

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF 1

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT LMD

Option : Mathématiques appliquées

Par

Latreche Soumia

Thème

Analyse variationnelle de différents problèmes aux limites
en mécanique du contact

Soutenu le : 08/01/2018

Devant le jury composé

Président : Pr. Kadem Abdelouahab Université Ferhat Abbas Sétif 1

Encadreur : Pr. Selmani Lynda Université Ferhat Abbas Sétif 1

Examineurs :

Pr. Dalah Mohamed Université Frères Mentouri Constantine 1

Pr. Messelmi Farid Université Ziane Achour Djelfa

Remerciement

Tout d'abord, mes sincères remerciements à Dieu le plus grand et le plus puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour réaliser cette thèse.

J'exprime mes remerciements à tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à madame Selmani Lynda, professeur à l'université de Sétif 1 d'avoir accepté de diriger mon travail, se fut un grand honneur pour moi. Je tiens à la remercier pour tout ce qu'elle m'a apporté, pour ses conseils, sa présence, sa patience et pour m'avoir fait confiance et m'avoir laissé la liberté nécessaire pour l'accomplissement de mon travail.

Mes remerciements les plus respectueux vont à monsieur Kadem Abdelouahab, professeur à l'université de Sétif 1 qu'il m'a fait l'honneur d'être le président du jury de cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier monsieur Dalah Mohamed, professeur à l'université de Constantine 1 et monsieur Messelmi Farid, professeur à l'université de Djelfa pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à ma thèse en acceptant de participer au jury.

Un grand Merci de tout mon cœur à mes chers parents, sans qui je ne serais absolument pas où j'en suis aujourd'hui. Je les remercie sincèrement pour leur gentillesse et leur soutien inconditionnel et constant, pour m'avoir donné du courage et de l'espoir.

Latreche Soumia

Table des matières

Introduction	4
Notations	9
I Introduction aux inéquations variationnelles	11
1 Préliminaires sur l'analyse fonctionnelle	12
1.1 Espaces normés	13
1.2 Espaces fonctionnels	14
1.2.1 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables	14
1.2.2 Espaces de Lebesgue L^p	15
1.2.3 Espaces de Sobolev	15
1.2.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	16
1.3 Théorèmes de point fixe	18
1.4 Éléments d'analyse non linéaire	21
1.4.1 Opérateurs linéaires	21
1.4.2 Opérateurs non linéaires	22
1.4.3 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement	23
1.4.4 Différentiabilité et sous différentiabilité	24
2 Inéquations variationnelles et équations d'évolution	26
2.1 Inéquations variationnelles elliptiques	26
2.1.1 Inéquations variationnelles de première espèce	27
2.1.2 Inéquations variationnelles de deuxième espèce	27
2.1.3 Inéquations quasi-variationnelles	28
2.2 Inéquations variationnelles paraboliques	29
2.3 Équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits	29
2.4 Inéquations quasi-variationnelles avec des opérateurs à mémoire	30
2.4.1 Opérateurs à mémoire	30

2.4.2	Résultat d'existence et d'unicité	31
2.5	Quelques inégalités élémentaires	35
II	Modélisation et analyse des problèmes de contact	36
3	Modélisation des problèmes de contact	37
3.1	Espaces fonctionnels en mécanique du contact	38
3.1.1	Préliminaires	38
3.1.2	Des espaces liés au champ des déplacements	39
3.1.3	Des espaces liés au champ des contraintes	41
3.1.4	Des espaces liés aux problèmes piézoélectriques	41
3.1.5	Des espaces liés au champ des températures	42
3.1.6	Des espaces liés à la densité des débris d'usure	43
3.2	Modélisation des problèmes élasto-viscoplastiques et thermo-viscoélastiques	44
3.2.1	Cadre physique	44
3.2.2	L'équation de mouvement	45
3.2.3	Lois de comportement	45
3.2.4	Conditions aux limites	47
3.3	Processus de contact avec adhésion	51
3.4	Processus de contact avec usure	53
3.5	Modélisation des problèmes de contact piézoélectriques	55
3.5.1	Cadre physique	55
3.5.2	Lois de comportement	57
3.5.3	Les conditions de contact	58
4	Problème de contact sans frottement en élasto-viscoplasticité	60
4.1	Problème mécanique et hypothèses	60
4.2	Formulation variationnelle	63
4.3	Résultat d'existence et d'unicité	64
4.4	Résultat de convergence	70
5	Problèmes de contact avec des opérateurs à mémoire et frottement	76
5.1	Problème avec compliance normale	77
5.1.1	Problème mécanique et hypothèses	77
5.1.2	Formulation variationnelle	80
5.1.3	Résultat d'existence et d'unicité	81
5.2	Problème avec réponse normale instantanée	86
5.2.1	Problème mécanique et hypothèses	86
5.2.2	Formulation variationnelle	87
5.2.3	Résultat d'existence et d'unicité	88

TABLE DES MATIÈRES

5.3	Résultat de convergence	89
6	Problème de contact sans frottement en piézoélectricité	95
6.1	Problème mécanique et hypothèses	95
6.2	Formulation variationnelle	100
6.3	Résultat d'existence et d'unicité	101
7	Problème de contact avec frottement en piézoélectricité	111
7.1	Problème mécanique et hypothèses	111
7.2	Formulation variationnelle	116
7.3	Résultat d'existence et d'unicité	116
8	Problème thermo-viscoélastique avec frottement, endommagement et diffusion d'usure	125
8.1	Problème mécanique et hypothèses	126
8.2	Formulation variationnelle	131
8.3	Existence et unicité de la solution	132
	Bibliographie	143

Introduction

Les phénomènes de contact entre les corps, déformables ou non, restent encore à ce jour omniprésents dans la vie courante. On peut considérer qu'il s'agit d'un des fondements de l'ingénierie mécanique, avec un domaine d'application particulièrement étendu. A titre d'exemple, on peut citer le secteur ferroviaire, avec le contact roue-rail, l'industrie automobile, via l'étude des caractéristiques d'adhérence entre le pneu et la chaussée ainsi que les crash tests, le génie civil, pour lequel il est nécessaire d'estimer les efforts que vont subir les matériaux qui constituent les ponts ou les gratte-ciels, le frottement inhérent au mouvement des plaques tectoniques ou encore le domaine de l'aéronautique, ne serait ce que pour les propriétés d'absorption des chocs dont sont dotés les amortisseurs des trains d'atterrissage d'avion.

La littérature mathématique dédiée à l'étude des phénomènes de contact est plus récente. La raison réside dans le fait que, accompagnés de phénomènes physiques et de surface complexes, les processus de contact sont modélisés par des problèmes aux limites non linéaires, très difficiles à analyser. La première publication concernant le contact des corps déformables était celle de Hertz [32]. IL s'ensuit le travail de Signorini [56] où le problème a été posé dans ce qu'est appelé maintenant une forme variationnelle, et a été par la suite résolu par Fichera [17, 18]. Cependant, la théorie générale de la mécanique du contact a commencé avec la monographie de Duvaut et Lions [15], qui ont présenté des formulations variationnelles de plusieurs problèmes de contact et ont prouvé quelques résultats fondamentaux d'existence et d'unicité de la solution.

La condition de contact sans frottement est utilisée dans un certain nombre de références pour simplifier l'analyse de certains modèles. Par ailleurs, la loi de frottement la plus populaire utilisée dans la littérature est la loi de Coulomb, formulée pour la première fois par Amontons en 1699. Exprimée en termes d'inégalités, la principale caractéristique de cette loi réside dans le fait qu'elle décrit le phénomène " adhérence-glissement ". Diverses versions dépendantes de la loi de Coulomb ont également été largement utilisées à la fois dans la littérature technique et mathématique, comme c'est expliqué dans [55].

Le phénomène piézoélectrique se caractérise par l'apparition de charges électriques sur les surfaces de certains cristaux après leur déformation. L'effet inverse consiste en la génération de stress et de contrainte dans les cristaux sous l'action du champ électrique sur la frontière, les matériaux qui présentent un tel comportement sont appelés matériaux piézoélectriques. Les matériaux piézoélectriques sont largement utilisés comme commutateurs et actuateurs dans de nombreux systèmes d'ingénierie, dans les domaines de la radioélectronique, de l'électroacoustique et de l'équipement de mesure. Actuellement, il y a un intérêt considérable dans les problèmes de contact impliquant des matériaux piézoélectriques. Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est le quartz, toujours utilisé dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie. Des problèmes de contact pour des matériaux élastiques avec un effet électrique, appelés matériaux électro-élastiques, se trouvent dans [8,9,16,33,42,57]. Des problèmes avec ou sans frottement impliquant des matériaux électro-viscoélastiques ont été étudiés dans [4,5,29,58] et des matériaux électro-élasto-viscoplastiques ont été considérés dans [31,41,53]. Des problèmes de contact impliquant des matériaux piézoélectriques lorsque la base est parfaitement isolée ont été étudiés dans [29,48,57,58] et récemment dans [4,5,38,40,48] et la monographie [62] lorsque la base est conductrice.

Les processus d'adhésion sont importants dans de nombreux milieux industriels où des pièces, généralement non métallique, sont collées ensemble. Pour cette raison, le contact adhésif entre des corps déformables lorsque une colle est ajoutée pour empêcher le mouvement relatif de surfaces, a récemment reçu une attention accrue dans la littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact adhésif peut être trouvée dans [12,13,19–21,43,52] et récemment dans les monographies [54,60]. Une application de la théorie du contact adhésif dans le domaine médical des prothèses a été considéré dans [45,46]. Le champ d'adhésion prend ses valeurs entre zéro et un et décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact, il décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact. Dans cette thèse on note par β le champ d'adhésion, lorsque $\beta = 1$ en un point de la surface de contact, l'adhésion est complète et toutes les liens adhésifs sont actifs, lorsque $\beta = 0$ tous les liens adhésifs sont inactifs et il n'y a pas d'adhésion, et lorsque $0 < \beta < 1$ l'adhésion est partielle et seulement une fraction des liens adhésifs est active.

Dans différents problèmes de contact provenant du secteur industrie, il y a besoin de prendre en considération l'endommagement interne du matériau causé par des contraintes mécaniques. Des modèles généraux pour l'évolution d'endommagement sont dans [22,23] et sont issus du principe de la puissance virtuelle. L'analyse

mathématique des problèmes d'endommagement dans le cas unidimensionnels peut être trouvée dans [24]. L'endommagement du matériaux est décrit par une fonction α ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\alpha = 0$ le matériau est complètement endommagé, lorsque $\alpha = 1$ il n'y a pas d'endommagement et lorsque $0 < \alpha < 1$ il y a un endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Des problèmes avec endommagement peuvent être trouvés dans [11, 25, 48–51, 55] et la monographie [60].

Dans la science des matériaux, l'usure des surfaces désigne le phénomène de dégradation des couches superficielles d'un solide sous l'action mécanique du milieu extérieur. Pour modéliser l'usure des surfaces de contact on introduit une fonction d'usure, qui tient compte de la profondeur, dans la direction normale, du matériau retiré. Par conséquent, elle rend compte de la variation de la géométrie de surface et représente la quantité cumulée de matériau éliminé, par unité de surface. On suppose généralement que le taux d'usure de la surface est proportionnel à la pression de contact et à la pression relative de glissement, c'est-à-dire à la puissance de frottement dissipée. De ce fait, l'usure implique l'évolution des surfaces en contact et ces changements affectent le processus de contact. Ainsi, en raison de son rôle crucial, il existe une vaste littérature mathématique consacrée à ce sujet, voir par exemple [2, 26–28, 35, 48, 51].

Cette thèse représente une contribution à l'étude mathématique de quelques problèmes de contact entre un corps déformable et une fondation. Sous l'hypothèse des petites déformations, nous étudions des processus quasi-statiques et dynamiques pour des matériaux élasto-viscoplastiques, électro-élasto-viscoplastiques et thermo-viscoélastique. Les conditions aux limites sont du type compliance normale avec ou sans adhésion ou de réponse normale instantané. Les lois de frottement utilisés sont des versions de la loi de Coulomb avec ou sans adhésion. Les conditions électriques sont introduites dans les cas où la fondation est conductrice. Notre étude des phénomènes de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de la solution et des résultats de convergence.

La thèse est divisée en deux parties.

La première partie comporte les chapitres 1 et 2 et représente une brève introduction à l'étude des inéquations variationnelles. Le matériel présenté ici a été sélectionné en mettant l'accent sur les outils mathématiques utiles nécessaires à l'étude des problèmes de contact. Plus spécifiquement, le Chapitre 1 est dédié à quelques éléments d'analyse fonctionnelle et d'analyse non linéaire. Dans le chapitre 2, nous évoquons quelques résultats issus de la théorie des inéquations variationnelles elliptiques et

paraboliques, équations d'évolution, les inéquations quasi-variationnelles avec terme mémoire et le lemme de Gronwall.

La deuxième partie contient les chapitres 3 à 8 et représente la partie principale de cette thèse. Elle est consacrée à la modélisation et à l'analyse des problèmes de contact avec ou sans frottement.

Le chapitre 3 est basé essentiellement sur la modélisation des différents problèmes de contact. Nous présentons le cadre physique, les lois de comportement de nature élasto-viscoplastique, électro-élasto-viscoplastique et thermo-viscoélastique considérées dans les problèmes de contact. Nous décrivons aussi les conditions de contact et les lois de frottement que nous utilisons dans les problèmes de contact envisagés.

Le chapitre 4 porte sur l'étude mathématique d'un problème de contact en élasto-viscoplasticité où le contact est modélisé par une condition de compliance normale sans frottement. Le matériau est modélisé par une loi constitutive générale de nature élasto-viscoplastique avec variable interne d'état. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution moyennant les techniques de point fixe et des équations d'évolution d'ordre un avec des opérateurs monotones. Ce Chapitre s'achève par un résultat de convergence.

Le chapitre 5 aborde deux problèmes quasi-statiques avec frottement en élasto-viscoplasticité. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale ou une réponse normale instantanée et la loi de frottement associée est une version de la loi de Coulomb. La formulation variationnelle est obtenue sous forme d'une inéquation quasi-variationnelle avec des opérateurs de mémoire (history-dependent). Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration repose notamment sur les inéquations quasi-variationnelle avec des opérateurs de mémoire et des arguments de point fixe. Finalement, nous considérons un résultat de convergence de la solution faible du premier problème par rapport aux données.

Le chapitre 6 est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact sans frottement entre un matériau piézoélectrique avec variable interne d'état et une base adhésive et conductrice où le processus est mécaniquement dynamique et électriquement statique. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale où l'adhésion est prise en considération et une condition de conductivité électrique régularisée. Après avoir établi la formulation variationnelle et avoir posé les hypothèses nécessaires, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Le Chapitre 7 est consacré à l'analyse mathématique d'un problème de contact avec frottement entre un corps piézoélectrique et une base adhésive et conductrice où le processus est quasi-statique. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale avec adhésion, une version de la loi de frottement de Coulomb dans laquelle l'adhésion de surface de contact est prise en considération et une condition de conductivité électrique régularisée. Nous établissons un résultat d'existence

et d'unicité de la solution. La démonstration repose sur des arguments d'inéquations variationnelles dépendant du temps, des équations différentielles et le théorème de point fixe de Banach.

Le chapitre 8 aborde une analyse variationnelle d'un problème quasi-statique décrivant le contact avec frottement entre un corps thermo-viscoélastique et une base mobile impliquant l'usure et la diffusion d'usure de la surface de contact. L'effet d'endommagement est pris en considération dans la loi constitutive thermo-viscoélastique. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale associée à une loi de frottement où le coefficient de frottement dépend de la densité des particules d'usure, de la température et du taux de glissement. L'usure prend place sur une partie de la surface de contact, tandis que la diffusion des débris matériels a lieu dans tout le domaine de contact. L'usure est accompagnée par un échange thermique entre le corps et la base et un effet thermique du au frottement. La diffusion d'usure est décrite par l'équation de diffusion. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible sous une hypothèse de petitesse. La démonstration est basée sur des résultats sur les inéquations variationnelles elliptiques, les inéquations variationnelles paraboliques, les équations d'évolution de premier ordre et des arguments de point fixe.

La nouveauté dans ce travail réside dans :

- 1) le choix des lois constitutives avec variable interne d'état, endommagement, effet électrique ou effet thermique.
- 2) le choix d'un contact sans frottement avec une base conductrice et adhésive (voir chapitre 6).
- 3) le choix d'un contact avec frottement avec une base conductrice et adhésive et l'introduction de l'adhésion dans les conditions aux limites de frottement ce qui donne une version originale de la loi de Coulomb avec adhésion (voir chapitre 7).
- 4) le choix d'une base mobile avec usure, diffusion d'usure, échange thermique entre le corps et la base, sans oublier l'effet thermique du au frottement (voir chapitre 8).
- 5) l'introduction de la température dans le coefficient de frottement (voir chapitre 8).
- 6) finalement l'application de la théorie des inéquations quasi-variationnelles à mémoires (history-dependent) pour la résolution des problèmes de contact (voir chapitre 5).

Notations

$\mathbb{R}^d$ l'espace euclidien d'ordre d .

$\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.

On considère Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) et on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
Γ	la frontière de Ω supposée régulière.
$\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$	une partition de la frontière Γ .
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale extérieure unitaire à Γ .
v_ν, v_τ	la composante normale et tangentielle du champ vectoriel v .
σ_ν, σ_τ	la composante normale et tangentielle du champ tensoriel σ .
$C^1(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\bar{\Omega}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$.
$\mathcal{Q}$	l'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si X est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes :

X^d	$= \{x = (x_i) \mid x_i \in H, i = 1, \dots, d\}.$
$X_s^{d \times d}$	$= \{\tau = (\tau_{ij}) \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in H, i, j = 1, \dots, d\}.$
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X .
$ \cdot _X$	la norme de X .
X'	l'espace dual de X .
$(\cdot, \cdot)_{X' \times X}$	le produit de dualité entre X' et X .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$, on note par

- $C(0, T; X)$ l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans X .
- $C^1(0, T; X)$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0, T]$ dans X .
- $L^p(0, T; X)$ l'espace des fonctions mesurables de $(0, T)$ dans X .
- $W^{k,p}(0, T; X)$ l'espace de Sobolev de paramètres k et p de $(0, T)$ dans X .

Pour une fonction f , on note par

- $\dot{f}, \ddot{f}$ les dérivées première et seconde de f par rapport au temps.
- $\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport au temps.
- ∇f le gradient de f .
- $Div f$ la divergence de f .
- c une constante générique strictement positive.
- $p.p.$ presque partout.
- $s.c.i$ semi-continu inférieurement.

Première partie

**Introduction aux inéquations
variationnelles**

Chapitre 1

Préliminaires sur l'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous présentons quelques préliminaires de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés partout dans cette thèse. Il nous est paru utile de donner quelques rappels sur les espaces normés, les espaces fonctionnels, le théorème de point fixe de Banach et un résultat de point fixe qui s'adapte aux inéquations variationnelles avec des opérateurs à mémoire. Finalement, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert.

Sommaire

1.1	Espaces normés	13
1.2	Espaces fonctionnels	14
1.2.1	Espaces des fonctions continues et continûments différentiables	14
1.2.2	Espaces de Lebesgue L^p	15
1.2.3	Espaces de Sobolev	15
1.2.4	Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	16
1.3	Théorèmes de point fixe	18
1.4	Éléments d'analyse non linéaire	21
1.4.1	Opérateurs linéaires	21
1.4.2	Opérateurs non linéaires	22
1.4.3	Fonctions convexes et semi-continues inférieurement	23
1.4.4	Différentiabilité et sous différentiabilité	24

1.1 Espaces normés

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1. Une application $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *norme* si, et seulement si :

1. $|u|_X \geq 0 \ \forall u \in X$ et $|\cdot|_X = 0 \Rightarrow u = 0_X$. (Positivité et séparation)
2. $|\alpha u|_X = |\alpha| |u|_X \ \forall u \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. (Homogénéité)
3. $|u + v|_X \leq |u|_X + |v|_X \ \forall u, v \in X$. (Inégalité triangulaire)

Définition 1.1.2. On appelle *espace vectoriel normé* un espace X muni d'une norme $|\cdot|_X$.

Passons maintenant à la notion d'espace vectoriel normé complet.

Définition 1.1.3. Un espace normé E est dit *complet* si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E . Un *espace de Banach* est un espace normé complet.

Nous présentons dans ce qui suit un type particulier d'espace normé, dans lequel la norme est définie d'une manière spéciale.

Définition 1.1.4. Soit X un espace vectoriel réel, on appelle *produit scalaire* sur X toute forme bilinéaire symétrique définie positive autrement dit, toute application $(\cdot, \cdot)_X$ de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $(u, u)_X \geq 0$ et si $(u, u)_X = 0$ alors $u = 0_X \ \forall u \in X$.
2. $(u, v)_X = (v, u)_X \ \forall u, v \in X$.
3. $(\alpha u + \beta v, w)_X \leq \alpha(u, w)_X + \beta(v, w)_X \ \forall u, v, w \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1.5. On appelle *espace préhilbertien réel* un espace vectoriel X muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$.

Il est bien connu qu'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ permet de définir une norme par la relation

$$|u|_X = \sqrt{(u, u)_X} \quad \forall u \in X.$$

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)_X| \leq |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

De plus, l'égalité du parallélogramme est satisfaite

$$|u + v|_X^2 + |u - v|_X^2 = 2(|u|_X^2 + |v|_X^2) \quad \forall u, v \in X.$$

Parmi les espaces de produits scalaire, il y a une importance particulière pour les espaces de Hilbert.

Définition 1.1.6. Un *espace de Hilbert* est un espace préhilbertien complet pour la norme associé à son produit scalaire.

Théorème 1.1 (Représentation de Riesz). Soit H un espace de Hilbert et soit $f \in H'$. Alors il existe un et un seul élément $T_f \in H$ tel que

$$\langle f, g \rangle = (T_f, g)_H \quad \forall g \in H.$$

De plus on a

$$|f|_{X'} = |T_f|_X.$$

1.2 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons aborder les espaces des fonctions continues, continûment différentiables, les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. Pour plus de détail, voire par exemple [10, 15].

Étant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Soit $x = (x_1, \dots, x_d)$ un élément de $\mathbb{R}^d$ et soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, nous posons

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

1.2.1 Espaces des fonctions continues et continûment différentiables

On note par $C(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. $C(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach dont la norme est la suivante :

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)| : x \in \Omega\} = \max\{|v(x)| : x \in \overline{\Omega}\}.$$

Pour $m \geq 0$, l'espace $C^m(\overline{\Omega})$ défini par

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}.$$

Il est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\overline{\Omega}$.

L'espace $C^m(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach dont la norme est donnée par

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

1.2 Espaces fonctionnels

Par ailleurs, $C^\infty(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \in C^m(\overline{\Omega}) \quad \forall m = 0, 1, \dots\}.$$

Soit v une fonction dans Ω , le support de v est défini par

$$\text{supp } v = \overline{\{v \in \Omega : v(x) \neq 0\}}.$$

Si $\text{supp } v$ est un sous-ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

L'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact est donné par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \text{supp } v \subset \Omega\}.$$

1.2.2 Espaces de Lebesgue L^p

Pour $p \in [1, \infty[$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ Lebesgue mesurable et } |v|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach, dont la norme est donné par

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors

$$|v|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf\{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

1.2.3 Espaces de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev. On renvoie le lecteur aux ouvrages [1, 10, 14] pour plus de détails.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. Nous définissons les espaces de Sobolev par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ avec } |\alpha| \leq k\}.$$

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est définie par

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Pour $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ sera noté par $H^k(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

1.2.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

On aura besoin des espaces de fonctions à valeurs vectorielles dans l'étude des problèmes variationnels dépendant du temps. Soit $(X, |\cdot|_X)$ un espace de Banach. Dans les problèmes de contact étudiés dans cette thèse $[0, T]$ désigne l'intervalle de temps où $T > 0$.

Espaces $C^m(0, T; X)$. Nous définissons $C(0, T; X)$ l'espace des fonctions $v : [0, T] \rightarrow X$ qui sont continues sur l'intervalle $[0, T]$. Avec la norme

$$|v|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} |v(t)|_X.$$

L'espace $C(0, T; X)$ est un espace de Banach.

Pour $m \geq 0$, nous définissons l'espace

$$C^m(0, T; X) = \{v \in C(0, T; X) : v^{(j)} \in C(0, T; X), j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Il est un espace de Banach avec la norme

$$|v|_{C^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m \max_{t \in [0,T]} |v^{(j)}|_X.$$

En particulier, $C^1([0, T]; X)$ désigne l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X . C'est un espace de Banach avec la norme

$$|v|_{C^1(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} |v(t)|_X + \max_{t \in [0,T]} |\dot{v}(t)|_X.$$

1.2 Espaces fonctionnels

Soit aussi

$$\begin{aligned} C^\infty(0, T; X) &= \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(0, T; X) \\ &\equiv \{v \in C(0, T; X) : v \in C^m(0, T; X), \forall m \in \mathbb{Z}_+\}, \end{aligned}$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X .

Espaces $L^p(0, T; X)$. Pour $p \in [1, \infty)$, l'espace $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $v : [0, T] \rightarrow X$ telle que $\int_0^T |v|_X^p dt < \infty$. L'espace $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach avec la norme

$$|v|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T |v(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^\infty(0, T; X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $v : [0, T] \rightarrow X$ telle que $|v(t)|_X < \infty$. Avec la norme

$$|v|_{L^\infty(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} |v(t)|_X,$$

l'espace $L^\infty(0, T; X)$ est un espace de Banach.

Lorsque $(X, (\cdot, \cdot))$ est un espace de Hilbert, $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Espaces $W^{k,p}(0, T; X)$. Pour $k \in \mathbb{Z}_+$ et $1 \leq p \leq \infty$, nous présentons l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{v \in L^p(0, T; X) : |v^{(m)}|_{L^p(0, T; X)} < \infty, \forall m \leq k\}.$$

Lorsque $p < \infty$, nous définissons la norme dans l'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ par

$$|v|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \left(\int_0^T \sum_{0 \leq m \leq k} |v^{(m)}(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque $p = \infty$, la norme est définie par

$$|v|_{W^{k,\infty}(0, T; X)} = \max_{0 \leq m \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} |v^{(m)}(t)|_X.$$

Si X est un espace de Hilbert et $p = 2$, alors l'espace

$$H^k(0, T; X) \equiv W^{k,2}(0, T; X),$$

est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(0, T; X)} = \sum_{0 \leq m \leq k} \int_0^T (u^{(m)}(t), v^{(m)}(t))_X dt.$$

1.3 Théorèmes de point fixe

Le théorème de point fixe de Banach sera utilisé plusieurs fois dans cette thèse pour prouver l'existence des solutions aux problèmes variationnels en mécanique du contact.

Soit X un espace de Banach avec la norme $|\cdot|_X$ et K est un sous-ensemble non vide fermé de X . Soit $\Lambda : K \rightarrow X$ est un opérateur défini sur K . Nous sommes intéressés par l'existence d'une solution $u \in K$ de l'équation d'opérateur

$$\Lambda u = u. \tag{1.1}$$

Un élément $u \in K$ qui satisfait (1.1) est appelé un *point fixe* de l'opérateur Λ .

Nous présentons dans ce qui suit le théorème principal qui énonce l'existence des points fixes des opérateurs non linéaires.

Corollaire 1.2 (Point fixe de Banach). *Soit $(X, |\cdot|_X)$ un espace de Banach. Soit K un sous-ensemble non vide fermé de X . Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est-à-dire il existe une constant $\alpha \in [0, 1)$ telle que*

$$|\Lambda u - \Lambda v|_X \leq \alpha |u - v|_X \quad \forall u, v \in K. \tag{1.2}$$

Alors il existe unique $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$.

Démonstration. Soit $u_0 \in K$ un élément quelconque de K et soit $\{u_n\}$ la suite définie par

$$u_{n+1} = \Lambda u_n \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Car $\Lambda : K \rightarrow K$, la suite $\{u_n\}$ est bien définie. Montrons d'abord que $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy. En utilisant le fait que Λ est une contraction, nous avons

$$|u_{n+1} - u_n|_X \leq \alpha |u_n - u_{n-1}|_X \leq \dots \leq \alpha^n |u_1 - u_0|_X.$$

1.3 Théorèmes de point fixe

Alors pour tout $m > n \geq 1$,

$$\begin{aligned} |u_m - u_n|_X &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} |u_{n+j+1} - u_{n+j}|_X \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \alpha^{n+j} |u_1 - u_0|_X \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |u_1 - u_0|_X. \end{aligned}$$

Comme $\alpha \in [0, 1)$, on résulte que

$$|u_m - u_n|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad m, n \rightarrow \infty$$

Ainsi, $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy et a une limite $u \in K$, puisque K est un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach X . De plus, puisque $u_n \rightarrow u$ dans K , il résulte de (1.2) que $\Lambda u_n \rightarrow \Lambda u$ dans X . Par conséquent, en prenant la limite dans $u_{n+1} = \Lambda u_n$ on obtient $u = \Lambda u$, ce qui conclut la partie d'existence du théorème.

Supposons que $u_1, u_2 \in K$ sont des points fixes de Λ . Alors de $u_1 = \Lambda u_1$ et $u_2 = \Lambda u_2$ nous avons

$$u_1 - u_2 = \Lambda u_1 - \Lambda u_2,$$

et comme Λ est une contractante

$$|u_1 - u_2|_X = |\Lambda u_1 - \Lambda u_2|_X \leq \alpha |u_1 - u_2|_X,$$

ce qui implique que $|u_1 - u_2|_X = 0$, car $\alpha \in [0, 1)$. Donc, si Λ admet un point fixe, il en résulte que ce point fixe est unique, ce qui conclut la preuve. $\square$

Nous avons besoin d'une version du théorème de point fixe de Banach que nous rappelons dans ce qui suit. Pour un opérateur Λ , nous définissons $\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1})$ pour $m \geq 2$.

Corollaire 1.3. *Supposons que K est un sous-ensemble non vide fermé d'un espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour un entier positif m . Alors Λ admet un point fixe unique.*

Démonstration. D'après Théorème 1.2, Λ^m a un point fixe unique $u \in K$. De $\Lambda^m(u) = u$, on obtient

$$\Lambda^m(\Lambda u) = \Lambda(\Lambda^m u) = \Lambda u.$$

Ainsi $\Lambda u \in K$ est aussi un point fixe de Λ^m , où Λ^m admet un point fixe unique nous avons

$$\Lambda u = u,$$

1. Préliminaires sur l'analyse fonctionnelle

c'est-à-dire u est un point fixe de Λ . L'unicité du point fixe de Λ est une conséquence de l'unicité du point fixe de Λ^m . $\square$

Nous présentons maintenant un résultat de point fixe qui est utile pour la résolution des inéquations variationnelles avec des opérateurs à mémoire.

Proposition 1.4. *Soit $\Lambda : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; X)$ un opérateur satisfait la propriété suivante : il existe $k \in [0, 1)$ et $c \geq 0$ tels que*

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X \leq k|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X + c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds$$

$$\forall \eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X), \quad t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

Alors il existe un élément unique $\eta^* \in C(0, T; X)$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$.

Démonstration. On note par

$$|\eta|_\beta = \max_{t \in [0, T]} e^{-\beta t} |\eta(t)|_X \quad \forall \eta \in C(0, T; X), \quad (1.4)$$

avec $\beta > 0$ d'être choisi plus tard. Il est clair que $|\cdot|_\beta$ définit une norme sur l'espace $C(0, T; X)$ qui est équivalente à la norme usuelle $|\cdot|_{C(0, T; X)}$. Par conséquence, il en résulte que $C(0, T; X)$ est un espace de Banach avec la norme $|\cdot|_\beta$ aussi. Soit $t \in [0, T]$, en utilisant (1.3) et (1.4), il en résulte que

$$\begin{aligned} e^{-\beta t} |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X &\leq k e^{-\beta t} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X + c e^{-\beta t} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds \\ &= k e^{-\beta t} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X + c e^{-\beta t} \int_0^t (e^{-\beta s} |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X) e^{\beta s} ds \\ &\leq k |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta + c e^{-\beta t} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta \int_0^t e^{\beta s} ds \\ &= k |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta + \frac{c}{\beta} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta (1 - e^{-\beta t}), \end{aligned}$$

pour tout $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X)$. Donc

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_\beta \leq (k + \frac{c}{\beta}) |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_\beta \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X).$$

1.4 Éléments d'analyse non linéaire

Ensuite, nous choisissons β tel que $\beta > \frac{c}{1-k}$, ce choix est possible car $k \in [0, 1)$. Alors $k + \frac{c}{\beta} < 1$ et par conséquent, l'opérateur Λ est une contraction sur l'espace $C(0, T; X)$ muni de la norme $|\cdot|_\beta$. D'après Théorème 1.2, l'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in C(0, T; X)$, ce qui conclut la preuve. $\square$

1.4 Éléments d'analyse non linéaire

Dans cette section nous allons rappeler quelques notions d'analyse non linéaire qui seront d'une grande utilité pour la réalisation de ce travail. En particulier des résultats sur les opérateurs monotones, les fonctions convexes et semi-continues inférieurement, la différentiabilité et sous différentiabilité.

1.4.1 Opérateurs linéaires

Soient $(X, |\cdot|_X)$ et $(Y, |\cdot|_Y)$ deux espaces normés et soit $L : X \rightarrow Y$ un opérateur.

Un opérateur $L : X \rightarrow Y$ est *linéaire* si

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Un opérateur linéaire est *continu* si et seulement s'il est borné, c'est-à-dire il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|L(v)|_Y \leq M|v|_X \quad \forall v \in X.$$

Nous utiliserons la notation $\mathcal{L}(X, Y)$ pour l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de X dans Y . Pour $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, la quantité

$$|L|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|Lv|_Y}{|v|_X} \quad (1.5)$$

est appelée l'*opérateur norme* de L et $L \rightarrow |L|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ définit une norme sur l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$. De plus, Si Y est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est aussi un espace de Banach. Pour un opérateur linéaire L , nous écrivons habituellement $L(v)$ comme Lv , mais parfois, nous écrivons aussi Lv même lorsque L n'est pas linéaire.

Pour un espace normé X , l'espace $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ est appelé l'*espace dual* de X et il est désigné par X' . Les éléments de X' sont des fonctionnelles continues et linéaires sur X . Le produit de dualité entre X' et X est généralement désigné par $l(v)$ ou $\langle v', v \rangle$ ou

$\langle v', v \rangle_{X' \times X}$ pour $v' \in X'$ et $v \in X$. Il résulte de (1.5) qu'une norme sur X' est donnée par

$$|l|_{X'} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|l(v)|}{|v|_X}, \quad (1.6)$$

et $(X', |\cdot|_X)$ est toujours un espace de Banach.

1.4.2 Opérateurs non linéaires

Définition 1.4.1. Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme $|\cdot|_X$ et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur.

– L'opérateur A est dit *monotone* si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

– L'opérateur A est *strictement monotone* si

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X, \quad u \neq v.$$

– L'opérateur A est dit *fortement monotone* s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m|u - v|^2 \quad \forall u, v \in X.$$

– L'opérateur A est de *Lipschitz* s'il existe $M > 0$ tel que

$$|Au - Av|_X \leq M|u - v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Dans l'étude des équations d'évolution non linéaires, nous considérons les opérateurs définis sur un espace normé avec des valeurs dans son dual. En notant par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour le produit de dualité entre X' et X , une extension de la Définition 1.4.1 pour ce cas est la suivante.

Définition 1.4.2. Soit X un espace normé et soit X' son dual. Un opérateur $A : X \rightarrow X'$ est dit *monotone* si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.7)$$

L'opérateur $A : X \rightarrow X'$ est dit *hémicontinu* si l'application $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$ est continu sur $[0, 1]$ pour tout $u, v, w \in X$.

Soit maintenant $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

Définition 1.4.3. La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est dite

1.4 Éléments d'analyse non linéaire

- continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$a(u, v) \leq M|u|_X|v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

- X -elliptique s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq m|v|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

- symétrique si

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

1.4.3 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement

Définition 1.4.4. Soit X un espace vectoriel réel et soit la fonction $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$. On dit que la fonction φ est *propre* si $\varphi(v) > -\infty$ pour tout $v \in X$ et $\varphi(u) < \infty$ pour certains $u \in X$. La fonction φ est *convexe* si

$$\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v), \quad (1.8)$$

pour tout $u, v \in X$ et $t \in [0, 1]$. La fonction φ est *strictement convexe* si l'inégalité (1.8) est stricte pour $u \neq v$ et $t \in (0, 1)$.

Notons que si $\varphi, \psi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ sont des fonctions convexes et $\lambda \geq 0$, alors les fonctions $\varphi + \psi$ et $\lambda\varphi$ sont aussi convexes.

Définition 1.4.5. Une fonction $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) en $u \in X$ si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) \geq \varphi(u), \quad (1.9)$$

pour chaque suite $\{u_n\} \subset X$ convergente vers u dans X . La fonction φ est *s.c.i* si elle est s.c.i. en chaque point $u \in X$. Lorsque l'inégalité (1.9) est vérifiée pour toute suite $\{u_n\} \subset X$ qui converge faiblement vers u , on dit que la fonction φ est faiblement semi-continue inférieurement à u . La fonction φ est faiblement s.c.i. si elle est faiblement s.c.i. en chaque point $u \in X$.

Notons que si $\varphi, \psi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ sont des fonctions s.c.i. et $\lambda \geq 0$, alors les fonctions $\varphi + \psi$ et $\lambda\varphi$ sont aussi s.c.i. De plus, si φ est une fonction continue, alors elle est aussi s.c.i. Cependant, l'inverse n'est pas vrai puisque la semi-continuité inférieure n'implique pas la continuité.

Comme la convergence forte dans X implique la convergence faible, il en résulte qu'une fonction faiblement semi-continue inférieurement est semi-continue inférieurement. De plus, on peut montrer qu'une fonction $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ propre et

convexe est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est faiblement semi-continue inférieurement.

Exemple 1.1. (Fonction indicatrice) Soient X un espace réel normé et $K \subset X$. On appelle fonction indicatrice de K la fonction $\psi_K : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ définie par :

$$\psi_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K, \\ +\infty & \text{si } v \notin K. \end{cases} \quad (1.10)$$

On peut démontrer que K est un ensemble non vide, fermé et convexe de X si et seulement si la fonction indicatrice ψ_K est propre, convexe et s.c.i.

1.4.4 Différentiabilité et sous différentiabilité

Nous rappelons maintenant la définition des fonctions Gâteaux-différentiables.

Définition 1.4.6. Soient $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace préhilbertien, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in X$. Alors φ est Gâteaux-différentiable au point u s'il existe un élément $\nabla \varphi(u) \in X$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla \varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X. \quad (1.11)$$

L'élément $\nabla \varphi(u)$ qui satisfait (1.11) est unique et s'appelle le *gradient* de φ en u . La fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *Gâteaux-différentiable* si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de X . Dans ce cas, l'opérateur $\nabla \varphi : X \rightarrow X$ qui associe chaque élément $u \in X$ par l'élément $\nabla \varphi(u)$ est appelé l'*opérateur gradient* de φ .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée comme suit.

Proposition 1.5. Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace préhilbertien et soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) φ est une fonction convexe ;
- (ii) φ satisfait l'inégalité

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla \varphi(u), v - u)_X \quad \forall u, v \in X; \quad (1.12)$$

- (iii) le gradient de φ est un opérateur monotone

$$(\nabla \varphi(u) - \nabla \varphi(v), u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.13)$$

Corollaire 1.6. Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace préhilbertien et soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est semi-continue inférieurement.

1.4 Éléments d'analyse non linéaire

Définition 1.4.7. Soit $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ et soit $u \in X$. Le sous-différentiel de φ en u est l'ensemble

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X : \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X\}. \quad (1.14)$$

On note

$$D(\partial\varphi) = \{u \in X : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}. \quad (1.15)$$

La Fonction φ est dite sous-différentiable en $u \in X$ si $u \in D(\partial\varphi)$, et chaque élément $f \in \partial\varphi(u)$ s'appelle sous-gradient de φ en u . La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de X , c'est-à-dire si $D(\partial\varphi) = X$.

On peut montrer qu'une fonction $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ sous-différentiable est convexe et semi-continue inférieurement. En outre, pour les fonctions convexes, le lien entre l'opérateur gradient et sous-différentiel est donné par le résultat suivant.

Proposition 1.7. Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et Gâteau différentiable. Alors φ est sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in X$.

Exemple 1.2. (Sous-différentiel de la fonction indicatrice) Soit X un espace normé réel et soit $K \subset X$ un ensemble convexe. Considérons le sous-différentiel de la fonction d'indicateur ψ_K définie dans l'exemple 1.1, et on suppose que $u \in K$. Alors $u' \in \partial\psi_K$ si et seulement si

$$\psi_K(u) \geq \langle u', v - u \rangle \quad \forall v \in K,$$

c'est-à-dire

$$\langle u', v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

Ainsi, pour $u \in K$ nous avons

$$\partial\psi_K(u) = \{u' \in X' : \langle u', v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K\},$$

et pour $u \notin K$, nous avons $\partial\psi_K(u) = \emptyset$.

Nous avons toujours $0 \in \partial\psi_K(u)$ pour $u \in K$. On voit facilement que si $u \in \text{int}(K)$ (l'intérieur de K) alors $\partial\psi_K(u) = \{0\}$.

Chapitre 2

Inéquations variationnelles et équations d'évolution

Dans ce chapitre, nous passons en revue quelques résultats standards d'existence et d'unicité pour des inéquations variationnelles elliptiques et paraboliques, des équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits et les inéquations quasi-variationnelles dans le cadre des opérateurs à mémoire. Ces résultats seront nécessaires dans ce qui suit et pour plus de détail [60,62]. Dans ce chapitre, X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et la norme associée $|\cdot|_X$.

Sommaire

2.1	Inéquations variationnelles elliptiques	26
2.1.1	Inéquations variationnelles de première espèce	27
2.1.2	Inéquations variationnelles de deuxième espèce	27
2.1.3	Inéquations quasi-variationnelles	28
2.2	Inéquations variationnelles paraboliques	29
2.3	Équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits . . .	29
2.4	Inéquations quasi-variationnelles avec des opérateurs à mémoire . .	30
2.4.1	Opérateurs à mémoire	30
2.4.2	Résultat d'existence et d'unicité	31
2.5	Quelques inégalités élémentaires	35

2.1 Inéquations variationnelles elliptiques

Dans cette section nous présentons des résultats d'existence et d'unicité des solutions concernant les inéquations variationnelles elliptiques avec des opérateurs mo-

2.1 Inéquations variationnelles elliptiques

notones. Nous commençons par un résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques de première espèce, puis nous passons aux équations variationnelles elliptiques de deuxième espèce, ainsi que les inéquations quasi-variationnelles elliptiques.

2.1.1 Inéquations variationnelles de première espèce

Étant donné un opérateur $A : X \rightarrow X$, un sous-ensemble $K \subset X$ et un élément $f \in X$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (2.1)$$

Une inéquation de la forme (2.1) s'appelle *inéquation variationnelle elliptique de première espèce*.

Nous avons le résultat standard suivant d'existence et d'unicité de la solution.

Théorème 2.1. *Soit X un espace de Hilbert et soit $K \subset X$ un sous-ensemble fermé non vide et convexe. Supposons que $A : K \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors, pour tout $f \in X$ l'inéquation variationnelle (2.1) admet une solution unique.*

Supposons maintenant que $K = X$. Puis, en prenant $v = u \pm w$, il est facile de voir que l'inéquation variationnelle (2.1) est équivalente à l'équation variationnelle

$$(Au, w)_X = (f, w)_X \quad \forall w \in X.$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant dans l'étude des équations non linéaires impliquant des opérateurs monotones.

Théorème 2.2. *Soit X un espace de Hilbert et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tel que $Au = f$.*

2.1.2 Inéquations variationnelles de deuxième espèce

Étant donné un ensemble $K \subset X$, un opérateur $A : K \rightarrow X$, une fonction $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ et un élément $f \in X$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (2.2)$$

Une inéquation variationnelle de la forme (2.2) est appelée *inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce*. Dans le cas particulier lorsque $j \equiv 0$, l'inéquation variationnelle (2.2) représente une inéquation variationnelle de la forme (2.1), c'est-à-dire

2. Inéquations variationnelles et équations d'évolution

une inéquation variationnelle elliptique de première espèce.

Dans l'étude de (2.2) nous supposons les hypothèses suivantes :

$$K \text{ est un sous-ensemble convexe non vide de } X, \quad (2.3)$$

$A : K \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Il existe une constante } m > 0 \text{ telle que} \\ \quad (Au - Av, u - v)_X \geq m|u - v|^2 \quad \forall u, v \in X. \\ \text{b) Il existe une constante } M > 0 \text{ telle que} \\ \quad |Au - Av|_X \leq M|u - v|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$j : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction convexe et semi-continue inférieurement.} \quad (2.5)$$

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant.

Théorème 2.3. *Soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.3)-(2.5) sont vérifiées. Alors pour tout $f \in X$ l'inéquation variationnelle elliptique (2.2) admet une solution unique.*

2.1.3 Inéquations quasi-variationnelles

Pour les inéquations variationnelles étudiées dans cette sous-section nous considérons que la fonction j dépend de la solution elle même. Par conséquent, étant donné un sous-ensemble $K \subset X$, un opérateur $A : K \rightarrow X$, une fonction $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ et un élément $f \in X$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (2.6)$$

Une inéquation de la forme (2.6) est appelée *inéquation quasi-variationnelle elliptique*.

Dans l'étude de (2.6), en plus de (2.3) et de (2.4), nous considérons l'hypothèse suivante sur la fonction j .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Pour tout } \eta \in K, \quad j(\eta, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et s.c.i.} \\ \text{b) Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ \quad j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \leq \alpha|\eta_1 - \eta_2|_X|v_1 - v_2|_X \\ \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in K. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (2.6).

Théorème 2.4. *Soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.7) sont satisfaites. De plus, supposons que $m > \alpha$ où $m > 0$. Alors, pour tout $f \in X$ l'inéquation quasi-variationnelle (2.6) admet une solution unique.*

2.2 Inéquations variationnelles paraboliques

Soient V et H des espaces de Hilbert réels tels que V est dense dans H et l'injection de V dans H est continue, H est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual V' de V , c'est-à-dire

$$V \subset H \subset V',$$

cette inclusion définit un triplet de Gelfand. Les notations $|\cdot|_V$, $|\cdot|_{V'}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V \times V'}$ représentent les normes sur les espaces V et V' et la dualité entre V' et V , respectivement.

Un résultat standard pour les inéquations variationnelles paraboliques est donné par le théorème suivant, pour plus de détails sur le sujet voir par exemple [60].

Théorème 2.5. *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit K un ensemble non vide, fermé et convexe de V . Supposons que $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et symétrique telle que pour certaines constantes $a > 0$ et c_0 ,*

$$a(v, v) + c_0|v|_H^2 \geq a|v|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe une fonction unique $u \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ telle que

$$u(t) \in K \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K, \quad p.p. t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0.$$

Ce théorème sera utilisé au chapitre 8 dans l'étude du problème de contact avec endommagement.

2.3 Équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits

Le résultat abstrait suivant peut être trouvée dans [6] et sera utilisé dans l'étude des problèmes dynamiques présentés dans les chapitres 4 et 6.

Théorème 2.6. *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand et soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait*

$$(Au, u)_{V' \times V} \geq \omega|u|_V^2 + \lambda \quad \forall u \in V, \tag{2.8}$$

$$|Au|_{V'} \leq c(|u|_V + 1) \quad \forall u \in V, \tag{2.9}$$

2. Inéquations variationnelles et équations d'évolution

où les constantes $\omega > 0$, $c > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une fonction unique u qui satisfait

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'), \\ \dot{u}(t) + Au(t) &= f(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Nous rappelons aussi le théorème classique de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 2.7. *Supposons que $(X, |\cdot|_X)$ est un espace de Banach réel. Soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$ qui satisfait aux conditions suivantes :*

- *Il existe $L_F > 0$ tel que $|F(t, u) - F(t, v)|_X \leq L_F |u - v|_X \quad \forall u, v \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T)$.*
- *Il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que $t \rightarrow F(t, v) \in L^p(0, T; X) \quad \forall v \in X$.*

Alors, pour tout $u_0 \in X$, il existe une fonction unique $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= F(t, u(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Ce théorème sera utilisé aux chapitres 6 et 7 pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution des problèmes intermédiaires impliquant le champ d'adhésion.

2.4 Inéquations quasi-variationnelles avec des opérateurs à mémoire

Dans cette section, nous introduisons le concept et un résultat d'existence et d'unicité des inéquations quasi-variationnelles avec des opérateurs à mémoire.

2.4.1 Opérateurs à mémoire

Soient $(X, |\cdot|_X)$ et $(Y, |\cdot|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et un opérateur $\mathcal{S} : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; Y)$. L'opérateur $\mathcal{S}$ est un opérateur de mémoire si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } r_s > 0 \text{ tel que} \\ | \mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t) |_Y \leq r_s \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_X ds \\ \forall u_1, u_2 \in C(0, T; X), \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

2.4 Inéquations quasi-variationnelles avec des opérateurs à mémoire

Un exemple d'opérateur $\mathcal{S}$ qui satisfait (2.10) dans le cas où $Y = X$ est donné par $\mathcal{S} : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; X)$ tel que

$$\mathcal{S}v(t) = \int_0^t v(s)ds + u_0, \quad \forall u \in C(0, T; X), \quad \forall t \in [0, T].$$

et $u_0 \in X$

2.4.2 Résultat d'existence et d'unicité

Soit X un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et la norme associée $|\cdot|_X$ et Y un espace normé avec la norme $|\cdot|_Y$. Soit K un sous-ensemble de X , nous considérons les opérateurs $A : K \rightarrow X$, $\mathcal{S} : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; Y)$, les fonctions $\varphi : Y \times K \rightarrow \mathbb{R}$, $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : [0, T] \rightarrow X$. Nous sommes intéressées par le problème de trouver une fonction $u \in C(0, T; X)$ telle que pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} u(t) \in K, \quad (Au(t), v - u(t))_X + \varphi(\mathcal{S}u(t), v) - \varphi(\mathcal{S}u(t), u(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), u(t)) \\ \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (2.11)$$

L'inégalité (2.11) représente une inéquation variationnelle dépendant du temps gouvernée par deux fonctions φ et j qui dépendent de la solution, et par conséquent, (2.11) représente une *inéquation quasi-variationnelle avec des opérateurs à mémoire*.

Dans l'étude de (2.11), nous supposons que

$$K \text{ est un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de } X. \quad (2.12)$$

$A : K \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m|u_1 - u_2|_X^2 \quad \forall u_1, u_2 \in K. \\ (b) \text{ Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \quad |Au_1 - Au_2| \leq M|u_1 - u_2|_X \quad \forall u_1, u_2 \in K. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Les fonctions $\varphi : Y \times K \rightarrow \mathbb{R}$ et $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } y \in Y, \varphi(y, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et s.c.i. sur } K. \\ (b) \text{ Il existe } \beta \geq 0 \text{ tel que} \\ \quad \varphi(y_1, u_2) - \varphi(y_1, u_1) + \varphi(y_2, u_1) - \varphi(y_2, u_2) \leq \beta|y_1 - y_2|_Y|u_1 - u_2|_X \\ \quad \forall y_1, y_2 \in Y, \forall u_1, u_2 \in K. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

2. Inéquations variationnelles et équations d'évolution

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } u \in K, j(u, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et s.c.i. sur } K. \\ (b) \text{ Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ \quad j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \alpha |u_1 - u_2|_X |v_1 - v_2|_X \\ \quad \forall u_1, u_2 \in K, \forall v_1, v_2 \in K. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

De plus, nous supposons que

$$m > \alpha, \quad (2.16)$$

où m et α sont les constantes dans (2.13) et (2.15), respectivement.

L'opérateur $\mathcal{S} : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; Y)$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } r_s > 0 \text{ tel que} \\ | \mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t) |_Y \leq r_s \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_X ds \\ \forall u_1, u_2 \in C(0, T; X), \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Finalement, nous supposons que

$$f \in C(0, T; X). \quad (2.18)$$

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 2.8. *Supposons que les hypothèses (2.12)-(2.18) sont vérifiées. Alors l'inéquation variationnelle (2.11) admet une solution unique $u \in C(0, T; K)$.*

La démonstration du théorème 2.8 est basée sur un argument de point fixe et sera établie en plusieurs étapes. Dans la première étape soit $\eta \in C(0, T; X)$ donné et on note par $y_\eta \in C(0, T; Y)$ la fonction

$$y_\eta(t) = \mathcal{S}\eta(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.19)$$

Considérons maintenant le problème de trouver une fonction $u_\eta : [0, T] \rightarrow X$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ l'inéquation ci-dessous est vérifiée.

$$\begin{aligned} u_\eta(t) \in K, \quad & (Au_\eta(t), v - u_\eta(t))_X + \varphi(y_\eta(t), v) - \varphi(y_\eta(t), u_\eta(t)) \\ & + j(\eta(t), v) - j(\eta(t), u_\eta(t)) \geq (f(t), v - u_\eta(t))_X \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Lemme 2.9. *Le problème (2.20) admet une solution unique $u_\eta \in C(0, T; K)$.*

2.4 Inéquations quasi-variationnelles avec des opérateurs à mémoire

Démonstration. Les hypothèses (2.12), (2.13), (2.14) (a), (2.15) (a) et (2.18) avec le théorème 2.3 nous donne l'existence d'un élément unique $u_\eta(t)$ solution de (2.20), pour tout $t \in [0, T]$. Montrons maintenant que $u_\eta : [0, T] \rightarrow K$ est continue, pour cela on considère $t_1, t_2 \in [0, T]$. Pour simplifier l'écriture, nous notons $u_\eta(t_i) = u_i$, $\eta_i(t_i) = \eta_i$, $y(t_i) = y_i$, $f(t_i) = f_i$ pour $i = 1, 2$. Par (2.20) nous avons

$$\begin{aligned} u_1 \in K, \quad & (Au_1, v - u_1)_X + \varphi(y_1, v) - \varphi(y_1, u_1) \\ & + j(\eta_1, v) - j(\eta_1, u_1) \geq (f_1, v - u_1)_X \quad \forall v \in K, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} u_2 \in K, \quad & (Au_2, v - u_2)_X + \varphi(y_2, v) - \varphi(y_2, u_2) \\ & + j(\eta_2, v) - j(\eta_2, u_2) \geq (f_2, v - u_2)_X \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (2.22)$$

On prend $v = u_2$ dans (2.21) et $v = u_1$ dans (2.22), puis par addition de deux inéquations nous trouvons que

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X &\leq \varphi(y_1, u_2) - \varphi(y_1, u_1) + \varphi(y_2, u_1) - \varphi(y_2, u_2) \\ &+ j(\eta_1, u_2) - j(\eta_1, u_1) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2) + (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_X. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Après, on utilise les hypothèses (2.13)(a), (2.14)(b) et (2.15)(b) pour obtenir

$$m|u_1 - u_2|_X \leq \beta|y_1 - y_2|_Y + \alpha|\eta_1 - \eta_2|_X + |f_1 - f_2|_X. \quad (2.24)$$

On déduit de (2.24) que $t \rightarrow u_\eta(t) : [0, T] \rightarrow K$ est une fonction continue, qui conclut la preuve. $\square$

Dans la deuxième étape, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; K) \subset C(0, T; X)$$

défini par

$$\Lambda\eta = u_\eta \quad \forall \eta \in C(0, T; X). \quad (2.25)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.10. *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in C(0, T; K)$.*

Démonstration. Soient $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X)$ et soit y_i la fonction définie par (2.19) pour $\eta = \eta_i$, c'est-à-dire $y_i = y_{\eta_i}$, pour $i = 1, 2$. On note par u_i la solution de l'inéquation variationnelle (2.20) pour $\eta = \eta_i$ c'est-à-dire $u_i = u_{\eta_i}$, $i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$, de la définition (2.25) nous avons

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X = |u_1(t) - u_2(t)|_X. \quad (2.26)$$

2. Inéquations variationnelles et équations d'évolution

De plus, un argument similaire à celui de la démonstration de (2.24) montre que

$$m|u_1(t) - u_2(t)|_X \leq \beta|y_1(t) - y_2(t)|_Y + \alpha|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X. \quad (2.27)$$

Ensuite, nous utilisons (2.19) et la propriété (2.17) de l'opérateur $\mathcal{S}$ pour voir que

$$|y_1(t) - y_2(t)|_Y = |\mathcal{S}\eta_1(t) - \mathcal{S}\eta_2(t)|_Y \leq L_{\mathcal{S}} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds.$$

L'utilisation de cette inégalité dans (2.27) nous donne

$$|u_1(t) - u_2(t)|_X \leq \frac{\beta L_{\mathcal{S}}}{m} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds + \frac{\alpha}{m} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X. \quad (2.28)$$

Nous combinons maintenant (2.26) et (2.28) pour trouver que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_X \leq \frac{\beta L_{\mathcal{S}}}{m} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_X ds + \frac{\alpha}{m} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_X. \quad (2.29)$$

Finalement, nous utilisons (2.29), l'hypothèse (2.16) et la proposition 1.2 pour voir que l'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in C(0, T; X)$. Car $\Lambda\eta \in C(0, T; K)$, on en déduit que $\eta^* \in C(0, T; K)$, qui conclut la démonstration. $\square$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour démontrer le théorème 2.8.

Démonstration. (du Théorème 2.8)

1) Existence. Soit $\eta^* \in C(0, T; K)$ le point fixe de l'opérateur Λ , c'est-à-dire $\Lambda\eta^* = \eta^*$. Il résulte de (2.19) et (2.25) que pour tout $t \in [0, T]$

$$y_{\eta^*}(t) = \mathcal{S}\eta^*(t), \quad u_{\eta^*}(t) = \eta^*(t). \quad (2.30)$$

Nous écrivons maintenant l'inéquation (2.20) pour $\eta = \eta^*$ et nous utilisons les équations (2.30) pour conclure que la fonction $\eta^* \in C(0, T; K)$ est une solution de l'inéquation quasi-variationnelle (2.11).

2) Unicité. L'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ et on peut prouver comme suit. On note par $\eta^* \in C(0, T; K)$ la solution de l'inéquation quasi-variationnelle (2.11) obtenu ci-dessus. Soit $\eta \in C(0, T; X)$ une autre solution de l'inéquation (2.11). Considérons la fonction $y_{\eta} \in C(0, T; Y)$ définie par (2.19). Alors, il résulte de (2.11) que η est une solution de l'inéquation variationnelle (2.20) et puisque, par Lemme 2.9, cette inéquation admet une solution unique, notée u_{η} , nous concluons que

$$\eta = u_{\eta}.$$

Cette équation montre que $\Lambda\eta = \eta$, où Λ est l'opérateur défini par (2.25). Donc par lemme 2.10 nous obtenons que $\eta = \eta^*$ qui conclut l'unicité de la solution. $\square$

2.5 Quelques inégalités élémentaires

L'inégalité Gronwall suivante sera utilisée fréquemment dans l'analyse des problèmes de contact.

Lemme 2.11 (Inégalité de Gronwall). Soient $f, g \in C([0, T])$ et supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad \forall \in [0, T].$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall \in [0, T].$$

Si g est non décroissante, nous avons que

$$f(t) \leq g(t) e^{ct} \quad \forall \in [0, T].$$

La démonstration de ce lemme peut être trouver dans [30].

Nous avons également besoin du résultat suivant.

Lemme 2.12 (Inégalité de Young). Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{q^b}{q}.$$

Un cas simple (relativement fréquent) de l'inégalité de Young est l'inégalité avec des exposants 2 :

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

qui donne également l'inégalité de Young avec ε (valide pour tout $\varepsilon > 0$) :

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}.$$

Deuxième partie

Modélisation et analyse des problèmes de contact

Chapitre 3

Modélisation des problèmes de contact

Dans ce chapitre, nous présentons les notations et les préliminaires qui sont nécessaires à l'étude des problèmes aux limites présentés dans les chapitres 4-8. Nous commençons par introduire les espaces fonctionnels qui seront utiles pour l'étude des problèmes de contact. Ensuite, nous fournissons une description générale de la modélisation mathématique des processus impliqués dans le contact entre un corps élasto-viscoplastique ou thermo-viscoélastique ou piézoélectrique et une fondation. Il s'agit d'introduire le cadre physique et de rappeler quelques notions de la mécanique des milieux continus, en particulier l'équation du mouvement et d'équilibre, les lois constitutives pour les matériaux considérés, ainsi que les conditions aux limites de contact avec ou sans frottement.

Dans ce qui suit, on suppose que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une frontière Γ de Lipschitz partitionnée en trois parties Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $mes(\Gamma_1) > 0$. Nous utilisons des lettres gras pour les vecteurs et les tenseurs. La normale unitaire sortante à Γ est notée par ν .

Sommaire

3.1	Espaces fonctionnels en mécanique du contact	38
3.1.1	Préliminaires	38
3.1.2	Des espaces liés au champ des déplacements	39
3.1.3	Des espaces liés au champ des contraintes	41
3.1.4	Des espaces liés aux problèmes piézoélectriques	41
3.1.5	Des espaces liés au champ des températures	42
3.1.6	Des espaces liés à la densité des débris d'usure	43
3.2	Modélisation des problèmes élasto-viscoplastiques et thermo-viscoélastiques	44
3.2.1	Cadre physique	44
3.2.2	L'équation de mouvement	45
3.2.3	Lois de comportement	45

3.2.4	Conditions aux limites	47
3.3	Processus de contact avec adhésion	51
3.4	Processus de contact avec usure	53
3.5	Modélisation des problèmes de contact piézoélectriques	55
3.5.1	Cadre physique	55
3.5.2	Lois de comportement	57
3.5.3	Les conditions de contact	58

3.1 Espaces fonctionnels en mécanique du contact

Afin d'introduire les modèles mathématiques qui décrivent différents processus de contact, nous devons décrire les espaces fonctionnels auxquels appartiennent les données et les inconnus. L'objectif de cette section est de présenter ces espaces avec leurs propriétés.

3.1.1 Préliminaires

Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$). Le produit scalaire et la norme associée sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, \quad |\mathbf{v}| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad |\boldsymbol{\tau}| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{1/2} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Soient X et Y deux espaces de Hilbert munis des produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et $(\cdot, \cdot)_Y$ et les normes associées $|\cdot|_X$ et $|\cdot|_Y$, respectivement. On note par X^d et $X_s^{d \times d}$ les espaces

$$X^d = \{\mathbf{x} = (x_i) : x_i \in X, \quad 1 \leq i \leq d\},$$

$$X_s^{d \times d} = \{\mathbf{x} = (x_{ij}) : x_{ij} = x_{ji} \in X, \quad 1 \leq i, j \leq d\},$$

et aussi, on note par $X \times Y$ l'espace produit

$$X \times Y = \{\mathbf{z} = (x, y) : x \in X, \quad y \in Y\},$$

avec le produit scalaire

$$(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)_{X \times Y} = (x_1, x_2)_X + (y_1, y_2)_Y \quad \mathbf{z}_k = (x_k, y_k) \in X \times Y,$$

3.1 Espaces fonctionnels en mécanique du contact

pour $k = 1, 2$ et la norme associée est $|\cdot|_{X \times Y}$.

Ici et tout au long de cette thèse, $1 \leq i, j \leq d$. Nous allons utiliser les espaces

$$H = L^2(\Omega)^d = \left\{ \mathbf{u} = (u_i) : u_i \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq d \right\}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{Q} = L^2(\Omega)^{d \times d}_s = \left\{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq d \right\}. \quad (3.2)$$

Ce sont des espaces de Hilbert munis de produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} &= \int_{\Omega} u_i v_i dx = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{Q}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} dx, \end{aligned}$$

et les normes associées sont notées par $|\cdot|_{L^2(\Omega)^d}$ et $|\cdot|_{\mathcal{Q}}$, respectivement.

Nous avons besoin des espaces fonctionnels spécifiques pour le champ des déplacements et le champ des contraintes.

3.1.2 Des espaces liés au champ des déplacements

Dans les problèmes de contact présentés dans cette thèse, les déplacements sont recherchés dans l'espace

$$H^1(\Omega)^d = \left\{ \mathbf{v} = (v_i) : v_i \in H^1(\Omega), \quad 1 \leq i \leq d \right\},$$

ou dans ses sous-espaces ou sous-ensembles, selon les conditions aux limites données. L'espace $H^1(\Omega)^d$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega)^d} = \int_{\Omega} (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j}) dx.$$

La norme associée est

$$|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)^d} = \left(\int_{\Omega} (v_i v_i + v_{i,j} v_{i,j}) dx \right)^{1/2}.$$

Soit $\boldsymbol{\varepsilon} : H^1(\Omega)^d \rightarrow \mathcal{Q}$ l'opérateur de déformation défini par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

3. Modélisation des problèmes de contact

Le tenseur ε s'appelle le *tenseur des déformations linéarisé*.

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{H^1(\Omega)^d} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \quad (3.3)$$

la norme associée est définie par

$$|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)^d}^2 = |\mathbf{v}|_{L^2(\Omega)^d}^2 + |\varepsilon(\mathbf{v})|_{\mathcal{Q}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d. \quad (3.4)$$

Par le théorème de trace sur les espaces de Sobolev, nous pouvons définir la trace $\gamma \mathbf{v}$ d'une fonction $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ sur Γ , telle que $\gamma \mathbf{v} = \mathbf{v}|_{\Gamma}$ si $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \cap C(\bar{\Omega})^d$. Pour un élément $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ nous utilisons la notation $\mathbf{v}$ pour désigner la trace $\gamma \mathbf{v}$ de $\mathbf{v}$ sur Γ . L'opérateur de trace $\gamma : H^1(\Omega)^d \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est un opérateur linéaire et continu, c'est-à-dire il existe une constante positive c ne dépendant que de Ω telle que

$$|\mathbf{v}|_{L^2(\Gamma)^d} \leq c |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d. \quad (3.5)$$

Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle de $\mathbf{v}$ sur la frontière données par

$$v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad v_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (3.6)$$

Dans l'étude des problèmes de contact, nous introduisons un sous-espace V de $H^1(\Omega)^d$ donné par

$$V = \left\{ \mathbf{v} = (v_i) \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_1 \right\}. \quad (3.7)$$

Ici, la condition " $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ p.p. sur Γ_1 " au sens de trace, c'est-à-dire $\gamma \mathbf{v} = \mathbf{0}$ p.p. sur Γ_1 . Comme l'opérateur de trace est un opérateur linéaire et continu alors V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)^d$. De plus, puisque $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est vérifiée sur V , c'est-à-dire il existe une constante $c_k > 0$ ne dépendant que de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon(\mathbf{v})|_{\mathcal{Q}} \geq c_k |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.8)$$

Nous définissons le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ sur V par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}}, \quad (3.9)$$

et la norme associée est

$$|\mathbf{u}|_V = |\varepsilon(\mathbf{u})|_{\mathcal{Q}}. \quad (3.10)$$

Il résulte de (3.4), (3.8) et (3.10) que $|\cdot|_V$ et $|\cdot|_{H^1(\Omega)^d}$ sont des normes équivalentes sur V , donc $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert. De plus, l'opérateur de déformation $\varepsilon : V \rightarrow \mathcal{Q}$ est un opérateur linéaire continu. Finalement, on note que par (3.5), (3.8) et (3.10) il existe une constante positive c_0 dépendant de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$|\mathbf{v}|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 |\mathbf{v}|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.11)$$

3.1 Espaces fonctionnels en mécanique du contact

3.1.3 Des espaces liés au champ des contraintes

On utilise la notation $\text{Div}\sigma$ ou $\sigma_{ij,j}$ pour la divergence de σ et on définit l'espace

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \sigma \in \mathcal{Q} : \text{Div}\sigma \in L^2(\Omega)^d \right\}. \quad (3.12)$$

L'espace $\mathcal{Q}_1$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}} + (\text{Div}\sigma, \text{Div}\tau)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{Q}_1,$$

et $|\cdot|_{\mathcal{Q}_1}$ la norme associée.

Nous désignons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle d'un champ des contraintes sur la frontière tels que

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu. \quad (3.13)$$

En outre, la formule suivante de Green est satisfaite

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div}\sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \quad (3.14)$$

3.1.4 Des espaces liés aux problèmes piézoélectriques

Dans l'étude des problèmes de contact en piézoélectricité, outre les espaces présentés ci-dessus, nous avons besoin des espaces spécifiques associés aux variables électriques à savoir le champ potentiel électrique et le champ de déplacement électrique. Pour introduire ces espaces, nous considérons un sous-ensemble mesurable $\Gamma_a \subset \Gamma$ tel que $\text{mes}(\Gamma_a) > 0$.

L'espace du champ potentiel électrique est donné par

$$W = \{ \psi \in H^1(\Omega) : \psi = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_a \} \quad (3.15)$$

Notons que W est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. De plus, comme $\text{mes}(\Gamma_a) > 0$ alors l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite

$$|\nabla \psi|_{L^2(\Omega)^d} \geq c_F |\psi|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \psi \in W. \quad (3.16)$$

Ici, c_F est une constante positive dépendant de Ω et Γ_a et $\nabla : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^d$ est l'opérateur de gradient, e.g. $\nabla \psi = (\psi_{,i})$. Sur W on considère le produit scalaire suivant

$$(\phi, \psi)_W = (\nabla \phi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d}, \quad (3.17)$$

et $|\cdot|_W$ la norme associée. Rappelons que la norme dans l'espace $H^1(\Omega)$ est donnée par

$$|\psi|_{H^1(\Omega)}^2 = |\psi|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla \psi|_{L^2(\Omega)^d}^2. \quad (3.18)$$

Il résulte de (3.16)-(3.18) que $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ et $|\cdot|_W$ sont des normes équivalentes sur W et ainsi $(W, |\cdot|_W)$ est un espace de Hilbert.

Soit un ensemble mesurable $\Gamma_3 \subset \Gamma$, d'après le théorème de trace de Sobolev il existe une constante positive $\tilde{c}_0$ dépendant de Ω, Γ_a et Γ_3 telle que

$$|\psi|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 |\psi|_W \quad \forall \psi \in W. \quad (3.19)$$

Pour le champ de déplacement électrique, nous introduisons l'espace

$$\mathcal{W}_1 = \{\mathbf{D} \in L^2(\Omega)^d : \operatorname{div} \mathbf{D} \in L^2(\Omega)\}. \quad (3.20)$$

C'est un espace de Hilbert muni avec le produit scalaire

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}_1} = (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \operatorname{div} \mathbf{E})_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée $|\cdot|_{\mathcal{W}_1}$. L'opérateur de divergence $\operatorname{div} : \mathcal{W}_1 \rightarrow L^2(\Omega)$ est un opérateur linéaire et continu. De plus, lorsque $\mathbf{D} \in \mathcal{W}_1$ est une fonction régulière, la formule suivante de Green est satisfait

$$(\mathbf{D}, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \psi \, da \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (3.21)$$

3.1.5 Des espaces liés au champ des températures

Soit E un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ donné par

$$E = \left\{ y \in H^1(\Omega) / y = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \right\}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C telle que

$$|\nabla y|_H \geq C |y|_{H^1(\Omega)} \quad \forall y \in E, \quad (3.22)$$

ici, C est une constante positive en fonction des données du problème mais est indépendante des solutions, sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Nous définissons le produit scalaire sur E par

$$(y, z)_E = (\nabla y, \nabla z)_H \quad \forall y, z \in E, \quad (3.23)$$

3.1 Espaces fonctionnels en mécanique du contact

Il résulte de (3.22) et (3.23) que $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ et $|\cdot|_E$ sont des normes équivalentes sur E . Donc $(E, |\cdot|_E)$ est un espace de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $\tilde{C}_\Gamma > 0$ qui dépend uniquement de Ω , Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 telle que

$$|\theta|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{C}_\Gamma |\theta|_E \quad \forall \theta \in E. \quad (3.24)$$

E' est l'espace dual de E . Identifiant $L^2(\Omega)$ avec son propre dual, nous pouvons écrire

$$E \subset L^2(\Omega) \subset E'.$$

On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre E' et E , et $|\cdot|_{E'}$ dénote la norme sur E' . Aussi,

$$\langle \theta, \eta \rangle = (\theta, \eta)_{L^2(\Omega)},$$

pour $\theta \in L^2(\Omega)$ et $\eta \in E$.

3.1.6 Des espaces liés à la densité des débris d'usure

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec une frontière Γ de Lipschitz. Supposons que Γ_3 est un domaine régulier dans le plan Ox_1x_2 avec une frontière de Lipschitz $\partial\Gamma_3$. Pour la fonction de densité des particules de surface, nous utiliserons l'espace

$$H_0^1(\Gamma_3) = \left\{ \zeta \in H^1(\Gamma_3) / \zeta = 0 \text{ sur } \partial\Gamma_3 \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert réel muni de produit scalaire

$$(\zeta, \tilde{\zeta})_{H_0^1(\Gamma_3)} = (\nabla \zeta, \nabla \tilde{\zeta})_{L^2(\Gamma_3)^2},$$

où $\nabla : H^{-1}(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)^2$ est l'opérateur gradient, $\nabla \zeta = (\zeta_{,x_1}, \zeta_{,x_2})$. Par l'inégalité de Friedrichs-Poincaré, il existe une constante $\tilde{C}_\Gamma > 0$ qui dépend de Γ_3 telle que

$$|\zeta|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{C}_\Gamma |\zeta|_{H_0^1(\Gamma_3)} \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Gamma_3). \quad (3.25)$$

Nous utilisons la notation $H^{-1}(\Gamma_3)$ pour le dual de l'espace $H_0^1(\Gamma_3)$. Identifiant $L^2(\Gamma_3)$ avec son propre dual, nous pouvons écrire

$$H_0^1(\Gamma_3) \subset L^2(\Gamma_3) \subset H^{-1}(\Gamma_3).$$

On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Gamma_3)$ et $H_0^1(\Gamma_3)$, et $|\cdot|_{H^{-1}(\Gamma_3)}$ dénote la norme sur $H^{-1}(\Gamma_3)$. Aussi,

$$\langle \zeta, \tilde{\zeta} \rangle = (\zeta, \tilde{\zeta})_{L^2(\Gamma_3)},$$

pour $\zeta \in L^2(\Gamma_3)$ et $\tilde{\zeta} \in H_0^1(\Gamma_3)$.

3.2 Modélisation des problèmes élasto-viscoplastiques et thermo-viscoélastiques

Dans cette section, nous présentons un cadre physique général concernant les différents problèmes de contact de la thèse. Puis nous introduisons l'équation de mouvement, les lois constitutives des différents matériaux et les conditions aux limites utilisés dans cette thèse.

3.2.1 Cadre physique

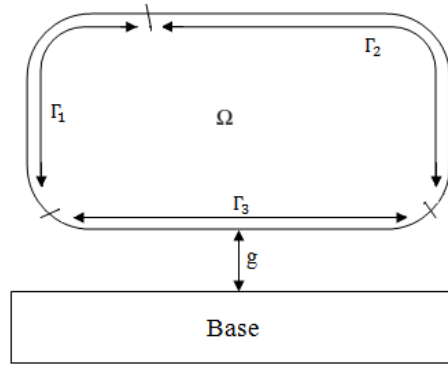


FIGURE 3.1 – Le cadre physique ; Γ_3 est la surface de contact.

En général, le cadre physique a été illustré dans la Figure 3.1 et sera décrit ci-dessous. On considère un corps déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une frontière Γ de Lipschitz divisée en trois parties disjointes et mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , telles que $mes(\Gamma_1) > 0$. Le corps est supposé fixé sur la partie Γ_1 de sa frontière alors que des forces volumiques et surfaciques de densités f_0 et f_2 agissent respectivement dans Ω et sur Γ_2 . Sur Γ_3 le corps est susceptible d'entrer en contact avec un obstacle, la dite fondation. Nous supposons que dans la configuration de référence, il peut y avoir un interstice g entre Γ_3 et la fondation, qui est mesuré le long de la normale ν .

Soit u le vecteur de déplacement, σ le tenseur des contraintes et $\varepsilon = \varepsilon(u)$ le tenseur des déformations linéarisé. Ce sont des fonctions qui dépendent de la variable spatiale x et la variable de temps t . Néanmoins, dans ce qui suit, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de ces quantités par rapport à x et à t , par exemple nous écrivons σ au lieu de $\sigma(x)$ ou $\sigma(x, t)$. T est une constante positive et $[0, T]$ désigne

3.2 Modélisation des problèmes élasto-viscoplastiques et thermo-viscoélastiques

l'intervalle de temps en question. Le point au-dessus d'une fonction représente la dérivé par rapport au temps, c'est-à-dire $\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ et $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$.

Pour présenter un modèle mathématique d'un processus de contact spécifique nous avons besoin de décrire la loi de comportement, l'équation de mouvement ou d'équilibre, les conditions aux limites et, éventuellement, les conditions initiales.

3.2.2 L'équation de mouvement

Nous nous intéressons à un modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable en contact avec une fondation, ses inconnues sont le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, avec $T > 0$. L'évolution de l'état mécanique du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.26)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la densité de la masse, $\mathbf{f}_0$ est la densité des forces volumiques, $\dot{\mathbf{u}}$ représente la vitesse du corps et $\ddot{\mathbf{u}}$ représente l'accélération.

Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier, par exemple dans le cas où le champ des vitesses $\dot{\mathbf{u}}$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire le terme $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ peut être négligé et on obtient l'équation d'équilibre

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (3.27)$$

Les processus modélisés par l'équation du mouvement (3.26) s'appellent *processus dynamiques* et les processus modélisés par l'équation d'équilibre (3.27) s'appellent *processus quasi-statiques*. Dans le cas *statique*, l'équation d'équilibre est valable dans Ω .

La description de notre modèle n'est pas encore terminée, puisque nous avons des inconnues plus que des équations. L'équation est donc insuffisante, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général les lois de comportement, cela fait l'objet du paragraphe suivant.

3.2.3 Lois de comportement

Les lois de comportements caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériau. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement, on cite à titre d'exemple les quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Les lois de comportements (ou lois constitutives) sont des relations entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations ε et leur dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$. Notons que d'autres paramètres, tels que la pression ou la température, peuvent intervenir dans une loi de comportement.

A. Lois de comportement élasto-viscoplastique avec variable interne d'état

Une loi de constitutive d'un matériau élasto-viscoplastique avec variable interne d'état est donnée par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds, \quad (3.28)$$

où $\mathbf{u}$ désigne le champ de déplacement, σ représente le tenseur des contraintes, $\varepsilon(\mathbf{u})$ est le tenseur des déformations linéarisé, $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité et $\mathcal{F}$ est l'opérateur d'élasticité. $\mathcal{G}$ est une fonction constitutive non linéaire décrivant le comportement viscoplastique du matériau et dépendant de la variable interne d'état $\mathbf{k}$. L'évolution du champ de variable interne d'état est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \mathbf{k}(t)), \quad (3.29)$$

où ϕ est une fonction non linéaire dépendant aussi de la variable interne d'état $\mathbf{k}$. L'ensemble des variables internes d'état admissibles défini par

$$\mathcal{Y} = \{\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i) : \alpha_i \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq m\}.$$

Des exemples et interprétation mécanique des lois constitutives de la forme (3.28) sans variable interne d'état $\mathbf{k}$ peuvent être trouvés dans [30, 63]. Un problème dynamique de contact sans frottement pour des matériaux suivant la loi (3.28)-(3.29) est donné dans [47].

B. Lois de comportement thermo-viscoélastique avec endommagement

En prenant en considération l'effet thermique et l'endommagement du matériau durant le contact, nous obtenons une loi de comportement thermo-viscoélastique avec endommagement de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha) - C(\theta, \alpha), \quad (3.30)$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ sont des opérateurs non linéaires décrivant les propriétés visqueuses et élastiques du matériau respectivement et C est un opérateur de dilatation thermique.

3.2 Modélisation des problèmes élasto-viscoplastiques et thermo-viscoélastiques

Ici, α est une variable interne représentant l'endommagement du matériau causé par des déformations élastiques et θ est le champ de température.

L'évolution de champ de température θ est régie par l'équation de la chaleur obtenue à partir de la conservation d'énergie comme suit.

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K_c \nabla \theta) = \psi(\dot{\mathbf{u}}, \theta, \alpha) + q, \quad (3.31)$$

où ψ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures, $K_c = (k_{ij})$ est le tenseur de conductivité thermique avec $\operatorname{div}(K_c \nabla \theta) = (k_{ij} \theta_{,i})_{,i}$ et q est une donnée qui représente la densité de la source thermique.

L'inclusion différentielle suivante est utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement

$$\dot{\alpha} - k_1 \Delta \alpha + \partial \varphi_K(\alpha) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}), \theta, \alpha), \quad (3.32)$$

où k_1 est un coefficient positif, $\partial \varphi_K$ représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice φ_K , ϕ est une fonction constitutive donnée qui représente la source d'endommagement du système et θ est la fonction de température. K représente l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles défini par

$$K = \left\{ \zeta \in H^1(\Omega) : 0 \leq \zeta \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega \right\}.$$

Lorsque $\alpha = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque $\alpha = 0$, il y a un endommagement total, et pour $0 < \alpha < 1$, il y a un endommagement partiel.

3.2.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées conditions de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsque l'obstacle est rigide), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle), de compliance normale (lorsque l'obstacle est déformable) ou bien de réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est réactive). À part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (le glissement se produit lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Parmi les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb et de Tresca, elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié.

Les conditions aux limites sont aussi influencées par la prise en considération des différents phénomènes sous-jacents au contact avec frottement, adhérence, usure et

effets thermiques. Par ailleurs, même si on néglige ces phénomènes et on se limite au contact frottant avec seuil, la dépendance du seuil de frottement par rapport au glissement ou à la vitesse de glissement peut être envisagée, influençant ainsi les conditions aux limites du modèle mathématique considéré.

Rappelons que la frontière Γ est divisée en trois parties disjointes et mesurable Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, nous donnons dans ce paragraphe les conditions aux limites sur chacune des trois parties.

Conditions aux limites de déplacement-traction

Dans tous les problèmes qui seront étudiés dans cette thèse, le corps est encastré sur la partie Γ_1 , donc

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.33)$$

cette relation représente la condition aux limites *de déplacement*. Une traction surfacique de densité f_2 agit sur la partie Γ_2 et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma \nu$ satisfait :

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T). \quad (3.34)$$

Cette condition est appelée la condition aux limites *de traction*.

Pour compléter le modèle mathématique qui d'écrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3 , c'est l'objet des conditions de contact et des lois de frottement que nous allons décrire dans ce qui suit.

Conditions de contact avec compliance normale

C'est le cas où la fondation est supposée déformable dans ce cas la pénétration est possible et la contrainte normale σ_ν satisfait :

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g),$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice initial entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette relation est dite condition *de compliance normale* et signifie que la fondation exerce une réaction suivant la normale sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$ qui s'annule lorsqu'il y a séparation (c'est-à-dire $u_\nu < g$).

Dans le cas où l'interstice entre le corps et la fondation est nul on prend $g = 0$.

Comme exemple de fonction de compliance normale p_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

3.2 Modélisation des problèmes élasto-viscoplastiques et thermo-viscoélastiques

ou, plus généralement

$$p_v(r) = c_v(r_+)^m,$$

où $c_v > 0$ est le coefficient de raideur de la surface, $m > 0$ est l'exposant de la compliance normale et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_v(r) = \begin{cases} c_v r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_v \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases}$$

où α est un coefficient positif lié à l'usure et la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact de compliance normale signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, c'est-à-dire quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre aucune résistance à la pénétration.

Conditions de contact avec réponse normale instantanée

Une condition de contact avec *réponse normale instantanée* a été utilisée principalement pour décrire un contact lubrifié. Cette condition suppose que la contrainte normale sur la surface de contact est liée à la vitesse normale, c'est-à-dire

$$-\sigma_v = p_v(\dot{u}_v),$$

où, p_v est une fonction donnée qui s'annule lorsque l'argument est négatif.

Nous passons maintenant aux conditions dans les directions tangentielles, appelées conditions de frottement ou lois de frottement.

Lois de contact avec ou sans frottement

Les premiers travaux sur le frottement ont été réalisés par Léonard de Vinci au début du XVI^{ème} siècle. Il donne la première valeur (0.25) du coefficient de proportionnalité entre la force de frottement et le poids du corps. La compréhension des mécanismes entrant en jeu est restée très lacunaire et il faut attendre deux siècles pour qu'Amontons en 1699 et Coulomb en 1785 reprennent et développent les études de Léonard de Vinci en énonçant les premières lois de frottement. Historiquement, G. Amontons proposa une loi de proportionnalité entre les composantes normales et tangentielles des contraintes. Coulomb confirme les lois d'Amontons à partir d'expériences.

La condition de contact est dite *sans frottement* dans laquelle la partie tangentielle de la contrainte (la force de frottement) est nulle, c'est-à-dire

$$\sigma_\tau = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.35)$$

3. Modélisation des problèmes de contact

Dans le cas où la force de frottement n'est pas nulle, le contact est avec frottement. Les lois de frottement intervenant dans cette thèse sont des versions de la loi de type Coulomb, qui sont les lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique.

La loi de frottement de type Coulomb se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ |\sigma_\tau| < \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ |\sigma_\tau| = \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = \lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.36)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement.

Une version quasi-statique de lois de Coulomb peut s'énoncer sous la forme

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq F_b, \\ -\sigma_\tau = F_b \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau|} \quad \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.37)$$

Ici, $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ est la vitesse tangentielle ou le taux de glissement et F_b représente le seuil frottement (ce seuil n'est pas fixé et dépend du coefficient de frottement et de la solution du problème).

Nous pouvons prendre pour F_b le choix suivant :

$$F_b = F_b(\sigma_\nu) = \mu |\sigma_\nu|,$$

où $\mu > 0$ est le coefficient de frottement. Ce choix dans (3.37) conduit à la version classique de la loi de Coulomb. Les choix

$$F_b = F_b(\sigma_\nu) = p_\tau(u_\nu - g) \quad \text{et} \quad F_b = F_b(\sigma_\nu) = p_\tau(\dot{u}_\nu)$$

sont compatibles avec la condition de contact de compliance normale et de réponse normale instantanée, respectivement. Ici, p_τ est une fonction positive qui s'annule pour les arguments négatifs, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de contact.

Dans le chapitre 5, nous étudions un problème de contact de frottement avec compliance normale et nous utilisons les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g), \\ |\sigma_\tau| \leq p_\tau(u_\nu - g), \\ -\sigma_\tau = p_\tau(u_\nu - g) \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau|} \quad \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

3.3 Processus de contact avec adhésion

Où, p_ν , p_τ sont des fonctions données et g représente l'interstice initiale. Nous étudions également un problème de frottement avec réponse normale instantanée où on utilise ces conditions aux limites

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu), \\ |\sigma_\tau| \leq p_\tau(\dot{u}_\nu), \\ -\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\nu) \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Ici, p_ν et p_τ sont des fonctions données.

Condition aux limites concernant le problème de température

Au chapitre 8, nous utilisons la condition au limite de température donnée par

$$k_{ij}\theta_{,i}\eta_j = h_\theta(\zeta, \theta, |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|) - k_e(\theta - \theta_R) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où le premier terme à droite décrit l'effet thermique du au frottement dans lequel $h_\theta : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction tangentielle donnée. Le deuxième terme représente l'échange thermique entre le corps et la fondation. θ_R est la température de la fondation et k_e est le coefficient des échanges thermiques entre le corps et l'obstacle.

3.3 Processus de contact avec adhésion

Pour modéliser le phénomène d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. On introduit une variable interne de surface appelée champ d'adhésion notée par β qui prend ses valeurs entre zéro et un. Lorsque $\beta = 1$ à un point de Γ_3 , l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, lorsque $\beta = 0$ tous les liens sont inactifs et il n'y a pas d'adhésion. Lorsque $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle.

Si on suppose que la partie compressive de la contrainte de contact est décrite par la compliance normale, la condition de contact de compliance normale avec adhésion est donné par

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.38)$$

où γ_ν est un coefficient d'adhésion positif, p_ν est la fonction de compliance normale et R_ν est l'opérateur du troncature défini par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0, \end{cases} \quad (3.39)$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique du lien, au delà de laquelle il s'étire sans offrir aucune résistance complémentaire. La contribution d'adhésion à la traction normale est donnée par le terme $\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)$. Ainsi, la traction adhésive est proportionnelle avec un coefficient de proportionnalité γ_ν , par rapport au carré de l'intensité d'adhésion et le déplacement normal, mais tant que u_ν n'excède pas la longueur du lien L .

On considère une autre relation qui représente la condition de contact adhésif sans frottement sur le plan tangentiel,

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où l'opérateur de troncature $\mathbf{R}_\tau$ est donné par

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } |\mathbf{v}| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} & \text{si } |\mathbf{v}| > L. \end{cases} \quad (3.40)$$

Cette relation indique que la contrainte tangentielle dépend du champ adhésion et du déplacement tangentiel. La traction tangentielle de frottement est supposée beaucoup plus petite que la traction adhésive, et par conséquent, elle est nulle.

Pour compléter le modèle, nous supposons que l'évolution du champ d'adhésion est gouvernée par une équation différentielle ordinaire de la forme

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -(\beta(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \dot{\beta}(0) &= \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3, \end{aligned}$$

où γ_ν , γ_τ et ϵ_a sont des coefficients d'adhésion positifs et R_ν , $\mathbf{R}_\tau$ sont des opérateurs de troncature définis par (3.39) et (3.40) respectivement. β_0 est l'adhésion initiale tel que

$$0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3.$$

Pour le champ d'adhésion, nous introduisons l'ensemble

$$Z = \{\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3) : 0 \leq \beta(t) \leq 1, \forall t \in [0, T] \text{ p.p. sur } \Gamma_3\}.$$

Condition de frottement avec adhésion

Dans le chapitre 7 de cette thèse on va utiliser une version de la loi de frottement de Coulomb avec adhésion de la forme suivante :

$$\begin{cases} |\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| \leq p_\tau(u_\nu - g), \\ |\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| < p_\tau(u_\nu - g) \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ |\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| = p_\tau(u_\nu - g) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{tel que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau. \end{cases} \quad (3.41)$$

3.4 Processus de contact avec usure

Ici, p_ν , p_τ sont des fonctions données et g représente l'interstice initiale. γ_ν et γ_τ sont des paramètres matériel, R_ν , R_τ sont des opérateurs de troncature définis par (3.39) et (3.40) respectivement.

3.4 Processus de contact avec usure

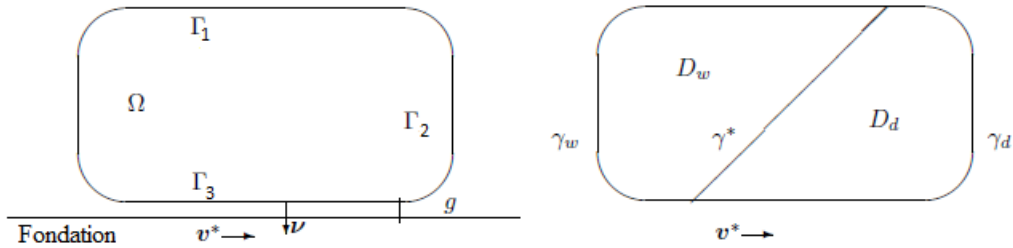


FIGURE 3.2 – Le modèle (à gauche) ; La surface de contact Γ_3 ; l'usure est produite en D_w ; la diffusion des débris dans $D_w \cup D_d$ (à droite).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $\Gamma_3 \subset \mathbb{R}^2$. Pour simplifier le modèle nous supposons que Γ_3 est un domaine régulier dans le plan $x_3 = 0$, de frontière γ , alors que la fondation est plane et se déplace dans le plan $x_3 = -g \leq 0$ avec une vitesse v^* . Nous supposons que Γ_3 est divisée en deux sous-domaines D_d et D_w par une courbe lisse γ^* . L'usure a lieu seulement sur la partie D_w de la surface de contact, tandis que la diffusion des particules d'usure a lieu dans tout le domaine de contact Γ_3 . La frontière $\gamma = \partial\Gamma_3$ de Γ_3 est supposé Lipschitzienne et se compose de deux parties γ_d et γ_w . Alors $\partial D_w = \gamma_w \cup \gamma^*$ et $\partial D_d = \gamma_d \cup \gamma^*$ (voir Figure 3.2).

L'usure de la surface est décrite par la fonction d'usure $\omega = \omega(x, t)$ qui est définie sur D_w et la diffusion des débris d'usure est décrite par la densité surfacique des particules d'usure $\zeta = \zeta(x, t)$ qui est définie sur Γ_3 . Ici, $x = (x_1, x_2, 0)$, puisque Γ_3 appartient au plan Ox_1x_2 . La fonction d'usure ω mesure la densité volumique du matériau enlevé par unité de surface. La fonction ζ mesure la densité surfacique de la diffusion des particules d'usure.

Nous supposons que $\omega = \lambda\zeta$ dans D_w , où λ est un facteur de conversion positif de la densité surfacique des débris d'usure à la profondeur d'usure. Puis, nous prolongeons ω par zéro à tout Γ_3

$$\omega = \lambda\zeta\chi_{[D_w]} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.42)$$

3. Modélisation des problèmes de contact

où $\chi_{[D_w]}$ est la fonction caractéristique de D_w (c'est-à-dire, $\chi_{[D_w]}(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x} \in D_w$ et $\chi_{[D_w]}(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \notin D_w$). Le coefficient de diffusion d'usure k est donné par

$$k = k(\mathbf{x}) = \begin{cases} k_w & \text{dans } D_w, \\ k_d & \text{dans } D_d. \end{cases}$$

Ici, la diffusion d'usure est décrite par l'équation de diffusion non linéaire suivante

$$\dot{\zeta} - \operatorname{div}(k \nabla \zeta) = \kappa |\sigma_\tau| |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*| \chi_{[D_w]} \quad \text{dans } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.43)$$

Nous utilisons $\chi_{[D_w]}$ dans (3.43) car les débris ne sont produits que dans D_w . Ici, κ est le coefficient de taux d'usure. Nous notons que (3.43) est une version de la loi d'Archard avec diffusion. Le taux d'usure est proportionnel à l'intensité de frottement et le taux de glissement relatif. En effet, lorsque la diffusion des particules d'usure est négligeable, (3.43) peut être écrit comme

$$\dot{\zeta} = \kappa |\sigma_\tau| |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*| \chi_{[D_w]} \quad \text{dans } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.44)$$

qui est la forme différentielle de la loi d'usure d'Archard. Maintenant, pour éviter des difficultés mathématiques qui se posent lorsque le taux de glissement est très grand, nous remplaçons le terme $|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|$ dans (3.43) par le terme $R^*(|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|)$ où $R^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature

$$R^*(r) = \begin{cases} r & \text{si } r \leq R, \\ R & \text{si } r > R, \end{cases} \quad (3.45)$$

où, R est une constante positive donnée. Nous notons que du point de vue physique, cela ne provoque pas de changement réel dans le modèle, car dans la pratique la vitesse de glissement est limitée et aucune hypothèse est imposée sur R , donc il peut être choisi aussi grand que nécessaire dans chaque application. Pour conclure, la diffusion d'usure est décrite par l'équation de diffusion non linéaire suivante

$$\dot{\zeta} - \operatorname{div}(k \nabla \zeta) = \kappa |\sigma_\tau| R^*(|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|) \chi_{[D_w]} \quad \text{dans } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.46)$$

Nous supposons qu'une fois une particule d'usure atteint la frontière $\gamma = \partial\Gamma_3$ elle disparaît, ce qui se traduit par la condition absorbante suivante.

$$\zeta = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Gamma_3 \times (0, T).$$

Condition de frottement avec diffusion d'usure

Maintenant, nous décrivons le processus de contact avec frottement sur la surface Γ_3 . Nous utilisons une version de la condition de compliance normale pour modéliser

3.5 Modélisation des problèmes de contact piézoélectriques

le contact. Puisque le processus implique l'usure de surface de contact, nous prenons en considération le changement de la géométrie en remplaçant g par $g + w$. Donc,

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - \lambda\zeta\chi_{[D_w]} - g) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

La loi de frottement est choisi comme (3.37), où $F_b = \mu p_\nu$, ainsi

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu p_\nu, \\ \sigma_\tau = -\mu p_\nu \frac{\dot{u}_\tau - v^*}{|\dot{u}_\tau - v^*|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq v^* \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où $p_\nu = p_\nu(u_\nu - \lambda\zeta\chi_{[D_w]} - g)$ et $\mu = \mu(\zeta, \theta, |\dot{u}_\tau - v^*|)$ est le coefficient de frottement qui dépend de la densité des particules d'usure, la température et le taux de glissement.

3.5 Modélisation des problèmes de contact piézoélectriques

Cette section est dédiée au cadre physique, aux lois de comportement et aux conditions aux limites concernant les problèmes piézoélectriques.

3.5.1 Cadre physique

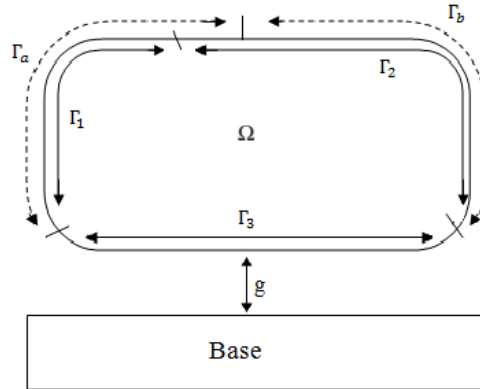


FIGURE 3.3 – Le cadre physique pour un matériau piézoélectrique ; Γ_3 est la surface de contact.

Pour modéliser les problèmes de contact avec des matériaux piézoélectriques, nous considérons le cadre physique représenté dans la Figure 3.3.

3. Modélisation des problèmes de contact

On considère un corps déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), de frontière Γ de Lipschitz, divisée en trois parties disjointes et mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , d'une part, et une partition de $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ en deux parties disjointes et mesurables Γ_a et Γ_b , d'une autre part, telles que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ et $\text{mes}(\Gamma_a) > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est encastré sur Γ_1 , alors le champ de déplacement est nul sur cette partie. Des forces surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2 et des forces volumiques de densité f_0 agissent dans Ω . Nous supposons aussi que le potentiel électrique est nulle sur Γ_a et une charge électrique de densité surfacique q_b est donnée sur Γ_b . Le corps est en contact avec une fondation adhésive et conductive (avec ou sans frottement) sur la partie Γ_3 .

Nous sommes intéressées par des modèles mathématiques qui décrivent l'évolution de l'état mécanique et électrique du corps piézoélectrique pendant l'intervalle de temps $[0, T]$, avec $T > 0$. Outre le champ des contraintes $\sigma = \sigma(x, t)$ et le champ de déplacement $u = u(x, t)$, on introduit le champ de déplacement électrique $D = D(x, t)$ et le potentiel électrique $\varphi = \varphi(x, t)$. Les fonctions inconnues du problème de contact piézoélectrique sont $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Si le processus est dynamique alors l'équation du mouvement pour le champ des contraintes est donnée par l'équation (3.26), et si le processus est quasi-statique alors l'équation d'équilibre pour le champ des contraintes est donnée par l'équation (3.27). L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacement électrique

$$\text{div} D - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.47)$$

où q_0 est la densité des charges électriques volumiques et "div" est l'opérateur de divergence, c'est-à-dire $\text{div} D = (D_{i,i})$.

Nous passons maintenant aux conditions aux limites sur Γ_1 , Γ_2 , Γ_a et Γ_b . D'abord, car le corps piézoélectrique est fixé sur Γ_1 , nous imposons la condition aux limites de déplacement (3.33). En outre, la condition aux limites de traction sur Γ_2 est donnée par (3.34). Ensuite, puisque le potentiel électrique est nul sur Γ_a au cours du processus, nous imposons la condition aux limites

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T). \quad (3.48)$$

De plus, nous rappelons qu'une charge électrique de densité surfacique q_b est donnée sur Γ_b , et par conséquent,

$$D \cdot \nu = q_b \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T). \quad (3.49)$$

Pour compléter un modèle mathématique pour un processus de contact piézoélectrique spécifique, outre les équations des équilibres et les conditions aux limites ci-dessus, nous avons besoin d'introduire les lois de comportement et les conditions aux limites de contact.

3.5 Modélisation des problèmes de contact piézoélectriques

3.5.2 Loïs de comportement

Pour introduire la loi de comportement d'un matériau piézoélectrique, nous définissons le champ électrique $E(\varphi)$ par la relation

$$E(\varphi) = -\nabla \varphi = -(\varphi_{,i}), \quad (3.50)$$

où $\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.

Une loi constitutive générale de matériau électro-élasto-viscoplastique avec variable interne d'état peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{E}^*E(\varphi(t)) \\ & + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \mathcal{E}^*E(\varphi(s)), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{E}^*E(\varphi(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)), \quad (3.52)$$

$$D(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi(t), \quad (3.53)$$

où u est le champ de déplacement, σ est le tenseur des contraintes, $\varepsilon(u)$ est le tenseur des contraintes linéarisé et D est le champ de déplacement électrique. $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité, non forcément linéaire, $\mathcal{F}$ est l'opérateur d'élasticité et $\mathcal{G}$ représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau et dépend de la variable interne d'état k . ϕ est une fonction constitutive non linéaire qui dépend de k . E est le champ électrique qui satisfait $E(\varphi) = -\nabla\varphi$, où φ est le potentiel électrique. $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ représente le tenseur piézoélectrique de troisième ordre, $\mathcal{E}^*$ est son transposé et $\mathbf{B}$ est le tenseur de permittivité électrique.

Nous supposons la décomposition de la forme $\sigma = \sigma^{EVP} + \sigma^E$, où $\sigma^E = -\mathcal{E}^*E(\varphi) = \mathcal{E}^*\nabla\varphi$ est la partie électrique de la contrainte et σ^{EVP} est la partie élasto-viscoplastique de la contrainte qui satisfait :

$$\sigma^{EVP}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^{EVP}(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds,$$

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma^{EVP}(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)).$$

Un problème de contact sans frottement pour des matériaux élasto-viscoplastiques avec variable interne d'état a été étudié dans [47, 52].

Lorsque $\mathcal{G} = 0$ la loi de comportement (3.51)-(3.53) se réduit à la loi constitutive électro-viscoélastique donnée par (3.53) et

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t).$$

Lorsque $\mathcal{G} = 0$ et $\mathcal{A} = 0$ la loi de comportement (3.51)-(3.53) devient la loi constitutive électro-élastique donnée par (3.53) et

$$\sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t).$$

3.5.3 Les conditions de contact

Dans cette section nous allons énoncer les conditions de contact électrique associées aux problèmes piézoélectriques sur la partie Γ_3 de la surface de contact. Nous considérons le cas lorsque la fondation est électriquement conductrice et son potentiel est maintenu à φ_0 .

Nous supposons que la condition électrique sur la surface de contact est donnée par

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = \psi(u_v - g) \Phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.54)$$

où ψ et Φ sont des fonctions données qui sont décrite ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qu'on peut obtenir de la manière suivante.

Lorsqu'il n'y a pas de contact (c'est-à-dire $u_v < g$), il n'y a pas de charges électriques libres sur la surface et la composante normale du champ de déplacement électrique disparaît. Ainsi,

$$u_v < g \Rightarrow \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.55)$$

Pendant le processus de contact (c'est-à-dire lorsque $u_v \geq g$), la composante normale du champ de déplacement électrique ou la charge électrique libre est supposé proportionnel à la différence entre le potentiel de la base et le potentiel surfacique du corps, avec une constante positive l comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_v \geq g \Rightarrow \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = l(\varphi - \varphi_0). \quad (3.56)$$

Combinions (3.55) et (3.56) pour obtenir

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = l\chi_{[0, \infty)}(u_v - g)(\varphi - \varphi_0), \quad (3.57)$$

où $\chi_{[0, \infty)}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, \infty)$, qui est donnée par

$$\chi_{[0, \infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ 1 & \text{si } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (3.57) décrit le contact électrique parfait et elle est en quelque sorte semblable à la condition bien connue de contact de Signorini. Les deux conditions peuvent être considérées comme des sur-idéalisations dans plusieurs applications.

3.5 Modélisation des problèmes de contact piézoélectriques

Pour la rendre plus réaliste, nous régularisons la condition (3.57) et l'écrire comme (3.54) dans laquelle $l\chi_{[0,\infty)}(u_\nu)$ est remplacée par ψ qui est une fonction régulière (va être décrite ci-dessous) et Φ est une fonction de troncature

$$\Phi(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < -L, \\ s & \text{si } -L \leq s \leq L, \\ L & \text{si } s > L, \end{cases}$$

où L est une constante positive très grande. Notons que cette troncature ne pose aucune limitation pratique sur l'applicabilité du modèle puisque L peut être arbitrairement grand, plus grand que toute tension de pointe possible dans le système, et donc dans les applications $\Phi(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$.

Les raisons de la régularisation (3.54) de (3.57) sont mathématiques. Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction $l\chi_{[0,\infty)}$ dans (3.57) par une fonction Lipschitzienne ψ . Un choix possible est

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ l\delta r & \text{si } 0 \leq r \leq 1/\delta, \\ l & \text{si } r > 1/\delta, \end{cases} \quad (3.58)$$

où $\delta > 0$ est un paramètre petit. Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de la surface et se stabilise quand la pénétration $u_\nu - g$ atteint la valeur $\frac{1}{\delta}$. Deuxièmement, nous avons besoin du terme $\Phi(\varphi - \varphi_0)$ pour rendre le terme $\varphi - \varphi_0$ borné.

Notons que lorsque $\psi \equiv 0$ dans (3.54), nous obtenons

$$D.\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.59)$$

ce qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (3.59) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [9, 57, 58]. La condition (3.54) à lieu de (3.59), introduit un couplage fort entre les conditions aux limites mécaniques et électriques et mène vers un nouveau modèle mathématique, non standard.

Chapitre 4

Problème de contact sans frottement en élasto-viscoplasticité

Ce chapitre porte sur l'étude mathématique d'un problème de contact en élasto-viscoplasticité où le contact est modélisé par une condition de compliance normale sans frottement. Le matériau est modélisé par une loi constitutive générale de nature élasto-viscoplastique avec variable interne d'état. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution moyennant les techniques de point fixe et des équations d'évolution d'ordre un avec des opérateurs monotones. Finalement, nous étudions la dépendance de la solution par rapport aux conditions de contact et nous prouvons un résultat de convergence.

Sommaire

4.1	Problème mécanique et hypothèses	60
4.2	Formulation variationnelle	63
4.3	Résultat d'existence et d'unicité	64
4.4	Résultat de convergence	70

4.1 Problème mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans Chapitre 3 de cette thèse (Figure 3.1). Nous considérons un corps élasto-viscoplastique en contact avec une base déformable. Alors, la formulation mécanique du problème de contact sans frottement avec compliance normale en élasto-viscoplasticité avec variable interne d'état est donnée par :

Problème P. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des

4.1 Problème mécanique et hypothèses

contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ et un champ de variable interne d'état $k : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) \\ + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\dot{k} = \phi(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(u), k) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.2)$$

$$\rho \ddot{u} = \text{Div} \sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.3)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (4.4)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.5)$$

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu - g), \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.6)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad k(0) = k_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.7)$$

Les équations (4.1)-(4.2) représentent la loi constitutive élasto-viscoplastique avec variable interne d'état. L'équation (4.3) représente l'équation du mouvement. Les équations (4.4)-(4.5) sont les conditions de déplacement-traction. L'équation (4.6) représente la condition de compliance normale sans frottement. Des conditions de compliance normale ont été introduites dans [39] dans l'étude des problèmes dynamiques pour des matériaux élastiques et linéaires et ont été utilisées plus tard dans la littérature, voir par exemple les références [3, 11, 44, 59, 64]. Dans (4.7), u_0 est le déplacement initial, v_0 est la vitesse initiale et k_0 est la variable interne d'état initiale.

Dans l'étude du problème mécanique (4.1)-(4.7) nous supposons les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Ils existent des constants } C_{\mathcal{A}}^1, C_{\mathcal{A}}^2 > 0 \text{ telles que} \\ \quad |\mathcal{A}(x, \varepsilon)| \leq C_{\mathcal{A}}^1 |\varepsilon| + C_{\mathcal{A}}^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ d) \text{ L'application } \varepsilon \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

4. Problème de contact sans frottement en élasto-viscoplasticité

L'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \text{Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\mathcal{G}}(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

La fonction $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \text{Il existe une constante } L_{\phi} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\phi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \phi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\phi}(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \quad \text{L'application } x \mapsto \phi(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \quad \text{L'application } x \mapsto \phi(x, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } L^2(\Omega)^m. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

La fonction de compliance normale $p_v : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \text{Il existe une constante } L_p > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_v(x, r_1) - p_v(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ c) \quad \text{L'application } r \mapsto p_v(\cdot, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ d) \quad p_v(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0 \text{ et p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

De même, nous supposons que la densité de masse volumique et la fonction g satisfont :

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (4.13)$$

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (4.14)$$

Nous supposons que les forces volumiques f_0 et les tractions surfaciques f_2 ont la régularité suivante

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (4.15)$$

Enfin, les données initiales satisfont :

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad k_0 \in Y. \quad (4.16)$$

Nous allons utiliser un produit scalaire modifié sur l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)^d$ donné par

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u, v \in H,$$

4.2 Formulation variationnelle

et soit $\|\cdot\|_H$ la norme associée, c'est-à-dire

$$\|v\|_H = (\rho v, v)_{\frac{1}{2}H} \quad \forall v \in H.$$

En utilisant l'hypothèse (4.13) il vient que $\|\cdot\|_H$ et $|\cdot|_H$ sont des normes équivalentes sur H . De plus l'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Nous notons par V' l'espace dual de V . En identifiant H avec son propre dual nous obtenons le triplet de Gelfand $V \subset H \subset V'$. Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour la dualité entre V' et V et rappelons que

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v))_H \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in V. \quad (4.17)$$

L'hypothèse (4.15) permet de définir une fonction $f(t) \in V'$ par

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da \quad \forall v \in V, \quad (4.18)$$

pour p.p. $t \in (0, T)$ et on note que

$$f \in L^2(0, T; V'). \quad (4.19)$$

Nous considérons aussi la fonctionnelle $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_v(u_v - g)v_v \, da \quad \forall u, v \in V. \quad (4.20)$$

4.2 Formulation variationnelle

Supposons que le problème (4.1)-(4.7) admet une solution régulière (u, σ, k) et soit $v \in V$. En utilisant la formule de Green (3.14), (4.3), (4.17) et la définition (4.18), nous obtenons

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} = (f(t), v)_{V' \times V} + \int_{\Gamma_3} \sigma_v v_v \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} \cdot v_{\tau} \, da.$$

Puis, en utilisant la condition (4.6) combinée avec la définition (4.20) pour trouver

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + j(u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V.$$

On déduit la formulation variationnelle suivante du problème mécanique (4.1)-(4.7).

4. Problème de contact sans frottement en élasto-viscoplasticité

Problème PV. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : [0, T] \rightarrow Y$ tels que pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds, \quad (4.21)$$

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (4.22)$$

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \phi(\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{k}(t)), \quad (4.23)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0. \quad (4.24)$$

4.3 Résultat d'existence et d'unicité

Concernant l'existence et l'unicité de la solution du Problème PV nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses (4.8)-(4.16), le problème PV admet une solution unique $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}\}$ satisfaisant*

$$\mathbf{u} \in H^1(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; V'), \quad (4.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{Q}), \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V'), \quad (4.26)$$

$$\mathbf{k} \in W^{1,2}(0, T; Y). \quad (4.27)$$

Pour démontrer ce théorème nous construisons deux problèmes auxiliaires et nous démontrons l'existence et l'unicité de leurs solutions. Ensuite nous construisons une application contractante où son unique point fixe est la solution du problème faible du problème mécanique de départ.

Dans la première étape, nous considérons le problème auxiliaire suivant dans lequel la fonction $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$ donnée.

Problème $PV_{\boldsymbol{\eta}}$. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}} : [0, T] \rightarrow V$ tel que pour p.p. $t \in (0, T)$

$$(\ddot{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\eta}}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\eta}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} + (\boldsymbol{\eta}^1(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\eta}}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (4.29)$$

Concernant le problème $PV_{\boldsymbol{\eta}}$ nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.2. *Il existe une solution unique du problème $PV_{\boldsymbol{\eta}}$ ayant la régularité (4.25)-(4.27).*

4.3 Résultat d'existence et d'unicité

Démonstration. Nous utilisons le résultat abstrait d'existence et d'unicité donnée par Théorème 2.6. Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \quad \forall u, v \in V. \quad (4.30)$$

Il résulte de (4.30) et (3.9) que

$$|Au - Av|_{V'} \leq c|\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v)|_{\mathcal{Q}} \quad \forall u, v \in V. \quad (4.31)$$

De l'hypothèse (4.8) et du théorème de Krasnoselski (voir par exemple [34]), on déduit que $A : V \rightarrow V'$ est continu et donc hémicontinu.

En utilisant les hypothèses (4.8)(b) et (3.9), il vient que

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}}|u - v|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (4.32)$$

ce qui implique que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur monotone. Nous choisissons $v = \mathbf{0}_V$ dans (4.32) pour obtenir

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}}|u|_V^2 - |A\mathbf{0}_V|_{V'}|u|_V \\ &\geq \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}|u|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}|A\mathbf{0}_V|_{V'}^2, \quad \forall u \in V. \end{aligned}$$

Donc, l'opérateur A satisfait la condition (2.8) avec $\omega = \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}$ et $\lambda = \frac{-1}{2m_{\mathcal{A}}}|A\mathbf{0}_V|_{V'}^2$.

Ensuite, par (4.30), (4.8)(a) et (3.9) on en déduit que

$$|Au|_{V'} \leq c(|u|_V + 1) \quad \forall u \in V,$$

où c est une constante positive. Cela implique que A satisfait la condition (2.9).

Enfin, nous rappelons que par (4.16) et (4.19) on a $f - \eta^1 \in L^2(0, T; V')$ et $v_0 \in H$. Alors, il résulte du Théorème 2.6 qu'il existe une fonction unique v_η qui satisfait :

$$v_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{v}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (4.33)$$

$$\dot{v}_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta^1(t) = f(t), \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (4.34)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (4.35)$$

Soit $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ défini par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.36)$$

De (4.30) et (4.33)-(4.36) il résulte que u_η est l'unique solution du problème PV_η et elle satisfait la régularité (4.25). Ceci donne la partie d'existence du Lemme 4.2. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité de la solution du problème (4.34)-(4.35), garantie par le Théorème 2.6. $\square$

4. Problème de contact sans frottement en élasto-viscoplasticité

On définit $\mathbf{k}_\eta \in W^{1,2}(0, T; Y)$ par

$$\mathbf{k}_\eta(t) = \mathbf{k}_0 + \int_0^t \eta^2(s) ds. \quad (4.37)$$

Dans la deuxième étape nous utilisons la solution $\mathbf{u}_\eta$ obtenu du Problème PV_η et $\mathbf{k}_\eta$ défini par (4.37) pour considérer le problème de Cauchy pour le champ des contraintes suivant.

Problème QV_η . Trouver un champ des contraintes $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ tel que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.38)$$

Pour l'étude du Problème QV_η nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3. *Le problème QV_η admet une solution unique $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{Q})$. De plus, si σ_i et $\mathbf{u}_i$ représentent les solutions des problèmes QV_{η_i} , PV_{η_i} , respectivement, et $\mathbf{k}_i$ est défini dans (4.37) pour $\eta_i \in L^2(0, T; V' \times Y)$, $i = 1, 2$, alors il existe $c > 0$ tel que*

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 \leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.39)$$

Démonstration. Soit $\Lambda_\eta : L^2(0, T; \mathcal{Q}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{Q})$ donné par

$$\Lambda_\eta \sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds \quad (4.40)$$

pour $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ et $t \in [0, T]$. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$, nous utilisons (4.40) et (4.10) pour obtenir, pour tout $t \in [0, T]$

$$|\Lambda_\eta \sigma_1(t) - \Lambda_\eta \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}} \leq L_G \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}} ds.$$

Il s'ensuit que pour p est assez grand, la puissance Λ_η^p est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{Q})$. Donc il existe unique $\sigma_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ tel que $\Lambda_\eta \sigma_\eta = \sigma_\eta$. De plus, σ_η est l'unique solution du problème QV_η . En utilisant (4.38), la régularité

4.3 Résultat d'existence et d'unicité

de $\mathbf{u}_\eta$, la régularité de $\mathbf{k}_\eta$ et les propriétés des opérateurs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, il en résulte que $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{Q})$.

Nous considérons maintenant $(\eta_1, \eta_2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$ et pour $i = 1, 2$, nous notons $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$ et $\mathbf{k}_{\eta_i} = \mathbf{k}_i$. Nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_i(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(\mathbf{u}_i(s)), \mathbf{k}_i(s)) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

et en utilisant les propriétés (4.9) et (4.10) de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, nous trouvons

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}}^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

En utilisant maintenant le lemme de Gronwall pour déduire (4.39). $\square$

Dans la troisième étape soit $\eta \in L^2(0, T; V' \times Y)$, on note par $\mathbf{u}_\eta$ la solution du premier problème auxiliaire et par σ_η la solution du second problème auxiliaire et soit $\mathbf{k}_\eta$ la variable interne d'état donnée par (4.37). Maintenant on considère l'application

$$\Lambda\eta(t) = (\Lambda^1\eta(t), \Lambda^2\eta(t)) \in V' \times Y, \quad (4.42)$$

définie par

$$\begin{aligned} (\Lambda^1\eta(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{Q}} + j(\mathbf{u}_\eta(t), v) \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\Lambda^2\eta(t) = \phi(\sigma_\eta(t), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \mathbf{k}_\eta(t)). \quad (4.44)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.4. *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in L^2(0, T; V' \times Y)$.*

Démonstration. Soient $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V' \times Y)$. Nous écrivons pour $i = 1, 2$,

$$\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i, \quad \dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \mathbf{v}_{\eta_i} = \mathbf{v}_i, \quad \varphi_{\eta_i} = \varphi_i, \quad \beta_{\eta_i} = \beta_i, \quad \sigma_{\eta_i} = \sigma_i, \quad \mathbf{k}_{\eta_i} = \mathbf{k}_i.$$

4. Problème de contact sans frottement en élasto-viscoplasticité

En utilisant (3.9), (4.9), (4.10) et (4.12) on obtient

$$\begin{aligned} |\Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V'}^2 &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{Q}}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nous utilisons l'estimation (4.39) pour voir que

$$\begin{aligned} |\Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V'}^2 &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Par des arguments similaires et de (4.44), (4.39) et (4.11) on déduit que

$$\begin{aligned} |\Lambda^2 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^2 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_Y^2 &\leq c \left(|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 + |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 \right) \\ &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Alors,

$$\begin{aligned} |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

De plus, de (4.28) nous avons

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{Q}} \\ + (\boldsymbol{\eta}_1^1 - \boldsymbol{\eta}_2^1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V' \times V} = 0 \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.3 Résultat d'existence et d'unicité

En intégrant cette égalité sur l'intervalle du temps $[0, t]$ et nous utilisons les conditions initiales $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_0$, la condition (3.9) et (4.8) pour trouver

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\boldsymbol{\eta}_1^1(s) - \boldsymbol{\eta}_2^1(s), \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s))_{V' \times V} ds, \quad (4.50)$$

pour tout $t \in [0, T]$. Par ailleurs, nous utilisons l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{\gamma} + \gamma b^2$ pour obtenir

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1^1(s) - \boldsymbol{\eta}_2^1(s)|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.51)$$

D'autre part, à partir de (4.37) nous avons

$$|\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1^2(s) - \boldsymbol{\eta}_2^2(s)|_Y^2 ds. \quad (4.52)$$

Car $\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0$ nous obtenons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds.$$

De cette inégalité et de (4.48) nous avons que

$$\begin{aligned} & |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V' \times Y}^2 \\ & \leq c \left(\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned}$$

Il en résulte maintenant de (4.51) et (4.52) que

$$|\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V' \times Y}^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds$$

En réitérant cette inégalité m fois, il vient que

$$|\Lambda^m \boldsymbol{\eta}_1 - \Lambda^m \boldsymbol{\eta}_2|_{L^2(0, T; V' \times Y)}^2 \leq \frac{c^m T^m}{m!} |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{L^2(0, T; V' \times Y)}^2.$$

Pour m assez grand, cette dernière inégalité entraîne que l'opérateur Λ^m est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0, T; V' \times Y)$, et alors Λ admet un point fixe unique. $\square$

4. Problème de contact sans frottement en élasto-viscoplasticité

Maintenant, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour fournir la démonstration du Théorème 4.1.

Démonstration du théorème 4.1. Soit $\eta_* = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$ le point fixe de Λ défini par (4.42)-(4.44) et on note

$$u = u_{\eta_*}, \quad k = k_{\eta_*}, \quad (4.53)$$

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \sigma_{\eta_*}. \quad (4.54)$$

On démontre que (u, σ, k) satisfait (4.21)-(4.24) et (4.25)-(4.27). En effet, nous écrivons (4.38) pour $\eta = \eta_*$ et nous utilisons (4.53)-(4.54) pour obtenir (4.21). On utilise (4.28) pour $\eta = \eta_*$ et la première égalité dans (4.53) pour trouver

$$(\ddot{u}, v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\eta^1(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \quad (4.55)$$

Les égalités $\Lambda^1(\eta_*) = \eta^1$ et $\Lambda^2(\eta_*) = \eta^2$ combinées avec (4.43), (4.44), (4.53) et (4.54) impliquent que

$$\begin{aligned} (\eta^1(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + j(u(t), v) \\ &\quad + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{Q}} \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\eta^2(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)). \quad (4.57)$$

De (4.57) et (4.53) on déduit que (4.23) est vérifié. En substituant (4.56) dans (4.55) et on utilise (4.21) pour voir que (u, σ, k) satisfait (4.22). Puis, (4.24), les régularités (4.25) et (4.27) résultent du Lemme 4.2 et (4.37). La régularité $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ résulte des lemmes 4.2, 4.3, l'hypothèse (4.8) et (4.54). Finalement, (4.22) implique que

$$\rho \ddot{u} = \text{Div} \sigma(t) + f_0(t) \quad \text{dans } V', \text{ p.p. } t \in (0, T).$$

De (4.13) et (4.15) on trouve que $\text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V')$ et nous déduisons que la régularité (4.26) est vérifiée, ce qui démontre la partie d'existence du Théorème 4.1.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (4.42) -(4.44) et l'unicité de la solution des problèmes PV_η, QV_η . $\square$

4.4 Résultat de convergence

Dans cette section nous étudions la dépendance de la solution du Problème PV par rapport aux conditions de contact. Nous supposons que les hypothèses (4.8)-(4.16)

4.4 Résultat de convergence

sont vérifiées et soit (u, σ, k) la solution du Problème PV obtenu par Théorème 4.1. Aussi, pour tout $\alpha > 0$ nous notons par p_v^α une perturbation de p_v qui satisfait (4.12) tel que L_p est remplacé par L_p^α .

Nous introduisons la fonctionnelle j^α définie par (4.20), en remplaçant p_v par p_v^α et nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème PV^α . Trouver un champ des déplacements $u^\alpha : [0, T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\sigma^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ et un champ de variable interne d'état $k^\alpha : [0, T] \rightarrow Y$ tels que pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$\sigma^\alpha(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^\alpha(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u^\alpha(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^\alpha(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^\alpha(s)), \varepsilon(u^\alpha(s)), k^\alpha(s)) ds, \quad (4.58)$$

$$(\ddot{u}^\alpha(t), v)_{V' \times V} + (\sigma^\alpha(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + j^\alpha(u^\alpha(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \quad (4.59)$$

$$\dot{k}^\alpha(t) = \phi(\sigma^\alpha(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^\alpha(t)), \varepsilon(u^\alpha(t)), k^\alpha(t)), \quad (4.60)$$

$$u^\alpha(0) = u_0, \quad \dot{u}^\alpha(0) = v_0, \quad k^\alpha(0) = k_0. \quad (4.61)$$

Il résulte du Théorème 4.1 que pour tout $\alpha > 0$, le Problème PV^α admet une solution unique $(u^\alpha, \sigma^\alpha, k^\alpha)$ avec la régularité (4.25)-(4.27). Nous considérons maintenant l'hypothèse suivante sur la fonction de contact.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ils existent } \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \theta :]0, \infty[\rightarrow [0, \infty[\text{ tels que} \\ a) \quad |p_v^\alpha(x, r) - p_v(x, r)| \leq \theta(\alpha)(|r| + \beta) \text{ pour tout } \alpha > 0, r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ c) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta(\alpha) = 0. \\ d) \quad \text{Il existe } L_0 > 0 \text{ tel que } L_p^\alpha \leq L_0 \text{ pour tout } \alpha > 0. \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Avec ces considérations, nous avons le résultat de convergence suivant.

Théorème 4.5. *La solution $(u^\alpha, \sigma^\alpha, k^\alpha)$ du Problème PV^α converge vers la solution (u, σ, k) du Problème PV , c'est-à-dire*

$$u^\alpha \rightarrow u \quad \text{dans } W^{1,2}(0, T; V) \quad \text{lorsque } \alpha \rightarrow 0, \quad (4.63)$$

$$\sigma^\alpha \rightarrow \sigma \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathcal{Q}) \quad \text{lorsque } \alpha \rightarrow 0, \quad (4.64)$$

$$k^\alpha \rightarrow k \quad \text{dans } W^{1,2}(0, T; Y) \quad \text{lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (4.65)$$

En plus de l'intérêt de ce résultat de convergence du point de vue de l'analyse asymptotique, il est important du point de vue mécanique car il indique que des petites perturbations des conditions de contact conduit à des petites perturbations de la solution faible du problème dynamique P .

4. Problème de contact sans frottement en élasto-viscoplasticité

Démonstration. Soit $\alpha > 0$. Au dessous, c toujours est une constante positive qui peut dépendre des données et de la solution (u, σ, k) mais ne dépend pas de α , pas du variable de temps et sa valeur peut changer d'une place à une autre. En utilisant (4.22) et (4.59) on obtient que

$$\begin{aligned} & (\dot{u}^\alpha(t) - \ddot{u}(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t))_{V' \times V} + (\sigma^\alpha(t) - \sigma(t), \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & + j^\alpha(u^\alpha(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) - j(u(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) = 0, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Nous prenons que

$$\sigma^{\alpha R}(t) = \sigma^\alpha(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^\alpha(t)), \quad \sigma^R(t) = \sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) \quad (4.67)$$

et de (4.21) et (4.58) nous avons

$$\sigma^{\alpha R}(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u^\alpha(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^{\alpha R}(s), \varepsilon(u^\alpha(s)), k^\alpha(s)) ds, \quad (4.68)$$

$$\sigma^R(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^R(s), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds. \quad (4.69)$$

Nous utilisons (4.23), (4.60) et puisque $k^\alpha(0) = k(0) = k_0$ nous avons

$$k^\alpha(t) - k(t) = \int_0^t \left(\phi(\sigma^{\alpha R}(s), \varepsilon(u^\alpha(s)), k^\alpha(s)) - \phi(\sigma^R(s), \varepsilon(u(s)), k(s)) \right) ds. \quad (4.70)$$

Nous combinons (4.66) et (4.67) pour obtenir

$$\begin{aligned} & (\dot{u}^\alpha(t) - \ddot{u}(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^\alpha(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & = -(\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t), \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & + j(u(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) - j^\alpha(u^\alpha(t), \dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)), \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Il résulte de (4.8) que pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$\left(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^\alpha(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)) \right)_{\mathcal{Q}} \geq m_{\mathcal{A}} |\dot{u}^\alpha(t) - \dot{u}(t)|_V^2. \quad (4.72)$$

En utilisant (4.68) et (4.69) pour déduire que

$$\begin{aligned} & \sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u^\alpha(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) \\ & + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^{\alpha R}(s), \varepsilon(u^\alpha(s)), k^\alpha(s)) ds - \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^R(s), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.73)$$

4.4 Résultat de convergence

Nous combinons (4.9), (4.10) et (3.9) pour voir que

$$\begin{aligned} |\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t)|_{\mathcal{Q}} &\leq c \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\sigma^{\alpha R}(s) - \sigma^R(s)|_{\mathcal{Q}} ds + \int_0^t |\mathbf{k}^\alpha(s) - \mathbf{k}(s)|_Y ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

De (4.70), (4.11) et (3.9) nous avons

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t)|_Y &\leq c \left(\int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds + \int_0^t |\sigma^{\alpha R}(s) - \sigma^R(s)|_{\mathcal{Q}} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\mathbf{k}^\alpha(s) - \mathbf{k}(s)|_Y ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous additionnons les deux dernières inégalités pour trouver que

$$\begin{aligned} |\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t)|_{\mathcal{Q}} + |\mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t)|_Y &\leq c \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\sigma^{\alpha R}(s) - \sigma^R(s)|_{\mathcal{Q}} ds + \int_0^t |\mathbf{k}^\alpha(s) - \mathbf{k}(s)|_Y ds \right). \end{aligned}$$

L'utilisation du Lemme de Gronwall nous donne

$$\begin{aligned} |\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t)|_{\mathcal{Q}} + |\mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t)|_Y \\ \leq c \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right) \end{aligned}$$

et

$$|\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t)|_{\mathcal{Q}} \leq c \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right), \quad (4.74)$$

$$|\mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t)|_Y \leq c \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right). \quad (4.75)$$

4. Problème de contact sans frottement en élasto-viscoplasticité

L'inégalité (4.74) montre que

$$\begin{aligned} & -(\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & \leq c \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right) |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.76)$$

De la définition des fonctionnelles j et j^α il résulte que

$$\begin{aligned} & j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) - j^\alpha(\mathbf{u}^\alpha(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & = \int_{\Gamma_3} \left(p_v(u_v(t) - g) - p_v^\alpha(u_v(t) - g) \right) (\dot{u}_v^\alpha(t) - \dot{u}_v(t)) da \\ & + \int_{\Gamma_3} \left(p_v^\alpha(u_v(t) - g) - p_v^\alpha(u_v^\alpha(t) - g) \right) (\dot{u}_v^\alpha(t) - \dot{u}_v(t)) da, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Nous utilisons (4.62), (3.11) et le fait que p^α satisfait (4.12) avec L_p^α dans la place de L_p nous déduisons que

$$\begin{aligned} & j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) - j^\alpha(\mathbf{u}^\alpha(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & \leq c \left(\theta(\alpha) + |\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V \right) |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Nous substituons (4.72), (4.76) et (4.77) dans (4.71) pour obtenir, pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V} + m_{\mathcal{A}} |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 \\ & \leq c \left(\theta(\alpha) + |\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right) |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Par l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} b^2$$

et après calcul nous trouvons

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V} + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 \\ & \leq c \left(\theta^2(\alpha) + |\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V^2 ds \right), \quad \text{p.p. } t \in (0, T) \end{aligned} \quad (4.79)$$

4.4 Résultat de convergence

Nous intégrons cette inégalité sur l'intervalle $[0, s]$ et nous utilisons la condition initiale $\dot{\mathbf{u}}^\alpha(0) = \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0$ pour trouver

$$\frac{m_A}{2} \int_0^s |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 dt \leq c \left(\theta^2(\alpha) + \int_0^s |\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V^2 dt \right), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.80)$$

Car $\dot{\mathbf{u}}^\alpha(0) = \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0$ nous voyons que

$$|\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V^2 \leq c \int_0^s |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 dt \quad \forall s \in [0, T]. \quad (4.81)$$

Maintenant, nous remplaçons (4.80) dans (4.81) et nous utilisons l'inégalité de Gronwall pour constater que

$$|\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V^2 \leq c\theta^2(\alpha) \quad \forall s \in [0, T]. \quad (4.82)$$

En substituant (4.80) dans (4.81) nous en déduisons que

$$\int_0^s |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 dt \leq c\theta^2(\alpha) \quad \forall s \in [0, T]. \quad (4.83)$$

Nous combinons (4.82), (4.83) et l'hypothèse (4.62)(b) pour voir que (4.63) est satisfait. Il résulte de (4.67) que

$$\sigma^\alpha(t) - \sigma(t) = \sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t) + \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

En utilisant cette inégalité, (4.74), l'hypothèse (4.8) sur l'opérateur $\mathcal{A}$ et (4.63) pour voir que (4.64) est satisfait. De (4.23), (4.60), l'hypothèse (4.11) sur ϕ , (4.74) et (4.75) on déduit que

$$|\dot{\mathbf{k}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{k}}(t)|_Y^2 \leq c \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(s) - \dot{\mathbf{u}}(s)|_V^2 ds. \quad (4.84)$$

Car $\mathbf{k}^\alpha(0) = \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0$ nous avons

$$|\mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t)|_Y^2 \leq c \int_0^t |\dot{\mathbf{k}}^\alpha(s) - \dot{\mathbf{k}}(s)|_Y^2 ds. \quad (4.85)$$

Nous concluons maintenant de (4.83)-(4.85) et (4.62)(b) que (4.65) est aussi vérifié. $\square$

Chapitre 5

Problèmes de contact avec des opérateurs à mémoire et frottement

Dans ce chapitre, nous considérons deux modèles mathématiques décrivant le contact avec frottement entre un corps élasto-viscoplastique et une base. Dans les deux modèles, le processus est supposé quasi-statique. Le contact est décrit par une condition de compliance normale ou une condition de réponse normale instantanée et la loi de frottement associée est une version de la loi de Coulomb. Nous obtenons une formulation variationnelle des modèles qui se présente sous forme d'une inéquation quasi-variationnelle avec des opérateurs à mémoire (history-dependent) dépendant du champ de vitesse. Ensuite, nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution faible de chaque problème, la démonstration est basée sur des arguments des inéquations quasi-variationnelles avec des opérateurs de mémoire obtenus dans [61]. Nous étudions aussi la dépendance de la solution du premier problème par rapport aux données et nous prouvons un résultat de convergence. Ce chapitre a fait l'objet d'une communication internationale [37].

Sommaire

5.1	Problème avec compliance normale	77
5.1.1	Problème mécanique et hypothèses	77
5.1.2	Formulation variationnelle	80
5.1.3	Résultat d'existence et d'unicité	81
5.2	Problème avec réponse normale instantanée	86
5.2.1	Problème mécanique et hypothèses	86
5.2.2	Formulation variationnelle	87
5.2.3	Résultat d'existence et d'unicité	88
5.3	Résultat de convergence	89

5.1 Problème avec compliance normale

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans chapitre 3) de cette thèse (Figure 3.1). Nous considérons un corps élasto-viscoplastique en contact avec une base déformable. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale associée à une version de la loi de frottement de Coulomb.

5.1.1 Problème mécanique et hypothèses

La formulation classique de ce problème est la suivante.

Problème P. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \\ & + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \phi(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{k}) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.2)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (5.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (5.5)$$

$$-\sigma_v = p_v(u_v - g) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.6)$$

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_\tau| &\leq p_\tau(u_v - g), \\ -\sigma_\tau &= p_\tau(u_v - g) \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.7)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.8)$$

Les équations (5.1) et (5.2) représentent la loi de comportement élasto-viscoplastique avec variable interne d'état où $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de viscosité, $\mathcal{F}$ est l'opérateur d'élasticité et $\mathcal{G}$ est l'opérateur de viscoplasticité. L'équation (5.3) est l'équation d'équilibre. Les conditions (5.4) et (5.5) sont respectivement la condition de déplacement et la condition de traction. Les conditions (5.6) et (5.7) caractérisent respectivement la condition de compliance normale et une version de la loi de frottement de Coulomb associée, dans lequel σ_v est la contrainte normale, σ_τ représente la traction tangentielle, $\dot{u}_\tau$ est la partie tangentielle du champ de vitesse, p_v et p_τ sont des fonctions

5. Problèmes de contact avec des opérateurs à mémoire et frottement

positives données qui s'annulent pour des arguments négatifs et g représente l'interstice initial entre le corps et la fondation, mesuré le long de la normale ν . Finalement, dans (5.8) u_0 et k_0 représentent les conditions initiales.

Dans l'étude du problème (5.1)-(5.8) nous supposons les hypothèses suivantes. L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \text{ L'application } \varepsilon \mapsto \mathcal{A}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

L'opérateur de visoplasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ and } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

La fonction $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\phi} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\phi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \phi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\phi} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ and } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega)^m. \end{array} \right. \quad (5.12)$$

5.1 Problème avec compliance normale

Les fonctions de compliance normale $p_e(e = \nu, \tau)$ satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & p_e : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ (b) & \text{Il existe } L_e > 0 \text{ tel que} \\ & |p_e(\mathbf{x}, r_1) - p_e(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_e |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ (c) & \text{L'application } \mathbf{x} \mapsto p_e(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ (d) & p_e(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Un exemple pour la fonction de compliance normale est donnée par

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

où plus généralement

$$p_\nu(r) = c_\nu (r_+)^m.$$

Où $c_\nu > 0$ est le coefficient de raideur de la surface, $m > 0$ est l'exposant de la compliance normale et r_+ est la partie positive de r , c'est-à-dire $r_+ = \max\{0, r\}$. Il est facile de voir que cette fonction satisfait la condition (5.13)(b). Nous pouvons écrire $p_\tau = \mu p_\nu$ où $p_\tau = \mu p_\nu (1 - \delta p_\nu)_+$ et nous observons que si p_ν satisfait la condition (5.13)(b), alors p_τ satisfait aussi cette condition avec $L_\tau = \mu L_\nu$.

Par ailleurs, nous supposons que les forces volumiques $\mathbf{f}_0$ et les tractions surfaciques $\mathbf{f}_2$ ont la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (5.14)$$

Enfin, les données initiales et la fonction g vérifient les conditions

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{k}_0 \in L^2(\Omega)^m. \quad (5.15)$$

$$g \in L^2(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad g(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (5.16)$$

Nous introduisons les deux fonctions $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$ définies par

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g) |\mathbf{v}_\tau| da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (5.17)$$

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in [0, T]. \quad (5.18)$$

Notons que l'hypothèse (5.14) implique que l'intégral (5.18) est bien défini.

5.1.2 Formulation variationnelle

Supposons que le problème (5.1)-(5.8) admet une solution régulière $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ et soit $\mathbf{v} \in V$. Premièrement, en utilisant la formule de Green (3.14), il vient que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot (\varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}})) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (\mathbf{v}_\nu - \dot{\mathbf{u}}_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau) da \end{aligned} \quad (5.19)$$

Puis, nous utilisons la loi de frottement (5.7) pour voir que

$$\sigma_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau) \geq p_\tau(u_\nu - g) |\dot{\mathbf{u}}_\tau| - p_\tau(u_\nu - g) |\mathbf{v}_\tau| \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (5.20)$$

De plus, sur les points de Γ_3 où $\dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}$ nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau) &= -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau|} (\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau) \\ &\geq p_\tau(u_\nu - g) |\dot{\mathbf{u}}_\tau| - p_\tau(u_\nu - g) |\mathbf{v}_\tau| \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \end{aligned}$$

Car $\dot{\mathbf{u}}_\tau \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau = |\dot{\mathbf{u}}_\tau|^2$ et $\dot{\mathbf{u}}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau \leq |\dot{\mathbf{u}}_\tau| |\mathbf{v}_\tau|$; sur les points de Γ_3 où $\dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}$ nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau) &= \sigma_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau \geq -|\sigma_\tau| |\mathbf{v}_\tau| \\ &\geq -p_\tau(u_\nu - g) |\mathbf{v}_\tau| = p_\tau(u_\nu - g) |\dot{\mathbf{u}}_\tau| - p_\tau(u_\nu - g) |\mathbf{v}_\tau|, \end{aligned}$$

car $|\sigma_\tau| \leq p_\tau(u_\nu - g)$ et $|\dot{\mathbf{u}}_\tau| = 0$. En intégrant (5.20) sur Γ_3 on obtient

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau) da \geq \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g) (|\dot{\mathbf{u}}_\tau| - |\mathbf{v}_\tau|) da. \quad (5.21)$$

Nous combinons maintenant (5.19) et (5.21), ensuite nous utilisons la condition (5.7) pour trouver

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot (\varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}})) dx &+ \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g) (\mathbf{v}_\nu - \dot{\mathbf{u}}_\nu) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g) (|\mathbf{v}_\tau| - |\dot{\mathbf{u}}_\tau|) da \\ &\geq \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da. \end{aligned}$$

Nous utilisons les notations (5.17) et (5.18) pour déduire que

$$(\sigma, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{Q}} + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_V.$$

5.1 Problème avec compliance normale

Finalement, nous utilisons la loi constitutive (5.1)-(5.2) pour obtenir la formulation variationnelle suivante du problème de contact P .

Problème PV. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)^m$ tels que pour tout $t \in (0, T)$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s))ds, \quad (5.22)$$

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \phi(\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{k}(t)), \quad (5.23)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{Q}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0. \quad (5.25)$$

5.1.3 Résultat d'existence et d'unicité

Dans l'étude du problème PV nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Sous les hypothèses (5.9)-(5.16), le problème PV admet une solution unique $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}\}$ ayant la régularité*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; V), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{Q}), \quad \mathbf{k} \in C(0, T; L^2(\Omega)^m). \quad (5.26)$$

La démonstration du théorème 5.1 se fera en plusieurs étapes. Nous commençons par le résultat préliminaire suivant.

Lemme 5.2. *Supposons que les hypothèses (5.10)-(5.12) sont vérifiées. Pour tout $\mathbf{u} \in C^1(0, T; V)$, il existe une fonction unique $\mathcal{S}\mathbf{u} = (\mathcal{S}_1\mathbf{u}, \mathcal{S}_2\mathbf{u}) \in C(0, T; \mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m)$ telle que*

$$\mathcal{S}_1\mathbf{u}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\mathcal{S}_1\mathbf{u}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathcal{S}_2\mathbf{u}(s))ds, \quad (5.27)$$

$$\mathcal{S}_2\mathbf{u}(t) = \int_0^t \phi(\mathcal{S}_1\mathbf{u}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathcal{S}_2\mathbf{u}(s))ds + \mathbf{k}_0, \quad (5.28)$$

pour tout $t \in [0, T]$. En outre, il existe $L_S > 0$ tel que

$$|\mathcal{S}\mathbf{u}(t) - \mathcal{S}\mathbf{v}(t)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} \leq L_S \left(|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)|_V ds \right) \quad (5.29)$$

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in C(0, T; V).$

5. Problèmes de contact avec des opérateurs à mémoire et frottement

Démonstration. Soit $\mathbf{u} \in C^1(0, T; V)$. Nous considérons l'opérateur $\Lambda : C(0, T; Q \times L^2(\Omega)^m) \rightarrow C(0, T; Q \times L^2(\Omega)^m)$ défini par

$$\Lambda \boldsymbol{\eta}(t) = (\Lambda_1 \boldsymbol{\eta}(t), \Lambda_2 \boldsymbol{\eta}(t)), \quad (5.30)$$

$$\Lambda_1 \boldsymbol{\eta}(t) = \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\beta}(s)) ds, \quad (5.31)$$

$$\Lambda_2 \boldsymbol{\eta}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\beta}(s)) ds + \mathbf{k}_0, \quad (5.32)$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in C(0, T; Q \times L^2(\Omega)^m)$ et $t \in [0, T]$. Soient $\boldsymbol{\eta}_1 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1)$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2) \in C(0, T; Q \times L^2(\Omega)^m)$ et $t \in [0, T]$. Par les définitions (5.30)-(5.32) et les hypothèses (5.11)-(5.12) nous avons

$$\begin{aligned} |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)| &\leq (L_{\mathcal{G}} + L_{\phi}) \int_0^t \left(|\boldsymbol{\alpha}_1(s) - \boldsymbol{\alpha}_2(s)|_Q + |\boldsymbol{\beta}_1(s) - \boldsymbol{\beta}_2(s)|_{L^2(\Omega)^m} \right) ds \\ &\leq \sqrt{2}(L_{\mathcal{G}} + L_{\phi}) \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{Q \times L^2(\Omega)^m} ds. \end{aligned}$$

Nous utilisons Proposition 1.4 pour déduire que Λ admet un point fixe unique dans $C(0, T; Q \times L^2(\Omega)^m)$ noté $\mathcal{S}\mathbf{u} = (\mathcal{S}_1 \mathbf{u}, \mathcal{S}_2 \mathbf{u})$. De plus, nous combinons (5.30)-(5.32) et $\Lambda(\mathcal{S}\mathbf{u}) = \mathcal{S}\mathbf{u}$ pour voir que (5.27) et (5.28) satisfont.

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^1(0, T; V)$ et $t \in [0, T]$. En utilisant (5.27)-(5.28) et les hypothèses (5.10)-(5.12) pour voir que

$$\begin{aligned} &|\mathcal{S}_1 \mathbf{u}(t) - \mathcal{S}_1 \mathbf{v}(t)|_Q \\ &\leq L_{\mathcal{F}} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(t))|_Q \\ &+ L_{\mathcal{G}} \int_0^t \left(|\mathcal{S}_1 \mathbf{u}(s) - \mathcal{S}_1 \mathbf{v}(s)|_Q + |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(s))|_Q + |\mathcal{S}_2 \mathbf{u}(s) - \mathcal{S}_2 \mathbf{v}(s)|_{L^2(\Omega)^m} \right) ds \\ &\leq L_{\mathcal{F}} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)|_V + L_{\mathcal{G}} \int_0^t |\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)|_V ds + \sqrt{2} L_{\mathcal{G}} \int_0^t |\mathcal{S}\mathbf{u}(s) - \mathcal{S}\mathbf{v}(s)|_{Q \times L^2(\Omega)^m} ds. \end{aligned}$$

5.1 Problème avec compliance normale

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{S}_2 \mathbf{u}(t) - \mathcal{S}_2 \mathbf{v}(t)|_{L^2(\Omega)^m} \\
& \leq L_\phi \int_0^t \left(|\mathcal{S}_1 \mathbf{u}(s) - \mathcal{S}_1 \mathbf{v}(s)|_{\mathcal{Q}} + |\varepsilon(\mathbf{u}(s)) - \varepsilon(\mathbf{v}(s))|_{\mathcal{Q}} + |\mathcal{S}_2 \mathbf{u}(s) - \mathcal{S}_2 \mathbf{v}(s)|_{L^2(\Omega)^m} \right) ds \\
& \leq \sqrt{2} L_\phi \int_0^t |\mathcal{S} \mathbf{u}(s) - \mathcal{S} \mathbf{v}(s)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} ds + L_\phi \int_0^t |\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)|_V ds.
\end{aligned}$$

Donc nous obtenons que

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{S} \mathbf{u}(t) - \mathcal{S} \mathbf{v}(t)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} \\
& \leq |\mathcal{S}_1 \mathbf{u}(t) - \mathcal{S}_1 \mathbf{v}(t)|_{\mathcal{Q}} + |\mathcal{S}_2 \mathbf{u}(t) - \mathcal{S}_2 \mathbf{v}(t)|_{L^2(\Omega)^m} \\
& \leq K \left(|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)|_V ds + \int_0^t |\mathcal{S} \mathbf{u}(s) - \mathcal{S} \mathbf{v}(s)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} ds \right),
\end{aligned}$$

où K est une constante positive qui dépend de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et ϕ . Puis, d'après le lemme de Gronwall nous trouvons que

$$|\mathcal{S} \mathbf{u}(t) - \mathcal{S} \mathbf{v}(t)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} \leq K e^{TK} \left(|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)|_V ds \right).$$

De cette inégalité résulte que $\mathcal{S}$ satisfait l'inégalité (5.29) avec $L_{\mathcal{S}} = K e^{TK}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Ensuite, nous définissons l'opérateur $\mathcal{P} : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V \times \mathcal{Q})$ par

$$\mathcal{P} \mathbf{w} = (\mathcal{P}_1 \mathbf{w}, \mathcal{P}_2 \mathbf{w}), \quad (5.33)$$

$$\mathcal{P}_1 \mathbf{w}(t) = \int_0^t \mathbf{w}(s) ds + \mathbf{u}_0, \quad (5.34)$$

$$\mathcal{P}_2 \mathbf{w}(t) = \mathcal{S}_1(\mathcal{P}_1 \mathbf{w}(t)), \quad (5.35)$$

pour tout $\mathbf{w} \in C(0, T; V)$ et $t \in [0, T]$, où $\mathcal{S}_1(\cdot)$ a été définie dans Lemme 5.2. Aussi, nous introduisons la fonction $\varphi : V \times \mathcal{Q} \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi((\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\tau}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) \in V \times \mathcal{Q}, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (5.36)$$

Nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème $\tilde{P}V$. Trouver un champ de vitesse $\mathbf{w} : [0, T] \rightarrow V$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A} \varepsilon(\mathbf{w}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{w}(t)))_{\mathcal{Q}} + \varphi(\mathcal{P} \mathbf{w}(t), \mathbf{v}) - \varphi(\mathcal{P} \mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)) \\
& \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{w}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.
\end{aligned} \quad (5.37)$$

5. Problèmes de contact avec des opérateurs à mémoire et frottement

Lemme 5.3. Soit $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ une solution du problème PV satisfaisant (5.26). Alors le champ de vitesse $\mathbf{w}$ est une solution du Problème $\tilde{P}V$ et $\mathbf{w} \in C(0, T; V)$. Réciproquement, si $\mathbf{w} \in C(0, T; V)$ est une solution du Problème $\tilde{P}V$, alors le triplet $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ défini par

$$\mathbf{u} = \mathcal{P}_1 \mathbf{w}, \quad (5.38)$$

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{w}) + \mathcal{S}_1(\mathcal{P}_1 \mathbf{w}), \quad (5.39)$$

$$\mathbf{k} = \mathcal{S}_2(\mathcal{P}_1 \mathbf{w}), \quad (5.40)$$

est une solution du Problème PV satisfaisant (5.26).

Démonstration. Premièrement, nous supposons que $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ est une solution du Problème PV qui satisfait (5.26). Soient $t \in [0, T]$ et $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{u}}$. Alors, la condition initiale $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ implique que $\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{w}(s) ds + \mathbf{u}_0$. De (5.34) il résulte que

$$\mathbf{u}(t) = \mathcal{P}_1 \mathbf{w}(t). \quad (5.41)$$

Maintenant, on utilise (5.22)-(5.23) et la définition de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ dans Lemme 5.2 combinés avec (5.41) pour obtenir que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{w}(t)) + \mathcal{S}_1(\mathcal{P}_1 \mathbf{w}(t)), \quad (5.42)$$

$$\mathbf{k}(t) = \mathcal{S}_2(\mathcal{P}_1 \mathbf{w}(t)). \quad (5.43)$$

Utilisant (5.41) et (5.42) dans (5.24), la notation (5.36) pour φ et l'égalité $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{w}$ pour voir que $\mathbf{w}$ est une solution du Problème $\tilde{P}V$. La régularité $\mathbf{u} \in C^1(0, T; V)$ implique que $\mathbf{w} \in C(0, T; V)$.

Réciproquement, nous supposons que $\mathbf{w} \in C(0, T; V)$ est une solution du Problème $\tilde{P}V$ et le triplet $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ satisfait (5.38)-(5.40). Alors, (5.28) et (5.34) impliquent (5.25). En utilisant maintenant la définition des opérateurs $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et (5.38) dans (5.39)-(5.40) pour voir que (5.22) et (5.23) sont vérifiés. Enfin, nous substituons les égalités (5.36) et (5.39) dans (5.37) pour obtenir l'inégalité variationnelle (5.24). Par conséquent, le triple $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ est une solution du problème PV avec la régularité (5.26). $\square$

Nous présentons le résultat d'existence et d'unicité de la solution du Problème $\tilde{P}V$ suivant.

Lemme 5.4. Problème $\tilde{P}V$ admet une solution unique $\mathbf{w} \in C(0, T; V)$.

Démonstration. On définit l'opérateur $A : V \rightarrow V$ par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (5.44)$$

5.1 Problème avec compliance normale

Alors, le problème $\tilde{P}V$ est équivalent au problème de trouver un champ de vitesse $w : [0, T] \rightarrow V$ tel que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$(Aw(t), v - w(t))_V + \varphi(\mathcal{P}w(t), v) - \varphi(\mathcal{P}w(t), w(t)) \geq (f(t), v - w(t))_V. \quad (5.45)$$

Cette inégalité représente une inéquation quasi-variationnelle de la forme (2.11) dans laquelle $X = K = V$, $Y = V \times \mathcal{Q}$ et la fonction correspondante j est nulle. Pour appliquer le Théorème 2.8, on utilise (5.9) de voir que A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire il satisfait la condition (2.13) avec $m = m_A$ et $M = L_A$.

Soient $w_1, w_2 \in C(0, T; V)$ et $t \in [0, T]$. De la définition de l'opérateur $\mathcal{P}$ nous avons

$$|\mathcal{P}w_1(t) - \mathcal{P}w_2(t)|_{V \times \mathcal{Q}} \leq |\mathcal{P}_1 w_1(t) - \mathcal{P}_1 w_2(t)|_V + |\mathcal{S}_1(\mathcal{P}_1 w_1(t)) - \mathcal{S}_1(\mathcal{P}_1 w_2(t))|_{\mathcal{Q}}.$$

En appliquant l'inégalité (5.29) et nous déduisons que

$$|\mathcal{P}w_1(t) - \mathcal{P}w_2(t)|_{V \times \mathcal{Q}} \leq c \left(|\mathcal{P}_1 w_1(t) - \mathcal{P}_1 w_2(t)|_V + \int_0^t |\mathcal{P}_1 w_1(s) - \mathcal{P}_1 w_2(s)|_V ds \right).$$

De (5.34) nous avons l'existence d'une constante $r_s > 0$ telle que

$$|\mathcal{P}w_1(t) - \mathcal{P}w_2(t)|_{V \times \mathcal{Q}} \leq r_s \int_0^t |w_1(s) - w_2(s)|_V ds.$$

Ainsi, la condition (2.17) est vérifiée. Nous considérons maintenant deux éléments $(u_1, \tau_1), (u_2, \tau_2) \in V \times \mathcal{Q}$ et par (5.36) on obtient que

$$\begin{aligned} & \varphi((u_1, \tau_1), v_2) - \varphi((u_1, \tau_1), v_1) + \varphi((u_2, \tau_2), v_1) - \varphi((u_2, \tau_2), v_2) \\ & \leq |\tau_1 - \tau_2|_{\mathcal{Q}} |v_1 - v_2|_V + c_0^2(L_v + L_\tau) |u_1 - u_2|_V |v_1 - v_2|_V \\ & \leq \sqrt{2} \max\{1, c_0^2(L_v + L_\tau)\} |(u_1, \tau_1) - (u_2, \tau_2)|_{V \times \mathcal{Q}} |v_1 - v_2|_V. \end{aligned}$$

Cette inégalité entraîne que (2.14)(b) est vérifié avec $\beta = \sqrt{2} \max\{1, c_0^2(L_v + L_\tau)\}$. De plus, nous notons que la fonction $\varphi((u, \tau), \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe pour tout $(u, \tau) \in V \times \mathcal{Q}$, par conséquent, (2.14) est vérifié. Enfin, l'hypothèse (5.14) implique que $f \in C(0, T; V)$.

De Théorème 2.8, nous en concluons que la fonction $w \in C(0, T; V)$ est une solution unique du Problème $\tilde{P}V$, pour tout $t \in [0, T]$. $\square$

5.2 Problème avec réponse normale instantanée

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans Chapitre 3 de cette thèse (Figure 3.1). Nous considérons un corps élasto-viscoplastique en contact avec une base réactive. Le contact est modélisé par une condition de réponse normale instantanée associée à une version de la loi de frottement de Coulomb.

5.2.1 Problème mécanique et hypothèses

La formulation classique de ce problème est la suivante.

Problème Q. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \phi(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{k}) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.47)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.48)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (5.49)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (5.50)$$

$$-\sigma_v = p_v(\dot{u}_v) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.51)$$

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_\tau| &\leq p_\tau(\dot{u}_v), \\ -\sigma_\tau &= p_\tau(\dot{u}_v) \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.52)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.53)$$

En gardant les équations du problème P et en remplaçant les conditions de compliance normale avec frottement (5.6) et (5.7) par les conditions de réponse normale instantanée avec frottement (5.51) et (5.52), nous obtenons le problème Q .

Pour l'étude du problème Q nous supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A}$ et l'opérateur d'élasticité $\mathcal{F}$, les fonction $\mathcal{G}$ et ϕ satisfont (5.9), (5.10), (5.11) et (5.12) respectivement. Les forces volumiques et les tractions surfaciques ont la régularité (5.14) et les données initiales vérifient (5.15). De plus, nous supposons que les fonctions de

5.2 Problème avec réponse normale instantanée

contact $p_e(e = \nu, \tau)$ satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & p_e : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ (b) & \text{Il existe } L_e > 0 \text{ tel que} \\ & |p_e(\mathbf{x}, r_1) - p_e(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_e |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ (c) & \text{l'application } \mathbf{x} \mapsto p_e(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ (d) & \text{l'application } \mathbf{x} \mapsto p_e(\mathbf{x}, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (5.54)$$

On note que la différence entre les hypothèses (5.13) et (5.54) réside dans la condition (5.54)(d) qui est plus générale que (5.13)(d). Nous notons également que les résultats impliquant la condition (5.13) présenté dans la section précédente restent encore si nous le remplaçons par condition (5.54). Néanmoins, dans l'étude du problème de compliance normale, nous avons choisi d'utiliser (5.13) pour des raisons physiques. En effet, la condition (5.13)(d) associée à la condition de compliance normale que quand il y a une séparation entre le corps et la base, les réactions normales et tangentielles disparaissent, ce qui représente une description précise du processus de contact.

En revanche, cette situation ne pouvait pas se présenter pour les modèles de contact avec une réponse normale instantanée. En effet, la condition de réponse normale instantanée modélise les situations lorsque la base est lubrifiée, et dans ce cas, même s'il y a séparation entre le corps et la base, le fluide pouvait combler l'espace et par conséquent, la réaction normale et tangentielle ne pouvait pas disparaître. Pour conclure, la condition (5.13)(d) n'est pas appropriée dans ce cas et pour cette raison nous la remplaçons par la condition (5.54)(d).

Nous considérons la fonction $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\tau) |\mathbf{v}_\tau| da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (5.55)$$

5.2.2 Formulation variationnelle

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green (3.14), nous obtenons la formulation variationnelle du Problème $\mathcal{Q}$ suivante.

Problème $\mathcal{QV}$. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)^m$

tels que pour tout $t \in (0, T)$

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \quad (5.56)$$

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)), \quad (5.57)$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{Q}} + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, \quad (5.58)$$

$$u(0) = u_0, \quad k(0) = k_0. \quad (5.59)$$

5.2.3 Résultat d'existence et d'unicité

Nous présentons le résultat d'existence et d'unicité de la solution du Problème QV suivant.

Théorème 5.5. *Sous les hypothèses (5.9)-(5.12), (5.14)-(5.15) et (5.54), il existe $L_0 > 0$ qui ne dépend que de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$ et $\mathcal{A}$, tel que, si $L_v + L_\tau < L_0$, alors le problème QV admet une solution unique $\{u, \sigma, k\}$ ayant la régularité suivante*

$$u \in C^1(0, T; V), \quad \sigma \in C(0, T; \mathcal{Q}), \quad k \in C(0, T; L^2(\Omega)^m). \quad (5.60)$$

Pour donner une forme équivalente du problème QV, nous utilisons Lemme 5.2 et l'opérateur $\mathcal{P}$ défini par (5.33)-(5.35). La différence réside dans le choix de la fonction $\varphi : \mathcal{Q} \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(\tau, v) = (\tau, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \quad \forall \tau \in \mathcal{Q}, \forall v \in V. \quad (5.61)$$

Problème $\tilde{Q}V$. Trouver un champ de vitesse $w : [0, T] \rightarrow V$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(w(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(w(t)))_{\mathcal{Q}} + \varphi(\mathcal{P}_2 w(t), v) - \varphi(\mathcal{P}_2 w(t), w(t)) \\ & + j(w(t), v) - j(w(t), w(t)) \geq (f(t), v - w(t))_V \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Dans l'étude du problème $\tilde{Q}V$ nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.6. *Sous les hypothèses (5.9)-(5.12), (5.14)-(5.15) et (5.54), il existe $L_0 > 0$ qui ne dépend que de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$ et $\mathcal{A}$ tel que, si $L_v + L_\tau < L_0$, alors le problème $\tilde{Q}V$ admet une solution unique $w \in C(0, T; V)$.*

Démonstration. Soit l'opérateur A défini par (7.52). Alors, le problème $\tilde{Q}V$ est équivalent au problème de recherche d'un champ de vitesse $w : [0, T] \rightarrow V$ tel que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} & (Aw(t), v - w(t))_V + \varphi(\mathcal{P}_2 w(t), v) - \varphi(\mathcal{P}_2 w(t), w(t)) + j(w(t), v) - j(w(t), w(t)) \\ & \geq (f(t), v - w(t))_V \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (5.63)$$

5.3 Résultat de convergence

L'inégalité (5.63) représente une inéquation quasi-variationnelle de la forme (2.11) telle que $X = K = V$ et $Y = \mathcal{Q}$. Par l'hypothèse (5.9) il est clair que A satisfait la condition (2.13) avec $m = m_{\mathcal{A}}$. L'hypothèse (5.14) implique que $f \in C(0, T; V)$. Il est clair que la fonction φ donnée par (5.61) est vérifiée la condition (2.14). Soient $w_1, w_2 \in C(0, T; V)$. La définition (5.35) et l'inégalité (5.29) nous donnent

$$|\mathcal{P}_2 w_1(t) - \mathcal{P}_2 w_2(t)|_{\mathcal{Q}} \leq L_S \left(|\mathcal{P}_1 w_1(t) - \mathcal{P}_1 w_2(t)|_V + \int_0^t |\mathcal{P}_1 w_1(s) - \mathcal{P}_1 w_2(s)|_V ds \right).$$

Cette inégalité et l'égalité (5.34) nous donnent l'existence d'une constante $r_s > 0$ telle que

$$|\mathcal{P}_2 w_1(t) - \mathcal{P}_2 w_2(t)|_{\mathcal{Q}} \leq r_s \int_0^t |w_1(s) - w_2(s)|_V ds.$$

Ce qui implique que (2.17) est vérifié. Enfin, on utilise (5.54) et (3.11) pour voir que la fonction j définie par (5.55) est vérifiée la condition (2.15)(a) et de plus

$$j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq c_0^2(L_\nu + L_\tau)|u_1 - u_2|_V|v_1 - v_2|_V.$$

Ce qui montre que j satisfait la condition (2.15)(b) avec $\alpha = c_0^2(L_\nu + L_\tau)$. En appliquant le Théorème 2.8, nous en concluons que si $c_0^2(L_\nu + L_\tau) < m_{\mathcal{A}}$ alors l'inégalité (5.63) admet une solution unique $w \in C(0, T; V)$ et nous pouvons prendre $L_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{c_0^2}$. $\square$

5.3 Résultat de convergence

Dans cette section, nous étudions la dépendance de la solution du Problème PV lorsqu'on introduit une perturbation de certaines données. Pour cela, nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses (5.9)-(5.16) sont vérifiées et nous notons par (u, σ, k) la solution du Problème PV obtenue par Théorème 5.1. Pour un paramètre $\rho > 0$, soient $\mathcal{F}_\rho$, p_e^ρ , $u_{0\rho}$ et $k_{0\rho}$ des perturbations de $\mathcal{F}$, p_e ($e = \nu, \tau$), u_0 et k_0 , respectivement, qui satisfont les conditions (5.10), (5.13) et (5.15). Nous définissons la fonction $j_\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_\rho(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu^\rho(u_\nu - g)v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau^\rho(u_\nu - g)|v_\tau| da \quad \forall u, v \in V. \quad (5.64)$$

Avec ces notations, nous considérons le problème perturbé suivant.

5. Problèmes de contact avec des opérateurs à mémoire et frottement

Problème PV_ρ . Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_\rho : [0, T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\sigma_\rho : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k}_\rho : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)^m$ tels que pour tout $t \in (0, T)$

$$\sigma_\rho(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) + \mathcal{F}_\rho\varepsilon(\mathbf{u}_\rho(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\rho(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(s)), \varepsilon(\mathbf{u}_\rho(s)), \mathbf{k}_\rho(s))ds, \quad (5.65)$$

$$\dot{\mathbf{k}}_\rho(t) = \boldsymbol{\phi}(\sigma_\rho(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)), \varepsilon(\mathbf{u}_\rho(t)), \mathbf{k}_\rho(t)), \quad (5.66)$$

$$(\sigma_\rho(t), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)))_{\mathcal{Q}} + j_\rho(\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{v}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho(t), \dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\rho(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (5.67)$$

$$\mathbf{u}_\rho(0) = \mathbf{u}_{0\rho}, \quad \mathbf{k}_\rho(0) = \mathbf{k}_{0\rho}. \quad (5.68)$$

Il résulte du Théorème 5.1 que, pour chaque $\rho > 0$, le problème PV_ρ admet une solution unique $(\mathbf{u}_\rho, \sigma_\rho, \mathbf{k}_\rho)$ satisfait $\mathbf{u}_\rho \in C^1(0, T; V)$, $\sigma_\rho \in C(0, T; \mathcal{Q})$ et $\mathbf{k}_\rho \in C(0, T; L^2(\Omega)^m)$. Considérons maintenant les hypothèses suivantes sur les opérateurs d'élasticité $\mathcal{F}_\rho$ et $\mathcal{F}$ ainsi que sur les fonctions de compliance normale p_e^ρ et p_e ($e = \nu, \tau$).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que} \\ (a) |\mathcal{F}_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \varepsilon)| \leq F(\rho) \\ \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \text{ pour chaque } \rho > 0. \\ (b) \lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho) = 0. \end{array} \right. \quad (5.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } G_e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que} \\ (a) |p_e^\rho(\mathbf{x}, r) - p_e(\mathbf{x}, r)| \leq G_e(\rho) \\ \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \text{ pour chaque } \rho > 0. \\ (b) \lim_{\rho \rightarrow 0} G_e(\rho) = 0. \end{array} \right. \quad (5.70)$$

$$\mathbf{u}_{0\rho} \rightarrow \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0. \quad (5.71)$$

$$\mathbf{k}_{0\rho} \rightarrow \mathbf{k}_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)^m \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0. \quad (5.72)$$

Nous avons le résultat de convergence suivant.

Théorème 5.7. *Sous les hypothèses (5.69)-(5.72), la solution $(\mathbf{u}_\rho, \sigma_\rho, \mathbf{k}_\rho)$ du Problème PV_ρ converge vers la solution $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ du Problème PV, c'est-à-dire*

$$\mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } C^1(0, T; V), \quad (5.73)$$

$$\sigma_\rho \rightarrow \sigma \quad \text{dans } C^1(0, T; \mathcal{Q}), \quad (5.74)$$

$$\mathbf{k}_\rho \rightarrow \mathbf{k} \quad \text{dans } C(0, T; L^2(\Omega)^m), \quad (5.75)$$

lorsque $\rho \rightarrow 0$.

5.3 Résultat de convergence

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Lemme 5.2 permet de définir l'opérateur $\mathcal{S}_\rho : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; Q \times L^2(\Omega)^m)$ par

$$\mathcal{S}_\rho \mathbf{u} = (\mathcal{S}_{1\rho} \mathbf{u}, \mathcal{S}_{2\rho} \mathbf{u}), \quad (5.76)$$

$$\mathcal{S}_{1\rho} \mathbf{u}(t) = \mathcal{F}_\rho \varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\mathcal{S}_{1\rho} \mathbf{u}(s), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \mathcal{S}_{2\rho} \mathbf{u}(s)) ds, \quad (5.77)$$

$$\mathcal{S}_{2\rho} \mathbf{u}(t) = \int_0^t \phi(\mathcal{S}_{1\rho} \mathbf{u}(s), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \mathcal{S}_{2\rho} \mathbf{u}(s)) ds + \mathbf{k}_{0\rho}. \quad (5.78)$$

Avec ces notations le problème PV_ρ devient

$$\sigma_\rho(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) + \mathcal{S}_{1\rho} \mathbf{u}_\rho(t), \quad (5.79)$$

$$\mathbf{k}_\rho(t) = \mathcal{S}_{2\rho} \mathbf{u}_\rho(t), \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{S}_{1\rho} \mathbf{u}_\rho(t), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & + j_\rho(\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{v}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho(t), \dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\rho(t))_V \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\mathbf{u}_\rho(0) = \mathbf{u}_{0\rho}, \quad \mathbf{k}_\rho(0) = \mathbf{k}_{0\rho}. \quad (5.82)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{S}_1 \mathbf{u}(t), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Soient $\rho > 0$ et $t \in [0, T]$, nous prenons $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(t)$ dans (5.81) et $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}_\rho(t)$ dans (5.83) et nous additionnons les inégalités qui en résultent pour obtenir

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & \leq (\mathcal{S}_{1\rho} \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S}_1 \mathbf{u}(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & + j_\rho(\mathbf{u}_\rho(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho(t), \dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) + j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)). \end{aligned} \quad (5.84)$$

Nous estimons maintenant chacun des termes dans l'inégalité précédente. Tout d'abord, nous utilisons l'hypothèse (5.9) pour déduire que

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{Q}} \geq m_{\mathcal{A}} |\dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2. \quad (5.85)$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne

$$(\mathcal{S}_{1\rho} \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S}_1 \mathbf{u}(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)))_{\mathcal{Q}} \leq |\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S} \mathbf{u}(t)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} |\dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V. \quad (5.86)$$

5. Problèmes de contact avec des opérateurs à mémoire et frottement

Par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (5.29) nous avons que

$$|\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S} \mathbf{u}(t)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} \leq e^{TK} \left(F(\rho) + K \int_0^t |\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds + |\mathbf{k}_{0\rho} - \mathbf{k}_0|_{L^2(\Omega)^m} \right). \quad (5.87)$$

Puis, nous notons $L_S = Ke^{TK}$, alors par (5.86) et (5.87) nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{S}_{1\rho} \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S}_1 \mathbf{u}(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & \leq \left(e^{TK} F(\rho) + L_S \int_0^t |\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds + e^{TK} |\mathbf{k}_{0\rho} - \mathbf{k}_0|_{L^2(\Omega)^m} \right) |\dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Nous utilisons les définitions (5.17) et (5.64) pour obtenir

$$\begin{aligned} & j_\rho(\mathbf{u}_\rho(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho(t), \dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) + j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & \leq \int_{\Gamma_3} \left(p_\nu^\rho(u_\nu - g) - p_\nu(u_\nu - g) \right) (\dot{u}_\nu - \dot{u}_{\rho\nu}) da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} \left(p_\tau^\rho(u_\nu - g) - p_\tau(u_\nu - g) \right) (|\dot{\mathbf{u}}_\tau| - |\dot{\mathbf{u}}_{\rho\tau}|) da \\ & \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu^\rho(u_\nu - g) - p_\nu(u_\nu - g)| |\dot{u}_\nu - \dot{u}_{\rho\nu}| da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} |p_\tau^\rho(u_\nu - g) - p_{\rho\tau}(u_{\rho\nu} - g)| (|\dot{\mathbf{u}}_\tau| - |\dot{\mathbf{u}}_{\rho\tau}|) da. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité (2.8) et l'hypothèse (5.70) et après quelques calculs nous trouvons que

$$\begin{aligned} & j_\rho(\mathbf{u}_\rho(t), \dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}(t)) + j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) - j(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_\rho(t)) \\ & \leq \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} c_0 (G_\nu(\rho) + G_\tau(\rho)) |\dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Nous notons par $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction donnée par

$$G(\rho) = \text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} c_0 (G_\nu(\rho) + G_\tau(\rho)).$$

5.3 Résultat de convergence

Nous combinons les inégalités (5.84), (5.85), (5.88) et (5.89) nous obtenons

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{u}}_\rho(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V &\leq \frac{e^{TK}}{m_{\mathcal{A}}} F(\rho) + \frac{L_{\mathcal{S}}}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds + \frac{e^{TK}}{m_{\mathcal{A}}} |\mathbf{k}_{0\rho} - \mathbf{k}_0|_{L^2(\Omega)^m} + \frac{G(\rho)}{m_{\mathcal{A}}} \\ &\leq \delta \left(F(\rho) + \int_0^t |\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds + |\mathbf{k}_{0\rho} - \mathbf{k}_0|_{L^2(\Omega)^m} + G(\rho) \right), \end{aligned} \quad (5.90)$$

où $\delta = \max \left\{ \frac{e^{TK}}{m_{\mathcal{A}}}, \frac{L_{\mathcal{S}}}{m_{\mathcal{A}}}, \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \right\}$. Cette inégalité implique que

$$\begin{aligned} \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\rho(s) - \dot{\mathbf{u}}(s)|_V ds &\leq \delta \left(F(\rho) + |\mathbf{k}_{0\rho} - \mathbf{k}_0|_{L^2(\Omega)^m} + G(\rho) \right) \\ &\quad + \delta \int_0^t \int_0^s |\mathbf{u}_\rho(r) - \mathbf{u}(r)|_V dr ds. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Nous utilisons (5.25), (5.68) et (5.71) pour obtenir que

$$|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)|_V \leq c \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\rho(s) - \dot{\mathbf{u}}(s)|_V ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.92)$$

Nous substituons (5.91) dans (5.92) et nous utilisons l'inégalité de Gronwall pour voir que

$$|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)|_V \leq c \left(F(\rho) + |\mathbf{k}_{0\rho} - \mathbf{k}_0|_{L^2(\Omega)^m} + G(\rho) \right). \quad (5.93)$$

Il résulte maintenant de (5.69), (5.70) et (5.72) que

$$\mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0 \quad \text{dans } C^1(0, T; V). \quad (5.94)$$

D'autre part, les inégalités (5.79), (5.80), (5.39) et (5.40) nous donnent

$$|\boldsymbol{\sigma}_\rho(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)|_{\mathcal{Q}} + |\mathbf{k}_\rho(t) - \mathbf{k}(t)|_{L^2(\Omega)^m} \leq F(\rho) + \sqrt{2} |\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S} \mathbf{u}(t)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m}, \quad (5.95)$$

5. Problèmes de contact avec des opérateurs à mémoire et frottement

comme

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S} \mathbf{u}(t)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} \\
& \leq |\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S}_\rho \mathbf{u}(t)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} + |\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}(t) - \mathcal{S} \mathbf{u}(t)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} \\
& \leq L_{\mathcal{S}} \left(|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right) \\
& \quad + e^{Tk} \left(F(\rho) + K \int_0^t |\mathbf{u}_\rho(s) - \mathbf{u}(s)|_V + |\mathbf{k}_{0\rho} - \mathbf{k}_0|_{L^2(\Omega)^m} \right).
\end{aligned}$$

Cette inégalité combinée avec la convergence (5.94), les hypothèses (5.72) et (5.69)(b) implique que

$$|\mathcal{S}_\rho \mathbf{u}_\rho(t) - \mathcal{S} \mathbf{u}(t)|_{\mathcal{Q} \times L^2(\Omega)^m} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0. \quad (5.96)$$

Donc, l'hypothèse (5.69), la convergence (5.96) et l'inégalité (5.95) montrent que les convergences (5.74) et (5.75) sont vérifiées. $\square$

En plus de l'intérêt mathématique du résultat de convergence (5.73)-(5.75), il est important du point de vue mécanique, car il indique que la solution faible du Problème P dépend continûment de la fonction de compliance normale, de l'opérateur d'élasticité et des données initiales.

Chapitre 6

Problème de contact sans frottement en piézoélectricité

Ce chapitre est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact sans frottement entre un matériau piézoélectrique avec variable interne d'état et une base adhésive et conductrice où le processus est mécaniquement dynamique et électriquement statique. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale où l'adhésion est prise en considération et une condition de conductivité électrique régularisée. Après avoir établi la formulation variationnelle et avoir posé les hypothèses nécessaires, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration repose sur des équations d'évolution non linéaires avec des opérateurs monotones, sur des équations différentielles et des arguments de point fixe. Ce chapitre a fait l'objet de la publication [36].

Sommaire

6.1	Problème mécanique et hypothèses	95
6.2	Formulation variationnelle	100
6.3	Résultat d'existence et d'unicité	101

6.1 Problème mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans Chapitre 3 de cette thèse (Figure 3.3). On considère un corps électro-élasto-viscoplastique en contact avec une base adhésive et conductrice. Le contact est modélisé avec une condition de compliance normale avec adhésion et une condition de conductivité électrique régularisée. Sous ces considérations, le problème mécanique considéré se formule de la façon suivante.

6. Problème de contact sans frottement en piézoélectricité

Problème P. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s))ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \phi(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{k}) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.2)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}\nabla\varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.3)$$

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \text{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.4)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (6.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (6.7)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (6.8)$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta)\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (6.9)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (6.10)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (6.11)$$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{v} = q_b \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (6.12)$$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{v} = \psi(u_\nu)\Phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (6.13)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.14)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (6.15)$$

Les équations (6.1)-(6.3) représentent la loi constitutive électro-élasto-viscoplastique avec variable interne d'état. Les équations (6.4)-(6.5) représentent l'équation du mouvement et l'équation d'équilibre électrique, respectivement. Les conditions (6.6) et (6.7) sont les conditions aux limites de déplacement-traction. La condition (6.8) représente la condition de compliance normale avec adhésion et (6.9) représente la condition de contact adhésif sur le plan tangentiel. L'équation (6.10) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion avec la condition initiale (6.15), où β_0 est un champ d'adhésion donné. Les équations (6.11)-(6.12) représentent les conditions aux limites électriques. (6.13) est la condition de contact électrique sur Γ_3 . Finalement, dans (6.14), $\mathbf{u}_0$ est le déplacement initial, $\mathbf{v}_0$ est la vitesse initiale et $\mathbf{k}_0$ est la variable interne d'état initiale.

6.1 Problème mécanique et hypothèses

Pour l'étude variationnelle du problème mécanique (6.1)-(6.15) nous avons besoin d'introduire les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Ils existent des constantes } C_{\mathcal{A}}^1, C_{\mathcal{A}}^2 > 0 \text{ telles que} \\ \quad |\mathcal{A}(x, \varepsilon)| \leq C_{\mathcal{A}}^1 |\varepsilon| + C_{\mathcal{A}}^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ d) \text{ L'application } \varepsilon \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (6.16)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (6.17)$$

L'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (6.18)$$

La fonction $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\phi} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\phi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \phi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\phi} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } L^2(\Omega)^m. \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Le tenseur de permittivité électrique $\mathbf{B} = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \mathbf{B}(x, E) = (b_{ij}(x) E_j) \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \quad b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ c) \text{ Il existe une constante } m_B > 0 \text{ telle que} \\ \quad \mathbf{B} E \cdot E \geq m_B |E|^2 \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (6.20)$$

6. Problème de contact sans frottement en piézoélectricité

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\begin{cases} a) & \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{jk}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) & e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{cases} \quad (6.21)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\begin{cases} a) & \text{Il existe une constante } L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ & |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ b) & \text{L'application } x \mapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ c) & p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \quad (6.22)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\begin{cases} a) & \text{Il existe une constante } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ & |p_\tau(x, d_1) - p_\tau(x, d_2)| \leq L_\tau |d_1 - d_2| \quad \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ b) & \text{Il existe } M_\tau > 0 \text{ tel que } |p_\tau(x, d)| \leq M_\tau \quad \forall d \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ c) & \text{L'application } x \mapsto p_\tau(x, d) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } d \in \mathbb{R}. \\ d) & \text{L'application } x \mapsto p_\tau(x, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{cases} \quad (6.23)$$

Un exemple d'une fonction de compliance normale p_ν qui satisfait les conditions (6.22) est donné par $p_\nu(r) = c_\nu r_+$ où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$.

La fonction de conductivité électrique de surface $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\begin{cases} a) & \text{Il existe une constante } L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ & |\psi(x, u_1) - \psi(x, u_2)| \leq L_\psi |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ b) & \text{Il existe } M_\psi > 0 \text{ tel que } |\psi(x, u)| \leq M_\psi \quad \forall u \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ c) & \text{L'application } x \mapsto \psi(x, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ d) & \psi(x, u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \quad (6.24)$$

Nous supposons que la masse volumique satisfait :

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^*, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \quad (6.25)$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques, les tractions surfaciques et la densité des charges électriques ont la régularité

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (6.26)$$

$$q_0 \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_b \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (6.27)$$

Les coefficients d'adhésion satisfont :

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (6.28)$$

6.1 Problème mécanique et hypothèses

Finalement, les données initiales satisfont :

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{v}_0 \in H, \quad \mathbf{k}_0 \in Y. \quad (6.29)$$

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (6.30)$$

$$\varphi_0 \in L^2(\Gamma_3). \quad (6.31)$$

Nous allons utiliser un produit scalaire modifié sur l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)^d$ donnée par

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H = (\rho \mathbf{u}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H,$$

et soit $\|\cdot\|_H$ la norme associée, c'est-à-dire

$$\|\mathbf{v}\|_H = (\rho \mathbf{v}, \mathbf{v})_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{v} \in H.$$

En utilisant l'hypothèse (6.25) il vient que $\|\cdot\|_H$ et $|\cdot|_H$ sont des normes équivalentes sur H . De plus l'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Nous notons par V' l'espace dual de V . En identifiant H avec son propre dual nous obtenons le triplet de Gelfand $V \subset H \subset V'$. Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour la dualité entre V' et V et rappelons que

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H \quad \forall \mathbf{u} \in H, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (6.32)$$

Nous définissons $j : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $h : V \times W \rightarrow W$, $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V'$ et $q : [0, T] \rightarrow W$, respectivement par

$$j(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau da - \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu da, \quad (6.33)$$

$$(h(\mathbf{u}, \varphi), \zeta)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu) \Phi(\varphi - \varphi_0) \zeta da, \quad (6.34)$$

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da, \quad (6.35)$$

$$(q(t), \zeta)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \zeta dx - \int_{\Gamma_b} q_b(t) \zeta da, \quad (6.36)$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\varphi, \zeta \in W$ et $t \in [0, T]$. Nous notons que de (6.26)-(6.27) il vient que

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; V'), \quad q \in W^{1,p}(0, T; W). \quad (6.37)$$

6.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green (3.14), les relations (6.4), (6.32) et la définition (6.35), nous obtenons

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu v_\nu da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau da.$$

Puis, en utilisant les conditions (6.8) et (6.9) combinées avec la définition (6.33), pour voir que

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} + j(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Maintenant, nous utilisons la formule de Green (3.21) pour les inconnues électriques du problème ainsi que les conditions (6.5), (6.11), (6.12) et la définition (6.36) pour obtenir

$$(\mathbf{D}(t), \nabla \zeta)_H = (q(t), \zeta)_W + \int_{\Gamma_3} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da.$$

Combinons cette dernière égalité avec (6.3), (6.13) et la définition (6.34), nous trouvons

$$(\mathbf{B} \nabla \varphi(t), \nabla \zeta)_H - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla \zeta)_H + (h(\mathbf{u}(t), \varphi(t)), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W.$$

Alors, la formulation variationnelle du problème mécanique (6.1)-(6.15) est la suivante.

Problème PV. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$, un champ potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : [0, T] \rightarrow Y$ tels que pour p.p. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds, \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \phi(\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{k}(t)), \quad (6.39)$$

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} + j(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (6.40)$$

$$(\mathbf{B} \nabla \varphi(t), \nabla \zeta)_H - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla \zeta)_H + (h(\mathbf{u}(t), \varphi(t)), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W, \quad (6.41)$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(t)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau(t))|^2) - \epsilon_a)_+, \quad (6.42)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (6.43)$$

6.3 Résultat d'existence et d'unicité

Pour étudier ce problème, nous posons l'hypothèse de petitesse suivante.

$$M_\psi \leq \frac{m_B}{\tilde{c}_0^2}, \quad (6.44)$$

où M_ψ , m_B et $\tilde{c}_0$ sont donnés dans (6.24), (6.20) et (3.19) respectivement. L'élimination de cette hypothèse reste une question pour les futures recherches, car elle est faite pour des raisons mathématiques.

L'existence et l'unicité de la solution du problème PV sont données dans la section suivante. Pour cela, nous considérons la remarque suivante.

Remarque 1. Nous notons que, dans les problèmes P et PV nous n'avons pas besoin d'imposer explicitement la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. De plus, l'équation (6.42) garantit que $\beta(x, t) \leq \beta_0(x)$ et par conséquent, l'hypothèse (6.30) indique que $\beta(x, t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. D'autre part, si $\beta(x, t_0) = 0$ en t_0 alors il vient de (6.42) que $\beta(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et par conséquent, $\beta(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Nous concluons que $0 \leq \beta(x, t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. $x \in \Gamma_3$.

6.3 Résultat d'existence et d'unicité

Pour établir l'existence et l'unicité du problème PV , nous avons le théorème suivant.

Théorème 6.1. *Sous les hypothèses (6.16)-(6.31) et (6.44) le problème PV admet une solution unique $\{\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k}, \varphi, \beta\}$ satisfaisant*

$$\mathbf{u} \in H^1(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; V'), \quad (6.45)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q}), \quad \text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V'), \quad (6.46)$$

$$\mathbf{k} \in W^{1,2}(0, T; Y), \quad (6.47)$$

$$\varphi \in W^{1,p}(0, T; W), \quad (6.48)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z. \quad (6.49)$$

Nous concluons que, sous les hypothèses (6.16)-(6.31) et (6.44) le problème mécanique (6.1)-(6.15) admet une solution faible unique avec la régularité (6.45)-(6.49).

La démonstration du Théorème 6.1 est obtenue en plusieurs étapes. Elle repose sur un résultat classique concernant les équations d'évolutions avec des opérateurs monotones et des arguments de point fixe.

Dans la première étape, nous considérons le problème auxiliaire suivant où la fonction $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$.

6. Problème de contact sans frottement en piézoélectricité

Problème PV_η . Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tel que pour p.p. $t \in (0, T)$

$$(\ddot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} + (\boldsymbol{\eta}^1(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (6.50)$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \quad (6.51)$$

Concernant le problème PV_η nous avons le résultat suivant.

Lemme 6.2. *Il existe une solution unique du problème PV_η ayant la régularité (6.45).*

Démonstration. Voir la démonstration du Lemme 4.2 (Chapitre 4). □

Dans la deuxième étape, nous utilisons la solution $\mathbf{u}_\eta$ du problème PV_η pour formuler le second problème auxiliaire suivant.

Problème QV_η . Trouver un champ potentiel électrique $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\zeta)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \nabla\zeta)_H + (h(\mathbf{u}_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W, \quad (6.52)$$

pour tout $\zeta \in W$ et $t \in [0, T]$.

Nous avons le résultat suivant pour le problème QV_η .

Lemme 6.3. *QV_η admet une solution unique φ_η qui satisfait la régularité (6.48).*

De plus, si φ_i représente la solution du Problème QV_{η_i} pour η_i , $i = 1, 2$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.53)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. En utilisant le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur $A_\eta(t) : W \rightarrow W$ par :

$$(A_\eta(t)\varphi, \zeta)_W = (\mathbf{B}\nabla\varphi, \nabla\zeta)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \nabla\zeta)_H + (h(\mathbf{u}_\eta(t), \varphi), \zeta)_W, \quad (6.54)$$

pour tout $\varphi, \zeta \in W$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in W$, les hypothèses (6.20) et (6.34) impliquent que

$$\begin{aligned} & (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \\ & \geq m_B|\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + \int_{\Gamma_3} \psi(u_{\eta\nu}(t))(\Phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \Phi(\varphi_2 - \varphi_0))(\varphi_1 - \varphi_2)da. \end{aligned}$$

La positivité de ψ combinée avec la monotonie de la fonction Φ nous donnent

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_B|\varphi_1 - \varphi_2|_W^2, \quad (6.55)$$

6.3 Résultat d'existence et d'unicité

alors $A_\eta(t)$ est un opérateur fortement monotone sur W . D'autre part, nous utilisons à nouveau (6.20), (6.21), (6.24) et (6.34) nous avons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \zeta)_W \leq c_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W |\zeta|_W + \int_{\Gamma_3} M_\psi |\varphi_1 - \varphi_2| |\zeta| da \quad \forall \zeta \in W, \quad (6.56)$$

où c_B est une constante positive qui dépend de $\mathbf{B}$. Il résulte de (6.56) et (3.19) que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \zeta)_W \leq (c_B + M_\psi \tilde{c}_0^2) |\varphi_1 - \varphi_2|_W |\zeta|_W,$$

ainsi,

$$|A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2|_W \leq (c_B + M_\psi \tilde{c}_0^2) |\varphi_1 - \varphi_2|_W, \quad (6.57)$$

ce qui montre que $A_\eta : W \rightarrow W$ est de Lipschitz. Puisque A_η est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur W , nous déduisons qu'il existe un élément unique $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$A_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t). \quad (6.58)$$

Nous combinons maintenant (6.54) et (6.58) pour démontrer que $\varphi_\eta(t) \in W$ est l'unique solution de l'équation variationnelle non linéaire (6.52).

Ensuite, nous montrons que $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$. Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$. Pour simplifier l'écriture on note $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i$, $u_{\eta\nu}(t_i) = u_i$, $q(t_i) = q_i$, pour $i = 1, 2$. En utilisant (6.52), (6.20), (6.21) et (6.34) nous trouvons

$$\begin{aligned} m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 &\leq c_\mathcal{E} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W |\varphi_1 - \varphi_2|_W \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} |\psi(u_1)\Phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2)\Phi(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da, \end{aligned} \quad (6.59)$$

où $c_\mathcal{E}$ est une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$.

De $|\psi(u_i)| \leq M_\psi$, $|\Phi(\varphi_1 - \varphi_0)| \leq L$, la fonction de Lipschitz ψ et Φ et l'inégalité (3.19) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_3} |\psi(u_1)\Phi(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2)\Phi(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \int_{\Gamma_3} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 da + L_\psi L \int_{\Gamma_3} |u_1 - u_2| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ &\leq M_\psi \tilde{c}_0^2 |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + L_\psi L c_0 \tilde{c}_0 |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W. \end{aligned}$$

L'insertion de cette dernière inégalité dans (6.59) nous donne

$$m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq (c_\mathcal{E} + L_\psi L c_0 \tilde{c}_0) |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V + |q_1 - q_2|_W + M_\psi \tilde{c}_0^2 |\varphi_1 - \varphi_2|_W. \quad (6.60)$$

6. Problème de contact sans frottement en piézoélectricité

Il résulte de l'inégalité (6.60) et l'hypothèse (6.44) que

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq c(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V + |q_1 - q_2|_W). \quad (6.61)$$

Car $\mathbf{u}_\eta \in C^1(0, T; H)$ et $q \in W^{1,p}(0, T; W)$, l'inégalité (6.61) implique que $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$.

Soient $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ et $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, pour $i = 1, 2$. nous utilisons (6.52) et des arguments semblables à ceux utilisés dans la démonstration de (6.60) pour déduire que

$$m_B |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq (c_\mathcal{E} + L_\psi L_{C_0} \tilde{c}_0) |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V + M_\psi \tilde{c}_0^2 |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W,$$

pour tout $t \in [0, T]$. Cette inégalité combinée avec l'hypothèse (6.44) nous donne (6.53). $\square$

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta$ que nous avons obtenu dans Lemme 6.2 et nous considérons le problème suivant.

Problème PV_β . Trouver un champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = - \left(\beta_\eta(t) \left(\gamma_\nu(R_\nu(\mathbf{u}_{\eta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau}(t))|^2 \right) - \epsilon_a \right)_+, \quad (6.62)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0, \quad (6.63)$$

où $\mathbf{u}_{\eta\nu}, \mathbf{u}_{\eta\tau}$ désignent respectivement la composante normale et tangentielle de la fonction $\mathbf{u}_\eta$. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 6.4. *Le problème PV_β admet une solution unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z$.*

Démonstration. Soit l'application $F_\eta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ définie par

$$F_\eta(t, \beta) = - \left(\beta \left(\gamma_\nu(R_\nu(\mathbf{u}_{\eta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau}(t))|^2 \right) - \epsilon_a \right)_+,$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $\beta \in L^2(\Gamma_3)$. Il résulte d'après les propriétés des opérateurs de troncature R_ν et $\mathbf{R}_\tau$ que F_η est de Lipschitz par rapport à la seconde variable, et elle est uniformément continue par rapport au temps. De plus, pour tout $\beta \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \rightarrow F_\eta(t, \beta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. L'application F_η est lipschitzienne par rapport au second variable β et uniformément continue par rapport au temps t . Alors, le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence d'une fonction unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ qui satisfait (6.62) et (6.63). En outre, les arguments utilisés dans Remarque 1 indiquent que $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Par conséquent, par la définition de l'ensemble Z , on trouve que $\beta_\eta \in Z$, ce qui conclut la démonstration du Lemme 6.4. $\square$

6.3 Résultat d'existence et d'unicité

Maintenant, nous définissons $\mathbf{k}_\eta \in W^{1,2}(0, T; Y)$ par

$$\mathbf{k}_\eta(t) = \mathbf{k}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\eta}^2(s) ds. \quad (6.64)$$

Dans la quatrième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta$ obtenu dans Lemme 6.2 et $\mathbf{k}_\eta$ défini dans (6.64) pour considérer le problème de Cauchy suivant pour le champ des contraintes.

Problème SV_η . Trouver un champ des contraintes $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ tel que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.65)$$

Dans l'étude du problème SV_η nous avons le résultat suivant.

Lemme 6.5. *Le problème SV_η admet une solution unique $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{Q})$.*

De plus, si σ_i et $\mathbf{u}_i$ représentent les solutions du problème SV_{η_i} , PV_{η_i} respectivement, et $\mathbf{k}_i$ est défini dans (6.64) pour $\eta_i \in L^2(0, T; V' \times Y)$, $i = 1, 2$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 \leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.66)$$

Démonstration. Nous considérons l'opérateur $\Lambda_\eta : L^2(0, T; \mathcal{Q}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{Q})$ défini par

$$\Lambda_\eta \sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds, \quad (6.67)$$

pour tout $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ et $t \in [0, T]$. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$, nous utilisons (6.67) et (6.18) pour trouver que, pour tout $t \in [0, T]$

$$|\Lambda_\eta \sigma_1(t) - \Lambda_\eta \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}} \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}} ds.$$

De cette inégalité il résulte que, pour p assez grand, Λ_η^p est un opérateur contractant dans l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{Q})$, donc il existe unique $\sigma_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ tel que

6. Problème de contact sans frottement en piézoélectricité

$\Lambda_\eta \sigma_\eta = \sigma_\eta$. De plus, σ_η est l'unique solution de problème SV_η .

En utilisant (6.65), la régularité de $\mathbf{u}_\eta$, la régularité de $\mathbf{k}_\eta$ et les propriétés des opérateurs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ pour voir que $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{Q})$.

Considérons maintenant $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$. Pour $i = 1, 2$, on note $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$ et $\mathbf{k}_{\eta_i} = \mathbf{k}_i$. Nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_i(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(\mathbf{u}_i(s)), \mathbf{k}_i(s)) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

et en utilisant les propriétés (6.17) et (6.18) de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, nous trouvons

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}}^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (6.68)$$

De cette inégalité et de l'inégalité de Gronwall nous déduisons l'estimation (6.66). $\square$

Enfin, comme conséquence des résultats précédents et de l'utilisation des propriétés des opérateurs $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$, ϕ et j pour $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda \boldsymbol{\eta}(t) = (\Lambda^1 \boldsymbol{\eta}(t), \Lambda^2 \boldsymbol{\eta}(t)) \in V' \times Y, \quad (6.69)$$

défini par

$$\begin{aligned} (\Lambda^1 \boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} &= (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{Q}} + j(\beta_\eta(t), \mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (6.70)$$

$$\Lambda^2 \boldsymbol{\eta}(t) = \phi(\sigma_\eta(t), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \mathbf{k}_\eta(t)). \quad (6.71)$$

Ici, pour chaque $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; V' \times Y)$, $\mathbf{u}_\eta$, φ_η , β_η et σ_η représentent le champ des déplacements, le champ potentiel électrique, le champ d'adhésion et le champ des contraintes obtenus dans lemmes 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 respectivement, et $\mathbf{k}_\eta$ est la variable interne d'état donnée par (6.64). Nous avons le résultat suivant.

Lemme 6.6. *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\boldsymbol{\eta}^* \in L^2(0, T; V' \times Y)$.*

6.3 Résultat d'existence et d'unicité

Démonstration. Soient $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in L^2(0, T; V' \times Y)$. Nous écrivons pour $i = 1, 2$,

$$\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i, \quad \dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \mathbf{v}_{\eta_i} = \mathbf{v}_i, \quad \varphi_{\eta_i} = \varphi_i, \quad \beta_{\eta_i} = \beta_i, \quad \sigma_{\eta_i} = \sigma_i, \quad \mathbf{k}_{\eta_i} = \mathbf{k}_i.$$

En utilisant (3.9), (6.17), (6.18), (6.21), (6.22), (6.23) et la définition de $R_\nu, \mathbf{R}_\tau$ on obtient

$$\begin{aligned} |\Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V'}^2 &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 + \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{Q}}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right), \end{aligned} \quad (6.72)$$

De (6.66) et (6.53) on trouve

$$\begin{aligned} |\Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V'}^2 &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned} \quad (6.73)$$

Par des arguments similaires et de (6.71), (6.66) et (6.19) on déduit que

$$\begin{aligned} |\Lambda^2 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^2 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_Y^2 &\leq c \left(|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 + |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 \right) \\ &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (6.75)$$

6. Problème de contact sans frottement en piézoélectricité

De plus, de (6.50) on obtient

$$\left(\dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2 \right)_{V' \times V} + \left(\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2) \right)_Q + \left(\eta_1^1 - \eta_2^1, v_1 - v_2 \right)_{V' \times V} = 0$$

p.p. $t \in (0, T)$.

En intégrant cette égalité sur l'intervalle $[0, t]$ et en prenant en considération les conditions initiales $v_1(0) = v_2(0) = v_0$, l'hypothèse (6.16) et (3.9) pour trouver

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s), v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds$$

pour tout $t \in [0, T]$. Par ailleurs, nous utilisons l'inégalité $2ab \leq a^2/\gamma + \gamma b^2$, nous en déduisons que

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.76)$$

D'autre part, par le problème de Cauchy (6.62)-(6.63) on peut écrire

$$\beta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t \left(\beta_i(s) \left(\gamma_\nu (R_\nu(u_{i\nu}(s)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{i\tau}(s))|^2 \right) - \epsilon_a \right)_+ ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \left| \beta_1(s) (R_\nu(u_{1\nu}(s)))^2 - \beta_2(s) (R_\nu(u_{2\nu}(s)))^2 \right|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ &\quad + c \int_0^t \left| \beta_1(s) |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}(s))|^2 - \beta_2(s) |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{2\tau}(s))|^2 \right|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

Notons que $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$ et par la définition de R_ν et $\mathbf{R}_\tau$ nous voyons que

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds.$$

Nous appliquons l'inégalité de Gronwall et nous utilisons la relation (3.11) pour obtenir

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds. \quad (6.77)$$

6.3 Résultat d'existence et d'unicité

De plus, à partir de (6.64) nous avons

$$|\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1^2(s) - \boldsymbol{\eta}_2^2(s)|_Y^2 ds. \quad (6.78)$$

Car $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ ont la même valeur initiale on a

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds.$$

De cette inégalité, (6.75) et (6.77) nous trouvons que

$$\begin{aligned} & |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V' \times Y}^2 \\ & \leq c \left(\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Il découle de (6.76) et (6.78) que

$$|\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V' \times Y}^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds.$$

En réitérant l'inégalité précédente n fois, nous constatons que

$$|\Lambda^n \boldsymbol{\eta}_1 - \Lambda^n \boldsymbol{\eta}_2|_{L^2(0, T; V' \times Y)}^2 \leq \frac{(cT)^n}{n!} \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds.$$

Pour n assez grand, cette dernière inégalité implique que Λ^n est un opérateur contractant dans l'espace de Banach $L^2(0, T; V' \times Y)$. Alors Λ admet un point fixe unique $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; V' \times Y)$. $\square$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème 6.1 c'est-à-dire l'existence et l'unicité de la solution faible du problème mécanique P .

Démonstration du théorème 6.1. Soit $\boldsymbol{\eta}_* = (\boldsymbol{\eta}_1^1, \boldsymbol{\eta}_1^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$ le point fixe de l'opérateur Λ défini par (6.69)-(6.71) et on note

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad \varphi = \varphi_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad \beta = \beta_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad (6.79)$$

6. Problème de contact sans frottement en piézoélectricité

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi + \sigma_{\eta_*}. \quad (6.80)$$

Nous démontrons que $(u, \sigma, k, \varphi, \beta)$ satisfait (6.38)-(6.43) et (6.45)-(6.49). En effet, nous écrivons (6.65) pour $\eta = \eta_*$ et nous utilisons (6.79)-(6.80) pour obtenir (6.38). On utilise (6.50) pour $\eta = \eta_*$ et la première égalité dans (6.79) pour trouver que

$$(\ddot{u}, v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\eta^1(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \quad (6.81)$$

Les égalités $\Lambda^1(\eta_*) = \eta^1$ et $\Lambda^2(\eta_*) = \eta^2$ combinées avec (6.70), (6.71), (6.79) et (6.80) impliquent que

$$\begin{aligned} (\eta^1(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi(s), \varepsilon(u(s)), k(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + j(\beta(t), u(t), v) \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (6.82)$$

$$\eta^2(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(u_\eta(t)), k_\eta(t)). \quad (6.83)$$

De (6.83) et (6.64) on déduit que (6.39) est satisfait. En substituant (6.82) dans (6.81) et on utilise (6.38) pour voir que (6.40) est satisfait. Nous écrivons maintenant (6.52) et (6.62) pour $\eta = \eta_*$ et nous utilisons (6.79) pour trouver (6.41) et (6.42).

Après, (6.43), les régularités (6.45), (6.47), (6.48) et (6.49) résultent de Lemme 6.2, Lemme 6.3, Lemme 6.4 et la relation (6.64).

La régularité $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{Q})$ suivre de Lemme 6.5, les hypothèses (6.16), (6.21) et (6.80). Finalement, (6.40) implique que

$$\rho \ddot{u} = \text{Div} \sigma + f_0 \quad \text{dans } V', \text{ p.p. } t \in (0, T)$$

et de (6.25) et (6.26) on trouve que $\text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V')$. On en déduit que la régularité (6.46) est vérifiée.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ et de l'unicité de la solution des problèmes PV_η , QV_η , PV_β et SV_η garantie par Lemmes 6.2, 6.3, 6.4 et 6.5.

Nous concluons que $(u, \sigma, k, \varphi, \beta)$ est une solution du problème PV qui satisfait (6.45)-(6.49). $\square$

Chapitre 7

Problème de contact avec frottement en piézoélectricité

Ce chapitre est consacré à l'analyse mathématique d'un problème de contact avec frottement entre un corps piézoélectrique et une base adhésive et conductrice où le processus est quasi-statique. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale avec adhésion, une version de la loi de frottement de Coulomb dans laquelle l'adhésion de surface de contact est prise en considération et une condition de conductivité électrique régularisée. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration repose sur des arguments d'inéquations variationnelles dépendant du temps, des équations différentielles et le théorème de point fixe de Banach.

Sommaire

7.1	Problème mécanique et hypothèses	111
7.2	Formulation variationnelle	116
7.3	Résultat d'existence et d'unicité	116

7.1 Problème mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans Chapitre 3 de cette thèse (Figure 3.3). On considère un corps électro-élasto-viscoplastique en contact avec une base adhésive et conductrice. Le contact est modélisé avec une condition de compliance normale avec l'adhésion associée à une version de la loi de frottement de Coulomb et une condition de conductivité électrique régularisée. Sous ces considérations, le problème mécanique se formule de la façon suivante.

7. Problème de contact avec frottement en piézoélectricité

Problème P. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t) \quad (7.1)$$

$$+ \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}\nabla\varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.2)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \phi(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{k}) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.3)$$

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.4)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (7.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (7.7)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (7.8)$$

$$\begin{cases} |\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| \leq p_\tau(u_\nu - g) \\ |\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| < p_\tau(u_\nu - g) \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0} \\ |\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| = p_\tau(u_\nu - g) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{tel que } \sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (7.9)$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (7.10)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (7.11)$$

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nu} = q_b \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (7.12)$$

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu)\Phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (7.13)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (7.14)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (7.15)$$

Pour ce problème, les équations (7.1)-(7.3) représentent la loi de comportement électro-élasto-viscoplastique avec variable interne d'état que nous avons introduite dans (3.51)-(3.53). Les équations (7.4)-(7.5) représentent les équations d'équilibre pour le champ des contraintes et le champ des déplacements électriques. Ensuite, (7.6)-(7.7) sont les conditions aux limites de déplacement-traction. La condition (7.8) représente la condition de compliance normale avec adhésion et la condition (7.9) est la loi de frottement associée de type de Coulomb que nous introduite dans (3.41). Puis, (7.10) représente l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion. Les équations (7.11)-(7.12) représentent les conditions aux limites électriques. Nous utilisons (7.13) comme la condition de contact électrique sur Γ_3 qui représente une condition régularisée.

7.1 Problème mécanique et hypothèses

Dans (7.14)-(7.15), u_0 est le déplacement initial donné, k_0 est la variable interne d'état initiale donnée et β_0 est le champ d'adhésion initial donné.

Dans l'étude du problème mécanique (7.1)-(7.15), nous considérons les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Ils existent une constante } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ d) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (7.16)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (7.17)$$

L'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (7.18)$$

La fonction $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_{\phi} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\phi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \phi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\phi} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } L^2(\Omega)_S^{m \times m}. \end{array} \right. \quad (7.19)$$

7. Problème de contact avec frottement en piézoélectricité

Les fonctions de compliance normale $p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($r = \nu, \tau$) satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_r > 0 \text{ telle que} \\ |p_r(x, u_1) - p_r(x, u_2)| \leq L_r |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ b) \text{ L'application } x \mapsto p_r(x, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ c) \text{ } p_r(x, u) = 0 \text{ pour tout } u \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (7.20)$$

Un exemple d'une fonction de compliance normale p_ν qui satisfait (7.20) est

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

où $c_\nu \in L^\infty(\Gamma_3)$ est une fonction positive et $p_\tau = \mu p_\nu$ avec $\mu \geq 0$.

Le tenseur de permittivité électrique $\mathbf{B} = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ } \mathbf{B}(x, E) = (b_{ij}(x)E_j) \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ } b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ c) \text{ Il existe une constante } m_B > 0 \text{ telle que} \\ \mathbf{B}E \cdot E \geq m_B |E|^2 \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (7.21)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ } \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{jk}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ b) \text{ } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (7.22)$$

La fonction de conductivité électrique de surface $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ |\psi(x, u_1) - \psi(x, u_2)| \leq L_\psi |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ b) \text{ There exists } N_\psi > 0 \text{ tel que } |\psi(x, u)| \leq N_\psi \quad \forall u \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ c) \text{ L'application } x \mapsto \psi(x, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ d) \text{ } \psi(x, u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0. \end{array} \right. \quad (7.23)$$

Nous supposons que les forces volumiques et les tractions surfaciques ont la régularité

$$f_0 \in C(0, T; H), \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (7.24)$$

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_b \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (7.25)$$

Les coefficients d'adhésion satisfont :

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (7.26)$$

7.1 Problème mécanique et hypothèses

Finalement, nous supposons que la fonction d'interstice initiale et les données initiales satisfont :

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (7.27)$$

$$\varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad \mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{k}_0 \in Y, \quad (7.28)$$

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (7.29)$$

Nous définissons les trois applications $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$, $q : [0, T] \rightarrow W$ et $\gamma : V \times W \rightarrow W$, respectivement, pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\varphi, \phi \in W$ et $t \in [0, T]$ par

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da, \quad (7.30)$$

$$(q(t), \zeta)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \zeta dx - \int_{\Gamma_b} q_b(t) \zeta da, \quad (7.31)$$

$$(\gamma(\mathbf{u}, \varphi), \zeta)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g) \phi(\varphi - \varphi_0) \zeta da. \quad (7.32)$$

Nous définissons aussi la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, la fonctionnelle de compliance normale $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \left(-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau \right) da, \quad (7.33)$$

$$j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g) v_\nu da, \quad (7.34)$$

$$j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g) |\mathbf{v}_\tau| da. \quad (7.35)$$

La fonctionnelle $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

Pour tout $\mathbf{g} \in V$, $j_{fr}(\mathbf{g}, \cdot)$ est propre, convexe et semi-continue inférieurement sur V . (7.36)

Notons que les conditions (7.24) et (7.25) impliquent que

$$\mathbf{f} \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (7.37)$$

7.2 Formulation variationnelle

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green (3.14), nous obtenons la formulation variationnelle suivante.

Problème PV. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$, un champ potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow W$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ ainsi qu'un champ des variables internes d'état $\mathbf{k} : \Omega \times [0, T] \rightarrow Y$ tels que pour tout $t \in (0, T)$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t) \quad (7.38)$$

$$+ \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds, \quad (7.39)$$

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \phi(\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{k}(t)), \quad (7.40)$$

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{Q}} + j_{ad}(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j_{cn}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ &+ j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi(t), \quad (7.42)$$

$$(\mathbf{D}(t), \nabla\zeta)_H + (\gamma(\mathbf{u}(t), \varphi(t)), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W \quad \forall \zeta \in W, \quad (7.43)$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(t)))^2 + \gamma_\tau|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau(t))|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (7.44)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (7.45)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème PV est énoncée et démontrée dans la prochaine section.

7.3 Résultat d'existence et d'unicité

Notre résultat principal d'existence et d'unicité de la solution du problème PV est le suivant.

Théorème 7.1. *Supposons que les hypothèses (7.16)-(7.29) et (7.36) sont vérifiées. Alors, si $N_\psi < \frac{m_B}{a_0^2}$, le problème PV admet une solution unique $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}, \varphi, \beta\}$ satisfaisant*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; V), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{Q}_1), \quad (7.46)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad \mathbf{D} \in C(0, T; \mathcal{W}), \quad (7.47)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z, \quad (7.48)$$

$$\mathbf{k} \in C^1(0, T; Y). \quad (7.49)$$

7.3 Résultat d'existence et d'unicité

La démonstration du Théorème 7.1 est obtenue en plusieurs étapes. Nous supposons que les hypothèses du Théorème 7.1 sont vérifiées, et nous considérons que c est une constante générique positive qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{E}, \phi, p_\nu, p_\tau, L$ et T et peut changer d'une place à l'autre. La démonstration est basée sur des arguments des inéquations variationnelles dépendant du temps, des équations différentielles et des arguments de point fixe.

Dans la première étape soient $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in C(0, T; V \times Y)$ et $g \in C(0, T; V)$ donnés et on considère l'inéquation variationnelle suivante.

Problème $PV_{\eta g}$. Trouver un champ des déplacements $v_{\eta g} : [0, T] \rightarrow V$ tel que $\forall t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varepsilon(v_{\eta g}(t)), \varepsilon(v - v_{\eta g}(t)))_{\mathcal{Q}} + j_{fr}(g(t), v) - j_{fr}(g(t), v_{\eta g}(t)) \\ \geq (f(t) - \eta^1(t), v - v_{\eta g}(t))_V \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Dans l'étude du problème $PV_{\eta g}$ nous avons le résultat suivant.

Lemme 7.2. *Le problème $PV_{\eta g}$ admet une solution faible unique de la régularité*

$$v_{\eta g} \in C(0, T; V). \quad (7.51)$$

Démonstration. Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V$ par

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \quad \forall u, v \in V. \quad (7.52)$$

Il résulte de (7.16)(a) que

$$|Au - Av|_V \leq L_{\mathcal{A}}|u - v|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

Ce qui implique que $A : V \rightarrow V$ est de Lipschitz. Par (7.16)(b) nous trouvons

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m_{\mathcal{A}}|u - v|_V^2, \quad \forall u, v \in V,$$

c'est-à-dire $A : V \rightarrow V$ est un opérateur fortement monotone sur V . De plus, l'utilisation du Théorème de représentation de Riesz, nous permet de définir un élément $F \in C(0, T; V)$ par

$$(F(t), v)_V = (f(t), v)_V - (\eta^1(t), v)_V,$$

sur V et de l'hypothèse (7.36) sur j_{fr} , par du résultat classique sur les inéquations variationnelles elliptiques il existe une fonction unique $v_{\eta g}(t) \in V$ qui satisfait :

$$\begin{aligned} (Av_{\eta g}(t), v - v_{\eta g}(t))_{\mathcal{Q}} + j_{fr}(g(t), v) - j_{fr}(g(t), v_{\eta g}(t)) \\ \geq (F(t), v - v_{\eta g}(t))_V \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (7.53)$$

7. Problème de contact avec frottement en piézoélectricité

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$ et nous notons par $\eta^1(t_i) = \eta_i$, $f(t_i) = f_i$, $g(t_i) = g_i$ et $v_{\eta g}(t_i) = v_i$ pour $i = 1, 2$.

Le fait que A est fortement monotone sur V , par la définition de la fonctionnelle j_{fr} donnée par (7.35) et l'hypothèse (7.20) sur la fonction de contact p_τ et après calcul nous trouvons que

$$m_{\mathcal{A}}|v_1 - v_2|_V \leq c(|f_1 - f_2|_V + |\eta_1 - \eta_2|_V + |g_1 - g_2|_V).$$

Cette inégalité et la régularité des fonctions f, g et η^1 montrent que la régularité (7.51) est satisfaite. $\square$

Nous considérons maintenant l'opérateur $\Lambda_\eta : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$ défini par

$$\Lambda_\eta g(t) = u_0 + \int_0^t v_{\eta g}(s) ds \quad \forall g \in C(0, T; V). \quad (7.54)$$

Lemme 7.3. *L'opérateur Λ_η admet un point fixe unique $g_\eta \in C(0, T; V)$.*

Démonstration. Soient $g_1, g_2 \in C(0, T; V)$, $\eta \in C(0, T; V \times Y)$. Nous appliquons (7.54) pour obtenir

$$|\Lambda_\eta g_1(t) - \Lambda_\eta g_2(t)|_V \leq c \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

En utilisant l'inéquation (7.50), l'hypothèse (7.16) sur $\mathcal{A}$, l'hypothèse (7.20) sur p_τ et la fonctionnelle j_{fr} donnée par (7.35) nous obtenons

$$|v_1 - v_2|_V \leq c|g_1 - g_2|_V.$$

Nous combinons les deux dernières inégalités pour voir que

$$|\Lambda_\eta g_1(t) - \Lambda_\eta g_2(t)|_V \leq c \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour m est assez grand, l'opérateur Λ_η^m est une contraction dans l'espace de Banach $C(0, T; V)$. Ainsi, par le théorème de point fixe de Banach, l'opérateur Λ_η admet un point fixe unique $g_\eta \in C(0, T; V)$. $\square$

7.3 Résultat d'existence et d'unicité

Nous considérons maintenant le problème suivant.

Problème PV_η . Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tel que $\forall t \in [0, T]$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ et

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{Q}} + j_{fr}(\mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_\eta(t), \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)) \\ & + (\boldsymbol{\eta}_1(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Dans l'étude du Problème PV_η nous avons le résultat suivant.

Lemme 7.4. *Le Problème PV_η admet une solution unique satisfaisant la régularité (7.46).*

Démonstration. Pour $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; V \times Y)$, nous notons par $\mathbf{g}_\eta \in C(0, T; V)$ le point fixe obtenu dans Lemme 7.3 et soit $\mathbf{u}_\eta$ la fonction définie par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_\eta \mathbf{g}_\eta(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.56)$$

Nous avons $\Lambda_\eta \mathbf{g}_\eta = \mathbf{g}_\eta$, donc de (7.54) et (7.56) il résulte que $\mathbf{u}_\eta = \mathbf{g}_\eta$. Par conséquent, nous prenons $\mathbf{g} = \mathbf{g}_\eta$ dans (7.50), nous voyons que $\mathbf{u}_\eta$ est la solution unique du Problème PV_η de la régularité (7.46). $\square$

Dans la deuxième étape, soit $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; V \times Y)$, on utilise le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta$ obtenu dans Lemme 7.4 et on considère le problème variationnel suivant.

Problème QV_η . Trouver le champ des potentiels électriques $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que $\forall \in [0, T]$

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \nabla\phi)_H + (\gamma(\mathbf{u}_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \phi)_W = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W. \quad (7.57)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 7.5. *Le Problème QV_η admet une solution unique φ_η qui satisfait la régularité (7.47). De plus, si $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$ et $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ sont les solutions des Problèmes PV_{η_i} et QV_{η_i} , respectivement, pour $\boldsymbol{\eta}_i \in C(0, T; V)$, $i = 1, 2$. Alors il existe $c > 0$ tel que*

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.58)$$

Démonstration. Voir la démonstration du Lemme 6.3 (Chapitre 6). $\square$

7. Problème de contact avec frottement en piézoélectricité

Dans la troisième étape nous utilisons la solution $\mathbf{u}_\eta$ du problème PV_η pour formuler le problème auxiliaire suivant.

Problème PV_β . Trouver un champ d'adhésion $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = - \left(\beta_\eta(t) \left(\gamma_\nu (R_\nu(u_{\eta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau}(t))|^2 \right) - \epsilon_a \right)_+, \quad (7.59)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \quad (7.60)$$

Où $u_{\eta\nu}, \mathbf{u}_{\eta\tau}$ désignent respectivement la composante normale et tangentielle de la fonction $\mathbf{u}_\eta$. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 7.6. *Le problème PV_β admet une solution unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z$.*

Démonstration. Nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du Lemme 6.4 (Chapitre 6). $\square$

Nous définissons $\mathbf{k}_\eta \in W^{1,2}(0, T; Y)$ par

$$\mathbf{k}_\eta(t) = \mathbf{k}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\eta}^2(s) ds. \quad (7.61)$$

Dans la quatrième étape, nous utilisons la solution $\mathbf{u}_\eta$ du Problème PV_η , La solution φ_η du Problème QV_η et $\mathbf{k}_\eta$ la variable interne d'état définie dans (7.61) pour formuler le problème de Cauchy pour le champ des contraintes suivant.

Problème $PV\sigma_\eta$. Trouver le champ des contraintes $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ tel que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.62)$$

Dans l'étude du problème $PV\sigma_\eta$ nous avons le résultat suivant.

Lemme 7.7. *Le problème $PV\sigma_\eta$ admet une solution unique $\sigma_\eta \in C^1(0, T; \mathcal{Q})$.*

De plus, si σ_i et $\mathbf{u}_i$ représentent les solutions des problèmes $SV_{\eta_i}, PV\sigma_{\eta_i}$ respectivement, et $\mathbf{k}_i$ est défini dans (7.61) pour $\boldsymbol{\eta}_i \in C(0, T; V \times Y)$, $i = 1, 2$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{Q}}^2 \leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.63)$$

7.3 Résultat d'existence et d'unicité

Démonstration. Nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du Lemme 6.5 (Chapitre 6). $\square$

Enfin, comme conséquence de ces résultats précédents et en utilisant les propriétés des opérateurs $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}$, la fonction ϕ et les fonctionnelles j_{ad} et j_{nc} pour $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda \boldsymbol{\eta}(t) = (\Lambda^1 \boldsymbol{\eta}(t), \Lambda^2 \boldsymbol{\eta}(t)) \in V \times Y, \quad (7.64)$$

défini par

$$\begin{aligned} (\Lambda^1 \boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{v})_V &= (\mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_\eta(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta(s)), \boldsymbol{k}_\eta(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \right)_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + j_{ad}(\beta_\eta(t), \boldsymbol{u}_\eta(t), \boldsymbol{v}) + j_{nc}(\boldsymbol{u}_\eta(t), \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \end{aligned} \quad (7.65)$$

$$\Lambda^2 \boldsymbol{\eta}(t) = \phi(\boldsymbol{\sigma}_\eta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta(t)), \boldsymbol{k}_\eta(t)). \quad (7.66)$$

Ici, pour tout $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; V \times Y)$, $\boldsymbol{u}_\eta$, φ_η , β_η , $\boldsymbol{\sigma}_\eta$ représentent le champ des déplacements, le champ des potentiels électriques, le champ d'adhésion, le champ des contraintes obtenus dans les lemmes 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 respectivement et $\boldsymbol{k}_\eta$ est la variable interne d'état donnée par (7.61). Nous avons le résultat suivant.

Lemme 7.8. *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\boldsymbol{\eta}_* \in C(0, T; V \times Y)$ tel que $\Lambda \boldsymbol{\eta}_* = \boldsymbol{\eta}_*$.*

Démonstration. Soient $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C(0, T; V \times Y)$. Nous écrivons pour $i = 1, 2$,

$$\boldsymbol{u}_{\eta_i} = \boldsymbol{u}_i, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_{\eta_i} = \boldsymbol{v}_{\eta_i} = \boldsymbol{v}_i, \quad \varphi_{\eta_i} = \varphi_i, \quad \beta_{\eta_i} = \beta_i, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\eta_i} = \boldsymbol{\sigma}_i, \quad \boldsymbol{k}_{\eta_i} = \boldsymbol{k}_i.$$

En utilisant (3.9), (7.17), (7.18), (7.20), (7.22), (7.63), (7.65) et la définition de R_v , $\mathbf{R}_\tau$ pour déduire que

$$\begin{aligned} |\Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V'}^2 &\leq c \left(|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)|_V^2 ds + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\boldsymbol{k}_1(s) - \boldsymbol{k}_2(s)|_Y^2 ds + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned} \quad (7.67)$$

D'autre part, de (7.59) et (7.60) on peut écrire

$$\beta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t \left(\beta_i(s) \left(\gamma_v (R_v(\boldsymbol{u}_{iv}(s)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\boldsymbol{u}_{i\tau}(s))|^2 \right) - \epsilon_a \right)_+ ds,$$

7. Problème de contact avec frottement en piézoélectricité

et alors

$$\begin{aligned} |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \left| \beta_1(s) (R_\nu(u_{1\nu}(s)))^2 - \beta_2(s) (R_\nu(u_{2\nu}(s)))^2 \right|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ &\quad + c \int_0^t \left| \beta_1(s) |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}(s))|^2 - \beta_2(s) |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{2\tau}(s))|^2 \right|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

Des définitions de R_ν et $\mathbf{R}_\tau$ et le fait que $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$ nous trouvons

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \left(\int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right). \quad (7.68)$$

Nous utilisons le Lemme de Gronwall et (3.11) pour obtenir

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds. \quad (7.69)$$

Nous substituons (7.58) et (7.69) dans (7.67) nous voyons que

$$\begin{aligned} &|\Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^1 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_V^2 \\ &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned} \quad (7.70)$$

Par des arguments similaires, de (7.66), (7.63) et (7.19) il résulte que

$$\begin{aligned} |\Lambda^2 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^2 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_Y^2 &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned} \quad (7.71)$$

Donc

$$\begin{aligned} |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V \times Y}^2 &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned} \quad (7.72)$$

7.3 Résultat d'existence et d'unicité

De plus, de (7.50) nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{Q}} \\ & \leq j_{fr}(u_1, v_2) - j_{fr}(u_1, v_1) + j_{fr}(u_2, v_1) - j_{fr}(u_2, v_2) - (\eta_1^1 - \eta_2^1, v_1 - v_2)_V. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Il résulte de (7.73), (7.20) et (7.35) que

$$(\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{Q}} \leq -(\eta_1^1 - \eta_2^1, v_1 - v_2)_V + c|u_1 - u_2|_V|v_1 - v_2|_V.$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[0, t]$ et par la condition (7.16) nous trouvons

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t \left(|\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_V + |u_1(s) - u_2(s)|_V \right) |v_1(s) - v_2(s)|_V ds,$$

pour tout $t \in [0, T]$. Ensuite, en utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{\gamma} + \gamma b^2$ nous trouvons

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t \left(|\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_V^2 + |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 \right) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.74)$$

Car $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ nous avons

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \quad (7.75)$$

En utilisant (7.75), (7.74) et en appliquant l'inégalité de Gronwall pour constater que

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_V^2 ds. \quad (7.76)$$

D'autre part, de (7.61) il vient que

$$|k_1(t) - k_2(t)|_Y^2 \leq c \int_0^t |\eta_1^2(s) - \eta_2^2(s)|_Y^2 ds. \quad (7.77)$$

Nous remplaçons (7.76) et (7.77) dans (7.72) pour voir que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V \times Y}^2 \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V \times Y}^2 ds.$$

7. Problème de contact avec frottement en piézoélectricité

Nous réitérons cette inégalité n fois pour trouver que

$$|\Lambda^n \boldsymbol{\eta}_1 - \Lambda^n \boldsymbol{\eta}_2|_{C(0,T;V \times Y)}^2 \leq \frac{(cT)^n}{n!} |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{C(0,T;V \times Y)}^2.$$

Ainsi, pour n assez grand, l'application Λ^n est une contraction dans l'espace de Banach $C(0, T; V \times Y)$, donc Λ admet un point fixe unique. $\square$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème 7.1 c'est-à-dire l'existence et l'unicité de la solution faible du problème mécanique P .

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\eta}_* = (\boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2) \in C(0, T; V' \times Y)$ le point fixe de l'opérateur Λ défini par (7.64)-(7.66) et nous notons

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad \varphi = \varphi_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad \beta = \beta_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad (7.78)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad (7.79)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{B} \nabla \varphi. \quad (7.80)$$

Nous démontrons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \beta, \mathbf{k})$ satisfait (7.38)-(7.45) et les régularités (7.46)-(7.49). En effet, nous écrivons (7.62) pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_*$ et nous utilisons (7.78)-(7.80) pour obtenir (7.38). Nous considérons (7.55) et (7.61) pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_*$ et nous utilisons les égalités $\Lambda^1(\boldsymbol{\eta}_*) = \boldsymbol{\eta}_1$ et $\Lambda^2(\boldsymbol{\eta}_*) = \boldsymbol{\eta}_2$ combinées avec (7.65)-(7.66), (7.38) et (7.78) pour conclure que (7.40)-(7.41) sont vérifiés. Nous écrivons (7.57) pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_*$ et nous utilisons (7.78) et (7.80) pour obtenir (7.42)-(7.43). Nous écrivons (7.59) pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_*$ (7.78) pour obtenir (7.44). En suite, (7.45) et les régularités (7.46)-(7.49) résultent des Lemmes 7.4, 7.5, 7.6 et la relation (7.61). La régularité de $\boldsymbol{\sigma}$ est une conséquence des Lemmes 7.4, 7.5, 7.7, les relations (7.78)-(7.79) et les hypothèses sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$. La régularité de $\mathbf{D}$ résulte de la régularité de $\mathbf{u}$ et φ données par (7.46)-(7.47), la relation (7.80) et les hypothèses sur $\mathbf{B}$ et $\mathcal{E}$.

L'unicité du Théorème 7.1 est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (7.64)-(7.66) et l'unicité des solutions des problèmes $PV_{\boldsymbol{\eta}}$, $QV_{\boldsymbol{\eta}}$, PV_{β} et $PV_{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}$. $\square$

Chapitre 8

Problème thermo-viscoélastique avec frottement, endommagement et diffusion d'usure

Ce chapitre aborde une analyse variationnelle d'un problème quasi-statique décrivant le contact avec frottement entre un corps thermo-viscoélastique et une base mobile impliquant l'usure et la diffusion d'usure de la surface de contact. L'effet d'endommagement est pris en considération dans la loi constitutive thermo-viscoélastique. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale associée à une loi de frottement où le coefficient de frottement dépend de la densité des particules d'usure, de la température et du taux de glissement. L'usure prend place sur une partie D_w de la surface de contact, tandis que la diffusion des débris matériels a lieu dans tout le domaine de contact Γ_3 . L'usure est accompagnée par un échange thermique entre le corps et la base et un effet thermique du au frottement. La diffusion d'usure est décrite par l'équation de diffusion. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible sous une hypothèse de petitesse. La démonstration est basée sur des résultats sur les inéquations variationnelles elliptiques, les inéquations variationnelles paraboliques, les équations d'évolution de premier ordre et des arguments de point fixe. Ce chapitre a fait l'objet d'une communication internationale [49].

Sommaire

8.1	Problème mécanique et hypothèses	126
8.2	Formulation variationnelle	131
8.3	Existence et unicité de la solution	132

8.1 Problème mécanique et hypothèses

Nous nous plaçons dans le cadre physique que nous avons présenté dans Chapitre 3 de cette thèse (Figure 3.2) avec une base mobile. Nous supposons que Γ_3 est un domaine régulier dans le plan $x_3 = 0$, de frontière γ , alors que la fondation est plane et se déplace dans le plan $x_3 = -g \leq 0$ avec une vitesse $\mathbf{v}^*$. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale associée à une version de la loi frottement de Coulomb où le coefficient de frottement dépend de la densité des particules d'usure, de la température et du taux de glissement. L'usure se produit sur une partie D_w de Γ_3 tandis que de la diffusion des débris matériels se fait sur tout le domaine Γ_3 . Sous ces hypothèses, le problème mécanique se formule de la façon suivante.

Problème P. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_3$, un champ des températures $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et une densité des débris d'usure $\zeta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tels que

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}), \beta) - C(\theta, \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (8.1)$$

$$\dot{\beta} - k_1 \triangle \beta + \partial \varphi_Y(\beta) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}), \theta, \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (8.2)$$

$$\text{Div} \sigma + \mathbf{f}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (8.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (8.4)$$

$$\sigma \mathbf{v} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (8.5)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu, & |\sigma_\tau| \leq \mu p_\nu, \\ \sigma_\tau = -\mu p_\nu \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|} & \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{v}^* \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (8.6)$$

$$\dot{\zeta} - \text{div}(k \nabla \zeta) = \kappa \mu p_\nu R^*(|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|) \chi_{[D_w]} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (8.7)$$

$$\zeta = 0 \quad \text{sur } \partial \Gamma_3 \times (0, T), \quad (8.8)$$

$$\dot{\theta} - \text{div}(K_c \nabla \theta) = \psi(\dot{\mathbf{u}}, \theta, \beta) + q \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (8.9)$$

$$k_{ij} \theta_{,i} \eta_j = h_\theta(\zeta, \theta, |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|) - k_e(\theta - \theta_R) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (8.10)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T), \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (8.12)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (8.13)$$

$$\zeta(0) = \zeta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (8.14)$$

8.1 Problème mécanique et hypothèses

Ici, $p_\nu = p_\nu(u_\nu - \lambda \zeta \chi_{[D_\omega]} - g)$ et $\mu = \mu(\zeta, \theta, |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|)$ est le coefficient de frottement qui dépend de la densité des particules d'usure, de la température et du taux de glissement. Équation (8.1) représente la loi de comportement thermo-viscoélastique, où σ désigne le tenseur des contraintes, $\mathbf{u}$ représente le champ des déplacements, $\dot{\mathbf{u}}$ est la vitesse, θ est le champ des températures et $\varepsilon(\mathbf{u})$ est le tenseur des petites déformations. Ici, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des opérateurs nonlinéaires décrivant les propriétés purement visqueuses et élastiques du matériau, respectivement et $\mathbf{C}$ représente le tenseur de dilatation thermique. L'équation (8.2) représente l'inclusion utilisée pour l'évolution du champ d'endommagement. L'équation (8.3) représente l'équation d'équilibre, puisque le processus est supposé quasi-statique. Les équations (8.4)-(8.5) sont les conditions de déplacement-traction. La condition (8.6) représente la condition de compliance normale avec usure associée à une version de la loi de frottement de Coulomb. L'équation (8.7) représente l'équation de diffusion non linéaire, l'équation (8.8) est la condition aux limites absorbante.

L'évolution du champ de température θ est régie par l'équation de la chaleur, obtenue de la conservation d'énergie et définie par l'équation différentielle donnée dans (8.9), où $K_c = (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique avec $\text{div}(K_c \nabla \theta) = (k_{ij} \theta_{,i})_{,i}$ et $q(t)$ est la densité de la source thermique. La condition aux limites de température associée est donnée par (8.10). Dans (8.11) la température est nulle sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

L'équation (8.12) représente la condition de Neumann. Dans (8.13) et (8.14) $\mathbf{u}_0$ est le champ de déplacement initial, θ_0 est la température initiale, β_0 est le champ d'endommagement initial et ζ_0 est la densité surfacique des particules d'usure initiale.

Dans ce chapitre on note par Y l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles défini par

$$Y = \{\zeta \in H^1(\Omega) \quad : \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

Dans l'étude du problème mécanique (8.1)-(8.14) nous considérons les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^3, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ (b) \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^3, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ (c) \text{ L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^3. \\ (d) \text{ L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (8.15)$$

8. Problème thermo-viscoélastique avec frottement, endommagement et diffusion d'usure

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad | \mathcal{G}(x, \varepsilon_1, \beta_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2, \beta_2) | \leq L_{\mathcal{G}} (| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 | + | \beta_1 - \beta_2 |) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^3, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, \varepsilon, \beta) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^3 \text{ et } \beta \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (8.16)$$

La fonction de source d'endommagement $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\phi} > 0 \text{ telle que} \\ \quad | \phi(x, \varepsilon_1, \theta_1, \beta_1) - \phi(x, \varepsilon_2, \theta_2, \beta_2) | \leq L_{\phi} (| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 | + | \theta_1 - \theta_2 | + | \beta_1 - \beta_2 |) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^3, \forall \theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \rightarrow \phi(x, \varepsilon, \theta, \beta) \text{ est mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^3 \text{ et } \theta, \beta \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \rightarrow \phi(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (8.17)$$

L'opérateur de dilatation thermique $C : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_C > 0 \text{ telle que} \\ \quad | C(x, \theta_1, \beta_1) - C(x, \theta_2, \beta_2) | \leq L_C (| \theta_1 - \theta_2 | + | \beta_1 - \beta_2 |) \\ \quad \forall \theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \rightarrow C(x, \theta, \beta) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \theta, \beta \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \rightarrow C(x, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (8.18)$$

Les fonctions de compliance normale $p_v : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_v > 0 \text{ telle que} \\ \quad | p_v(x, u_1) - p_v(x, u_2) | \leq L_v | u_1 - u_2 | \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) \text{ L'application } x \rightarrow p_v(x, u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ (c) p_v(x, u) = 0 \text{ pour tout } u \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (d) p_v(x, u) \leq p_v^* \quad \forall u \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (8.19)$$

Le coefficient de frottement $\mu : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Ils existent deux constantes positives } L_{\mu} \text{ et } \mu^* \text{ telles que} \\ \quad | \mu(x, a_1, b_1, c_1) - \mu(x, a_1, b_1, c_2) | \leq L_{\mu} (| a_1 - a_2 | + | b_1 - b_2 | + | c_1 - c_2 |) \\ \quad \forall a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) \text{ L'application } x \rightarrow \mu(x, a, b, c) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \forall a, b, c \in \mathbb{R}. \\ (c) \mu(x, a, b, c) \leq \mu^* \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (8.20)$$

8.1 Problème mécanique et hypothèses

La restriction principale sur p_ν dans (8.19) est son bornitude. Bien que la fonction $p_\nu = c_\nu(r_+)^{m_\nu}$ où c_ν est une constante positive, m_ν est un exposant positif et $r_+ = \max\{0, r\}$ ne satisfait pas la condition (8.19), la fonction troncature

$$p_\nu^\rho(r) = \begin{cases} c_\nu(r_+)^{m_\nu} & \text{si } r \leq \rho, \\ c_\nu(\rho)^{m_\nu} & \text{si } r > \rho, \end{cases}$$

pour $\rho > 0$ donné et p_ν^ρ coïncide avec p_ν sur $(-\infty, \rho]$. Puisque l'interpénétration des aspérités de surface du corps dans celle de la fondation est suffisamment petit, on peut remplacer la fonction de compliance normale p_ν par la fonction de compliance normale régularisée p_ν^ρ . Un commentaire similaire pourrait être fait sur l'hypothèse (8.20) sur le coefficient de frottement qui est supposé de Lipschitz et borné.

L'opérateur dans l'équation de chaleur $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ \quad | \psi(x, \xi_1, \theta_1, \beta_1) - \psi(x, \xi_2, \theta_2, \beta_2) | \leq L_\psi (| \xi_1 - \xi_2 | + | \theta_1 - \theta_2 | + | \beta_1 - \beta_2 |) \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^3, \forall \theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \rightarrow \psi(x, \xi, \theta, \beta) \text{ est mesurable sur } \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \forall \theta, \beta \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \rightarrow \psi(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\mathcal{Q}). \end{array} \right. \quad (8.21)$$

La fonction tangentielle $h_\theta : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_\theta > 0 \text{ telle que} \\ \quad | h_\theta(x, a_1, b_1, c_1) - h_\theta(x, a_2, b_2, c_2) | \leq L_\theta (| a_1 - a_2 | + | b_1 - b_2 | + | c_1 - c_2 |) \\ \quad \forall a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) \text{ L'application } x \rightarrow h_\theta(x, a, b, c) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \forall a, b, c \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \rightarrow h_\theta(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (8.22)$$

Pour certains $c_k > 0$, pour tout $(\xi_i) \in \mathbb{R}^d$

$$K_c = (k_{ij}), \quad k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad k_{ij}\xi_j\xi_i \geq c_k\xi_i\xi_i. \quad (8.23)$$

La fonction initial d'insertion g satisfait :

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (8.24)$$

Le coefficient de diffusion d'usure satisfait :

$$k \in L^\infty(\Gamma_3), \quad k \geq k^* > 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (8.25)$$

$$v^* : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ est une fonction continue.} \quad (8.26)$$

8. Problème thermo-viscoélastique avec frottement, endommagement et diffusion d'usure

Pour la densité de la source thermique, nous supposons que

$$q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (8.27)$$

Les forces volumiques et les tractions surfaciques ont la régularité

$$f_0 \in C(0, T; H), \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^3). \quad (8.28)$$

Les données initiales et les données sur la frontière satisfont :

$$u_0 \in V, \quad \zeta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad \beta_0 \in Y, \quad \theta_0 \in L^2(\Omega), \quad \theta_R \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+). \quad (8.29)$$

Nous définissons la fonction $f : [0, T] \rightarrow V$ par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da \quad \forall v \in V. \quad (8.30)$$

Nous définissons aussi la forme bilinéaire $a : H_0^1(\Gamma_3) \times H_0^1(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta, \xi) = \int_{\Gamma_3} k \nabla \zeta \cdot \nabla \xi da. \quad (8.31)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $b : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$b(\xi, \varphi) = k_1 \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \varphi dx. \quad (8.32)$$

Ensuite, nous définissons la fonctionnelle $j : L^2(\Gamma_3) \times E \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} j(\zeta, \theta, u, v, w) &= \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - \lambda \zeta \chi_{[D_\omega]} - g) w_\nu da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \mu(\zeta, \theta, |v_\tau - v^*|) p_\nu(u_\nu - \lambda \zeta \chi_{[D_\omega]} - g) |w_\tau - v^*| da \\ &\quad \forall \zeta \in L^2(\Gamma_3), \forall \theta \in E, \forall u, v, w \in V. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Enfin, l'opérateur $F : H_0^1(\Gamma_3) \times E \times V^3 \rightarrow H^{-1}(\Gamma_3)$ est donné par

$$\begin{aligned} (F(\zeta, \theta, u, v, w), \xi)_{H^{-1}(\Gamma_3) \times H_0^1(\Gamma_3)} &= \int_{\Gamma_3} \kappa \mu(\zeta, \theta, |v_\tau - v^*|) p_\nu(u_\nu - \lambda \zeta \chi_{[D_\omega]} - g) R^*(|w_\tau - v^*|) \xi da \\ &\quad \forall \zeta, \xi \in H_0^1(\Gamma_3), \forall \theta \in E, \forall u, v, w \in V. \end{aligned} \quad (8.34)$$

8.2 Formulation variationnelle

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green (3.14) nous obtenons la formulation variationnelle suivante.

Problème PV. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$, un champ des températures $\theta : [0, T] \rightarrow E$, un champ d'endommagement $\beta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ et une densité des débris d'usure $\zeta : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Gamma_3)$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \beta(t)) - C(\theta(t), \beta(t)), \quad (8.35)$$

$$\begin{aligned} &(\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{Q}} + j(\zeta(t), \theta(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) - j(\zeta(t), \theta(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ &\geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (8.36)$$

$$\begin{aligned} &\beta(t) \in Y, (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + b(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ &\geq (\phi(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \theta(t), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in Y \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = S(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \zeta(t), \theta(t), \beta(t)) + Q(t) \quad \text{dans } E' \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (8.38)$$

$$\begin{aligned} &(\dot{\zeta}(t), \xi)_{H^{-1}(\Gamma_3) \times H_0^1(\Gamma_3)} + a(\zeta(t), \xi) = (F(\zeta(t), \theta(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)), \xi)_{H^{-1}(\Gamma_3) \times H_0^1(\Gamma_3)} \\ &\forall \xi \in H_0^1(\Gamma_3) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (8.40)$$

où $Q : [0, T] \rightarrow E'$, $K : E \rightarrow E'$ et $S : V^2 \times L^2(\Gamma_3) \times E \times L^2(\Omega) \rightarrow E'$ sont donnés par

$$(Q(t), \eta)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R(t) \eta da + \int_{\Omega} q(t) \eta dx, \quad (8.41)$$

$$(K\tau, \eta)_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau \cdot \eta da, \quad (8.42)$$

$$(S(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \zeta, \theta, \beta), \eta)_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} h_{\theta}(\zeta, \theta, |\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^*|) \eta da + \int_{\Omega} \psi(\mathbf{u}, \theta, \beta) \eta dx, \quad (8.43)$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\theta, \eta, \tau \in E$, $\beta \in L^2(\Omega)$ et $\zeta \in L^2(\Gamma_3)$. Ci-dessous dans ce chapitre $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ représentent des éléments de V , θ_1, θ_2 sont des éléments de E et ζ_1, ζ_2

sont dans $L^2(\Gamma_3)$. Finalement, nous utilisons (8.33) pour voir que

$$\begin{aligned}
& j(\zeta_1, \theta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - j(\zeta_1, \theta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + j(\zeta_2, \theta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) - j(\zeta_2, \theta_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) \\
& \leq \int_{\Gamma_3} p_v(u_{1v} - \lambda \zeta_1 \chi_{[D_\omega]} - g)(v_{2v} - v_{1v}) da + \int_{\Gamma_3} p_v(u_{2v} - \lambda \zeta_2 \chi_{[D_\omega]} - g)(v_{1v} - v_{2v}) da \\
& + \int_{\Gamma_3} \mu(\zeta_1, \theta_1, | \mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}^* |) p_v(u_{1v} - \lambda \zeta_1 \chi_{[D_\omega]} - g) | \mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau} | da \\
& - \int_{\Gamma_3} \mu(\zeta_2, \theta_2, | \mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^* |) p_v(u_{2v} - \lambda \zeta_2 \chi_{[D_\omega]} - g) | \mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau} | da \\
& \leq \int_{\Gamma_3} \left(p_v(u_{1v} - \lambda \zeta_1 \chi_{[D_\omega]} - g) - p_v(u_{2v} - \lambda \zeta_2 \chi_{[D_\omega]} - g) \right) | v_{1v} - v_{2v} | da \\
& + \int_{\Gamma_3} \mu(\zeta_1, \theta_1, | \mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}^* |) \left(p_v(u_{1v} - \lambda \zeta_1 \chi_{[D_\omega]} - g) - p_v(u_{2v} - \lambda \zeta_2 \chi_{[D_\omega]} - g) \right) | \mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau} | da \\
& + \int_{\Gamma_3} \left(\mu(\zeta_1, \theta_1, | \mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}^* |) - \mu(\zeta_2, \theta_2, | \mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^* |) \right) p_v(u_{2v} - \lambda \zeta_2 \chi_{[D_\omega]} - g) | \mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau} | da
\end{aligned}$$

De l'hypothèse (8.19) sur p_v , de l'hypothèse (8.20) sur μ , de (3.5) et (3.24) nous trouvons que

$$\begin{aligned}
& j(\zeta_1, \theta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - j(\zeta_1, \theta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + j(\zeta_2, \theta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) - j(\zeta_2, \theta_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) \\
& \leq c_0^2(L_v + \mu^* L_v) | \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 |_V | \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 |_V \\
& + c_0(L_v \lambda + \mu^* L_v \lambda + p_v^* L_\mu) | \zeta_1 - \zeta_2 |_{L^2(\Gamma_3)} | \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 |_V \\
& + c_0 \tilde{C}_\Gamma p_v^* L_\mu | \theta_1 - \theta_2 |_E + p_v^* L_\mu c_0^2 | \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 |_V^2
\end{aligned} \tag{8.44}$$

Cette inégalité sera utilisée plusieurs fois dans la section suivante.

8.3 Existence et unicité de la solution

Pour établir l'existence et l'unicité de problème PV, nous avons le théorème suivant.

Théorème 8.1. *Supposons que les hypothèses (8.15)-(8.29) sont vérifiées. Il existe une constante $c^* > 0$ dépend de c_0 , m_A et L_μ telle que si $p_v^* < c^*$ alors le problème PV admet une solution*

8.3 Existence et unicité de la solution

unique $\{\mathbf{u}, \sigma, \beta, \theta, \zeta\}$ satisfaisant

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; V), \quad \sigma \in C(0, T; \mathcal{Q}_1), \quad (8.45)$$

$$\beta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (8.46)$$

$$\theta \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; E), \quad \dot{\theta} \in L^2(0, T; E'), \quad (8.47)$$

$$\zeta \in L^2(0, T; H_0^1(\Gamma_3)) \cap C(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad \dot{\zeta} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3)). \quad (8.48)$$

Nous concluons que, sous les hypothèses (8.15)-(8.29), le problème mécanique (8.1)-(8.14) admet une solution faible unique avec les régularités (8.45)-(8.48). La démonstration de ce théorème est obtenue en plusieurs étapes. Elles est basée sur les inéquations variationnelles elliptiques, les inéquations variationnelles paraboliques, les équations d'évolution du première ordre et des arguments de point fixe. Nous supposons dans ce qui suit les hypothèses (8.15)-(8.29) sont vérifiées et supposons que

$$c_0^2 p_v^* L_\mu < m_{\mathcal{A}}. \quad (8.49)$$

Dans la première étape nous considérons le problème suivant où $\alpha \in L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3))$.

Problème PV_α . Trouver $\zeta_\alpha : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Gamma_3)$ tel que

$$\begin{aligned} (\dot{\zeta}_\alpha(t), \tilde{\zeta})_{H^{-1}(\Gamma_3) \times H_0^1(\Gamma_3)} + a(\zeta_\alpha(t), \tilde{\zeta}) &= (\alpha(t), \tilde{\zeta})_{H^{-1}(\Gamma_3) \times H_0^1(\Gamma_3)} \\ \forall \tilde{\zeta} \in H_0^1(\Gamma_3), \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (8.50)$$

$$\zeta_\alpha(0) = \zeta_0. \quad (8.51)$$

Lemme 8.2. Il existe une solution unique du problème (8.50)-(8.51) satisfait

$$\zeta_\alpha \in L^2(0, T; H_0^1(\Gamma_3)) \cap C(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad \dot{\zeta}_\alpha \in L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3)). \quad (8.52)$$

De plus, si ζ_i est la solution du problème PV_α correspond à $\alpha = \alpha_i \in L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3))$, pour $i = 1, 2$, alors

$$\begin{aligned} |\zeta_1(t) - \zeta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \int_0^t |\nabla \zeta_1(s) - \nabla \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^2}^2 ds &\leq C \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{H^{-1}(\Gamma_3)}^2 ds \\ \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Démonstration. Nous utilisons un résultat d'équations d'évolution avec des opérateurs linéaires et monotones.

Maintenant, nous écrivons l'équation (8.50) pour $\zeta_1(s)$ avec $\tilde{\zeta} = \zeta_2(s) - \zeta_1(s)$, puis pour $\zeta_2(s)$ avec $\tilde{\zeta} = \zeta_1(s) - \zeta_2(s)$ et en ajoutant les égalités résultantes, nous obtenons

$$\begin{aligned} (\dot{\zeta}_1(s) - \dot{\zeta}_2(s), \zeta_1(s) - \zeta_2(s))_{H^{-1}(\Gamma_3) \times H_0^1(\Gamma_3)} + (k(\nabla \zeta_1(s) - \nabla \zeta_2(s)), \nabla \zeta_1(s) - \nabla \zeta_2(s))_{L^2(\Gamma_3)} \\ = (\alpha_1(s) - \alpha_2(s), \zeta_1(s) - \zeta_2(s))_{H^{-1}(\Gamma_3) \times H_0^1(\Gamma_3)} \quad \text{p.p. } s \in (0, T), \end{aligned} \quad (8.54)$$

8. Problème thermo-viscoélastique avec frottement, endommagement et diffusion d'usure

En intégrant l'équation ci-dessus sur $(0, t)$ pour $t \in [0, T]$, en utilisant l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Young pour $\epsilon \in (0, k^*)$, nous trouvons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\zeta_1(t) - \zeta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 - \frac{1}{2} |\zeta_1(0) - \zeta_2(0)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + k^* \int_0^t |\nabla \zeta_1(s) - \nabla \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^2}^2 ds \\ & \leq \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{H^{-1}(\Gamma_3)} |\zeta_1(t) - \zeta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ & \leq c \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{H^{-1}(\Gamma_3)}^2 ds + \epsilon \int_0^t |\nabla \zeta_1(s) - \nabla \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^2}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Car $\zeta_1(0) = \zeta_2(0) = \zeta_0$ sur Γ_3 et $\epsilon < k^*$, nous obtenons (8.53). $\square$

Maintenant, soit $\rho \in L^2(0, T; E')$ et on considère l'équation d'évolution suivante.

Problème PV_ρ . Trouver $\theta_\rho : [0, T] \rightarrow E$ tel que

$$\dot{\theta}_\rho(t) + K\theta_\rho(t) = \rho(t) \quad \text{dans } E', \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (8.55)$$

$$\theta_\rho(0) = \theta_0. \quad (8.56)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 8.3. *Le problème PV_ρ admet une solution unique qui satisfait la régularité (8.47). De plus, il existe $c > 0$ tel que $\forall \rho_i \in L^2(0, T; E')$, notons par $\theta_{\rho_i} = \theta_i$, $i = 1, 2$,*

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_E^2 ds \leq c \int_0^t |\rho_1(s) - \rho_2(s)|_{E'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (8.57)$$

Démonstration. La démonstration résulte de la théorie des équations d'évolution classiques du premier ordre donnée dans [7, 60]. Ici, le triple de Gelfand est donné par $E \subset L^2(\Omega) \subset E'$. L'opérateur K est linéaire et coercive. Par l'inégalité de Korn, nous avons

$$(K\tau, \tau)_{E' \times E} \geq c |\tau|_E^2,$$

où, $c > 0$ désigne une constante générique dont sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

Maintenant pour $\forall \rho_1, \rho_2 \in L^2(0, T; E')$ nous avons pour p.p. $s \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}_1(s) - \dot{\theta}_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s))_{L^2(\Omega)} + (K\theta_1(s) - K\theta_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s))_{E' \times E} \\ & = (\rho_1(s) - \rho_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s))_{E' \times E}. \end{aligned}$$

8.3 Existence et unicité de la solution

Puis en intégrant sur l'intervalle $(0, t)$ et (8.57) est une conséquence de (8.23) et (8.42). $\square$

Dans la troisième étape, soit $\gamma \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ donné et nous considérons le problème variationnel suivant pour le champ d'endommagement.

Problème PV_γ . Trouver un champ d'endommagement $\beta_\gamma : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \beta_\gamma(t) \in Y, \quad & (\dot{\beta}_\gamma(t), \xi - \beta_\gamma(t))_{L^2(\Omega)} + b(\beta_\gamma(t), \xi - \beta_\gamma(t)) \\ & \geq (\gamma(t), \xi - \beta_\gamma(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in Y \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\beta_\gamma(0) = \beta_0. \quad (8.59)$$

Lemme 8.4. *Le problème PV_γ admet une solution unique β_γ tel que*

$$\beta_\gamma \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (8.60)$$

De plus, si β_i est une solution du problème PV_γ correspond à $\gamma = \gamma_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, pour $i = 1, 2$, alors

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq c \int_0^t |\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (8.61)$$

Démonstration. Nous utilisons (8.32), β_0 dans (8.29) et un résultat classique d'existence et d'unicité sur les inéquations variationnelles paraboliques. $\square$

Maintenant, nous substituons (8.35) dans (8.36) et nous considérons l'inégalité variationnelle obtenue avec $\zeta = \zeta_\alpha, \theta = \theta_\rho$ et $\beta = \beta_\gamma$. Soit $(z, h) \in C(0, T; V)^2$ donné, nous obtenons le problème variationnelle suivant.

Problème $PV_{\alpha\rho\gamma zh}$. Trouver un champ des déplacements $v_{\alpha\rho\gamma zh} : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(v_{\alpha\rho\gamma zh}(t)), \varepsilon(v - v_{\alpha\rho\gamma zh}(t)))_{\mathcal{Q}} + j(\zeta_\alpha(t), \theta_\rho(t), z(t), h(t), v) \\ & - j(\zeta_\alpha(t), \theta_\rho(t), z(t), h(t), v_{\alpha\rho\gamma zh}(t)) \geq (f(t), v - v_{\alpha\rho\gamma zh}(t))_V \\ & - (\mathcal{G}(\varepsilon(z(t)), \beta_\gamma(t)), \varepsilon(v - v_{\alpha\rho\gamma zh}(t)))_{\mathcal{Q}} + (C(\theta_\rho(t), \beta_\gamma(t)), \varepsilon(v - v_{\alpha\rho\gamma zh}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & \quad \forall v \in V, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (8.62)$$

Lemme 8.5. *Il existe une solution unique du problème (8.62) satisfaisant $v_{\alpha\rho\gamma zh} \in C(0, T; V)$.*

8. Problème thermo-viscoélastique avec frottement, endommagement et diffusion d'usure

Démonstration. En utilisant des résultats des inéquations variationnelles elliptiques, nous concluons qu'il existe une solution unique $v_{\alpha\rho\gamma zh}(t)$ du problème (8.62) pour $t \in (0, T)$.

Maintenant, nous montrons que $v_{\alpha\rho\gamma zh} : [0, T] \rightarrow V$ est continu. Soient $t_1, t_2 \in (0, T)$, nous notons $v_{\alpha\rho\gamma zh}(t_i) = v_i$, $\zeta_\alpha(t_i) = \zeta_i$, $\theta_\rho(t_i) = \theta_i$, $\beta_\gamma(t_i) = \beta_i$, $z(t_i) = z_i$, $h(t_i) = h_i$ et $f(t_i) = f_i$ pour $i = 1, 2$. Nous utilisons (8.62) pour trouver

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{Q}} &\leq j(\zeta_1, \theta_1, z_1, h_1, v_2) - j(\zeta_1, \theta_1, z_1, h_1, v_1) \\ &+ j(\zeta_2, \theta_2, z_2, h_2, v_1) - j(\zeta_2, \theta_2, z_2, h_2, v_2) + (\mathcal{G}(\varepsilon(z_1), \beta_1) - \mathcal{G}(\varepsilon(z_2), \beta_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{Q}} \\ &+ (C(\theta_1, \beta_1) - C(\theta_2, \beta_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{Q}} + (f_1 - f_2, v_1 - v_2)_V. \end{aligned}$$

La condition (3.11), l'estimation (8.44) et les hypothèses (8.15), (8.16) et (8.18) nous donnent

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} |v_1 - v_2|_V &\leq (L_G + c_0^2(L_V + \mu^* L_V)) |z_1 - z_2|_V + c_0^2 p_V^* L_\mu |h_1 - h_2|_V \\ &+ (L_G + L_C) |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Omega)} + c_0(\lambda L_V + \mu^* L_V \lambda + p_V^* L_\mu) |\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &+ |f_1 - f_2|_V + (L_C + c_0 \tilde{\tilde{C}}_\Gamma L_\mu p_V^*) |\theta_1 - \theta_2|_E, \end{aligned} \quad (8.63)$$

Ce qui implique que $v_{\alpha\rho\gamma zh} : [0, T] \rightarrow V$ est une fonction continue. $\square$

Nous considérons maintenant l'opérateur $\Lambda_{\alpha\rho\gamma z} : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$ défini par

$$\Lambda_{\alpha\rho\gamma z} h = v_{\alpha\rho\gamma zh}. \quad (8.64)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 8.6. *L'opérateur $\Lambda_{\alpha\rho\gamma z}$ admet un point fixe unique $h_{\alpha\rho\gamma z} \in C(0, T; V)$.*

Démonstration. Soient $h_1, h_2 \in C(0, T; V)$ et soit v_i la solution du (8.62) pour $h = h_i$, c'est-à-dire $v_i = v_{\alpha\rho\gamma zh_i}$, $i = 1, 2$. La définition de l'opérateur $\Lambda_{\alpha\rho\gamma z}$ donnée dans (8.64) implique

$$|\Lambda_{\alpha\rho\gamma z} h_1(t) - \Lambda_{\alpha\rho\gamma z} h_2(t)|_V = |v_1(t) - v_2(t)|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

Nous utilisons des arguments à ceux ci utiliser pour l'estimation (8.63) pour obtenir

$$m_{\mathcal{A}} |v_1(t) - v_2(t)|_V \leq c_0^2 p_V^* L_\mu |h_1(t) - h_2(t)|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

Donc

$$|\Lambda_{\alpha\rho\gamma z} h_1(t) - \Lambda_{\alpha\rho\gamma z} h_2(t)|_V \leq \frac{c_0^2 p_V^* L_\mu}{m_{\mathcal{A}}} |h_1(t) - h_2(t)|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

L'hypothèse (8.49) implique que l'opérateur $\Lambda_{\alpha\rho\gamma z}$ est une contraction dans l'espace de Banach $C(0, T; V)$. $\square$

8.3 Existence et unicité de la solution

Dans la suite, soit $h_{\alpha\rho\gamma z}$ le point fixe obtenir dans Lemme 8.6 et soit $v_{\alpha\rho\gamma z} \in C(0, T; V)$ la fonction définie par

$$v_{\alpha\rho\gamma z} = v_{\alpha\rho\gamma z} h_{\alpha\rho\gamma z}. \quad (8.65)$$

Nous avons $\Lambda_{\alpha\rho\gamma z} h_{\alpha\rho\gamma z} = h_{\alpha\rho\gamma z}$ et

$$v_{\alpha\rho\gamma z} = h_{\alpha\rho\gamma z}. \quad (8.66)$$

Nous prenons $h = h_{\alpha\rho\gamma z}$ dans (8.62) et nous utilisons (8.65) et (8.66), pour voir que $v_{\alpha\rho\gamma z}$ satisfait

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(v_{\alpha\rho\gamma z}(t)), \varepsilon(v - v_{\alpha\rho\gamma z}(t)))_{\mathcal{Q}} + j(\zeta_{\alpha}(t), \theta_{\rho}(t), z(t), v_{\alpha\rho\gamma z}(t), v) \\ & - j(\zeta_{\alpha}(t), \theta_{\rho}(t), z(t), v_{\alpha\rho\gamma z}(t), v_{\alpha\rho\gamma z}(t)) \geq (f(t), v - v_{\alpha\rho\gamma z}(t))_V \\ & - (\mathcal{G}(\varepsilon(z(t)), \beta_{\gamma}(t)), \varepsilon(v - v_{\alpha\rho\gamma z}h(t)))_{\mathcal{Q}} + (C(\theta_{\rho}(t), \beta_{\gamma}(t)), \varepsilon(v - v_{\alpha\rho\gamma z}h(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & \quad \forall v \in V, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (8.67)$$

Soit maintenant $u_{\alpha\rho\gamma z} \in C^1(0, T; V)$ la fonction définie par

$$u_{\alpha\rho\gamma z}(t) = \int_0^t v_{\alpha\rho\gamma z}(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (8.68)$$

Nous définissons l'opérateur $\Lambda_{\alpha\rho\gamma} : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$ par

$$\Lambda_{\alpha\rho\gamma} z = u_{\alpha\rho\gamma z}. \quad (8.69)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 8.7. *l'opérateur $\Lambda_{\alpha\rho\gamma}$ admet un point fixe unique $z_{\alpha\rho\gamma} \in C(0, T; V)$.*

Démonstration. Soit $z_1, z_2 \in C(0, T; V)$ et nous notons $v_i = v_{\alpha\rho\gamma z_i}$, $u_i = u_{\alpha\rho\gamma z_i}$ pour $i = 1, 2$. Nous utilisons (8.67) et des arguments similaire à ceux utilisés pour l'estimation (8.63) dans la démonstration du Lemme 8.5 pour obtenir

$$(m_{\mathcal{A}} - c_0^2 p_v^* L_{\mu}) |v_1(s) - v_2(s)|_V \leq (L_{\mathcal{G}} + c_0^2 (L_v + \mu^* L_v)) |z_1(s) - z_2(s)|_V, \quad (8.70)$$

pour tout $s \in [0, T]$. En utilisant maintenant (8.69)-(8.70) nous obtenons

$$|\Lambda_{\alpha\rho\gamma} z_1(t) - \Lambda_{\alpha\rho\gamma} z_2(t)|_V \leq \frac{L_{\mathcal{G}} + c_0^2 (1 + \mu^*) L_v}{m_{\mathcal{A}} - c_0^2 p_v^* L_{\mu}} \int_0^t |z_1(s) - z_2(s)|_V ds,$$

pour tout $t \in [0, T]$. En réitérant cette dernière inégalité nous trouvons que l'opérateur $\Lambda_{\alpha\rho\gamma}$ est une contraction dans l'espace de Banach $C(0, T; V)$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

8. Problème thermo-viscoélastique avec frottement, endommagement et diffusion d'usure

Nous sommes maintenant prêts à démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel suivant.

Problème $PV_{\alpha\rho\gamma}$. Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma} : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t)))_{\mathcal{Q}} + j(\zeta_{\alpha}(t), \theta_{\rho}(t), \mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t), \mathbf{v}) \\ & - j(\zeta_{\alpha}(t), \theta_{\rho}(t), \mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t))) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t))_V \\ & - (\mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}(t)), \beta_{\gamma}(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t)))_{\mathcal{Q}} + (C(\theta_{\rho}(t), \beta_{\gamma}(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \tag{8.71}$$

$$\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}(0) = \mathbf{u}_0. \tag{8.72}$$

Lemme 8.8. *Il existe une fonction unique $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma} \in C^1(0, T; V)$ satisfait (8.71)-(8.72).*

Démonstration. Soit $\mathbf{z}_{\alpha\rho\gamma} \in C(0, T; V)$ le point fixe garanti par Lemme 8.7 et soit $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma} \in C^1(0, T; V)$ défini par (8.68), pour $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{\alpha\rho\gamma}$. Nous avons $\dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma} = \mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma\mathbf{z}_{\alpha\rho\gamma}}$ et nous écrivons (8.67) pour $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{\alpha\rho\gamma}$, nous trouvons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t)))_{\mathcal{Q}} + j(\zeta_{\alpha}(t), \theta_{\rho}(t), \mathbf{z}_{\alpha\rho\gamma}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t), \mathbf{v}) \\ & - j(\zeta_{\alpha}(t), \theta_{\rho}(t), \mathbf{z}_{\alpha\rho\gamma}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t))) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t))_V \\ & - (\mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{z}_{\alpha\rho\gamma}(t)), \beta_{\gamma}(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t)))_{\mathcal{Q}} + (C(\theta_{\rho}(t), \beta_{\gamma}(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \tag{8.73}$$

L'inéquation (8.71) résulte maintenant de (8.73) et (8.64) puisque $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma} = \mathbf{z}_{\alpha\rho\gamma}$. De plus, (8.72) résulte de (8.68). Nous concluons que $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}$ est une solution de (8.71)-(8.72).

Pour l'unicité, soit $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}$ la solution de (8.71)-(8.72) et soit $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*$ autre solution telle que $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^* \in C^1(0, T; V)$. Soit $\mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^* = \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}^*$. En utilisant (8.71) nous obtenons que $\mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^*$ satisfait :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^*(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^*(t)))_{\mathcal{Q}} + j(\zeta_{\alpha}(t), \theta_{\rho}(t), \mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*(t), \mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^*(t), \mathbf{v}) \\ & - j(\zeta_{\alpha}(t), \theta_{\rho}(t), \mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*(t), \mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^*(t), \mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^*(t))) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^*(t))_V \\ & - (\mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*(t)), \beta_{\gamma}(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^*(t)))_{\mathcal{Q}} + (C(\theta_{\rho}(t), \beta_{\gamma}(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^*(t)))_{\mathcal{Q}} \\ & \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \tag{8.74}$$

Cette inégalité a une forme de (8.67) avec $\mathbf{z} = \mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*$ et, donc il résulte de (8.62) que (8.67) admet une solution unique, already denoted by $\mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*}$. Nous concluons que $\mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^* = \mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*}$. Car $\mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma}^* = \dot{\mathbf{u}}_{\alpha\rho\gamma}^*$ il résulte de (8.68) que

$$\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*(t) = \int_0^t \mathbf{v}_{\alpha\rho\gamma\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*}(s) ds + \mathbf{u}_0 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{8.75}$$

8.3 Existence et unicité de la solution

De (8.68) et (8.75) nous obtenons $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^* = \mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma} \mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*$, ce qui montre que $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^*$ est un point fixe de l'opérateur $\Lambda_{\alpha\rho\gamma}$ défini par (8.69). En utilisant Lemme 8.6 on en déduit que

$$\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma}^* = \mathbf{z}_{\alpha\rho\gamma}^*. \quad (8.76)$$

L'unicité de la solution du problème (8.71)-(8.72) est une conséquence de $\mathbf{u}_{\alpha\rho\gamma} = \mathbf{z}_{\alpha\rho\gamma}$ et de l'égalité (8.76). $\square$

Ensuite, nous avons besoin d'étudier les propriétés de l'opérateur $F : H_0^1(\Gamma_3) \times E \times V^3 \rightarrow H^{-1}(\Gamma_3)$ donné par (8.34).

Lemme 8.9. *L'inégalité suivante est vraie*

$$\begin{aligned} & |F(\zeta_1, \theta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) - F(\zeta_2, \theta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2)|_{H^{-1}(\Gamma_3)} \\ & \leq L_F (|\zeta_1 - \zeta_2|_{H_0^1(\Gamma_3)} + |\theta_1 - \theta_2|_E + |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V + |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V + |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|_V) \\ & \forall \zeta_1, \zeta_2 \in H_0^1(\Gamma_3), \forall \theta_1, \theta_2 \in E, \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V, \end{aligned} \quad (8.77)$$

où

$$L_F = |\kappa|_{L^\infty(D_\omega)} c_0 \max \left\{ \mu^* p_\nu^* c_0, \mu^* L_\nu R c_0, (L_\mu p_\nu^* + \lambda \mu^* L_\nu) R \tilde{C}_\Gamma, p_\nu^* L_\mu R c_0, p_\nu^* R L_\mu \tilde{\tilde{C}}_\Gamma \right\}.$$

Démonstration. Soient $\zeta_1, \zeta_2 \in H_0^1(\Gamma_3)$, $\theta_1, \theta_2 \in E$, et $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$, de (8.34) nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \left(F(\zeta_1, \theta_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) - F(\zeta_2, \theta_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2), \tilde{\zeta} \right) \right|_{H^{-1}(\Gamma_3) \times H_0^1(\Gamma_3)} \\ & \leq N \int_{\Gamma_3} \mu(\zeta_1, \theta_1, |\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) p_\nu(u_{1\nu} - \lambda \zeta_1 \chi_{[D_\omega]} - g) \left(R^*(|\mathbf{w}_{1\tau} - \mathbf{v}^*|) - R^*(|\mathbf{w}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) \right) \tilde{\zeta} da \\ & + N \int_{\Gamma_3} \mu(\zeta_1, \theta_1, |\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) \left(p_\nu(u_{1\nu} - \lambda \zeta_1 \chi_{[D_\omega]} - g) - p_\nu(u_{2\nu} - \lambda \zeta_2 \chi_{[D_\omega]} - g) \right) R^*(|\mathbf{w}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) \tilde{\zeta} da \\ & + N \int_{\Gamma_3} \left(\mu(\zeta_1, \theta_1, |\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) - \mu(\zeta_2, \theta_2, |\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) \right) p_\nu(u_{2\nu} - \lambda \zeta_2 \chi_{[D_\omega]} - g) R^*(|\mathbf{w}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) \tilde{\zeta} da, \end{aligned}$$

où $N = |\kappa|_{L^\infty(D_\omega)}$. L'estimation (8.77) est une conséquence de l'hypothèse (8.19) sur p_ν , l'hypothèse (8.20) sur μ , les inégalités (3.11), (3.24), (3.25) et la définition de R^* . $\square$

Nous définissons maintenant l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega))$ par

$$\Lambda(\alpha, \rho, \gamma) = (\Lambda_1(\alpha, \rho, \gamma), \Lambda_2(\alpha, \rho, \gamma), \Lambda_3(\alpha, \rho, \gamma)), \quad (8.78)$$

tel que

$$\Lambda_1(\alpha(t), \rho(t), \gamma(t)) = F(\zeta_\alpha(t), \theta_\rho(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)), \quad (8.79)$$

$$\Lambda_2(\alpha(t), \rho(t), \gamma(t)) = S(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \zeta_\alpha(t), \theta_\rho(t), \beta_\gamma(t)) + Q(t), \quad (8.80)$$

$$\Lambda_3(\alpha(t), \rho(t), \gamma(t)) = \phi(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \theta_\rho(t), \beta_\gamma(t)). \quad (8.81)$$

8. Problème thermo-viscoélastique avec frottement, endommagement et diffusion d'usure

Lemme 8.10. *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $(\alpha, \rho, \gamma) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega))$ tel que $\Lambda(\alpha, \rho, \gamma) = (\alpha, \rho, \gamma)$.*

Démonstration. Soit $(\alpha_i, \rho_i, \gamma_i) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$. Nous notons $\mathbf{u}_{\alpha_i \rho_i \gamma_i} = \mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_{\alpha_i \rho_i \gamma_i} = \dot{\mathbf{u}}_i$, $\zeta_{\alpha_i} = \zeta_i$, $\theta_{\rho_i} = \theta_i$ et $\beta_{\gamma_i} = \beta_i$ pour $i = 1, 2$. En utilisant (8.79)-(8.81), (8.17), (8.20), (8.21), (8.22), la définition de R^* et Lemme 8.9 nous déduisons que

$$\begin{aligned} & |(\Lambda_1(\alpha_1, \rho_1, \gamma_1) - \Lambda_1(\alpha_2, \rho_2, \gamma_2), \xi)|_{H^{-1}(\Gamma_3) \times H_0^1(\Gamma_3)}^2 \\ & \leq \int_{\Gamma_3} |F(\zeta_1, \theta_1, \mathbf{u}_1, \dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_1) - F(\zeta_2, \theta_2, \mathbf{u}_2, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\mathbf{u}}_2)|_{H^{-1}(\Gamma_3)}^2 |\xi|_{H_0^1(\Gamma_3)}^2 da \\ & \leq c(|\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\theta_1 - \theta_2|_E^2 + |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V^2 + |\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2|_V^2) |\xi|_{L^2(\Gamma_3)}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |(\Lambda_2(\alpha_1, \rho_1, \gamma_1) - \Lambda_2(\alpha_2, \rho_2, \gamma_2), \eta)|_{E' \times E}^2 \\ & \leq \int_{\Gamma_3} |(h_\theta(\zeta_1, \theta_1, |\dot{\mathbf{u}}_{1\tau} - \mathbf{v}^*|) - h_\theta(\zeta_2, \theta_2, |\dot{\mathbf{u}}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|))\eta|^2 da \\ & \quad + \int_{\Omega} |(\psi(\dot{\mathbf{u}}_1, \theta_1, \beta_1) - \psi(\dot{\mathbf{u}}_2, \theta_2, \beta_2))\eta|^2 dx \\ & \leq c(|\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2|_{L^2(\Gamma_3)}^2) |\eta|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ & \quad + c(|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2|_V^2 + |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)}^2 + |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Omega)}^2) |\eta|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c(|\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\theta_1 - \theta_2|_E^2 + |\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2|_V^2 + |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Omega)}^2) |\eta|_E^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |\Lambda_3(\alpha_1, \rho_1, \gamma_1) - \Lambda_3(\alpha_2, \rho_2, \gamma_2)|_{L^2(\Omega)}^2 = |\phi(\varepsilon(\mathbf{u}_1), \theta_1, \beta_1) - \phi(\varepsilon(\mathbf{u}_2), \theta_2, \beta_2)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V^2 + |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)}^2 + |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & |\Lambda(\alpha_1, \rho_1, \gamma_1) - \Lambda(\alpha_2, \rho_2, \gamma_2)|_{H^{-1}(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c(|\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\theta_1 - \theta_2|_E^2 + |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V^2 + |\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2|_V^2 \\ & \quad + |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)}^2 + |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned} \tag{8.82}$$

Car $\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0$ nous avons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds. \tag{8.83}$$

8.3 Existence et unicité de la solution

De plus, de (8.71) nous obtenons que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{Q}} &\leq j(\zeta_1, \theta_1, u_1, v_1, v_2) - j(\zeta_1, \theta_1, u_1, v_1, v_1) \\ &+ j(\zeta_2, \theta_2, u_2, v_2, v_1) - j(\zeta_2, \theta_2, u_2, v_2, v_2) + (C(\theta_1, \beta_1) - C(\theta_2, \beta_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{Q}} \\ &+ (\mathcal{G}(\varepsilon(u_1), \beta_1) - \mathcal{G}(\varepsilon(u_2), \beta_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{Q}}. \end{aligned} \quad (8.84)$$

L'hypothèse (8.15) sur $\mathcal{A}$, l'hypothèse de petitesse (8.49) et l'estimation (8.44) sur j nous donne

$$\|v_1 - v_2\|_V^2 \leq c(\|u_1 - u_2\|_V^2 + \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \|\theta_1 - \theta_2\|_E^2 + \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Omega)}^2). \quad (8.85)$$

De (8.83), (8.85) et par l'utilisation de l'inégalité de Gronwall nous voyons que

$$\|v_1 - v_2\|_V^2 \leq c(\|\zeta_1 - \zeta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \|\theta_1 - \theta_2\|_E^2 + \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Omega)}^2). \quad (8.86)$$

De (8.82), (8.83) et (8.86) nous trouvons que

$$\begin{aligned} &\|\Lambda(\alpha_1(t), \rho_1(t), \gamma_1(t)) - \Lambda(\alpha_2(t), \rho_2(t), \gamma_2(t))\|_{H^{-1}(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c(\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_E^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &+ c\left(\int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right) \\ &\leq c\left(\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \int_0^t \|\nabla \zeta_1(s) - \nabla \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^2}^2 ds + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right. \\ &\left.+ \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 ds + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right). \end{aligned}$$

En utilisant les estimations (8.53), (8.57) et (8.61) pour voir que

$$\begin{aligned} &\|\Lambda(\alpha_1(t), \rho_1(t), \gamma_1(t)) - \Lambda(\alpha_2(t), \rho_2(t), \gamma_2(t))\|_{H_0^1(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \int_0^t (\|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{H^{-1}(\Gamma_3)}^2 + \|\rho_1(s) - \rho_2(s)\|_{E'}^2 + \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \\ &\leq C \int_0^t \|(\alpha_1(s), \rho_1(s), \gamma_1(s)) - (\alpha_2(s), \rho_2(s), \gamma_2(s))\|_{H^{-1}(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

En réitérant cette dernière inégalité n fois, on obtient

$$\begin{aligned} &\|\Lambda^n(\alpha_1, \rho_1, \gamma_1) - \Lambda^n(\alpha_2, \rho_2, \gamma_2)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq \frac{(CT)^n}{n!} \|(\alpha_1, \rho_1, \gamma_1) - (\alpha_2, \rho_2, \gamma_2)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

8. Problème thermo-viscoélastique avec frottement, endommagement et diffusion d'usure

Pour n assez grand, cette dernière inégalité implique que Λ^n est un opérateur contractant dans l'espace de Banach $L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_3) \times E' \times L^2(\Omega))$. Par conséquent Λ admet un point fixe unique. $\square$

Maintenant on peut utiliser les lemmes précédents pour démontrer l'existence et l'unicité du problème PV .

Soit $(\alpha^*, \rho^*, \gamma^*)$ le point fixe de l'opérateur Λ défini par (8.78)-(8.81) et obtenu dans Lemme 8.10.

Soit ζ_{α^*} la solution du problème PV_{α} pour $\alpha = \alpha^*$ (voir Lemme 8.2), soit θ_{ρ^*} la solution du problème PV_{ρ} pour $\rho = \rho^*$ (voir Lemme 8.3) et soit β_{γ^*} la solution du problème PV_{γ} pour $\gamma = \gamma^*$ (voir Lemme 8.4). Nous notons $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\alpha^* \rho^* \gamma^*}$, $\dot{\mathbf{u}}^* = \dot{\mathbf{u}}_{\alpha^* \rho^* \gamma^*}$, $\zeta^* = \zeta_{\alpha^*}$, $\theta^* = \theta_{\rho^*}$ et $\beta^* = \beta_{\gamma^*}$.

$$\begin{aligned}\Lambda_1(\alpha^*, \rho^*, \gamma^*) &= \alpha^* = F(\zeta^*, \theta^*, \mathbf{u}^*, \dot{\mathbf{u}}^*), \\ \Lambda_2(\alpha^*, \rho^*, \gamma^*) &= \rho^* = S(\dot{\mathbf{u}}^*, \mathbf{u}^*, \zeta^*, \theta^*, \beta^*) + Q, \\ \Lambda_3(\alpha^*, \rho^*, \gamma^*) &= \gamma^* = \phi(\varepsilon(\mathbf{u}^*), \theta^*, \beta^*).\end{aligned}$$

$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\alpha^* \rho^* \gamma^*}$ est une solution du problème $PV_{\alpha \rho \gamma}$ pour $\alpha = \alpha^*$, $\rho = \rho^*$ et $\gamma = \gamma^*$.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^*(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}^*(t)))_{\mathcal{Q}} &+ j(\zeta^*(t), \theta^*(t), \mathbf{u}^*(t), \dot{\mathbf{u}}^*(t), \mathbf{v}) \\ &- j(\zeta^*(t), \theta^*(t), \mathbf{u}^*(t), \dot{\mathbf{u}}^*(t), \dot{\mathbf{u}}^*(t)) + (\mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}^*(t)), \beta^*(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}^*(t)))_{\mathcal{Q}} \\ &- (C(\theta^*(t), \beta^*(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}^*(t)))_{\mathcal{Q}} \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}^*(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in (0, T),\end{aligned}\tag{8.87}$$

$$\mathbf{u}^*(0) = \mathbf{u}_0,\tag{8.88}$$

et $\sigma^* = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^*) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}^*), \beta^*) - C(\theta^*, \beta^*)$.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité de la solution des problèmes $PV_{\alpha \rho \gamma}$, PV_{α} , PV_{ρ} , PV_{γ} et l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ .

Bibliographie

- [1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] K.T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor and S. Wright, A dynamic contact problem with friction and wear, *Int. J. Engng. Sci.* **35**, 1291-1309 (1997).
- [3] M. Barboteu, A. Matei, M. Sofonea, Analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with normal compliance. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **65**(4), 555-579 (2012).
- [4] M. Barboteu and M. Sofonea, Solvability of a dynamic contact problem between a piezoelectric body and a conductive foundation. *Appl. Math. Comput.* **215**, 2978-2991 (2009).
- [5] M. Barboteu and M. Sofonea, Modelling and analysis of the unilateral contact of a piezoelectric body with a conductive support. *J. Math. Anal. Appl.* **358**, 110-124 (2009).
- [6] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei, Bucharest-Noordhoff, Leyden, 1976.
- [7] V. Barbu, *Optimal control of variational inequalities*, Pitman, Boston, 1984.
- [8] R. C. Batra and J. S. Yang, Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity, *J. Elast.* **38**(2), 209-218 (1995).
- [9] P. Bisegna, F. Lebon and F. Maceri, The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support, J.A.C. Martins and M.D.P. Monteiro Marques (eds.), *Contact Mechanics*, 347-354 (2002).
- [10] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [11] O. Chau, J. R. Fernández, W. Han and M. Sofonea, A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance and damage. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **191**(44), 5007-5026 (2002).
- [12] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shillor and M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **159**(2), 431-465 (2003).
- [13] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, Dynamic frictionless contact with adhesion. *Z. Angew. Math. Phys.* **55**(1), 32-47 (2004).

-
- [14] J. Chazarain et A. Piriou, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1981.
- [15] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Springer, Berlin, 1976. .
- [16] H. Fan, K. Y. Sze and W. Yang, Two-dimensional contact on a piezoelectric half-space, *Int. J. Solids Struct.* **33**(9), 1305-1315 (1996).
- [17] G. Fichera, Problemi elastostatici convincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *mem. Accad. Naz. Lincei*, **7**, 91–140 (1964).
- [18] G. Fichera, *Boundary value problems in elasticity with unilateral constraints*, in *Handbuch der Physik VI a/2*, Springer, Berlin, 391–424 (1972).
- [19] M. Frémond, *Équilibre des structures qui adhèrent à leur support*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 295, Série II, 913-916 (1982).
- [20] M. Frémond, Adhérence des solides, *J. Mécanique Théorique et Appliquée*, **6**(3), 383-407 (1987).
- [21] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [22] M. Frémond and B. Nedjar, Damage in concrete : the unilateral phenomenon. *Nuclear Engng. Design* **156**, 323-335 (1995).
- [23] M. Frémond and B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtual work. *Int. J. Solids Structures* **33**(8), 1083-1103 (1996).
- [24] M. Frémond, K.L. Kuttler, B. Nedjar and M. Shillor, One-dimensional models of damage. *Adv. Math. Sci. Appl.* **8** (2), 541-570 (1998).
- [25] L. Gasiński and A. Ochal, Dynamic thermoviscoelastic problem with friction and damage. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, **21**, 63-75 (2015).
- [26] L. Gasiński, A. Ochal and M. Shillor, Quasistatic thermoviscoelastic problem with normal compliance, multivalued friction and wear diffusion. *Nonlinear Analysis : Real world Applications* **27**, 183-202 (2016).
- [27] R. J. Gu, K.L. Kuttler and M. Shillor, Frictional wear of a thermoelastic beam. *J. Math. Anal. Appl.* **242**(2), 212-236 (2000).
- [28] R. J. Gu and M. Shillor, Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact. *Int. J. Solids and Struct.* **38** (14), 2323-2333 (2001).
- [29] R. Guettaf and A. Touzaline, Analysis of a contact problem with adhesion for electro-viscoelastic materials with long memory. *Rev. Roum. Math. Appl.* **58**(1), 67-84 (2013).
- [30] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, *Studies in Advanced Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, RI-International Press, 2002.

BIBLIOGRAPHIE

- [31] W. Han, M. Sofonea and K. Kazmi, Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-viscoplastic materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **196**(37), 3915-3926 (2007).
- [32] H. Hertz, Über die Berührung fester Elastischer Körper. *J. f. Math, (Crelle)* **92**, (1882).
- [33] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [34] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux équations elliptiques*, Springer, 1993.
- [35] K. L. Kuttler and M. Shillor, Dynamic contact with normal compliance wear and discontinuous friction coefficient. *SIAM J. Math. Anal.* **34**, 1-27 (2002).
- [36] S. Latreche and L. Selmani, Analysis of a frictionless contact problem with adhesion for piezoelectric materials. *Taiwanese journal of mathematics* **21**(1), 81-105 (2017).
- [37] S. Latreche and L. Selmani, History-dependent frictional contact problems. *International conference on the Evolution of Contemporary Mathematics and their Impact in Sciences and Technology (ECMI-SciTech 2017)*, October 9-12, Constantine, Algeria.
- [38] Z. Lerguet, M. Shillor and M. Sofonea, A frictional contact problem for an electro-viscoelastic body. *EJDE*, **2007**, 1-16 (2007).
- [39] J. A. C. Martins and J. T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws. *Nonlinear Anal.* **11**(3), 407-428 (1987).
- [40] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, Analysis of a quasistatic contact problem for piezoelectric materials. *J. Math. Anal. Appl.* **382**, 701-713 (2011).
- [41] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, Analysis of a piezoelectric contact problem with subdifferential boundary condition. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh (Mathematics)*, **144A**, 1007-1025 (2014).
- [42] Y. Ouafik, A piezoelectric body in frictional contact. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* **48**(96), 233-242 (2005).
- [43] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* **177**, 383-399 (1999).
- [44] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic viscoelastic contact problem with normal compliance and friction. *J. Elasticity* **51**, 105-126 (1998).
- [45] J. Rojek and J. J. Telega, Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics, Part I-general developments, *J. Theor. Appl. Mech.* **39**, 655-677 (2001).

-
- [46] J. Rojek, J. J. Telega and S. Stupkiewicz, Contact problems with friction, adherence and wear in orthopaedic biomechanics. Part II-numerical implementation and application to implanted knee joints. *J. Theor. Appl. Mech.* **39**, 679-706 (2001).
- [47] L. Selmani, A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variable. *Applicationes mathematicae*, **40**(1), 1-20 (2013).
- [48] M. Selmani, Frictional contact problem with wear for electro-viscoelastic materials with long memory. *Bull. Belg. Math. Simon Stevin* **20**, 461-479 (2013).
- [49] L. Selmani and S. Latreche, Variational analysis of a thermoviscoelastic problem with friction, damage and wear diffusion. International conference, Mathematical Analysis with Applications in Mechanics (MAAM 2017), September 6-8, Perpignan, France.
- [50] M. Selmani and T. Messaoudi, A dynamic frictionless elastic-viscoplastic problem with normal damped response and damage. *Mediterr. J. Math.* **9**, 81-94 (2012).
- [51] M. Selmani and L. Selmani, A frictional contact problem with wear and damage for electro-viscoelastic materials. *Applications of Mathematics* **55**(2), 89-109 (2010).
- [52] M. Selmani and L. Selmani, Analysis of frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **17**(1), 99-17 (2012).
- [53] M. Selmani and L. Selmani, On frictional contact problem with adhesion in piezoelectricity. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **23**, 263-284 (2016).
- [54] M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic viscoelastic contact problem with friction. *Int. J. Eng. Sci.* **38**, (2000).
- [55] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and variational Analysis of quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. 655, Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
- [56] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica. *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze* (1933).
- [57] M. Sofonea and EL-H. Essoufi, A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction. *Math. Mode. Anal.* **9**(3), 229-242 (2004).
- [58] M. Sofonea and EL-H. Essoufi, Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body. *Adv. Math. Sci. Appl.* **14**(2), 613-631 (2004).
- [59] M. Sofonea, W. Han and M. Barboteu, Analysis of a viscoelastic contact problem with multivalued normal compliance and unilateral constraint. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **264**, 12-22 (2013).
- [60] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York, 2006.

BIBLIOGRAPHIE

- [61] M. Sofonea and A. Matei, History-dependent quasivariational inequalities arising in contact mechanics. *Eur. J. Appl. Math.* **22**, (2011).
- [62] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical models in contact mechanics*, Lecture Note Ser. **398** Cambridge University Press, 2012.
- [63] M. Sofonea, S. Migórski and A. Ochal, Two History-Dependent Contact Problems. *Advances in Variational and Hemivariational Inequalities*, 355-380 (2015).
- [64] M. Sofonea, F. Pătrulescu and A. Farcaş, Viscoplastic contact problem with normal compliance, unilateral constraint and memory term. *Appl. Math. Optim.* **69**(2), 175-198 (2014).

ملخص

مهدف هذه الأطروحة هو دراسة بعض المسائل الحدية في ميكانيك التماس مع أو دون احتكاك بين جسم قابل للتشوه و قاعدة. نعتبر قوانين سلوك غير خطية لمواد مرنة لزجة - لدنة، كمواد مرنة لزجة - لدنة، حرارية لزجة - مرنة. النتائج المحصل عليها تخص وجود و وحدانية الحلول الضعيفة و كذلك التقارب بالنسبة للمعطيات. هذا العمل يتكون من جزأين . الجزء الأول مخصص للتذكير ببعض نتائج التحليل الدالي والمعادلات التفاضلية الجزئية اللازمة لاستكمال هذه الأطروحة. الجزء الثاني موجه لنمذجة و دراسة مسائل التماس المقترحة.

الكلمات المفتاحية: مرن لزج - مطاطي، كمواد مرن لزج - مطاطي، حراري لزج - مرن، احتكاك كولومبي، التماس، تاكل، ارتداء، انتشار الارتداء، حل ضعيف، نقطة ثابتة.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de quelques problèmes aux limites de contact avec ou sans frottement, entre un corps déformable et une base. Nous considérons des lois de comportement non lineaires pour des matériaux élasto-viscoplastiques, électro-élasto-viscoplastiques et thermo-viscoélastiques. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité des solutions faibles ainsi que la convergence par rapport aux données. La thèse comporte deux parties. La première partie rappelle quelques résultats préliminaires d'analyse fonctionnelle et d'équations aux dérivées partielles nécessaires pour réaliser la suite de cette thèse. La deuxième partie est consacrée à la modélisation et à l'étude mathématique des problèmes de contact considérés.

Mots clés : élasto-viscoplasticité, électro-élasto-viscoplasticité, thermo-viscoélasticité, version de la loi frottement de Coulomb, adhésion, endommagement, usure, diffusion d'usure, solution faible, point fixe.

Abstract

The aim of this thesis is the study of some boundary contact problems, with or without friction, between a deformable body and a foundation. We consider nonlinear constitutive laws for elasto-viscoplastic, electro-elasto-viscoplastic and thermo-viscoelastic materials. The results we obtain concern the existence and uniqueness of weak solutions as well as the convergence with respect to the data. The thesis is divided into two parts. The first part concerns some preliminary results on functional analysis and partial differential equations necessary to carry out the continuation of this thesis. The second part is devoted to the modeling and the mathematical study of the contact problems considered.

Key words : elasto-viscoplasticity, electro-elasto-viscoplasticity, thermo-viscoelasticity, Coulomb's friction law version, adhesion, damage, wear, wear diffusion, weak solution, fixed point.