycle : tous les deux ont atteint l'amplitude maximum ou minimum. Si deux vagues ont lieu "complètement hors phase", une onde a atteint un maximum tandis que l'autre est à un minimum. L'angle de phase d'une onde d'électron peut également être exprimé en termes de quantités physiques plus intuitives. Dans des cas simples la phase est liée au moment multiplié par la distance que l'onde de l'électron a parcouru.

Ces concepts fournissent une explication satisfaisante pour l'expérience des fentes de Young. Puisque le générateur de particules émet des électrons ayant la même énergie et la même impulsion, les fonctions d'onde de l'électron ont la même phase à une distance donnée du générateur, une condition connue sous le nom de cohérence. Pendant qu'une onde d'électron pénètre les deux fentes, elle se divise en ondes

partielles. Puisque les ondes partielles parcourent la même distance à chacune des fentes, l'onde partielle émergeant de la fente gauche a la même phase que l'onde partielle émergeant de la droite. Ainsi à un point sur le film qui est équidistant des deux fentes, les ondes partielles gauches et droites soient en phase. Par conséquent les ondes se renforcent et produisent une bande lumineuse au milieu du film. Il est également juste pour indiquer que les bandes lumineuses représentent le fait que les électrons ont deux fois autant de chance pour frapper là à un point moyen sur le film.

À la gauche de la bande lumineuse cependant, l'onde partielle droite doit parcourir une plus grande distance que l'onde partielle gauche. En conséquence, à quelques points vers la gauche, les deux ondes auront lieu complètement hors de phase et s'annulent l'une par l'autre. Par conséquent une bande sombre formera ; parce que les électrons n'ont presque aucune chance de frapper à ce point, Voir la figure suivante :

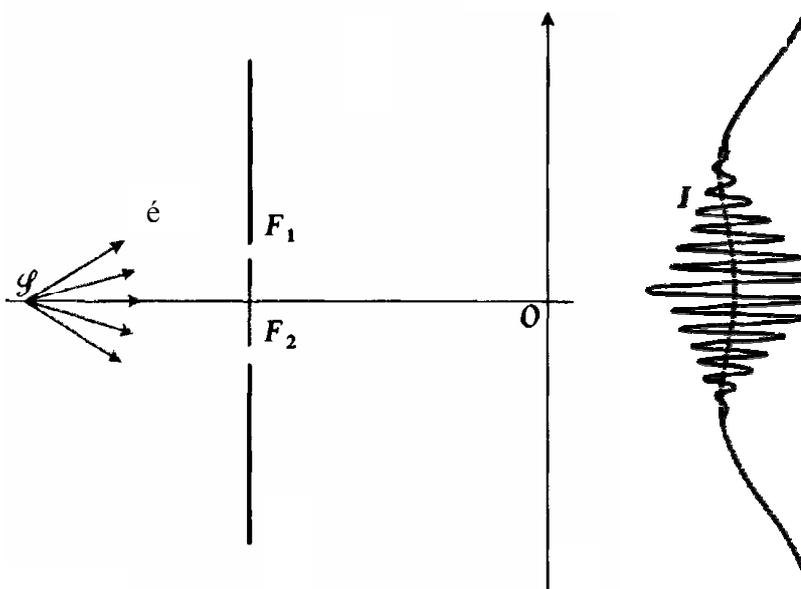


Figure III-1 : expérience des fentes de Young avec des électrons libres.

2) L'effet Aharonov-Bohm magnétique :

Afin d'observer l'effet *Aharonov-Bohm*, l'expérience d'interférence précédente doit être changée légèrement. Directement derrière le plat et entre les deux fentes est placé un solénoïde très long qui n'a un champ magnétique qu'à l'intérieur, il n'y a absolument aucun champ électrique ou magnétique en dehors de lui. Quand un faisceau des électrons pénètre les deux fentes et circule autour du solénoïde, le film enregistre un nouveau modèle d'interférence. Comparé au modèle original, le nouveau modèle est décalé de sorte que les régions précédemment lumineuses semblent plus foncées et les régions foncées semblent plus lumineuses. Quand le champ magnétique contenu dans le solénoïde est enlevé de l'expérience le modèle d'interférence revient à son forme originale, voir la figure III-2.

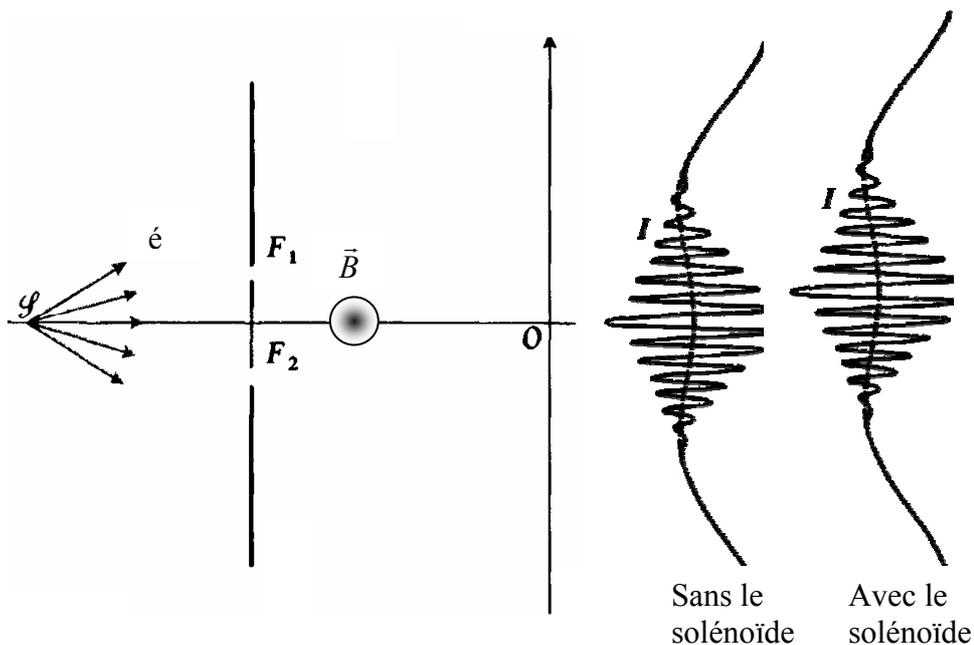


Figure III-2 : expérience des fentes de Young avec des électrons en présence d'un solénoïde.

Dans cette nouvelle expérience d'interférence les phases des ondes partielles gauches et droites ont apparemment changé quoique le champ magnétique ait été presque complètement confiné à l'intérieur du solénoïde. Le changement de la phase

d'une fonction d'onde de l'électron dans une région où aucun champ magnétique n'existe est une manifestation de l'effet *Aharonov-Bohm*.

L'effet a indiqué que le changement de phase d'une fonction d'onde doit être lié à une certaine grandeur physique située à l'extérieure de la région où le champ magnétique est confiné. *Aharonov* et *Bohm* [15] dérivant des équations fondamentales de la mécanique quantique ont montré que le changement de phase est dû à une entité qui existe n'importe où et autour d'un champ magnétique ; le potentiel vecteur magnétique. Bien que le potentiel vecteur soit un champ de vecteur dans le sens qu'il a une grandeur et une direction à chaque point dans l'espace et peut changer avec du temps. Le potentiel vecteur peut être mesuré directement seulement en observant des changements de phase des fonctions d'onde. Le déphasage provoqué par le potentiel vecteur peut expliquer tous les effets magnétiques mesurables sur les particules chargées.

Pendant que les ondes partielles gauches et droites voyageaient dans la région libre de force près du solénoïde, le potentiel vecteur a changé l'impulsion de l'onde partielle gauche par rapport à l'onde partielle droite sans changer l'énergie cinétique. Donc, la phase de l'onde est une fonction liée à son impulsion.

3) L'effet *Aharonov-Bohm* électrostatique :

Par analogie avec l'effet Aharonov-Bohm magnétique, il existe ce qu'on appelle l'effet Aharonov-Bohm électrostatique. Le potentiel scalaire électrique n'est pas un champ de vecteur qu'il a simplement une grandeur à chaque point dans l'espace. Bien que l'importance absolue du potentiel ne puisse pas être déterminée, la différence de potentiel entre deux points est l'énergie nécessaire pour déplacer une unité de charge d'un point à l'autre. Cette différence de potentiel est généralement mesurée en volts. Comme le potentiel vecteur magnétique, le potentiel scalaire électrique peut également causer un déphasage d'une fonction d'onde de l'électron. L'effet Aharonov-Bohm électrostatique est alors le déphasage d'une fonction d'onde d'électron due au potentiel scalaire électrique dans une région où aucun champ électrique n'existe. L'effet

Aharonov-Bohm électrostatique peut être expliqué en termes d'expérience de pensée [voir la figure III-3]. Un faisceau d'électrons est coupé en deux ondes partielles. Chaque onde partielle est dirigée dans une cavité, cylindre métallique. Après que les ondes partielles entrent dans chaque cylindre, une différence de potentielle est appliquée entre les deux cylindres. Avant que les ondes partent, le potentiel est enlevé.

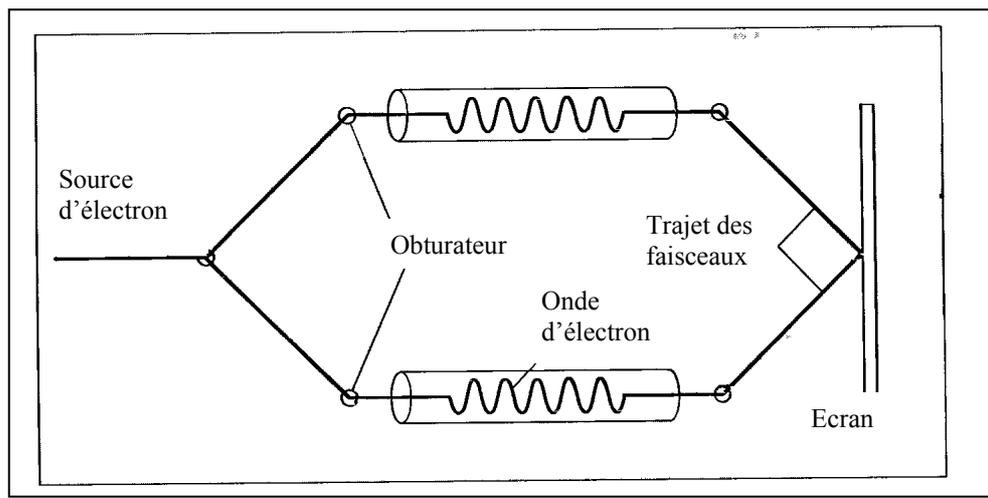


Figure III-3 : Effet Aharonov-Bohm électrostatique.

De cette façon les ondes ne sentent pas une force électrique. Toute la différence d'énergie entre les deux ondes, cependant, est changée par la charge de l'électron multiplié par la différence dans le potentiel entre les deux cylindres. Comme la phase de l'onde est une fonction liée à l'énergie totale et le temps de parcours, la phase d'une onde d'électron est changée par rapport à l'autre.

III. Structure du vide :

En dehors du solénoïde (i.e. en tout point de l'espace, excepté sur la droite correspondant au solénoïde infiniment fin), les champs électrique et magnétique sont nuls. On se trouve donc dans le "vide" (dans le sens où la densité d'énergie électromagnétique est nulle). Toutefois, le potentiel vecteur \vec{A} obtenu plus haut est non nul. Essayons de l'éliminer par une transformation de jauge : $\vec{A}^* \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$. Une telle transformation doit laisser invariante l'intégrale de \vec{A} sur toute courbe fermée, puisque cette quantité est le flux du champ magnétique à travers la surface

correspondante, qui est une quantité physique. Si on considère un cercle de rayon r orthogonal à l'axe z (voir la figure III-4), on a :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} \rightarrow \oint (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) \cdot d\vec{r} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} + \chi(r, z, 2\pi) - \chi(r, z, 0) \quad (\text{III-1})$$

Par conséquent, pour engendrer une transformation de jauge acceptable, la fonction χ doit être univaluée¹

$$\forall r, z, \quad \chi(r, z, \theta + 2\pi) = \chi(r, z, \theta) \quad (\text{III-2})$$

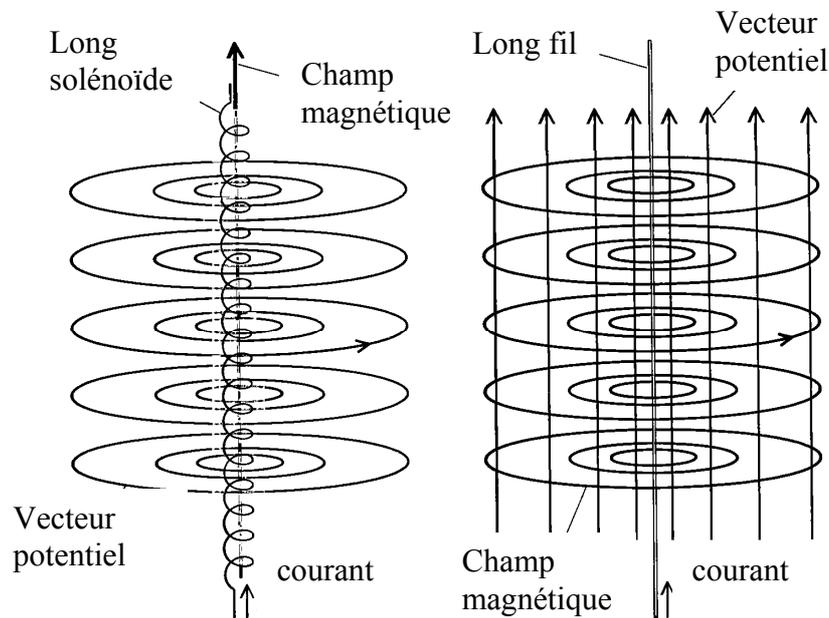


Figure III-4 : Structure du vide.

Or, il est montré que si l'on cherche à écrire \vec{A} comme un gradient, alors la fonction dont il est le gradient est nécessairement multivaluée. Par conséquent, cela

¹ Cette condition peut être légèrement assouplie, car les effets observables du flux magnétique sur une particule test arrivent par le biais de la phase $\exp(-ief / 2\pi)$. Il suffit donc que l'on ait:

$$\forall r, z, \quad \chi(r, z, \theta + 2\pi) = \chi(r, z, \theta) + 2\pi n$$

En d'autres termes, il suffit que $\exp(ie\chi)$ soit monovaluée dans le groupe de jauge U(1).

Même cette condition moins restrictive n'est pas satisfaite par la fonction $e^{ief(\theta)}$, à moins que le flux magnétique Φ n'obéisse à une condition de quantification particulière.

signifie qu'il n'est pas possible d'éliminer le potentiel vecteur \vec{A} dans l'espace vide qui entoure le solénoïde par une transformation de jauge.

IV. Les confirmations expérimentales :

1) *Expérience de Chambers :*

Peu après Aharonov et Bohm ont prévu les effets des potentiels sur les phases des particules chargées, plusieurs expériences ont été commencées. Robert G. Chambers de l'université de Bristol a fait le premier en 1960. Un faisceau cohérent d'électron a été produit dans un microscope électronique et est divisé en deux par une fibre enduite en aluminium de quartz de 1.5 micron de diamètre. Une image d'interférence qui a résulté ressemble à celle produite dans l'expérience des fentes. Quand un filament magnétisé de fer à un micron de diamètre a été placé directement derrière la fibre de quartz, le modèle a décalé. Chambers a argué que le champ magnétique produit par le filament dans la région où les électrons ont passé était beaucoup trop petit pour expliquer l'importance du décalage observé. Il a conclu que le potentiel de vecteur doit avoir causé un changement de la phase de la fonction d'onde d'électron comme prévue par Aharonov et Bohm.

Un certain nombre d'investigateurs ont défié la conclusion de Chambers. Puisqu'il n'a pas complètement confiné le champ magnétique à une petite région de l'espace, certains d'entre eux ont maintenu que la force exercée par le champ magnétique sur l'électron a obscurci la contribution du potentiel vecteur à la variation dans le modèle d'interférence.

2) *L'expérience de Tomonura et al :*

En 1986, Akira Tonomura et ses collègues à Hitachi Ltd à Tokyo ont résolu le problème de l'emprisonnement du champ magnétique, suivant la suggestion de Charles Kuper de Technion Israel Institute of Technology. Tonomura a su qu'un matériel magnétique homogène dans la forme d'un tore a un champ magnétique circulaire qui est complètement contenu à l'intérieur du matériel du tore. Puisque tous

les matériaux magnétiques ont quelques imperfections, cependant, un vrai aimant toroïdal aura toujours un certain petit champ magnétique non confiné. Ce prétendu champ de fuite peut être confiné en enduisant l'aimant d'un matériel supraconducteur. Par conséquent, Tonomura a construit un aimant toroïdal et l'a enduit du niobium, qui devient supraconducteur à des températures en dessous de 9.1 degrés Kelvin. Cet arrangement s'est assuré que moins d'un pour cent du champ à l'intérieur de l'aimant toroïdal a pénétré dans le trou central.

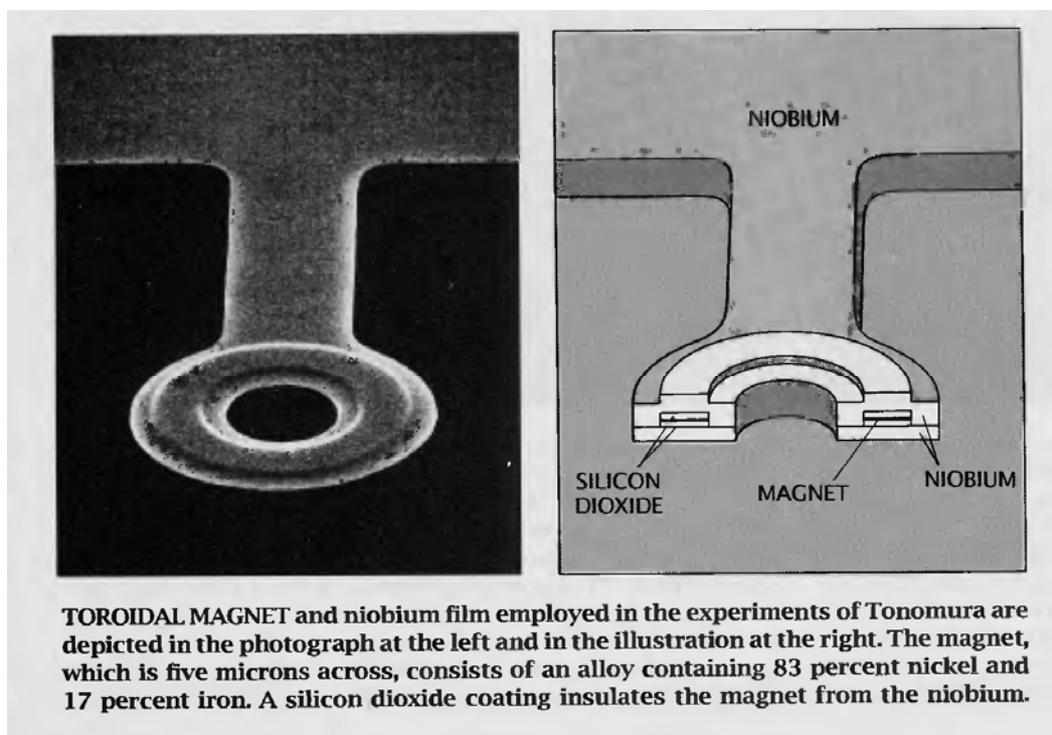


Figure III-5 : Expérience de Tomonura.

Un faisceau des électrons a été produit dans un vide et est divisé en deux de sorte qu'un faisceau ait traversé le trou du tore et l'autre ait passé dehors. Ensemble des faisceaux ont causé un modèle d'interférence sur un film directement derrière le trou. Un modèle d'interférence de référence a été créé simultanément. Quand le niobium a été bien refroidi en dessous de 9.1 degrés Kelvin et est devenu supraconducteur, le champ magnétique a été confiné à une force spécifique par les lois de la supraconductivité, et ainsi le potentiel vecteur dans le trou pourrait atteindre seulement une force spécifique. En conséquence le potentiel vecteur a changé la phase des

électrons voyageant par le tore relativement à ceux voyageant dehors. Ceci a signifié que (selon l'arrangement expérimental particulier) dans certains cas le modèle d'interférence derrière le trou a exactement assorti le modèle de fond ; Dans d'autres cas le modèle derrière le trou a exactement mal adapté la référence, c-à-d, les bandes foncées d'une côté ont existé des bandes lumineuses de l'autre côté. Ceci a donné une vérification unique du rôle du potentiel vecteur en changeant les phases des ondes d'électron dans une région où aucun champ magnétique n'existe (voir la figure III-5).

Quand les électrons voyagent par un vide, on peut observer l'effet Aharonov-Bohm parce que la phase de la fonction d'onde d'électron demeure bien définie pendant que l'onde se dédouble et s'y mêle. Il est plus difficile d'observer l'effet en solides, parce que les électrons dispersent outre de diverses imperfections dans le réseau cristallin [49].

V. Les applications de l'effet Aharonov-Bohm :

L'observation de l'effet Aharonov-Bohm a ouvert un nouveau champ de recherche entier dans lequel la nature quantique d'un électron se déplaçant dans un solide peut être étudiée dans le domaine entre les atomes et les objets macroscopiques. De tels systèmes "mesoscopic", qui sont beaucoup plus grands qu'un atome ou une molécule, peuvent être manoeuvrés et mesurés par des moyens macroscopiques, en utilisant toujours les règles du jeu de la physique microscopique. Ces systèmes montrent directement les effets peu communs de la mécanique quantique dedans, par exemple, des mesures électriques ordinaires. Comme on pourrait mesurer la résistance des électrons satellisant un atome. Ces systèmes aideront à répondre à des questions fondamentales telles que la façon dont un système doit devoir se comporter macroscopiquement.

L'effet Aharonov-Bohm et l'interférence quantique peuvent jouer un rôle particulièrement important à l'avenir de l'électronique. Après la découverte du transistor que les dimensions des dispositifs électroniques ont solidement diminué au point où moins de 1.000 atomes composent la largeur d'un fil. À la même chaux la

puissance par unité de superficie que les puces absorbent sous forme de chaleur a augmenté. À moins qu'on développe de nouveaux dispositifs qui exécutent sûrement et consomment moins de puissance, une limite sur le nombre de composants par morceau sera atteinte. Finalement ceci limiterait la vitesse de fonctionnement des dispositifs électroniques.

CHAPITRE

IV

**Théorie des invariants
d'un oscillateur
harmonique à 2D en
présence de l'effet AB**

THEORIE DES INVARIANTS D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE A 2D EN PRESENCE DE L'EFFET AB

I. Description du système quantique :

L'équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique à masse et fréquence variable à deux dimensions (2D) en présence de l'effet AB est donnée par ($c=1$)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H(t) \psi \quad (\text{IV-1})$$

où $H(t)$ est l'Hamiltonien du système :

$$H(t) = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2M(t)} + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) (x^2 + y^2) \quad (\text{IV-2})$$

où le potentiel vecteur \vec{A} est lié au champ magnétique de la manière habituelle :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{IV-3})$$

Comme on est généralement intéressé par la situation dans laquelle le champ magnétique \vec{B} est limité à un tube de rayon zéro, il est conventionnel d'écrire [18] :

$$e\vec{B} = -\frac{\nu}{r} \delta(r) \vec{\mu}_z \quad (\text{IV-4})$$

Dans la jauge de Coulomb le potentiel vecteur \vec{A} est donné par :

$$e\vec{A} = -\frac{\nu}{r} \vec{\mu}_\phi, \quad A_r = A_z = 0 \quad (\text{IV-5})$$

$\vec{\mu}_\phi$ est un vecteur unitaire.

En s'appuyant sur la liberté du choix de la forme du champ magnétique \vec{B} , C. R. Hagen [18] a remplacé (IV-4) par :

$$e\vec{B} = -\frac{\nu}{r} \delta(r-R) \vec{\mu}_z \quad (\text{IV-6})$$

et (IV-5) par :

$$e\vec{A} = -\frac{\nu}{r} \theta(r-R) \vec{\mu}_\phi \quad (\text{IV-7})$$

$\theta(r-R)$ est la fonction saut de Heaviside défini par :

$$\theta(r-R) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > R \\ 0 & \text{si } r < R \end{cases} \quad (\text{IV-8})$$

ce qui est équivalent à considérer un solénoïde de rayon $R \neq 0$, et à la fin des calculs il passe à la limite $R \rightarrow 0$.

Dans ce travail, et comme on est entrain de traiter les systèmes dépendants du temps, on va considérer le cas le plus général, c'est-à-dire le cas où le rayon du solénoïde est une fonction du temps. Pour mieux visualiser le passage à la limite $R \rightarrow 0$, on prend la forme suivante pour le rayon du solénoïde :

$$R(t) = \rho(t) R$$

où $\rho(t)$ est une fonction réel du temps.

Ainsi, on a remplacé (IV-6) par :

$$e\vec{B} = -\frac{\nu}{r} \delta(r - \rho R) \vec{\mu}_z \quad (\text{IV-9})$$

et (IV-7) par :

$$e\vec{A} = -\frac{\nu}{r} \theta(r - \rho R) \vec{\mu}_\varphi \quad (\text{IV-10})$$

On a la propriété suivante de la fonction de Heaviside :

$$\theta(r - \rho R) = \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \quad (\text{IV-11})$$

cette fonction saut de Heaviside est définie par :

$$\theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{r}{\rho} > R \\ 0 & \text{si } \frac{r}{\rho} < R \end{cases} \quad (\text{IV-12})$$

Le potentiel vecteur \vec{A} s'écrit donc en coordonnées polaires :

$$e\vec{A} = -\frac{\nu}{r} \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \vec{\mu}_\varphi \quad (\text{IV-13})$$

et le champ magnétique suivant l'axe OZ est :

$$e\vec{B} = -\frac{\nu}{r} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \vec{\mu}_z / \vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (\text{IV-14})$$

On va exprimer l'Hamiltonien (IV-2) en coordonnées polaires. L'équation (IV-13) donne :

$$e\vec{A} = \frac{\nu y}{x^2 + y^2} \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \vec{i} - \frac{\nu x}{x^2 + y^2} \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \vec{j}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{IV-15})$$

On a :

$$(p_x - eA_x)^2 = p_x^2 - ep_x A_x - A_x p_x + e^2 A_x^2 \quad (\text{IV-16})$$

Calculons le terme $ep_x A_x$ de l'équation (IV-16), on trouve :

$$\begin{aligned} ep_x A_x &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu y}{x^2 + y^2} \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \right) + ep_x A_x \\ ep_x A_x &= -i\hbar \left(-\frac{2\nu xy}{(x^2 + y^2)^2} \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu y}{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \right) + ep_x A_x \end{aligned} \quad (\text{IV-17})$$

En remplaçant cette dernière dans l'équation (IV-16), on obtient,

$$\begin{aligned} (p_x - eA_x)^2 &= p_x^2 - 2i\hbar \frac{\nu xy}{r^4} \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + i\hbar \frac{\nu xy}{r^3} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) - \\ &\quad - \frac{2\nu y p_x}{r^2} \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + \frac{\nu^2 y^2}{r^4} \theta^2\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \end{aligned} \quad (\text{IV-18})$$

De la même manière on trouve la formule suivante pour le terme $(p_y - eA_y)^2$:

$$\begin{aligned} (p_y - eA_y)^2 &= p_y^2 + 2i\hbar \frac{\nu xy}{r^4} \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) - i\hbar \frac{\nu xy}{r^3} \delta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + \\ &\quad + \frac{2\nu x p_y}{r^2} \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + \frac{\nu^2 x^2}{r^4} \theta^2\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \end{aligned} \quad (\text{IV-19})$$

Remplaçant par l'expression (IV-18) et (IV-19) dans l'équation (IV-2), l'Hamiltonien devient :

$$H(t) = \frac{1}{2M(t)} \left[p_x^2 + p_y^2 + \frac{2\nu L_z}{r^2} \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) + \frac{\nu^2}{r^2} \theta^2\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \right] + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) r^2 \quad (\text{IV-20})$$

où L_z est la composante suivant l'axe OZ du vecteur moment angulaire, et qui est donné par :

$$L_z = xp_y - yp_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{IV-21})$$

Calculons maintenant le terme $(p_x^2 + p_y^2)$ de l'Hamiltonien (IV-20), on trouve :

$$p_x^2 + p_y^2 = -\hbar^2 \Delta = -\frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \quad (\text{IV-22})$$

avec :

$$p_r \rightarrow -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \quad (\text{IV-23})$$

$$p_\varphi \rightarrow -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

et

$$[r, p_r] = [\varphi, p_\varphi] = i\hbar \quad (\text{IV-24})$$

Remplaçons par l'expression (IV-22) dans l'Hamiltonien (IV-20), on trouve enfin que l'Hamiltonien s'écrit en coordonnées polaires comme suit :

$$H(t) = \frac{1}{2M(t)} \left[p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi + \nu \theta\left(\frac{r}{\rho} - R\right) \right)^2 \right] + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) r^2 \quad (\text{IV-25})$$

II. Recherche de l'invariant :

On commence maintenant à résoudre le problème essentiel de ce travail, et comme notre Hamiltonien dépend du temps, cela fait appel à la théorie des invariants

introduite par Lewis et Riesenfeld [6], soit $I(t)$ l'opérateur invariant dépendant du temps et vérifiant l'équation :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} I = [H, I] \quad (\text{IV-26})$$

On construit un invariant pour le système quantique dépendant du temps décrit par l'Hamiltonien (IV-16), sous la forme :

$$I = \sum_{i=1}^3 \beta_i(t) T_i \quad (\text{IV-27})$$

Les $\beta_i(t)$, $i=1, 2, 3$, sont des fonctions réelles du temps.

Les T_i , $i=1, 2, 3$, prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \left[p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} (p_\phi + \nu \theta(\frac{r}{\rho} - R))^2 \right] \\ T_2 &= \frac{1}{2} [rp_r + p_r r] \\ T_3 &= \frac{1}{2} r^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-28})$$

En introduisant la transformation unitaire suivante :

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar} \ln \sqrt{\rho} (p_r r + r p_r)} \quad (\text{IV-29})$$

tel que : $U f(r) U^\dagger = f(\frac{r}{\rho})$ où $f(r)$ est une fonction d'opérateur.

T_1 peut s'écrire aussi sous la forme :

$$T_1 = \frac{1}{2} \left\{ p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \ln \sqrt{\rho} (p_r r + r p_r)} [p_\phi + \nu \theta(r - R)]^2 e^{\frac{i}{\hbar} \ln \sqrt{\rho} (p_r r + r p_r)} \right) \right\} \quad (\text{IV-30})$$

L'invariant $I(t)$ doit vérifier la relation (IV-26), on obtient l'équation suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} I = i\hbar \sum_{i=1}^3 \dot{\beta}_i T_i + i\hbar \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} T_1 \quad (\text{IV-31})$$

Au premier temps, on va calculer le terme : $\frac{\partial}{\partial t} T_1$ de l'équation (IV-31), c'est-à-dire

on dérive par rapport au temps l'expression de T_1 de l'équation (IV-30), alors :

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \frac{i\hbar}{2r^2} \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{\dot{\rho}}{2\rho} (rp_r + p_r r) \left(p_\phi + \nu \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right) \right)^2 + \right. \\
 &+ \frac{i}{\hbar} \frac{\dot{\rho}}{2\rho} \left(p_\phi + \nu \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right) \right)^2 (rp_r + p_r r) \\
 &= -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{1}{r^2} \left[\left(p_\phi + \nu \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right) \right)^2, T_2 \right]
 \end{aligned} \tag{IV-32}$$

Alors le terme à gauche de la relation (IV-26), devient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} I = i\hbar \sum_{i=1}^3 \dot{\beta}_i T_i - \beta_1 \frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{1}{r^2} \left[\left(p_\phi + \nu \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right) \right)^2, T_2 \right] \tag{IV-33}$$

Maintenant on va évaluer le terme à droite de la relation (IV-26), ensuite on fait l'égalité et la comparaison avec le terme à gauche qu'on a calculé comme le montre l'équation (IV-34), pour faire sortir les expressions des fonctions $\beta_i(t)$. Pour cela évaluons le commutateur $[H, I]$.

L'Hamiltonien :

$$H(t) = \frac{1}{2M(t)} \left[p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} (p_\phi + \nu \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right))^2 \right] + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) r^2$$

on peut l'écrire en fonction T_1 et T_3 , d'après le système (IV-28) on a :

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} (p_\phi + \nu \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right))^2 \right]$$

et

$$T_3 = \frac{1}{2} r^2$$

alors :

$$H(t) = \frac{T_1}{M(t)} + M(t) \omega^2(t) T_3 \tag{IV-34}$$

Calculons maintenant le commutateur $[H, I]$:

$$[H, I] = \left[\frac{T_1}{M} + M\omega^2 T_3, \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3 \right] \quad (\text{IV-35})$$

aussi :

$$[H, I] = \frac{\beta_2}{M} [T_1, T_2] + \frac{\beta_3}{M} [T_1, T_3] + M\omega^2 \beta_1 [T_3, T_1] + M\omega^2 \beta_2 [T_3, T_2] \quad (\text{IV-36})$$

On doit évaluer les commutateurs : $[T_1, T_2]$, $[T_1, T_3]$ et $[T_3, T_2]$. Pour faire on utilise les différents commutateurs suivants :

$$\begin{aligned} [p_r^2, r^2] &= -2i\hbar(rp_r + p_r r) \\ [p_r, r^2] &= -2i\hbar r \\ [p_r^2, rp_r + p_r r] &= -4i\hbar p_r^2 \\ \left[\frac{1}{r^2}, rp_r + p_r r \right] &= -\frac{4i\hbar}{r^2} \\ \left[p_r, \frac{1}{r^2} \right] &= \frac{2i\hbar}{r^3} \\ [r^2, rp_r + p_r r] &= 4i\hbar r^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-37})$$

à la fin on trouve :

$$\begin{aligned} [T_1, T_2] &= \frac{1}{4} \left[p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi + v \cdot \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right) \right)^2, rp_r + p_r r \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2}, T_2 \right] + \left[\frac{1}{r^2} \left(p_\varphi + v \cdot \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right) \right)^2, T_2 \right] \\ &= -2i\hbar T_1 + \frac{1}{r^2} \left[\left(p_\varphi + v \cdot \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right) \right)^2, T_2 \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-38})$$

$$[T_1, T_3] = -i\hbar T_2 \quad (\text{IV-39})$$

$$[T_3, T_2] = 2i\hbar T_3 \quad (\text{IV-40})$$

Remplaçant par les équations, (IV-38), (IV-39) et (IV-40) dans l'équation (IV-36), on aura :

$$[H, I] = i\hbar \left(\frac{-2\beta_2}{M} T_1 - i \frac{\beta_2}{M\hbar} \frac{1}{r^2} \left[\left(p_\varphi + \nu \cdot \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right) \right)^2, T_2 \right] + \right. \\ \left. + (M\omega^2 \beta_1 - \frac{\beta_3}{M}) T_2 + 2M\omega^2 \beta_2 T_3 \right) \quad (IV-41)$$

La comparaison entre l'équation (IV-41) et l'équation (IV-33) donne le système d'équations différentielles linéaires de premier ordre suivant :

$$\dot{\beta}_1 = -\frac{2\beta_2}{M} \quad (IV-42-a)$$

$$\frac{\beta_2}{M} = -\beta_1 \frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad (IV-42-b)$$

$$\dot{\beta}_2 = M\omega^2 \beta_1 - \frac{\beta_3}{M} \quad (IV-42-c)$$

$$\dot{\beta}_3 = 2M\omega^2 \beta_2 \quad (IV-42-d)$$

On résout ce système d'équations, et on trouve les expressions de β_1 , β_2 et β_3 .

L'équation (IV-42-a) et l'équation (IV-42-b) donnent :

$$\frac{\dot{\beta}_1}{\beta_1} = 2 \frac{\dot{\rho}}{\rho} \Rightarrow \beta_1 = C^{te} \rho^2 \quad (IV-43)$$

On pose $C^{te} = 1$ alors (IV-43) qui donne β_1 devient :

$$\beta_1 = \rho^2 \quad (IV-44)$$

De l'équation (IV-42-b), et comme $\beta_1 = \rho^2$ on déduit β_2 :

$$\beta_2 = -M\rho\dot{\rho} \quad (IV-45)$$

En Tenant compte des équations (IV-42-a), (IV-42-c) et (IV-42-d) on trouve la relation qui relie entre β_1 , β_2 et β_3 .

$$\beta_1 \beta_3 - \beta_2^2 = C \quad (IV-46)$$

avec $C = \text{constante}$

Il nous reste à déterminer β_3 :

D'après la relation (IV-46) qui lie entre β_1 , β_2 et β_3 , l'équation (IV-44) de β_1 et l'équation de β_2 (IV-45) on déduit.

$$\beta_3 = \frac{1}{\rho^2}(C + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) \quad (\text{IV-47})$$

$\rho(t)$ est la solution de l'équation auxiliaire, obtenu par la substitution des expressions de β_1 , β_2 , et β_3 dans l'équation (IV-42-c) soit¹ :

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} + \rho \omega^2 = \frac{C}{M^2 \rho^3} \quad (\text{IV-48})$$

Ainsi, l'invariant (IV-18) peut s'écrire sous la forme :

$$I(t) = \rho^2 T_1 - M \rho \dot{\rho} T_2 + \frac{1}{\rho^2} (C + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) T_3 \quad (\text{IV-49})$$

Remplaçons par T_1, T_2 et T_3 l'invariant peut s'écrire aussi :

$$I(t) = \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 \left(p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} (p_\varphi + \nu \theta \left(\frac{r}{\rho} - R \right))^2 \right) - M \rho \dot{\rho} (p_r r + r p_r) + \frac{1}{\rho^2} (C + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) r^2 \right\} \quad (\text{IV-50})$$

III. Recherche des vecteurs propres :

Selon la théorie de Lewis-Risenfeld (cf. Chapitre II) un système physique décrit par un opérateur invariant $I(t)$, les résultats suivants peuvent être obtenus :

- Ses valeurs propres $\lambda_{n,m}$ indépendantes du temps,

$$I \phi_{n,m}(r, \varphi, t) = \lambda_{n,m} \phi_{n,m}(r, \varphi, t) \quad (\text{IV-51})$$

¹ On note que l'équation auxiliaire ne dépend pas du flux magnétique ν .

- Ses fonctions propres $\phi_{n,m}(r, \varphi, t)$ dépendent du temps, et si multipliés par des phases telles que $\exp[i\alpha_{n,m}(t)]$, avec le $\alpha_{n,m}(t)$ vérifiant :

$$\hbar \dot{\alpha}_{n,m}(t) = \langle \phi_{n,m} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi_{n,m} \rangle \quad (\text{IV-52})$$

alors, les fonctions d'ondes $\psi_{n,m}(r, \varphi, t) = \exp[i\alpha_{n,m}(t)]\phi_{n,m}(r, \varphi, t)$ évoluent selon l'équation de Schrödinger dépendante du temps. La solution général $\psi_{n,m}(r, \varphi, t)$ peut être s'écrit :

$$\psi(r, \varphi, t) = \sum_{n,m} C_{n,m} \psi_{n,m}(r, \varphi, t) \quad (\text{IV-53})$$

où $C_{n,m}$ sont des coefficients constantes arbitraires, on peut les fixés par les conditions initiales du système physique.

Considérant la transformation unitaire ;

$$\phi'_{n,m}(r, \varphi, t) = U \phi_{n,m}(r, \varphi, t) \quad (\text{IV-54})$$

telle que :

$$U = \exp(-i \frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2) \quad (\text{IV-56})$$

Sous cette transformation l'équation aux valeurs propres (IV-51) devient.

$$I' \phi'_{n,m}(r, \varphi, t) = \lambda_{n,m} \phi'_{n,m}(r, \varphi, t) \quad (\text{IV-57})$$

avec

$$I' = UIU^+ \quad (\text{IV-58})$$

$$\begin{aligned} I' &= \rho^2 UT_1^v U^+ - M\rho\dot{\rho} UT_2 U^+ + \frac{1}{\rho^2} (C + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) UT_3 U^+ \\ &= \rho^2 (T_1^v + \frac{M\dot{\rho}}{\rho} T_2 + \frac{M^2 \dot{\rho}^2}{\rho^2}) - M\rho\dot{\rho} (T_2 + 2 \frac{M\dot{\rho}}{\rho} T_3) + \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2} (C + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) T_3 \end{aligned}$$

$$= \rho^2 T_1^\nu + M\rho\dot{\rho}T_2 + M^2\dot{\rho}^2T_3 - M\rho\dot{\rho}T_2 - 2M^2\dot{\rho}^2T_3 + \frac{C}{\rho^2}T_3 + M^2\dot{\rho}^2T_3$$

Alors l'invariant transformé devient.

$$\begin{aligned} I' &= \rho^2 T_1 + \frac{C}{\rho^2} T_3 = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 \left(p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} (p_\varphi + \nu\theta(\frac{r}{\rho} - R))^2 \right) + \frac{C}{\rho^2} r^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-59})$$

Maintenant, on va chercher les fonctions propres

$$\psi_{n,m}(r, \varphi, t) = \exp[i\alpha_{n,m}(t)] \phi_{n,m}(r, \varphi, t)$$

solution de l'équation (IV-1), pour cela cherchons d'abord les fonctions propres $\phi_{n,m}(r, \varphi, t)$ de l'invariant I , qui fait appel à déterminer les fonctions propres $\phi'_{n,m}(r, \varphi, t)$ de l'invariant transformé I' .

Si on définit la nouvelle variable $\xi = \frac{r}{\rho}$, l'invariant I' devient :

$$I' = T_1^\xi + CT_3^\xi = \frac{1}{2} \left[p_\xi^2 - \frac{\hbar^2}{4\xi^2} + \frac{1}{\xi^2} (p_\nu + \nu\theta(\xi - R))^2 + \frac{C}{2} \xi^2 \right] \quad (\text{IV-60})$$

Effectuons le changement suivant :

$$\phi'_{n,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \chi_{n,m}(\xi, \varphi, t) \quad (\text{IV-61})$$

Avec $\frac{1}{\rho}$ est un facteur introduit pour maintenir la condition de normalisation pour les deux fonctions.

L'équation aux valeurs propres (IV-57) de l'invariant I' , peut s'écrire :

$$I' \chi_{n,m}(\xi, \varphi) = \lambda_{n,m} \chi_{n,m}(\xi, \varphi) \quad (\text{IV-62})$$

et aussi :

$$\frac{1}{2} \left[p_{\xi}^2 - \frac{\hbar^2}{4\xi^2} + \frac{1}{\xi^2} (p_{\varphi} + \nu\theta(\xi - R))^2 + \frac{C}{2} \xi^2 \right] \times \chi_{n,m}(\xi, \varphi) = \lambda_{n,m} \chi_{n,m}(\xi, \varphi) \quad (\text{IV-63})$$

Comme l'invariant I' commute avec l'opérateur p_{φ} , c'est-à-dire $[I', p_{\varphi}] = 0$, on peut prendre les fonctions $\chi_{n,m}(\xi, \varphi)$ sous la forme suivante :

$$\chi_{n,m}(\xi, \varphi) = e^{im\varphi} \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) \quad (\text{IV-64})$$

les $\mathfrak{R}_{n,m}(\xi)$ des fonctions qui dépendent seulement de ξ .

L'équation (IV-49) devient donc comme suit :

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \hbar^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \hbar^2 \frac{1}{\xi^2} (m + \nu'\theta(\xi - R))^2 + \frac{C}{2} \xi^2 \right] \times \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = \lambda_{n,m} \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) \quad (\text{IV-65})$$

ou encore l'équation (IV-65) s'écrit :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left(m + \frac{\nu}{\hbar} \theta(\xi - R) \right)^2 - \frac{C}{\hbar^2} \xi^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = 0 \quad (\text{IV-66})$$

avec :

$$k^2 = \frac{2\lambda}{\hbar^2} \quad (\text{IV-67})$$

1) *Discussion des solutions possibles :*

On distingue trois cas à étudier, le cas où la constante C est nulle ($C=0$), le cas où la constante C est positive ($C > 0$) et le cas où la constante C est négative ($C < 0$).

1. Cas où $C = 0$:

Dans ce cas, l'équation (IV-66) s'écrit :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left(m + \frac{\nu}{\hbar} \theta(\xi - R) \right)^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{k,m}(\xi) = 0 \quad (\text{IV-68})$$

On remarque que l'équation (IV-57) contient la fonction saut d'Heaviside, ce qui implique que la solution de cet équation s'effectué en deux régions, (une pour laquelle $\xi < R$, et l'autre pour $\xi > R$), et la fin on fait le raccordement des deux solutions obtenues, en utilisant les conditions de continuités de la fonction d'onde et sa dérivée dans la limite où $R \rightarrow 0$.

a) pour $\xi < R$ c'est-à-dire $r < \rho R$

L'équation (IV-66) prend la forme suivante :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} + k^2 \right] \mathfrak{R}_{k,m}(\xi) = 0 \quad (\text{IV-69})$$

C'est l'équation de Bessel d'ordre m , l'intégral général de cette équation, pour m entier, est [21] :

$$\mathfrak{R}_{k,m}(\xi) = A_{k,m} J_{|m|}(k\xi) + B_{k,m} N_{|m|}(k\xi) \quad (\text{IV-70})$$

où n dans ce cas prend des valeurs réelles (continue) et $J_{|m|}(k\xi)$ est une fonction de Bessel définie par :

$$J_{|m|}(k\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(|m|+s)!} \left(\frac{k\xi}{2} \right)^{|m|+2s} \quad (\text{IV-71-a})$$

et $N_{|m|}(k\xi)$ est la deuxième solution de l'équation de Bessel, appelée fonction de Neumann, qui a la forme suivante :

$$N_{|m|}(k\xi) = \gamma J_{|m|}(k\xi) \ln(k\xi) + (k\xi)^{-|m|} \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s (k\xi)^s \quad (\text{IV-71-b})$$

Les γ_s sont des coefficients de développement. Cette dernière solution, devient évidemment infinie pour $\xi = 0$. Alors, si on veut obtenir une solution finie au point $\xi = 0$, il faut prendre, dans (IV-70), la constante $B_{k,m}$ nulle c'est à dire qu'on doit se limiter à la solution (IV-71-a), alors :

$$\mathfrak{R}_{k,m}^{Int}(\xi) = A_{k,m} J_{|m|}(k\xi) \quad (\text{IV-72})$$

b) Pour $\xi \rangle R$ c'est à dire $r \rangle \rho R$

Dans ce cas l'équation (IV-66) prend la forme d'une équation de Bessel d'ordre $(m + \frac{\nu}{\hbar})$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} (m + \frac{\nu}{\hbar})^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{k,m}(\xi) = 0 \quad (\text{IV-73})$$

La solution générale de cette équation est :

$$\mathfrak{R}_{k,m}(\xi) = C_{k,m} J_{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}(k\xi) + D_{k,m} J_{-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}(k\xi) \quad (\text{IV-74})$$

On peut la écrire aussi :

$$\mathfrak{R}_{k,m}^{Ext}(\xi) = C_{k,m} J_{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}(k\xi) + D_{k,m} J_{-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}(k\xi) \quad (\text{IV-75})$$

où $J_{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}(k\xi)$ et $J_{-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}(k\xi)$ représentent les fonctions de Bessel d'ordre $(m + \frac{\nu}{\hbar})$, qui

ont pour expressions :

$$J_{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}(k\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + s \right)!} \left(\frac{k\xi}{2} \right)^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 2s} \quad (\text{IV-76-a})$$

$$J_{-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}(k\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \left(-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + s \right)!} \left(\frac{k\xi}{2} \right)^{-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 2s} \quad (\text{IV-76-b})$$

et qui sont représentées par la figure suivante :

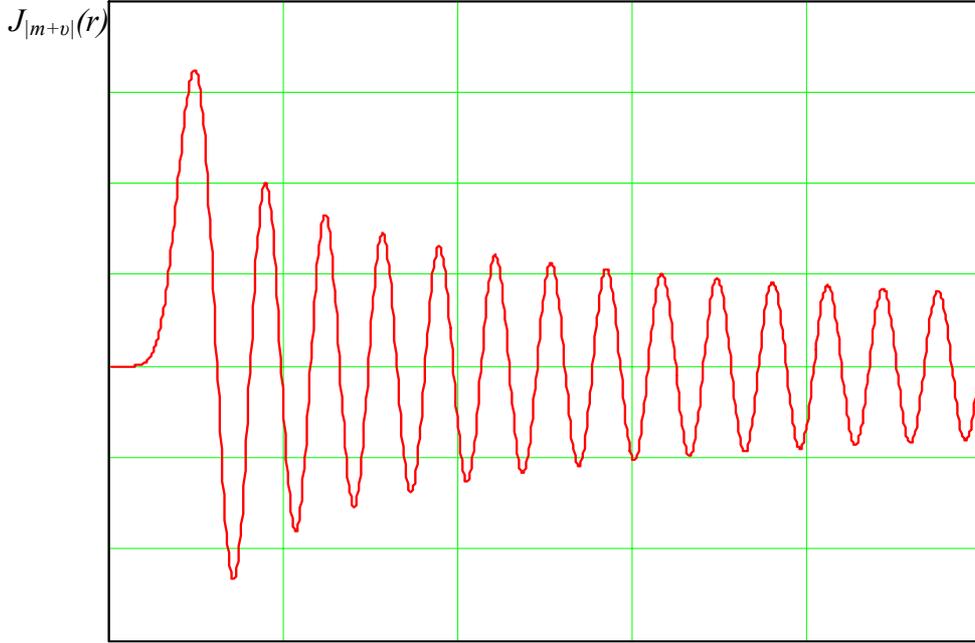


Figure IV-1 : Solution de l'équation de Schrödinger ; Cas $C = 0$.

Finalement les équations pour les deux régions sont :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} + k^2 \right] \mathfrak{R}_{k,m}(\xi) = 0, \quad \xi < R \quad (\text{IV-77})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left(m + \frac{\nu}{\hbar} \right)^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{k,m}(\xi) = 0, \quad \xi > R \quad (\text{IV-78})$$

et leurs solutions respectivement sont :

$$\mathfrak{R}_{k,m}^{Int}(\xi) = A_{k,m} J_{|m|}(k\xi), \quad \xi < R \quad (\text{IV-79})$$

$$\mathfrak{R}_{k,m}^{Ext}(\xi) = C_{k,m} J_{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|}(k\xi) + D_{k,m} J_{\left| m - \frac{\nu}{\hbar} \right|}(k\xi), \quad \xi > R \quad (\text{IV-80})$$

Pour déterminer les constantes $A_{k,m}$, $C_{k,m}$, et $D_{k,m}$ on doit appliquer les conditions de raccordements suivantes :

$$\mathfrak{R}_{k,m}^{Int}(R - \varepsilon) = \mathfrak{R}_{k,m}^{Ext}(R + \varepsilon) \quad (\text{IV-81})$$

$$\left. \frac{d\mathfrak{R}_{k,m}^{Int}(\xi)}{d\xi} \right|_{R-\varepsilon} = \left. \frac{d\mathfrak{R}_{k,m}^{Ext}(\xi)}{d\xi} \right|_{R+\varepsilon}$$

Dans la limite $R \rightarrow 0$ on doit prendre le terme de l'ordre le plus bas en (kR) dans les séries (IV-71-a), (IV-76-a), et (IV-76-b) ainsi pour les séries dérivées, dans ce cas , nous aurons trois inconnues avec deux équations ce qui laisse exprimer les deux constantes en fonctions du troisième. La solution obtenue, après un calcul simple de ces coefficients, est :

$$\mathfrak{R}_{k,m}(\xi) = (kR)^{|m|} c_{k,m} \left[(kR)^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left(\frac{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right) J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(k\xi) + (kR)^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left(\frac{|m+\frac{\nu}{\hbar}|-|m|}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \frac{\Gamma\left(-|m+\frac{\nu}{\hbar}| \right)}{\Gamma\left(m+\frac{\nu}{\hbar}\right)} \right) J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(k\xi) \right] \quad (\text{IV-82})$$

Il apparaît clairement, d'après cette dernière expression que le deuxième terme s'annule pour $R \rightarrow 0$ en plus de la singularité que représente la fonction $J_{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(\kappa_\alpha \xi)$ au point zéro. Alors la solution qui convient fortement et qui conduit à celle d'AB que doit être comprise dans cette solution est celle représentée par le premier terme (Hagen, 1993). Alors :

$$\mathfrak{R}_{k,m}(\xi) = c_{k,m} (kR)^{|m| - |m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left(\frac{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right) J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}(k\xi) \quad (\text{IV-83})$$

Revenons maintenant aux fonctions propres de l'invariant I , qui vérifient l'équation aux valeurs propres (IV-40), et qui s'écrivent alors comme :

$$\phi_{k,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} c_{k,m} (kR)^{|m| - |m+\frac{\nu}{\hbar}|} \left(\frac{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+|m|}{2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \right) \exp\left(i \frac{m\dot{\rho}}{\hbar\rho} \frac{r^2}{2}\right) e^{im\varphi} J_{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}\left(k \frac{r}{\rho}\right) \quad (\text{IV-84})$$

Le cas précédent qu'on a étudié c'est-à-dire $C = 0$, soit pour $\xi \langle R$ ou pour $\xi \rangle R$, les solutions obtenus sont des fonctions de Bessel qui décrivent le spectre

continu, alors que notre cas c'est l'étude d'un oscillateur harmonique qui a un spectre discret ce qui constitue une nouveauté ici.

2. Cas où $C > 0$:

Dans ce cas l'équation (IV-66) s'écrit :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left(m + \frac{\nu}{\hbar} \theta(\xi - R) \right)^2 - \frac{C}{\hbar^2} \xi^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = 0 \quad (\text{IV-85})$$

De la même manière comme le cas précédent, on a deux régions à étudier, une pour $\xi < R$ et l'autre pour $\xi > R$.

a) Pour $\xi < R$ c'est-à-dire $r < \rho R$

L'équation (IV-85) devient :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} - \frac{C}{\hbar^2} \xi^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = 0 \quad (\text{IV-86})$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$\mathfrak{R}_{\alpha,m}(\xi) = \xi^{|m|} e^{-\frac{\sqrt{c}}{2\hbar} \xi^2} g_{\alpha,m}(\xi) \quad (\text{IV-87})$$

L'équation (IV-86) devient aussi :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[\frac{2|m|+1}{\xi} - \frac{2\sqrt{c}}{\hbar} \xi \right] \frac{\partial}{\partial \xi} + \kappa^2 - \frac{2\sqrt{c}}{\hbar} (|m|+1) \right\} g_{\alpha,m}(\xi) = 0 \quad (\text{IV-88})$$

Maintenant on fait un autre changement de variable tel que :

$$f(\tau) = g(\xi) \quad (\text{IV-89})$$

avec

$$\tau = \frac{\sqrt{c}}{\hbar} \xi^2 \quad (\text{IV-90})$$

L'équation (IV-89) devient :

$$\left\{ \tau \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + [|m|+1-\tau] \frac{\partial}{\partial \tau} - \mu \right\} f_{\alpha,m}(\tau) = 0 \quad (\text{IV-91})$$

avec :

$$\mu = \frac{(|m|+1)}{2} - \frac{\hbar \kappa^2}{4\sqrt{c}} \quad (\text{IV-92})$$

L'équation (IV-91) est l'équation de Laplace qui admet Comme solution la série hypergéométrique confluyente définie par [22] :

$${}_1F_1(\mu, |m|+1, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+j)\Gamma(|m|+1)}{\Gamma(\mu)\Gamma(|m|+1+j)} \cdot \frac{\tau^j}{j!} \quad (\text{IV-93})$$

D'après les propriétés des séries hypergéométriques, si $\mu \neq -n$ (où n entier ≥ 0) elle présente une singularité essentielle à l'infini. Alors, tant que $|m|+1 = \text{entier}$ et $\mu = -n$, l'équation (IV-91) admet deux solutions indépendantes :

$$\begin{aligned} & - {}_1F_1(-n, |m|+1, \tau) \\ & - \tau^{-|m|} {}_1F_1(-n-|m|, 1-|m|, \tau) \end{aligned} \quad (\text{IV-94})$$

alors la solution de l'équation (IV-86) est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{n,m}^{Int}(\xi) &= \xi^{|m|} e^{-\frac{\sqrt{c}}{2\hbar}\xi^2} A_{n,m} {}_1F_1\left(-n, |m|+1, \frac{\sqrt{c}}{\hbar}\xi^2\right) + \\ &+ \xi^{-|m|} e^{-\frac{\sqrt{c}}{2\hbar}\xi^2} \left(\frac{\sqrt{c}}{\hbar}\right)^{|m|} B_{n,m} {}_1F_1\left(-n+|m|, |m|+1, \frac{\sqrt{c}}{\hbar}\xi^2\right) \end{aligned} \quad (\text{IV-95})$$

(IV-95) contient deux solutions régulières et irrégulières, on peut exiger que $\mathfrak{R}_{n,m}^{Int}(\xi)$ soit fini à l'origine $\xi = 0$ et de cette façon, on élimine la solution irrégulière, c'est-à-dire

$$\mathfrak{R}_{n,m}^{Int}(\xi) = \xi^{|m|} e^{-\frac{\sqrt{c}}{2\hbar}\xi^2} A_{n,m} {}_1F_1\left(-n, |m|+1, \frac{\sqrt{c}}{\hbar}\xi^2\right) \quad (\text{IV-96})$$

b) Pour $\xi \rangle R$ c'est-à-dire $r \rangle \rho R$

L'équation (IV-85) devient :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left(m + \frac{\nu}{\hbar} \right)^2 - \frac{C}{\hbar^2} \xi^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = 0 \quad (\text{IV-97})$$

De la même manière, on utilise les transformations du cas précédent ,et on remplace $|m|$ par $\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|$, on obtient l'équation :

$$\left\{ \tau \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \left[\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 - \tau \right] \frac{\partial}{\partial \tau} - \mu \right\} f_{\alpha,m}(\tau) = 0 \quad (\text{IV-98})$$

Comme dans ce cas $\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| \neq \text{entier}$, la solution de l'équation (IV-98) est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{n,m}^{Ext}(\xi) = & e^{\frac{\sqrt{C}}{2\hbar} \xi^2} \left[C_{n,m} \xi^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{\sqrt{C}}{\hbar} \xi^2 \right) + \right. \\ & \left. + D_{n,m} \left(\frac{\sqrt{C}}{\hbar} \right)^{-2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} \xi^{-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} {}_1F_1 \left(-n - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, \frac{\sqrt{C}}{\hbar} \xi^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-99})$$

Finalement les équations pour les deux régions sont :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} - \frac{C}{\hbar^2} \xi^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = 0, \quad \xi < R \quad (\text{IV-86})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left(m + \frac{\nu}{\hbar} \right)^2 - \frac{C}{\hbar^2} \xi^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = 0, \quad \xi > R \quad (\text{IV-97})$$

et leurs solutions respectivement sont :

$$\mathfrak{R}_{n,m}^{Int}(\xi) = \xi^{|m|} e^{\frac{\sqrt{C}}{2\hbar} \xi^2} A_{nm} {}_1F_1 \left(-n, |m| + 1, \frac{\sqrt{C}}{\hbar} \xi^2 \right), \quad \xi < R \quad (\text{IV-96})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{n,m}^{Ext}(\xi) = & e^{\frac{\sqrt{c}}{2\hbar}\xi^2} \left[C_{n,m} \xi^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{\sqrt{c}}{\hbar} \xi^2 \right) + \right. \\ & \left. + D_{n,m} \left(\frac{\sqrt{c}}{\hbar} \right)^{-2\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} \xi^{-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} {}_1F_1 \left(-n - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, \frac{\sqrt{c}}{\hbar} \xi^2 \right) \right], \quad \xi > R \end{aligned} \quad (IV-99)$$

Pour déterminer les coefficients $A_{n,m}$, $C_{n,m}$, et $D_{n,m}$ les fonctions ci-dessus doivent vérifier les conditions de raccordements suivantes au point R :

$$\mathfrak{R}_{n,m}(R - \varepsilon) = \mathfrak{R}_{n,m}(R + \varepsilon) \quad (IV-100)$$

$$\left. \frac{d}{d\xi} \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) \right|_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} = 0 \quad (IV-101)$$

Après un calcul long, qu'on peut trouver dans l'appendice, on obtient la solution suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = & e^{\frac{\sqrt{c}}{2\hbar}\xi^2} \left\{ R^{\left| m \right| - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} \left[\frac{\left(\left| m \right| + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| \right) + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} - \frac{2n + \left| m \right| + 1}{\left| m \right| + 1} \right] R^2}{2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} - \frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1} \right] R^2} \right] \times \right. \\ & \left. \times \xi^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{\sqrt{c}}{\hbar} \xi^2 \right) + \right. \\ & \left. + R^{\left| m \right| + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} \left[1 - \frac{\left(\left| m \right| + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| \right) + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} - \frac{2n + \left| m \right| + 1}{\left| m \right| + 1} \right] R^2}{2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} - \frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1} \right] R^2} \right] \left(\frac{\sqrt{c}}{\hbar} \right)^{-2\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} \times \right. \\ & \left. \times \xi^{-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} {}_1F_1 \left(-n - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, \frac{\sqrt{c}}{\hbar} \xi^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (IV-102)$$

On passe à la limite $R \rightarrow 0$, ($R^2 \approx 0$), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = R^{|m|} e^{-\frac{\sqrt{c}}{2\hbar}\xi^2} & \left\{ R^{-\left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|} \left(\frac{1}{2} + \frac{|m|}{2\left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|} \right) \times \xi^{\left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|} {}_1F_1\left(-n, \left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|+1, \frac{\sqrt{c}}{\hbar}\xi^2\right) + \right. \\ & \left. + R^{\left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|} \left(\frac{1}{2} - \frac{|m|}{2\left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|} \right) \left(\frac{\sqrt{c}}{\hbar} \right)^{-2\left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|} \times \xi^{-\left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|} {}_1F_1\left(-n - \left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|, 1 - \left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|, \frac{\sqrt{c}}{\hbar}\xi^2\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-103})$$

Puisque (IV-103) contient des solutions régulières et irrégulières, on peut simplement exiger que $\mathfrak{R}_{n,m}(\xi)$ soit fini à l'origine $\xi = 0$, et on élimine de ce fait la solution irrégulière. alors (IV-103) devient :

$$\mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = R^{|m|} e^{-\frac{\sqrt{c}}{2\hbar}\xi^2} \left\{ R^{-\left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|} \left(\frac{1}{2} + \frac{|m|}{2\left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|} \right) \xi^{\left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|} {}_1F_1\left(-n, \left|m+\frac{\nu}{\hbar}\right|+1, \frac{\sqrt{c}}{\hbar}\xi^2\right) \right\} \quad (\text{IV-104})$$

Alors les fonctions propres de l'invariant I sont :

$$\phi_{n,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \mathfrak{R}_{n,m} \exp(im\varphi) U^+ \quad (\text{IV-105})$$

3. Cas où $C < 0$:

Dans ce cas aussi l'équation (IV-66) s'écrit, mais avec $C < 0$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left(m + \frac{\nu}{\hbar} \theta(\xi - R) \right)^2 + \frac{|C|}{\hbar^2} \xi^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = 0 \quad (\text{IV-106})$$

où :

$$C = -|C| = i^2|C| \quad (\text{IV-107})$$

Suivant les mêmes étapes comme le cas $C > 0$, on trouve les équations pour les deux régions :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} + \frac{|C|}{\hbar^2} \xi^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = 0, \quad \xi < R \quad (\text{IV-86})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left(m + \frac{\nu}{\hbar} \right)^2 + \frac{|C|}{\hbar^2} \xi^2 + k^2 \right] \mathfrak{R}_{n,m}(\xi) = 0, \quad \xi > R \quad (\text{IV-97})$$

et leurs solutions respectivement sont :

$$\mathfrak{R}_{\mu',m}^{Int}(\xi) = \xi^{|m|} e^{-\frac{i\sqrt{|C|}}{2\hbar} \xi^2} A_{\mu',m} F_1 \left(\mu', |m| + 1, \frac{i\sqrt{|C|}}{\hbar} \xi^2 \right), \quad \xi < R \quad (\text{IV-108})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\mu',m}^{Ext}(\xi) = & e^{\frac{i\sqrt{|C|}}{2\hbar} \xi^2} \left[C_{\mu',m} \xi^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} F_1 \left(\mu', \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{i\sqrt{|C|}}{\hbar} \xi^2 \right) + \right. \\ & \left. + D_{\mu',m} \left(\frac{i\sqrt{|C|}}{\hbar} \right)^{-2|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \xi^{-|m+\frac{\nu}{\hbar}|} F_1 \left(\mu' - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, 1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|, \frac{i\sqrt{|C|}}{\hbar} \xi^2 \right) \right], \quad \xi > R \end{aligned} \quad (\text{IV-109})$$

avec :

$$\begin{cases} \mu' = \frac{(|m|+1)}{2} + i \frac{\hbar k^2}{4\sqrt{|C|}} & \xi < R \\ \mu' = \frac{\left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right)}{2} + i \frac{\hbar k^2}{4\sqrt{|C|}} & \xi > R \end{cases} \quad (\text{IV-110})$$

Le cas précédent qu'on a étudié c'est-à-dire $C < 0$, soit pour $\xi < R$ ou pour $\xi > R$, les solutions obtenus sont des fonctions hypergéométriques, mais avec un paramètre μ' complexe qui peut prendre toutes les valeurs possibles et imaginables, donc on va avoir un spectre continu, alors que le spectre de l'oscillateur harmonique est un spectre discret, ce qui constitue une nouveauté aussi.

IV. Solutions de l'équation de Schrödinger :

Les fonctions d'ondes $\psi_{n,m}(r, \varphi, t)$ solutions de l'équation de Schrödinger (IV-1) sont donc :

$$\psi_{n,m}(r, \varphi, t) = \exp[i\alpha_{n,m}(t)]\phi_{n,m}(r, \varphi, t) \quad (\text{IV-111})$$

où la phase $\alpha_{n,m}(t)$ est définie par :

$$\hbar\dot{\alpha}_{n,m}(t) = \langle \phi_{n,m} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi_{n,m} \rangle \quad (\text{IV-112})$$

et dont on va déterminer dans ce qui va suivre.

On commence d'abord par le calcul du terme :

$$\langle \phi_{n,m} | H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{n,m} \rangle . \quad (\text{IV-113})$$

D'après l'équation (IV-34), l'Hamiltonien $H(t)$ a la forme suivante :

$$H(t) = \frac{T_1}{M} + M\omega^2 T_3$$

Remplaçons par l'expression de $H(t)$ dans l'équation (IV-113) on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n,m} | H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{n,m} \rangle &= \langle \phi_{n,m} | \frac{T_1}{M} + M\omega^2 T_3 | \phi_{n,m} \rangle - \\ &\quad - i\hbar \langle \phi_{n,m} | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{n,m} \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV-114})$$

L'équation (IV-54) donne $\phi_{n,m}(r, \varphi, t) = \phi'_{n,m}(r, \varphi, t)U^+$, alors l'équation (IV-114) de vient :

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n,m} | H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{n,m} \rangle &= \langle \phi'_{n,m} | U \frac{T_1}{M} U^+ | \phi'_{n,m} \rangle + \\ &+ \langle \phi'_{n,m} | M\omega^2 T_3 | \phi'_{n,m} \rangle - i\hbar \langle \phi'_{n,m} | U \frac{\partial}{\partial t} U^+ | \phi'_{n,m} \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV-115})$$

L'équation (IV-28) donne l'expression de T_1 suivante :

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} + \frac{1}{r^2} (p_\varphi + \nu\theta(\frac{r}{\rho} - R))^2 \right]$$

On va calculer le premier terme du membre à droite de l'équation (IV-115), pour cela calculons l'action de T_1 sur $U^+ | \phi'_{n,m} \rangle$, ce qui revient à calculer l'action de

$\left(p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} \right)$ sur $U^+ | \phi'_{n,m} \rangle$ soit :

$$\left(p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} \right) e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle - \frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle \quad (\text{IV-116})$$

d'une part :

$$\left(p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} \right) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{IV-117})$$

d'autre part :

$$U^+ = \exp i \frac{\delta}{2\hbar} r^2$$

avec

$$\delta = M \frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad (\text{IV-118})$$

L'équation (IV-116) devient également :

$$\left(p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} \right) e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle = -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(i \frac{\delta}{\hbar} r e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle + e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} \frac{\partial}{\partial r} |\phi'_{n,m}\rangle \right) - \frac{\hbar^2}{r} \left(i \frac{\delta}{\hbar} r e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle + e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} \frac{\partial}{\partial r} |\phi'_{n,m}\rangle \right)$$

ce qui conduit à écrire :

$$\left(p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} \right) e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle = \hbar^2 \left(-i \frac{\delta}{\hbar} e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle + \frac{\delta^2}{\hbar^2} r^2 e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle - 2i \frac{\delta}{\hbar} r e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} \frac{\partial}{\partial r} |\phi'_{n,m}\rangle - e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} |\phi'_{n,m}\rangle - i \frac{\delta}{\hbar} e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle - e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} \frac{\partial}{\partial r} |\phi'_{n,m}\rangle \right)$$

On arrive donc au résultat suivant :

$$\left(p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} \right) e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} |\phi'_{n,m}\rangle = \hbar^2 e^{i\frac{\delta}{2\hbar}r^2} \left(-2i \frac{\delta}{\hbar} + \frac{\delta^2}{\hbar^2} r^2 - 2i \frac{\delta}{\hbar} r \frac{\partial}{\partial r} + \left(p_r^2 - \frac{\hbar^2}{4r^2} \right) \right) |\phi'_{n,m}\rangle \quad (\text{IV-119})$$

L'équation qui définit la phase (IV-112) s'écrit :

$$\begin{aligned} \hbar \dot{\alpha}_{n,m}(t) = & -\langle \phi'_{n,m} | T_1 - \frac{2i\hbar^2 \delta}{2\hbar M} - \frac{2i\hbar^2 \hbar}{2M\hbar} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar^2 \delta^2}{2\hbar^2 M} r^2 + \\ & + M\omega^2 T_3 - i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} U^+ | \phi'_{n,m} \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV-120})$$

Calculons maintenant le terme $\frac{\partial}{\partial t} U^+ | \phi'_{n,m} \rangle$ de l'équation précédente, on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} U^+ | \phi'_{n,m} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} e^{i\frac{\delta}{2\hbar} r^2} | \phi'_{n,m} \rangle = i \frac{\dot{\delta}}{2\hbar} r^2 e^{i\frac{\delta}{2\hbar} r^2} | \phi'_{n,m} \rangle + e^{i\frac{\delta}{2\hbar} r^2} \frac{\partial}{\partial t} | \phi'_{n,m} \rangle \quad (\text{IV-121})$$

Alors l'équation qui définit la phase (IV-112) s'écrit aussi, en remplaçant dans (IV-120) :

$$\begin{aligned} \hbar \dot{\alpha}_{n,m}(t) = & -\langle \phi'_{n,m} | \frac{T_1}{M} - i \frac{\hbar \delta}{M} (1 + r \frac{\partial}{\partial r}) + \\ & + (\frac{\delta^2}{2M} + \frac{\dot{\delta}}{2} + \frac{1}{2} M\omega^2) r^2 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \phi'_{n,m} \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV-122})$$

on pose :

$$\Omega = \frac{\delta^2}{2M} + \frac{\dot{\delta}}{2} + \frac{1}{2} M\omega^2 \quad (\text{IV-123})$$

et essayons de l'écrire sous sa forme la plus simple, c'est-à-dire on dérive la quantité

$\delta = M \frac{\dot{\rho}}{\rho}$ par rapport au temps, et on remplace par δ et $\dot{\delta}$ dans la quantité Ω , soit :

$$\Omega = \frac{M^2 \dot{\rho}^2}{2M\rho^2} + \frac{1}{2} M\omega^2 + \frac{1}{2} \dot{M} \frac{\dot{\rho}}{\rho} + M \frac{\ddot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2}{2\rho^2}$$

et également :

$$\Omega = M \left(\frac{M}{2M} \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} + \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{\dot{M}}{2M} \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\ddot{\rho}}{2\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{2\rho^2} \right)$$

soit encore :

$$\Omega = \frac{M}{2\rho} \left(\rho\omega^2 + \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} + \ddot{\rho} \right) \quad (\text{IV-124})$$

En utilisant l'équation auxiliaire (IV-48) pour tirer l'expression de $\ddot{\rho}$, en suite on va remplacer dans l'équation (IV-124) on obtient :

$$\Omega = \frac{M}{2\rho} \left(\rho\omega^2 + \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} - \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} - \rho\omega^2 + \frac{C}{M^2 \rho^3} \right)$$

alors :

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{C}{M\rho^4} \quad (\text{IV-125})$$

Maintenant on va calculer le terme :

$$|\Omega'\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi'\rangle.$$

D'après l'équation (IV-61) on a :

$$\phi'_{n,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \chi_{n,m}(\xi, \varphi, t)$$

alors $|\Omega'\rangle$ devient :

$$|\Omega'\rangle = -i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} |\chi_{n,m}\rangle + i\hbar \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} |\chi_{n,m}\rangle \quad (\text{IV-126})$$

On sait que $\xi = \frac{r}{\rho}$, alors l'équation (IV-126) devient :

$$|\Omega'\rangle = -i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} |\chi_{n,m}\rangle + i\hbar \frac{r}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} |\chi_{n,m}\rangle$$

et aussi :

$$|\Omega'\rangle = -i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} |\chi_{n,m}\rangle - i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} |\chi_{n,m}\rangle$$

et encore :

$$|\Omega'\rangle = -i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho} \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{1}{\rho} |\chi_{n,m}\rangle$$

en fin :

$$|\Omega'\rangle = -i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho} \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r}\right) |\phi'_{n,m}\rangle \quad (\text{IV-127})$$

Remplaçons par les expressions de Ω et $|\Omega'\rangle$ dans l'équation (IV-122), et en tenant compte que

$$\frac{\delta}{M} = \frac{\dot{\rho}}{\rho}$$

on obtient :

$$\hbar \dot{\alpha}(t) = -\langle \phi'_{n,m} | \frac{T_1}{M} + \frac{C}{M\rho^4} \frac{1}{2} r^2 | \phi'_{n,m} \rangle \quad (\text{IV-128})$$

On sait que :

$$T_3 = \frac{1}{2} r^2$$

l'équation (IV-128) devient :

$$\hbar \dot{\alpha}_{n,m} = -\frac{1}{M\rho^2} \langle \phi' | \rho^2 T_1 + \frac{C}{\rho^2} T_3 | \phi' \rangle \quad (\text{IV-129})$$

et aussi, on sait que :

$$I' = \rho^2 T_1 + \frac{C}{\rho^2} T_3$$

alors l'équation (IV-129) s'écrit :

$$\hbar \dot{\alpha}_{n,m} = -\frac{1}{M\rho^2} \langle \phi' | I' | \phi' \rangle \quad (\text{IV-130})$$

L'équation aux valeurs propres (IV-62) de l'invariant I' est :

$$I' \phi'_{n,m}(r, \varphi, t) = \lambda_{n,m} \phi'_{n,m}(r, \varphi, t)$$

alors l'équation (IV-130) s'écrit donc :

$$\dot{\alpha}_{n,m}(t) = -\frac{\lambda_{n,m}}{\hbar M \rho^2} \langle \phi'_{n,m} | \phi'_{n,m} \rangle \quad (\text{IV-131})$$

enfin la phase $\alpha_{n,m}(t)$ est donnée par :

$$\alpha_{n,m}(t) = -\frac{\lambda_{n,m}}{\hbar} \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \langle \phi'_{n,m} | \phi'_{n,m} \rangle, \quad \forall C \quad (\text{IV-132})$$

avec les valeurs propres :

$$\lambda_{n,m} = \hbar \sqrt{C} \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{IV-133})$$

D'après l'équation (IV-105), et tenant compte que $\xi = \frac{r}{\rho}$ on aura :

$$\phi_{n,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \mathfrak{R}_{n,m} \left(\frac{r}{\rho} \right) \exp(im\varphi) \exp \left[\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 \right] \quad (\text{IV-134})$$

Remplaçons par l'équation (IV-134) dans l'équation (IV-111), on obtient :

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(r, \varphi, t) &= \frac{1}{\rho} \mathfrak{R}_{n,m} \left(\frac{r}{\rho} \right) \exp \left[\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 \right] \\ &\exp \left[-i \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \langle \phi'_{n,m} | \phi'_{n,m} \rangle \right] \exp[im\varphi] \end{aligned} \quad (\text{IV-135})$$

Finalement, la solution exact de l'équation de Schrödinger (IV-1) en coordonnées polaires dans le cas où la constante C est positive ($C > 0$) est donnée par :

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(r, \varphi, t) &= \frac{1}{\rho} \mathfrak{R}_{n,m} \left(\frac{r}{\rho} \right) \exp \left[\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 \right] \\ &\exp \left[-i \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t') \rho^2} \langle \phi'_{n,m} | \phi'_{n,m} \rangle \right] \exp[im\varphi]. \end{aligned} \quad (\text{IV-136})$$

Cette dernière est représentée par la figure suivante :

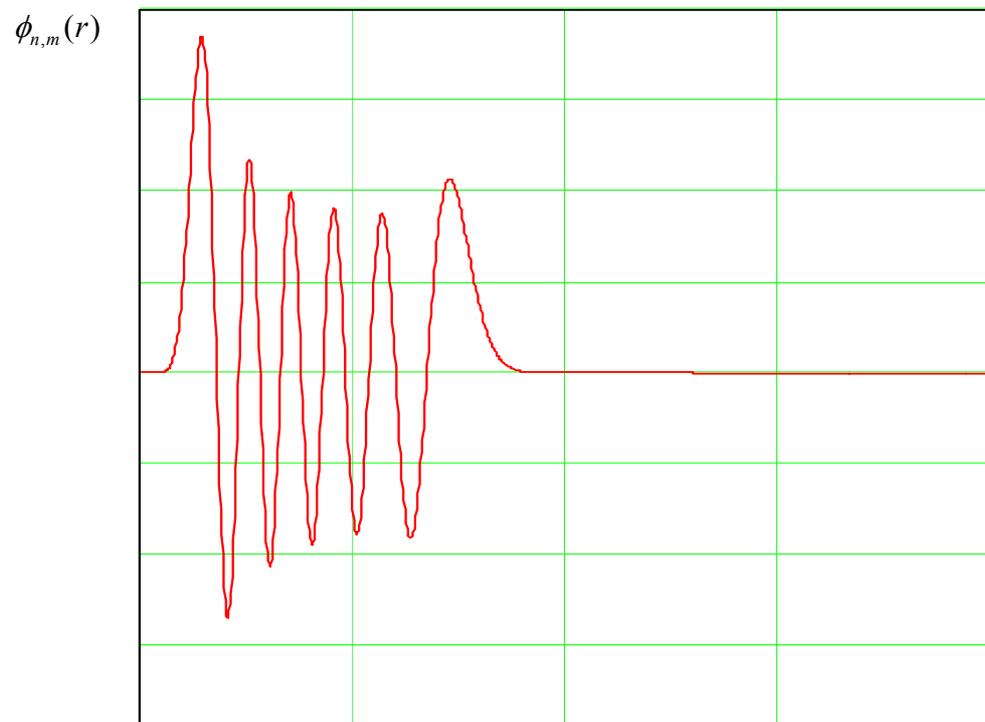


Figure IV-2 : Solution de l'équation de Schrödinger ; Cas $C > 0$.

Conclusion

CONCLUSION

Nous avons déterminé la forme exacte de la fonction d'onde de l'oscillateur harmonique à masse et fréquence variables à 2D en présence de l'effet Aharonov-Bohm (AB). Nous avons distingué trois cas, à savoir la constante C définie par (IV-45) positive, négative ou nulle. Pour le cas où $C > 0$, la solution exacte de l'équation de Schrödinger (IV-1) en coordonnées polaires est donnée par :

$$\psi_{n,m}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\rho} \mathfrak{R}_{n,m} \left(\frac{r}{\rho} \right) \exp \left[\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2 \right] \exp \left[-i \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t')\rho^2} \langle \phi'_{n,m} | \phi'_{n,m} \rangle \right] \exp[im\varphi].$$

En l'absence de l'effet Aharonov-Bohm c'est-à-dire $\nu = 0$, cette solution se réduit à la solution de l'oscillateur harmonique à deux dimensions (2D) dépendant du temps. D'autre part, si le flux magnétique d'Aharonov-Bohm est quantifié c'est-à-dire $\frac{\nu}{\hbar} = \text{entier}$, cette solution aussi coïncide exactement avec la solution de l'oscillateur harmonique à deux dimensions (2D) dépendant du temps.

Nous avons constaté que l'équation auxiliaire est indépendante du flux magnétique d'Aharonov-Bohm.

Pour le cas où $C = 0$, les solutions obtenues sont des fonctions de Bessel qui décrivent un spectre continu, tandis que notre travail s'intéresse à l'étude d'un oscillateur harmonique qui a un spectre discret, ce qui constitue une nouveauté.

Pour le cas où $C < 0$, soit pour $\xi < R$ ou pour $\xi > R$, les solutions obtenus sont des fonctions hypergéométriques, mais avec un paramètre μ' complexe qui peut prendre toutes les valeurs possibles et imaginables, donc on va avoir un spectre continu, alors que le spectre de l'oscillateur harmonique est un spectre discret, ce qui constitue une nouveauté aussi.

Appendice

APPENDICE : Calcul des constantes de raccordement :

Pour l'ordre le plus bas de R , la série confluyente et sa première dérivé se comporte comme :

$$\left[{}_1F_1\left(\alpha, \gamma, \frac{\sqrt{C}}{\hbar} \xi^2\right) \right]_{\xi=R} \approx 1$$

$$\left[\frac{d {}_1F_1\left(\alpha, \gamma, \frac{\sqrt{C}}{\hbar} \xi^2\right)}{d\xi} \right]_{\xi=R} = 0$$

La condition de raccordement donne :

$$A_{n,m} R^{|m|} = C_{n,m} R^{\left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right|} + D_{n,m} R^{-\left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right|} \quad (\text{a})$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\mathfrak{R}_{n,m}(\xi)}{d\xi} \right]_{R+\varepsilon} &= \left\{ C_{n,m} \left[\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{\left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| - 1} - \frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{\hbar \left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right)} R^{\left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + 1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + D_{n,m} \left[- \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{-\left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| - 1} - \frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{\hbar \left(1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| \right)} R^{-\left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + 1} \right] \right\} \exp\left[-\frac{\sqrt{C}R^2}{2\hbar} \right] \end{aligned}$$

et

$$\left[\frac{d\mathfrak{R}_{n,m}(\xi)}{d\xi} \right]_{R-\varepsilon} = A_{n,m} \left[|m| R^{|m|-1} - \frac{2n + |m| + 1}{\hbar (|m| + 1)} R^{\left|m + \frac{\nu}{\hbar}\right| + 1} \right] \exp\left[-\frac{\sqrt{C}R^2}{2\hbar} \right]$$

la deuxième condition donne :

$$\begin{aligned}
& C_{n,m} \left[\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - 1} - \frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{\hbar \left(\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right)} R^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1} \right] + D_{n,m} \left[- \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - 1} - \right. \\
& \left. - \frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{\hbar \left(1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| \right)} R^{-\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1} \right] = A_{n,m} \left[\left| m \right| R^{\left| m \right| - 1} - \frac{2n + \left| m \right| + 1}{\hbar \left(\left| m \right| + 1 \right)} R^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1} \right]
\end{aligned} \tag{b}$$

D'après les deux équations (a) et (b) on obtient :

$$\frac{C_{n,m}}{A_{n,m}} = \frac{\left(\left| m \right| + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| \right) R^{\left| m \right| - 1} + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} - \frac{2n + \left| m \right| + 1}{\left| m \right| + 1} \right] R^{\left| m \right| + 1}}{2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| R^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| - 1} + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} - \frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1} \right] R^{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}}$$

et

$$\frac{D_{n,m}}{A_{n,m}} = R^{\left| m \right| + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} \left[1 - \frac{\left| m \right| + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} - \frac{2n + \left| m \right| + 1}{\left| m \right| + 1} \right] R^2}{2 \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{1 - \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right|} - \frac{2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1}{\left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1} \right] R^2} \right]$$

Références Bibliographiques

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Chung-In Um, Kyu-Hwang Yeon, and George Thomas F. (2002). physics reports 362, 63.
- [2] Kleber, M. (1994). physics reports 236, 331.
- [3] Markov, M. A. (Ed.), (1989). Invariant and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems, Nova science publishers, Commack, New-york.
- [4] M. V. Berry, Proc. R. Soc. London Ser. A 392, 45 (1984).
- [5] J. H. Hannay, J. Phys. A 18, 221 (1985).
- [6] Lewis, H. R. Jr. and Riesenfeld, W. B. (1969). Journal of mathematical physics 10, 1458.
- [7] Dodonov, V. V. Malkin, I. A. and Man'ko, V. I. (1974). Nuovo Cimento B 24, 46.
- [8] Maamache, M. (1995). Physical Review A 52, 936.
- [9] Maamache, M. (1996). Journal of Physics A 29, 2833.
- [10] Maamache, M. (2000). Physical Review A 61, 026102.
- [11] Maamache, M. and Bekkar, H. (2003). Journal of Physics A 36, L359.
- [12] Maklin, I. A. and Man'ko, V. I. (1972). Physical Letters A 39, 377.
- [13] Pedrosa, I. A. Serra and G. P. Guedes, I. (1997). Physical Review A 56, 4300.
- [14] Trivonov, D. (1999). Journal of Physics A 32, 3649.
- [15] Aharonov, Y. and Bohm, D. (1959). Physical Review Letters 115, 4859.
- [16] Ferkous, N. and Bounames, A. (2004). Physics Letters A 325, 21.
- [17] Furtado, C. and Moraes, F. (2000). Journal of Physics A 33, 5513.

- [18] Hagen, C. R. (1990). Physical Review Letters 64, 503.
- [19] Hagen, C. R. (1991). International Journal of Modern Physics A 6, 3119.
- [20] Hagen, C. R. (1993). Physical Review D 64, 5935.
- [21] V. Smirnov ; "cours de mathématiques supérieures", Tome 2, Édition MIR (Moscou, 1970), Réimpression 1979.
- [22] A. Messiah, "mécanique quantique", édition Dunod. (Paris, 1995).
- [23] L. LANDAU, E. LIFCHITZ – Mécanique – traduit du russe par Claude Ligny, MIR, Moscou, quatrième édition complétée 1982, réimpression 1988 (1ère édition 1964).
- [24] H. GOLDSTEIN – Classical Mechanics – Addison-Wesley (1980).
- [25] C. C. TANNOUDJI, B. DIU, F. LALOË – MECANIQUE QUANTIQUE – T1 et T2 – HERMANN, PARIS, NOUVELLE EDITION REVUE, CORRIGEE ET AUGMENTEE 1977.
- [26] L. D. LANDAU, E. LIFCHITZ – MECANIQUE QUANTIQUE – TRADUIT DU RUSSE PAR EDOUARD GLOUKHIAN, MIR, MOSCOU, 2EME EDITION (1967).
- [27] M. Born, The statistical interpretation of quantum mechanics Nobel Lecture, December 11, 1954.
- [28] M. Born, Z. Physik, 37 A926) 863 ; 38 A926) 803 ; Gottinger Nachr. Math Phys. Kl, (1926) 146.
- [29] J. HLADIK, P. E. HLADIK – Le calcul tensoriel en physique, cours et exercices corrigés – DUNOD, Paris, troisième édition 1999 (Masson, Paris, 1993, 1994 pour les premières éditions).
- [30] A. NIKFOROV, V. OUGAROV – FONCTIONS SPECIALES DE LA PHYSIQUE MATHEMATIQUE – OFFICE DES PUBLICATIONS

ALGERIENNE, TRADUIT DU RUSSE PAR VLADIMIR KOTLIAR,
VERSION ORIGINALE 1977, EDITION MIR.

[31] M. MAÂMACHE, J. MATH. PHYS. **39** (1), 161-169, JANUARY 1998.

[32] H. R. Lewis, Phys. Rev. Lett. **18**, 636 ~1967!; J. Math. Phys. **9**, 1976
(1968).

[33] D. J. GRIFFITHS – INTRODUCTION TO QUANTUM MECHANICS –
PRENTICE HALL, INC. TORONTO (1995).

[34] P. Ehrenfest, “Adiabatische Invarianten und Quantentheorie,” Ann. Phys.
51, 327–352 (1916)

[35] S. TEUFEL – ADIABATIC PERTURBATION THEORY IN QUANTUM
DYNAMICS, LECTURE NOTES IN MATHEMATICS 1821– SPRINGER-
VERLAG, BERLIN, HEIDELBERG, NEW YORK (2003).

[36] M. Born and V. Fock, “Beweis des Adiabatenatzes,” Z. Phys. **51**, 165-180
(1928).

[37] D. M. Tong, K. Singh, L. C. Kwek, X. J. Fan, C. H. Oh, Physics Letters A,
Volume 339, Issue 3-5, p. 288-293.

[38] D. M. Tong, K. Singh, L. C. Kwek, C. H. Oh, Phys. Rev. Lett. **95**, 110407
(2005).

[39] Simon. B, Phys. Rev. Lett. **51** 2167 (1983).

[40] Maâmache. M, Provost. J. P, and Vallée. G, J. Phys. A : Math. Gen. **30**
2489 (1997).

[41] Y. Aharonov, J. Anandan, Phys. Rev. Lett. **58**, 1593–1596 (1987).

[42] A. Shapere and F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics* (World
Scientific, Singapore, 1989)

[43] K. Matsumoto, quant-ph/0006076.

- [44] S. Duki, H. Mathur, O. Narayan, quant-ph/0510131.
- [45] R. Simon, N. Mukunda, Phys. Rev. Lett. 1993 Feb 15;70(7):880-883.
- [46] J. Samuel, R. Bhandari, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 2339.
- [47] A. Mostafazadeh, Phys. Lett. A232 (1997) 395-398.
- [48] Molarès (1980), Cervero et Lejerreta (1989), Gao *et al* (1990), Bose et Dutta Roy (1991), Ji *et al* (1995) Y. Z. Lai (1996).
- [49] "Ballistic Electrons in Semiconductors," by Mordehai Heiblum and Lester F. Eastman; SCIENTIFIC AMERICAN, February, 1987.

المخلص:

نعتبر نظرية " لويس و ريزنفيلد " للمهتز التوافقي ذو بعدين حيث الكتلة و التوتر متغيران بدلالة الزمن و بوجود فعل أهارنوف -بوم .

نحدد الحل التام لمعادلة شرودينجر لهذا المهتز التوافقي حيث نناقش ثلاث حالات خاصة .

الكلمات المفتاحية: المهتز التوافقي- نظرية" لويس و ريزنفيلد " - الجمل المتعلقة بالزمن – مفعول أهارنوف بوم – الحقل المغناطيسي .

Résumé :

Nous considérons la théorie des invariants d'un oscillateur harmonique avec masse et fréquence variables à deux dimensions (2D) en présence de l'effet Aharonov-Bohm (AB). On détermine la solution exacte de l'équation de Schrödinger correspondante. Trois cas particuliers seront discutés.

Mots-clés : Oscillateur harmonique, Théorie des invariants, systèmes dépendant du temps effet Aharonov-Bohm, champs magnétique.

Abstract :

We consider the invariant theory for a two dimensions (2d) harmonic oscillator with time dependent mass and frequency in the presence of the Aharonov-Bohm effect (AB). We determine the exact solution of the corresponding Schrödinger equation. Three particular cases will be discussed.

Keywords: Harmonic oscillator, Invariant theory, Time dependent systems, Aharonov-Bohm effect, Magnetic fields.