

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF 1

THESE

Présentée à la Faculté de Technologie
Département de Génie des Procédés
Pour l'Obtention du Diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Génie Chimique

Par

HAMIMID Saber

THEME

Simulation numérique de la convection naturelle couplée au rayonnement ou à un champ magnétique dans l'approximation faible nombre de Mach

Soutenue le 07 / 06 / 2016 devant un jury composé de

Djafer Benachour	Professeur à l'Université Ferhat Abbas Sétif 1	Président
Messaoud Guellal	Professeur à l'Université Ferhat Abbas Sétif 1	Rapporteur
Lahcène Bencheikh	Professeur à l'Université Ferhat Abbas Sétif 1	Examineur
Mahfoud Djeddar	Professeur à l'Université de Constantine 1	Examineur
Chérif Bougriou	Professeur à l'Université de Batna	Examineur
Salah Laouar	M.C.A à l'Université de Skikda	Examineur
Madiha Bouafia	M.C.A à l'Université d'Evry Val d'Essonne - France	Invitée

..... *A mes parents*

A ma femme et mes enfants.....

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Génie des Procédés Chimiques de l'université Ferhat Abbas Sétif 1 sous la direction de Monsieur le Professeur **Messaoud Guellal**, à qui j'exprime ma profonde reconnaissance pour l'aide inestimable qu'il m'a prodiguée tout au long de cette étude.

Monsieur **Djafer Benachour**, Professeur à l'Université Ferhat Abbas Sétif 1, m'a fait l'honneur de présider le jury de ma thèse, qu'il trouve ici, avec mes remerciements, l'expression de ma reconnaissance.

Je remercie vivement Monsieur **Lahcène Bencheikh**, Professeur à l'Université Ferhat Abbas Sétif 1, ainsi que Monsieur **Chérif Bougriou**, Professeur à l'Université de Batna, Monsieur **Mahfoud Djeddar**, Professeur à l'Université de Constantine 1 et Monsieur **Salah Laouar**, Maître de Conférences à l'Université de Skikda, qui ont bien voulu faire partie en tant qu'examineurs.

Je remercie Mademoiselle **Madiha Bouafia**, Maître de Conférences à l'Université d'Evry Val d'Essonne (France), pour l'intérêt qu'elle a porté à cette étude en acceptant de m'accueillir au sein du Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry, et d'honorer de sa présence le jury de cette thèse.

Je remercie également toutes les personnes qui m'ont soutenu dans l'accomplissement de ce travail.

Liste des symboles

A_i	Surface radiative [m^2]
b	Champ magnétique [T]
B	Champ magnétique adimensionnel
c_p	Capacité thermique à pression constante , [$J. kg^{-1}. K^{-1}$]
c_v	Capacité thermique à volume constant, [$J. kg^{-1}. K^{-1}$]
F_{i-j}	Facteur de forme entre les surfaces S_i et S_j
g	Accélération de la pesanteur, [$m.s^{-2}$]
H	Côté de la cavité, m
J	Radiosité, [$W.m^{-2}$]
k	Conductivité thermique, [$W.m^{-1}.K^{-1}$]
N	Nombre total des surfaces radiatives
Nr	Nombre de rayonnement, $\sigma T_0^4 H / k \Delta T$
Nu	Nombre de Nusselt
p	Pression totale [Pa]
p'	Pression dynamique perturbée [Pa]
\bar{p}	Pression thermodynamique moyenne [Pa]
\bar{P}	Pression thermodynamique adimensionnelle
Pr	Nombre de Prandtl, ν / α
qr	Flux radiatif net, [W]
Qr	Flux radiatif net adimensionnel
R_i	Radiosité adimensionnelle $J_i / \sigma T_0^4$
Ra	Nombre de Rayleigh $Ra = g\beta\Delta TH^3 / (\nu\alpha)$
Ra_m	Nombre de Rayleigh magnétique
t	Temps, [s]
T	Température, [K]
T_0	Température de référence, $(T_F + T_C) / 2$, K
u, v	Composantes de la vitesse , [$m.s^{-1}$]
U, V	Composantes adimensionnelles de la vitesse
x, y	Coordonnées cartésiennes , [m]
X, Y	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles

Symboles Grecques

α	Diffusivité thermique, [$m^2.s^{-1}$] $k / \rho c_p$
β	coefficient de dilatation thermique [K^{-1}]
ΔT	Différence de température, $T_C - T_F$, [K]
ε_i	Emissivité de la surface A_i
ε_b	Paramètre de Boussinesq $\Delta T / 2T_0$

γ	Rapport des capacités thermiques c_p / c_v
γ_m	Nombre magnétique $\gamma_m = \chi_0 b_0^2 / \mu_m g H$
μ_m	Perméabilité magnétique, [H / m]
μ	Viscosité dynamique, [$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$]
ν	Viscosité cinématique, [$m^2 \cdot s^{-1}$]
ρ	Masse volumique, [$kg \cdot m^{-3}$]
σ	Constante de Stefan–Boltzmann, [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$]
Π	Pression adimensionnelle $(p - \bar{p} - p_0) / \rho_0 (\alpha_0 / H)^2$
θ	Température adimensionnelle, $(T - T_0) / \Delta T$
Θ	Température radiative adimensionnelle, T / T_0
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
τ	Temps adimensionnel
χ	Susceptibilité magnétique massique, [m^3 / kg]
χ_m	Susceptibilité magnétique volumique = $\rho \chi$

Indices et Acronymes

<i>avg</i>	Valeur moyenne
<i>BS</i>	Boussinesq
<i>C</i>	Chaude
<i>c</i>	Convective
<i>CFL</i>	Courant Friedrichs Lewy
<i>dyn</i>	Dynamique
<i>F</i>	Froide
<i>LMN</i>	Faible nombre de Mach
<i>Max</i>	Valeur maximale
<i>PC</i>	Propriétés constantes
<i>PV</i>	Propriétés variables
<i>r</i>	Radiatif
<i>t</i>	Total
<i>0</i>	État de référence
<i>*</i>	Paramètres adimensionnels

Table des Matières

REMERCIEMENTS	i
LISTE DES SYMBOLES	ii
TABLES DES MATIERES	iv
INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE 1 : GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	5
1.1. INTRODUCTION	6
1.2. LA CONVECTION	6
1.3. APPROXIMATION DE BOUSSINESQ	8
1.4. APPROXIMATION FAIBLE NOMBRE DE MACH	10
1.5. COUPLAGE DE LA CONVECTION NATURELLE AVEC D'AUTRES PHENOMENES PHYSIQUES	12
1.5.1. Couplage convection-rayonnement	12
1.5.2. Couplage convection-champ magnétique	14
1.6. CONCLUSION	16
Références	17
CHAPITRE 2 : MODELISATION MATHEMATIQUE SOUS L'APPROXIMATION FAIBLE NOMBRE DE MACH	26
2.1. INTRODUCTION	27
2.2. ÉQUATIONS DE CONSERVATION	27
2.2.1. Ecoulement compressible	27
2.2.1.1. <i>Equations de conservation</i>	27
2.2.1.2. <i>Forme adimensionnelle des équations de conservation</i>	28
2.2.2. Écoulement à faible nombre de Mach	29
2.2.2.1 <i>Equation de continuité</i>	30

2.2.2.2	<i>Équation de quantité de mouvement</i>	30
2.2.2.3	<i>Equation d'énergie</i>	32
2.2.2.4	<i>Equation d'état</i>	32
2.2.2.5	<i>Récapitulatif des équations</i>	33
2.2.2.6	<i>Redimensionnement des équations de conservation</i>	33
2.2.3.	Écoulement incompressible	35
2.2.4.	Écoulement dilatable (Approximation de Boussinesq)	35
2.2.5	Adimensionnement des équations faible nombre Mach	37
2.3.	CONCLUSION	39
Références	39
CHAPITRE 3 : RESOLUTION NUMERIQUE		40
3.1.	INTRODUCTION	41
3.2.	FORME GENERALE DES EQUATIONS DE CONSERVATION	41
3.2.1.	Calcul de \bar{p}	42
3.2.2.	Calcul de $\frac{d\bar{p}}{dt}$	43
3.3.	LA METHODE DES VOLUMES FINIS	45
3.3.1.	Principe	45
3.3.2.	Maillage décalé	46
3.4.	DISCRETISATION DES EQUATIONS DE CONSERVATION	47
3.4.1.	Terme transitoire	47
3.4.2.	Terme convectif	48
3.4.3.	Terme diffusif	48
3.4.4.	Terme source	50

3.4.5. Équation de continuité	50
3.4.6. Schémas numériques	51
3.4.7. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement	52
3.5. COUPLAGE VITESSE-PRESSION	56
3.5.1. Algorithme SIMPLER	57
3.5.2. Algorithme SIMPLER transitoire	59
3.6. RELAXATION	59
3.7. RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE DES EQUATIONS DISCRETISEES	60
3.7.1. Algorithme de THOMAS (TDMA)	60
3.7.2. Application de l'algorithme de THOMAS à des problèmes 2D (TDMA)	61
3.8. CRITERE DE CONVERGENCE	63
3.9. CONCLUSION	63
Références	63
CHAPITRE 4 : CONVECTION NATURELLE EN ECOULEMENT HORS-BOUSSINESQ	65
4.1. INTRODUCTION	66
4.2. CONFIGURATION PHYSIQUE	66
4.3. ÉQUATIONS DE MOUVEMENT	67
4.3.1. Conditions initiales et conditions aux limites	67
4.3.2. Conditions aux limites adimensionnées	67
4.3.3. Paramètres adimensionnels	68
4.4. VALIDATION	68
4.5. RESULTATS ET INTERPRETATIONS	70
4.5.1. Limite du modèle de Boussinesq	70

4.5.2. Effet combiné de la différence de température et de la variation des propriétés physiques	76
4.6. CONCLUSION	86
Références	87
CHAPITRE 5 : COUPLAGE CONVECTION –RAYONNEMENT DE SURFACES SOUS L’APPROXIMATION FAIBLE NOMBRE DE MACH	88
5.1. INTRODUCTION	89
5.2. CONFIGURATION PHYSIQUE	89
5.3. EQUATIONS DE MOUVEMENT	90
5.4. RAYONNEMENT DE SURFACES	90
5.4.1. La méthode de radiosité	91
5.4.2. Algorithme de calcul	93
5.5. CONDITIONS AUX LIMITES ADIMENSIONNEES	94
5.6. VALIDATION NUMERIQUE	95
5.7. RESULTATS ET INTERPRETATIONS	95
5.7.1. Effet du rayonnement sur les isothermes et les lignes de courant	96
5.7.2. Effet du rayonnement sur le transfert thermique	100
5.7.3. Effet du rayonnement sur la distribution des températures	105
5.7.4. Effet du rayonnement sur les champs dynamiques	108
5.7.5. Effet du rayonnement sur la pression thermodynamique	111
5.8. CONCLUSION	113
Références	114

CHAPITRE 6 : COUPLAGE CONVECTION-CHAMP MAGNETIQUE SOUS L'APPROXIMATION FAIBLE NOMBRE DE MACH	115
6.1. INTRODUCTION	116
6.2. LA SUSCEPTIBILITE MAGNETIQUE DES MATERIAUX	116
6.3. FORCES MAGNETIQUES	116
6.4. CONFIGURATION PHYSIQUE	117
6.5. FORMULATION MATHEMATIQUE	118
6.6. VALIDATION	121
6.7. RESULTATS ET INTERPRETATIONS	123
6.7.1. Cas d'apesanteur (Zéro gravité)	123
6.7.2. En présence de gravité	127
6.8. CONCLUSION	131
Références	132
CONCLUSION GENERALE	133
ANNEXES	136
ANNEXE I : EQUATIONS DE CONSERVATION	137
ANNEXE II : SCHEMAS NUMERIQUES	143
ANNEXE III : ALGORITHMES SIMPLE ET SIMPLER	1 52
ANNEXE IV : CALCULE DE RADIOSITÉ ET FACTEURS DE FORMES	158

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Les industriels se tournent de plus en plus vers la modélisation pour résoudre des problèmes multi-physiques liés à la conception de systèmes dont la géométrie est souvent complexe. Les performances croissantes des nouveaux calculateurs permettent d'envisager des calculs faisant intervenir différents phénomènes physiques couplés, telles que les déformations thermomécaniques de structures, les transferts thermiques couplés de conduction, convection et rayonnement, l'interaction fluide-structure et le couplage électromagnétique-thermique.

De nombreuses études ont été réalisées en utilisant l'expérimentation numérique et pratique. Il est vraisemblable que l'expérimentation de laboratoire est d'une importance cruciale pour valider la première approche, néanmoins elle reste handicapée par le coût élevée du matériel et la difficulté de réalisation. La simulation numérique reste la méthode la moins coûteuse, et la plus utilisable. L'évolution rapide des capacités des calculateurs au cours de ces vingt dernières années a permis un progrès notable dans la compréhension du phénomène de la convection naturelle, le rayonnement thermique et le couplage entre ces deux phénomènes.

Les phénomènes thermiques couplés en milieu confiné sont d'un intérêt considérable dans le domaine d'ingénierie. Cet intérêt se traduit par de nombreuses applications comme les collecteurs d'énergie solaire, le refroidissement des composants électroniques, le confort thermique dans les bâtiments, les fours, etc. L'étude de la convection naturelle en milieux confinés fait, de nos jours encore, l'objet de nombreuses recherches, tant sur le plan numérique qu'expérimentale. Dans ce type de problème, les différents modes de transfert thermique (convection, conduction, rayonnement) peuvent intervenir de façon couplée, notamment par le biais des parois.

La majorité de ces études font intervenir une différence de température assez faible pour laquelle l'approximation de Boussinesq est utilisée en supposant que les propriétés des fluides sont constantes à l'exception d'une dépendance linéaire de la densité en fonction de la température dans le terme de gravité. Dans beaucoup d'applications physiques et industrielles tels que les systèmes d'isolation thermique, les réacteurs chimiques, les écoulements atmosphériques et les processus de combustion, les différences de température peuvent atteindre des dizaines de degrés. Dans de telles situations les hypothèses utilisées pour utiliser l'approximation de

Boussinesq ne peuvent pas être justifiées et une approche de modélisation différente est nécessaire, celle qui prend en compte les variations réalistes des propriétés des fluides.

Notre travail consiste à étudier le couplage convection naturelle-rayonnement et convection naturelle-champ magnétique dans une cavité différentiellement chauffée dans le cas hors Boussinesq. L'objectif ici est de prendre en compte des grands écarts de température par le choix de modèles dits faible Mach qui permettent de s'affranchir de l'hypothèse de Boussinesq, tout en conservant le découplage entre les fluctuations de pression et de masse volumique, caractéristique des écoulements incompressibles. La résolution numérique de ce problème passe essentiellement par l'approximation en volumes finis des équations généralisées de Navier-Stokes.

Une attention particulière est accordée à l'examen de l'effet du paramètre de Boussinesq, du nombre de Rayleigh, de l'émissivité des parois, de la variation des propriétés thermophysiques du fluide avec la température et de l'intensité du champ magnétique sur la distribution de la température, sur la structure de l'écoulement au sein de la cavité et sur la contribution des différents phénomènes au transfert de chaleur global.

Ce manuscrit est articulé en six chapitres.

Le premier chapitre est un état de l'art étendu sur la convection naturelle dans les cavités fermées. Il présente les généralités et les définitions liées aux phénomènes étudiés, à savoir la convection naturelle, le rayonnement thermique, ainsi que leur couplage, avant de passer en revue les différents travaux qui ont traité ce type de problème.

Dans le chapitre 2, on décrit d'une manière détaillée les différentes étapes de modélisation utilisée dans un système bidimensionnel. On présente, en partant d'un formalisme général, les équations de bilan décrivant le mouvement instationnaire d'un fluide newtonien, visqueux et compressible; puis des hypothèses simplificatrices sont appliquées à différents degrés pour aboutir à différents types d'écoulement (écoulement à faible nombre de Mach, écoulement incompressible et écoulement dilatable) en soulignant les limites d'application relatives à chaque système d'équations.

Le troisième chapitre décrit la méthodologie de résolution numérique des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles présentés dans le chapitre 2. A travers ce

chapitre, nous présentons brièvement la méthode des volumes finis appliquée pour des écoulements fluides, et d'une manière générale, les étapes de discrétisation des équations mathématiques.

Le chapitre quatre est consacré à la présentation des résultats numériques de la convection naturelle pure à faible nombre de Mach d'un fluide (air) confiné dans une cavité carrée différentiellement chauffée. L'objectif consiste, dans un premier lieu, à valider le code numérique développé en comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature, ensuite étudier le domaine de validité de l'approximation Boussinesq, et enfin examiner l'effet de quelques paramètres dominants sur le comportement thermique et dynamique du fluide.

Le chapitre cinq est consacré à l'étude du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surface dans une cavité carrée différentiellement chauffée dans le cas hors Boussinesq. Des essais numériques permettent de valider la méthode, en mettant en évidence l'effet du rayonnement sur les champs thermiques et dynamiques.

Dans le chapitre six, Nous nous intéressons au couplage du champ magnétique-convection naturelle dans l'approximation faible nombre de Mach (LMN) d'un fluide non électro-conducteur paramagnétique. L'influence du gradient du champ magnétique sur le mouvement convectif de l'air sera examinée dans les deux cas : en apesanteur et en gravité terrestre.

Chapitre 1

Généralités et revue bibliographique

1.1. INTRODUCTION

Au cours des cinquante dernières années, les études théoriques, numériques et expérimentales portant sur la convection naturelle en milieu confiné ont été si nombreuses qu'il devient très difficile d'en faire une synthèse complète de ces travaux.

Les premières études dans ce domaine datent de 1942. On peut citer les travaux de W. Elenbaas [1] et les synthèses de Ostrach [2,3], de Batchelor [4], de Yang [5], de Catton [6] et de Shih [7], ainsi que l'ouvrage de Gebhart et al. [8]. De plus, dans cette dernière référence, les limites de validité de l'hypothèse de Boussinesq, abondamment employée dans l'analyse de la convection naturelle, sont discutées en profondeur.

Le problème de la convection naturelle dans une enceinte carrée est devenu un point de référence afin de comparer les performances des modèles numériques. À cet égard, l'exercice mené par De Vahl Davis et Jones [9] est abondamment cité afin de valider les codes numériques.

L'intérêt porté à ce type d'écoulement provient du fait que, pour de nombreuses applications industrielles, l'analyse des phénomènes fait intervenir des forces de poussée d'Archimède qui, combinées à un effet de confinement, donnent naissance à des écoulements complexes et variés. Cette complexité, accentuée par le caractère généralement instationnaire, voire turbulent, des mouvements des fluides concernés a motivé des études fondamentales visant à mieux appréhender les couplages entre la dynamique et la thermique de tels systèmes, les interactions entre le fluide en mouvement et les parois, l'influence de la géométrie ou des conditions aux limites, l'apparition et le développement d'instabilité.

Les écoulements induits par une différence de température au sein d'un tel milieu sont rencontrés dans bon nombre d'applications industrielles (fours, capteurs solaires, fenêtres à double paroi, réservoirs d'eau chaude, refroidissement des circuits, croissance de cristaux, contrôle des incendies, industrie métallurgique, isolation thermique dans l'habitat, ventilation des chambres, ...), et requièrent une compréhension physique fine des phénomènes en jeu pour optimiser de tels environnements thermiques. La maîtrise de ces transferts thermiques complexes nécessite l'utilisation d'outils expérimentaux mais également numériques adaptés à l'étude et/ou la prévision de tels phénomènes.

1.2. LA CONVECTION

Le terme convection est utilisé pour définir les mouvements dus à l'agitation thermique engendrant des différences de densités entre les molécules d'un fluide. On parle de convection naturelle lorsqu'il s'agit d'agitations induites dans le fluide par des forces (de volume ou de surface) agissant à l'intérieur du volume étudié. Les mouvements générés sont dus aux variations locales de la masse volumique du fluide en fonction de la température et/ou de la concentration pour le cas de la convection naturelle d'origine thermique et/ou massique.

Les premières études sur la convection naturelle concernent les écoulements de couche limite sur plaque plane (à température ou à flux imposé) [10-12]. Ensuite, les chercheurs se

sont penchés sur les écoulements de convection naturelle en espace confiné [13] avec comme principale illustration, une cavité parallélépipédique remplie d'air possédant deux parois opposées soumises à un écart de température constant (une paroi chauffée et la paroi opposée est refroidie) [14].

Une partie importante des études publiées dans ce domaine est résumée par Bejan [15] et Yang [5]. Malgré leurs diversités, on remarque qu'elles considèrent la plupart des conditions aux limites thermiques comme constantes (température ou flux de chaleur constants).

Au début de la décennie suivante, des modèles de turbulence, fondés sur le concept d'une viscosité turbulente calculée à partir d'une ou de deux équations de transport (modèle $k-\varepsilon$ à bas nombre de Reynolds, en particulier), ont commencé à être appliqués à la modélisation de la convection naturelle en cavité [16-18]. Des recherches se poursuivent aujourd'hui par des approches basées sur des modèles de simulation des grandes échelles (SGE ou LES), ou par des approches basées sur une absence totale de modèle (SND ou DNS), [19-27]. Des approches non-linéaires, voire purement numériques, centrées sur la problématique de la transition d'un écoulement stationnaire vers une ou plusieurs structures possibles d'écoulement périodiques, puis chaotiques, continuent à connaître un certain intérêt qui se traduit par un nombre significatif de publications.

Deux grandes familles d'écoulements aux comportements très spécifiques se distinguent avec d'un côté la cavité aux parois verticales différentiellement chauffées et d'autre part le problème de Rayleigh-Bénard caractéristique cette fois-ci d'une couche fluide chauffée par le bas.

Le problème de l'écoulement de Rayleigh-Bénard, est un problème d'instabilité dans un fluide confiné entre deux plaques horizontales portées à deux températures différentes. Si la plaque supérieure est la plus chaude, le système reste stable et stratifié en température. Mais, si la paroi inférieure est la plus chaude et si une perturbation est introduite dans le système, alors pour une valeur critique de la différence de température entre les deux plaques, il peut apparaître des mouvements à l'intérieur du fluide, le système est instable et des mouvements sont organisés en rouleaux périodiques contrarotatifs. Ces rouleaux, également appelées cellules de Rayleigh-Bénard, apparaissent quand il y a un couplage entre le champ dynamique et le champ thermique. Ces instabilités ont fait l'objet d'études très complètes pour des fluides incompressibles ou faiblement compressibles [28-30].

D'autre part, des études supplémentaires ont mis en relief les différences de comportement introduites avec la mise en place de parois verticales en fonction de la nature de celles-ci ; parois verticales adiabatiques [31,32] et parois verticales conductrices [33, 34].

Des études plus récentes de Pallares et al. [35, 36] s'attachent à la description en trois dimensions des écoulements présents dans une cavité cubique chauffée par le bas. Ces travaux numériques mettent en évidence la complexité des structures présentes dans l'écoulement.

Le cas de la cavité parallélépipédique aux parois verticales différentiellement chauffées constitue une configuration de base de dispositifs industriels variés et, surtout, un cas de

référence d'une grande simplicité pour la mise au point et la validation de codes de simulation numérique d'écoulements de convection naturelle.

La différence de température entre la source chaude et la source froide ($T^+ - T^-$), même faible, entraîne une mise en mouvement du fluide par convection naturelle comme dans le cas de la plaque plane verticale chauffée et placée en milieu libre. Le fluide subit donc une ascension le long de la paroi chaude avant d'impacter la paroi haute puis redescendre en suivant la paroi froide. Se crée alors une recirculation au milieu de la cavité avec une zone morte au centre [9,37,38].

Les travaux de Batchelor en 1954 [4] suivis de ceux de Eckert et Carlson en 1961 [39] et de Newell et Schmidt. [40] quelques années plus tard furent parmi les premiers à relever différents régimes d'écoulement, fonctions du nombre de Grashof (Rayleigh), du nombre de Prandtl et du rapport d'aspect définissant la géométrie de la cavité H/L , et ceci par voie expérimentale et numérique.

Batchelor [4] a examiné en détail les cas des faibles nombres de Rayleigh ($Ra < 10^5$) et fait une analyse qualitative pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh. Depuis lors, ce type d'écoulement, en raison de la multiplicité des applications technologiques qui s'y réfèrent et aussi parce qu'il constitue un cas idéal pour la validation des codes numériques [41-44], fait l'objet d'un intérêt croissant.

1.3. APPROXIMATION DE BOUSSINESQ

Pour décrire le mouvement de la convection d'un fluide lorsque le champ de vitesse reste faible devant la vitesse du son, les équations de Navier-Stokes compressibles sont trop complexes et les équations de Navier-Stokes incompressibles ne rendent pas compte des forces de flottabilité. L'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte ces forces tout en filtrant les ondes sonores.

Dans les cas les plus courants de la convection naturelle, les variations de masse volumique par rapport à la valeur moyenne au sein du fluide sont faibles et les vitesses d'écoulement sont assez lentes. Il est alors possible de considérer le fluide comme quasi incompressible. Les variations de ρ sont négligées partout, excepté dans la force de gravité à l'origine du phénomène de thermoconvection. C'est l'hypothèse de Boussinesq.

La grande majorité des solutions analytiques approchées et des simulations numériques présentées jusqu'à ce jour se sont basées sur les hypothèses de Boussinesq [45], dont les fondements ont été rappelés ci-dessus.

Au début des années 50, La validité de cette approximation pour les fluides compressibles a fait l'objet de plusieurs études [46-53].

Parmi ces travaux, ceux de Spiegel et Veronis [47] qui ont justifié l'approximation de Boussinesq pour un fluide compressible lorsque la hauteur de la couche fluide est plus faible (comparée à la hauteur d'échelle) par rapport à n'importe quelle hauteur d'échelle et les fluctuations de la densité et de la pression induites par le mouvement sont beaucoup plus

petites que les variations totales statiques de ces quantités. Basé sur une analyse à grande échelle, Ogura et Phillips [49] ont obtenu le système d'équations de Boussinesq régissant la convection thermique dans l'atmosphère en supposant que la plage relative de la température potentielle est faible et la hauteur de la couche fluide est inférieure à la hauteur de l'échelle de l'atmosphère adiabatique. En essayant d'étendre l'analyse traitant des cas plus généraux, Gough [51] a obtenu un résultat similaire à celui d'Ogura et Phillips.

Gray et Giorgini [54], ont présenté une nouvelle méthode d'obtention des équations approchées des écoulements en convection naturelle en prenant des propriétés physiques variables en fonction de la température et de la pression. Cette approximation suppose alors les hypothèses suivantes :

- la masse volumique du fluide est constante, exceptée dans le terme de la poussée d'Archimède et ne dépend que des variations de température (l'influence des variations de pression sur la masse volumique est négligée).
- les autres propriétés thermophysiques du fluide sont constantes.
- la dissipation de chaleur due à la viscosité du fluide est négligeable.

Les auteurs ont montré que cette approximation est bien valide pour des faibles différences de température ($\Delta T \prec 28.6K$) et pour des variations des propriétés thermophysiques allant jusqu'à 10% par rapport à la valeur moyenne.

Ces critères ont été appliqués par Tritton [55] afin de pouvoir appliquer l'approximation de Boussinesq

Cette méthode a été testée pour l'eau et l'air à température ambiante. Shang et Wang [56] ont étudié la déviation dans les calculs de transfert de chaleur en raison d'ignorer la variabilité des propriétés physiques. Leurs résultats montrent que l'approximation de Boussinesq n'est valable que si les gradients de température restent faibles. Cette approximation a été adoptée par Gebhart et al. [8], Bejan [15] et Nield and Bejan [57].

La validité de l'approximation de Boussinesq pour le transfert simultané de chaleur et de masse a été récemment vérifiée par Laaroussi et al [58]. Ces auteurs ont comparé le modèle de Boussinesq à un modèle à densité variable pour des températures relativement élevées pour le cas de la convection mixte double diffusive entre deux plaques planes verticales liée à l'évaporation d'un film liquide. Leurs résultats ont montré que le modèle de Boussinesq est valable pour des différences de température et fraction massique inférieures à 20 K et 0.1 kg/kg respectivement.

L'approximation de Boussinesq est presque toujours introduite dans les études numériques et théoriques se rapportant à la convection naturelle en cavité. Au cours des dernières années, l'approximation de Boussinesq, généralement considérée comme justifiée lorsque les écarts maximums de température ne dépassent pas 10% [54] de la température de référence d'un gaz, a été reconsidérée dans le cas de grands écarts de température en se basant sur la méthode des développements asymptotiques et sur la loi des gaz parfaits. Par contre, cette approximation ne semble jamais avoir été mise en cause dans le cas de la convection

solutale, d'où la nécessité du développement d'autres modèles hors-Boussinesq pour traiter ce type de problème tel que l'approximation faible nombre de Mach.

1.4. APPROXIMATION FAIBLE NOMBRE DE MACH

Comme mentionné précédemment, l'approximation de Boussinesq a suscité de nombreuses controverses. Les analyses d'ordre de grandeur ne donnent qu'une indication sur ses conditions de validité. Par exemple, il était admis, jusqu'à une période assez récente, qu'une différence de température ΔT inférieure à 10% de la température de référence permettait de l'utiliser et que les travaux des forces de pression étaient alors négligeables, et donc les travaux des forces visqueuses. Cependant, la question de la validité de l'approximation de Boussinesq, notamment dans le cas de systèmes fermés, a fait l'objet de plusieurs travaux depuis une cinquantaine d'année [47,48,59,60].

L'article de Gray et Giorgini [54] a apporté un autre éclairage sur cette approximation en affirmant en particulier que sa limite de validité pour l'air serait $\Delta T < 28.6K$. Ce travail est probablement à l'origine de la théorie développée par Paolucci [61] qui est maintenant remise en question dans un certain nombre de travaux. Par exemple, Rey [62] donnent comme limites du domaine d'application $\Delta T / T_0 < 0.01$ et $Ma = 0.142$ ou même $Ma = 0.0027$, Pavageau et Rey [63]. La limite sur le nombre de Mach n'est, en pratique, pas significative pour les écoulements internes parce que les nombres de Mach sont toujours très petits. De plus, Pons et Le Quéré [64-66] posent la question de l'effet des travaux des forces de pression et, même, de viscosité [67].

Au début des années quatre-vingt, Klainerman et Majda [68,69] ont prouvé la convergence de l'écoulement compressible vers l'écoulement incompressible lorsque le nombre de Mach tend vers zéro pour l'écoulement isentropique dans un domaine ouvert. Ils ont pu obtenir une estimation des équations aux dérivées partielles sous la forme adimensionnelle. Ces résultats ont été étendus par Schochet [70] aux écoulements nonisentropiques dans un domaine fermé. Dans toutes ces études, les échelles de longueur et de temps à la limite $M \rightarrow 0$ ainsi que les conditions initiales ont été préparées de sorte à ce qu'elles soient compatibles avec les équations incompressibles limites.

Les hypothèses permettant de négliger les effets de la pression motrice sur les variations de masse volumique impliquent que d'autres simplifications peuvent être introduites dans les équations de conservation de la masse et de l'énergie. Cette question est discutée en détail dans l'ouvrage de Gebhart et al. [8] où des analyses d'ordre de grandeur permettent de justifier les résultats essentiels résumés ci-dessous.

En général, les variations de masse volumique dans les écoulements physiques peuvent provenir des effets de compressibilité (variation de pression), des effets de dilatabilité (variation de température) ou du mélange de deux espèces (fluides de masses volumiques différentes). Dans un écoulement, quand le nombre de Mach excède l'unité, l'écoulement devient supersonique et peut contenir des ondes de choc qui peuvent affecter l'écoulement de manière significative. Ecrites sous leur forme compressible, les équations de conservation

sont difficiles à traiter numériquement, même si la vitesse du fluide est faible (convection naturelle ou convection mixte).

La notion de faible nombre de Mach apparaît lorsqu'on s'intéresse aux écoulements compressibles à faible vitesse. Ce régime est décrit par une vitesse caractéristique de l'écoulement U très faible devant la célérité du son c (vitesse de propagation de l'onde de pression). Il en résulte que le nombre de Mach défini par $Ma = U/c$ est très inférieur à l'unité. Ces écoulements interviennent dans des phénomènes physiques divers, tels que la circulation océanique, les fonctions corporelles de respirer et de parler, la convection naturelle, l'aéroacoustique et dans les processus industriels tels que le refroidissement ou le chauffage d'un gaz dans un domaine fermé et la combustion, où de grandes variations de masse volumique, dues à la chaleur produite par les réactions chimiques, sont présentes. Même en écoulement hypersonique, il y a des régions au voisinage des points de stagnation et des surfaces d'adhérence dans lesquelles la vitesse est nulle.

Dans le cas d'un écoulement à petit nombre de Mach mais avec des variations importantes de température, on cherche à éliminer les contraintes dues aux ondes acoustiques, qui sont associées aux équations compressibles et qui sont de peu d'intérêt pour les phénomènes étudiés.

La résolution des équations de Navier-Stokes compressibles classiques pour le régime d'écoulement à faible nombre de Mach, pose le problème de la résolution des ondes acoustiques. En effet, dans la limite $M \rightarrow 0$, la vitesse caractéristique de l'écoulement est très petite devant la célérité du son. Considérons L la longueur caractéristique du domaine, si nous nous intéressons aux phénomènes de transport, l'échelle de temps caractéristique de l'écoulement est le temps de convection t_c , avec $v = \frac{L}{t_c}$. L'échelle de temps acoustique étant

$t_a = \frac{L}{c} = M \frac{L}{v} = M t_c$, alors $t_a \ll t_c$. Le calcul numérique doit s'adapter aux plus petites échelles de temps et d'espace, d'où la restriction imposée par la condition de stabilité de type CFL des schémas explicites. Pour une approche compressible, celle-ci s'écrit $\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(c + |v|) \leq 1$, avec $(c + |v|)$ la vitesse d'une onde acoustique, ce qui rend ces schémas très lourds voire inefficace.

Le préconditionnement bas Mach ne permet pas seulement d'améliorer l'efficacité des schémas compressibles, il est également responsable de l'amélioration de la précision des schémas décentrés car il permet de réduire correctement la dissipation numérique, donc un faible temps de calcul mais aussi un faible encombrement de mémoire. Développer un traitement implicite peu coûteux signifie alors résoudre un problème d'optimisation multi-objectifs pour lequel il faut minimiser à la fois le temps de calcul vers l'état stationnaire et l'encombrement de mémoire. La minimisation du temps de calcul peut être aussi vue comme un problème d'optimisation dans la mesure où le coût de calcul global pour atteindre un état stationnaire est une combinaison de l'efficacité intrinsèque (c.à.d le nombre d'itérations pour converger) et du coût par point et par itération [71,72].

Deux grands types d'approches sont alors couramment utilisés. Le premier consiste à considérer les équations compressibles et à appliquer des méthodes de préconditionnement bas Mach [73,72] lors de la résolution numérique de ces équations. Cette stratégie, à savoir le développement d'un traitement indépendant du nombre de Mach, requiert soit l'extension des méthodes pression « incompressibles » vers les écoulements à Mach élevé [73-76] soit l'extension des solveurs « compressibles » densité vers les régimes bas Mach [72]. Dans les travaux de Turkel [72], on propose de multiplier les termes de dérivée en temps des équations d'Euler par une matrice de préconditionnement bas Mach qui modifie artificiellement la vitesse des ondes acoustiques de sorte que toutes les valeurs propres du système restent du même ordre de grandeur lorsque le nombre de Mach diminue, évitant ainsi les problèmes numériques.

Le deuxième consiste à utiliser la forme compressible des équations de Navier-Stokes et de l'énergie, et appliquer la méthode des développements asymptotiques pour ne conserver que les termes dominants dans chacune des équations [59,61,77]. Rubel et Landis [59] ont utilisé le paramètre $\varepsilon = \Delta T / T_0$ et montrent que l'expansion converge (vers la solution incompressible) si $\varepsilon \ll 1$, c'est à dire pour $T_C \ll 3T_F$. L'approximation à faible nombre de Mach appliquée par Paolucci [61], Chenoweth et Paolucci [77], consiste à développer les variables de l'écoulement en série de puissance du paramètre $Ma^2 \ll 1$ puis de faire des simplifications en tenant compte du fait que Ma est petit, afin de dériver un nouveau système d'équations libéré des contraintes acoustiques. Un troisième type d'approche a également été développé. Il s'agit des méthodes hybrides, comme celle proposée par Golanski et al. [78], où les phénomènes de production acoustique et de propagation acoustique sont traités séparément.

La tendance actuelle consiste à rechercher de nouveaux algorithmes de calcul permettant de traiter l'équation de l'énergie sous sa forme générale, sans négliger aucun terme [79].

1.5. COUPLAGE DE LA CONVECTION NATURELLE AVEC D'AUTRES PHENOMENES PHYSIQUES

1.5.1. Couplage convection-rayonnement

Les transferts de chaleur qui se produisent au sein d'un écoulement de convection naturelle en espace confiné résultent en réalité des échanges conductifs, convectifs et radiatifs. La prise en compte du rayonnement de parois ou même du rayonnement de gaz dans les écoulements de convection naturelle s'avère incontournable pour une modélisation efficace des transferts de chaleur et de la dynamique de l'écoulement.

Lorsque les cavités sont remplies d'un gaz, l'influence des échanges radiatifs entre surfaces à travers un milieu qui émet du rayonnement à sa propre température locale, absorbe et diffuse le rayonnement incident en tout point (milieu semi-transparent) a été étudiée depuis le début des années soixante-dix.

L'étude des transferts de chaleur couplés (par conduction, convection et rayonnement) dans les milieux semi-transparents suscite une attention croissante. Néanmoins, la solution analytique de ce type de problème est dans la plupart des cas impossible à obtenir. En conséquence les méthodes numériques sont régulièrement employées pour résoudre de tels problèmes en thermique. Les recherches théoriques publiées par Goody [80] et Spiegel [81] font parties des travaux fondateurs concernant ce domaine. Le couplage entre la convection et le rayonnement d'un gaz confiné entre deux parois horizontales y est abordé. Les auteurs analysent en particulier les phénomènes de stabilité. L'étude de Spiegel montre que le rayonnement a un effet stabilisateur qui dépend fortement, pour un nombre de Rayleigh donné, de l'épaisseur optique du gaz.

L'étude d'une cavité carrée a été traitée par Chang et al [82] avec la méthode des flux radiaux associée à un modèle exponentiel à bande large pour évaluer l'absorption et l'émission du rayonnement par le gaz carbonique (CO_2) ou l'ammoniaque (NH_3). Ils ont notamment montré que le rayonnement tend à rendre la température du gaz uniforme dans toute la cavité. T. Fusegi [83] a repris cette étude avec des propriétés thermodynamiques des gaz évoluant avec la température.

L'interaction du rayonnement et de la convection naturelle en régime turbulent dans une cavité carrée a été abordée par Fusegi et Bakhtier [84]. L'effet du nombre de Rayleigh dans les cavités carrées a été étudié par Draoui et al [85]. Ils ont également traité différents cas de conditions aux limites pour les parois horizontales (parois adiabatiques, conductrices, noires ou réfléchissantes) [86] dans le cas d'épaisseur optique égale à 1.

Par ailleurs, plusieurs travaux ont été consacrés au couplage du rayonnement des parois à la convection naturelle [87-92]. Akiyama et Chong [87] ont utilisé la méthode des radiosités pour étudier l'effet de l'émissivité des parois sur un fluide parfaitement transparent. Mahapatra et al [88] ont utilisé la MEF pour étudier le transfert couplé entre deux parois verticales pour un fluide transparent.

Wang et al [93] ont étudié l'influence du rayonnement surfacique sur la convection naturelle en cavité, et ont montré que, pour une cavité carrée remplie d'air avec des parois haute et basse adiabatiques ($10^4 \leq Ra \leq 10^7$), le rayonnement de surface fait baisser le nombre de Rayleigh critique caractérisant l'apparition de l'instationnarité et que le rayonnement fait varier jusqu'à 10% le nombre de Nusselt convectif.

Velusamy et al [94] ont quant à eux étudié numériquement l'influence de l'émissivité de parois, de l'écart de température et de la température moyenne sur les transferts de chaleur convectif et radiatif dans une cavité carrée différentiellement chauffée remplie d'air considéré comme un milieu transparent. Pour la configuration étudiée par les auteurs ($\Delta T = 50K$), l'approximation de Boussinesq n'est plus valable.

Jaballah et al [95] ont entrepris une étude numérique de l'influence du rayonnement surfacique sur l'écoulement de convection naturelle en cavité carrée contenant de l'air avec des parois diffuses. Le flux radiatif est évalué par la méthode des radiosités. D'une manière

générale, le rayonnement modifie le champ de température au voisinage des parois adiabatiques haute et basse.

En 2008, l'interaction du rayonnement de parois sur la convection naturelle a été analysée numériquement par Xaman et al [96] en régime laminaire et turbulent (modèle $k - \varepsilon$) dans une cavité carrée remplie d'air comportant une paroi verticale isotherme et opaque tandis que la paroi opposée en verre est exposée à un flux solaire constant; les parois haute et basse sont supposées adiabatiques.

1.5.2. Couplage convection-champ magnétique

Le couplage de la convection naturelle avec des phénomènes d'origine magnétique était d'un grand intérêt dans les domaines scientifiques et industriels. Avec l'application d'un champ magnétique externe, il est possible d'agir sur les écoulements sans aucun contact physique et ainsi contrôler les transferts thermique et massique.

La convection naturelle d'un fluide électroconducteur (ou substance ferromagnétique) contenu dans une cavité fermée représente un sujet adéquat de recherche scientifique [97], à cause de sa présence dans diverses procédés industriels, tels que la géophysique, les systèmes de refroidissement des réacteurs nucléaires, les collecteurs de l'énergie solaire et spécialement lors du processus de croissance cristalline.

Bien que la force magnétique soit connue depuis de nombreuses décennies pour les matériaux ferromagnétiques, la découverte des supraconducteurs à haute température en 1986 a ouvert l'ère de son étude pour les matières générales. Avec l'utilisation d'un aimant supraconducteur, de nombreux phénomènes nouveaux ont été reportés dans divers domaines de la science. Les superordinateurs ont donné une poussée supplémentaire de la résolution numérique des problèmes complexes.

D'autre part, l'étude de la convection des fluides non électroconducteurs tels que les substances paramagnétiques ou diamagnétiques dues à la force de magnétisation semble avoir commencé depuis le rapport de Braithwaite et al. en 1991[98] sur la mesure expérimentale des taux d'échanges thermiques de la solution de nitrate de gadolinium pour la configuration de la convection naturelle de type Rayleigh-Bénard dans l'espace de l'alésage d'un aimant supraconducteur.

La force magnétique agissant sur une substance dia- ou paramagnétique indique que la substance est sollicitée vers les champs plus faibles si elle est diamagnétique et vers les champs les plus intenses si elle est paramagnétique. C'est ainsi que dès 1845 Faraday distinguait d'ailleurs ces deux types de substances.

La force motrice ou le terme moteur de cette convection est la force de magnétisation (ou aimantation ou magnétique) [99], qui est proportionnelle au gradient du carré du champ magnétique. Cette force est devenue largement applicable avec le développement des aimants supraconducteurs. La motivation est le vaste potentiel d'application telle que de l'accélération gravitationnelle ou l'amélioration quasi gravitationnelle dans l'espace de l'alésage d'un aimant

supraconducteur, à micro-échelle d'effets magnétiques dans les processus au niveau atomique.

Un champ de force magnétique permet également de contrôler, voire de supprimer la convection naturelle dans des fluides non ou faiblement conducteurs comme l'eau par exemple avec la possibilité d'étendre ceci à des oxydes inorganiques, des solvants organiques, ou des solutions aqueuses super-saturées en protéines [100]. Ce contrôle de la convection par un champ de forces magnétiques permet par exemple d'augmenter le taux d'oxygène dissous dans de l'eau, sans même envisager des systèmes de ventilation dans lesquels le vent est généré par un champ de forces magnétiques, ce qui supprime toute partie mécanique mobile [101].

Le champ magnétique offre un large domaine d'application : en génie de procédés, comme en métallurgie et dans le domaine de l'électrolyse [102-106] (exemple électrodéposition de matière). Il est utilisé dans le transport des métaux liquides, il peut être mis à profit pour assurer la propulsion [107] et pour confiner un plasma. D'autres phénomènes liés au champ magnétique et à la force de flottabilité magnétique ont trouvé aussi des applications dans la médecine [108], la chimie [109], la physique [110] et en sciences de l'ingénieur [111,112], et autres.

Wakayama et ses co-auteurs ont trouvé, par étude expérimentale et numérique, de nombreux phénomènes magnéto-aérodynamique qui se produisent dans un champ magnétique fort. Ils ont travaillé entre autres sur la promotion de la combustion [112], le support d'aspération [113], la lévitation magnétique, le jet de gaz d'azote dans l'air [114] et sur d'autres phénomènes.

Le groupe de Kitazawa s'est intéressé également aux phénomènes associés à un champ magnétique. Parmi ses nombreuses découvertes, par exemple le nouveau procédé de séparation de matériaux magnétiques faibles par l'application de la technique de lévitation magnéto Archimède [115] ou encore l'amélioration de la dissolution d'oxygène gazeux dans l'eau [116].

Bednarz et al [117] ont quant à eux étudié numériquement et expérimentalement la convection magnétique d'un fluide paramagnétique dans une cavité différentiellement chauffée par les parois latérales. L'influence d'un champ magnétique transversal d'intensité 10 T sur le mode convectif du fluide paramagnétique et le transfert de chaleur a été particulièrement analysée.

Krakov et Nikiforov [118] ont simulé numériquement l'influence de l'orientation d'un champ magnétique uniforme sur la convection naturelle bidimensionnelle dans une cavité carrée remplie d'un fluide magnétique. Ce travail a été repris expérimentalement par Krakov et al [119] dans une cavité cubique.

Des travaux ont été effectués pour déterminer avec précision l'impact du champ magnétique sur les flammes. Ueno et Harada [120] ont observé à partir d'expériences sous champ magnétique à fort gradient ($B=1,6T$, $\nabla B=200T/m$ et $B=2,2T$, $\nabla B=300T/m$) que les flammes étaient fortement déformées et que l'éjection de certains gaz était ralentie voire

bloquée. Ils en ont déduit que le champ magnétique influe sur l'écoulement d'air et plus particulièrement sur l'oxygène de l'air créant ainsi un mur d'oxygène. Celui-ci pouvant aller jusqu'à éteindre les flammes de bougie [121]. Ueno et al [122] ont proposé un modèle dynamique moléculaire pour expliquer la formation d'un rideau d'oxygène induit par le champ magnétique et qui peut bloquer un jet d'azote.

Wakayama [123] a montré que la présence d'oxygène dans les jets aux abords de l'entrefer d'un électroaimant permet de modifier la vitesse du jet. En effet les jets sont accélérés vers les champs magnétiques croissants et décélérés vers les champs magnétiques décroissants, ce qui permet de valider l'idée du mur d'oxygène présent au centre de l'aimant émise par Ueno.

Wakayama et Sugie [124] ont montré qu'il est possible de contrôler la combustion sur les flammes de diffusion à partir d'un champ magnétique. Wakayama et al [125] ont montré que ces effets sont plus visibles en microgravité. Là où une flamme de diffusion s'éteint par absence de convection naturelle qui n'apporte plus de comburant, le champ magnétique permet de créer un mouvement d'air (grâce à l'oxygène contenu dans l'air) qui alimente la flamme en comburant. Kinoshita et al [126] ont complété cette observation expérimentale par des travaux numériques en microgravité et en gravité terrestre sur une flamme de diffusion hydrogène/air. Sous microgravité les résultats montrent que le champ magnétique permet de créer une convection autour de la flamme.

Parmi les études numériques portant sur la combustion sous champ magnétique, nous citons les travaux de F. Khaldi [127] qui a présenté une étude numérique combinée à une étude expérimentale portant sur l'action d'un champ magnétique non uniforme sur une flamme laminaire de diffusion propane/air issue d'un jet rond à très faible débit de gaz injecté pour affecter la convection d'air afin de favoriser la combustion. Il existe d'autres situations dans lesquelles la convection doit être augmentée, par exemple, pour améliorer la combustion des flammes de diffusion dans l'espace, où le champ magnétique peut être utilisé pour remplacer la gravité dans le cas de zéro-gravité, en particulier pour les liquides magnétiques qui sont prometteurs dans la technologie de l'espace où l'accélération de la pesanteur peut être remplacée par la force de volume magnétique [128-130]

1.6. CONCLUSION

Le modèle présenté au paragraphe 1.4 possède un avantage particulier, car il permet d'améliorer l'efficacité des schémas compressibles, ainsi que la précision des schémas décentrés en réduisant la dissipation numérique ; de plus, contrairement au modèle de Boussinesq, il prend en compte des grandes différences de température en gardant le découplage entre les fluctuations de pression et de masse volumique, qui caractérise les écoulements incompressibles.

L'étude que nous allons présenter constitue une nouvelle étape dans la contribution à l'application du modèle faible nombre de Mach (LMN) à la combinaison des phénomènes physiques comme le rayonnement surfacique et le champ magnétique. De telles configurations n'ont pas fait encore l'objet d'une analyse théorique ou numérique.

REFERENCES

- [1] **W. Elenbaas**, Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection, *Physica*, Vol.9 (1), pp. 1-28, 1942.
- [2] **S. Ostrach**, Natural Convection in Enclosures, *Adv. Heat Transfer*, Vol. 8, pp. 161-227, 1972.
- [3] **S. Ostrach**, Natural convection in enclosures, *J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 1175-1190, 1988.
- [4] **G. K. Batchelor**, Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 12, pp. 209-233, 1954.
- [5] **K.T., Yang**, Natural convection in enclosures, Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer, Ed. S. Kakaç, R.K. Shah et W. Aung, Wiley, 1987.
- [6] **I. Catton**, Natural Convection in Enclosures, *Keynote Paper, Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf.*, Vol. 6, pp. 13-43, 1979.
- [7] **T.M. Shih**, A Literature Survey on Numer. Heat Transfer, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 5, pp. 369-420, 1982.
- [8] **B. Gebhart, Y. Jaluria, R.L. Mahajan, B. Sammakia**, Buoyancy-induced flows and transport, *Hemisphere*, 1988.
- [9] **G. De Vahl Davis, I.P. Jones**, Natural convection in a square cavity: a comparison exercise, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 3, pp. 227-248, 1983.
- [10] **E.V. Somers**, Theoretical considerations of combined heat and mass transfer from a vertical Flat Plate, *ASME J. APPL. MECH.* Vol.23, pp.295-301, 1956.
- [11] **W. N. Gill, E.D. Casal, D.W. Zeh**, Binary diffusion and heat transfer in laminar free convection boundary layers on a vertical plate, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 8 (8), pp. 1135-1151, 1965.
- [12] **J.A. Adams, P.W. Mc Fadden**, Simultaneous heat and mass transfer in free convection with opposing body forces, *AIChE Journal*, Vol. 12, pp. 642-647, 1966.
- [13] **A. Rubel, F. Landis**, Numerical study of natural convection in a vertical rectangular enclosure, *Phys. Fluids Suppl. II*, Vol.12-II, pp. 208-213, 1969.
- [14] **G. D. Mallinson, G. de Vahl Davis**, Three-dimensional natural convection in a box : a numerical study, *J. Fluid Mech.*, Vol.83(1), pp.1-31, 1977.
- [15] **A. Bejan**, Convection heat transfer, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [16] **R.A.W.M. Henkes**, Natural convection boundary layers, *Ph. D. thesis, Delft University of Technology*, The Netherlands, 1990.

- [17] **R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn**, Scaling of the turbulent natural convection in a heated square cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36 (11), pp.2913-2925, 1993.
- [18] **S-H. Peng, Lars Davidson**, Computation of turbulent buoyant flows in enclosures with low-Reynolds-number models. *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 20, pp.172-184, 1999.
- [19] **R. Cheesewright, K.J. King, S. Ziai**, Experimental data for the validation of computer codes for the prediction of two-dimensional buoyant cavity flows, *ASME Winter Annual Meeting*, HTD 60, ASME, pp. 75-81, 1986.
- [20] **P.W. Giel, F.W. Schmidt**, An experimental study of high Rayleigh number natural convection in an enclosure. In *C.L. Tien, V.P. Carey, J.K. Ferrell (Eds.), J. Heat Transfer*, Vol. 4, pp. 1459-1464, 1986.
- [21] **S. Paolucci, D.R.Chenoweth**, . Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity. *J. Fluid Mech.* 201, pp. 379-410, 1989.
- [22] **D.J. Bergstrom, X. Huang**, LES of buoyant cavity flow: Challenge for subgrid scale models. In: *K. Hanjalic, T.W.J. Peeters (Eds.), Proceedings of the Second International Symposium on Turbulence, Heat Mass Transfer*, Delft University Press, Delft, pp. 421-430, 1997.
- [23] **L. Davidson**, Calculation of the turbulent buoyancy-driven flow in a rectangular cavity using an efficient solver and two different low-Reynolds number models. *Numer. Heat Transfer*, Vol. 18, pp. 129-147, 1990.
- [24] **L. Davidson**, Second-order corrections of the model to account for non-isotropic effects due to buoyancy, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 2599-2608, 1990.
- [25] **R.A.W.M. Henkes, F.F.Van Der Vlugt, C.J. Hoogendoorn**, Natural-convection flow in a square cavity calculated with low- Reynolds-number turbulence models. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, pp.377-388, 1991.
- [26] **T.J. Heindel, S. Ramadhyani, F.P. Incropera**, Assessment of turbulence models for natural convection in an enclosure, *Numer. Heat Transfer*, Part B, Vol. 26, pp.147-172, 1994.
- [27] **D. A. Shetty, T. C. Fisher, A. R. Chunekar, S. H. Frankel**, High-order incompressible large-eddy simulation of fully inhomogeneous turbulent flows, *J. Comp. Physics*, Vol. 229, pp. 8802-8822, 2010.
- [28] **G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskii**, Convective stability of incompressible fluids, *Izdatel'stvo "Nauka", Moskva, translated from Russian*, Jerusalem, 1976.
- [29] **C. Normand, Y. Pomeau, M.G. Velarde**, Convective instability : a physicist's approach, *Rev. of Modern Phys.*, Vol. 49, pp. 581-6240 1977.
- [30] **L. D. Landau, E. M. Lifshitz**, Physique théorique, tome 6 : Mécanique des Fluides, *Ed. Librairie du Globe*, Editions MIR, traduit du russe, 1989.

- [31] **I. Catton**, The Effect of Insulating Vertical Walls on the Offset of Motion in a Fluid Heated from Below, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 665–672, 1972.
- [32] **W.L. Heitz, W. Westwater**, Critical Rayleigh Numbers for Natural Convection of Water Confined in Square Cells with L/D from 0.5 to 8, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 93, pp.188–196, 1971.
- [33] **S.H. Davis**, Convection in a box : linear theory, *J. Fluid Mech.*, Vol. 30, pp.465–478, 1967.
- [34] **K. Stork, U. Muller**, Convection in Boxes : Experiments, *J. Fluid Mech.*, Vol. 54, pp.599–611, 1972.
- [35] **J. Pallares, I. Cuesta, F. X. Grau**, Laminar and turbulent Rayleigh-Benard convection in a perfectly conducting cubical cavity, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol.23, pp.346-358, 2002.
- [36] **J. Pallares, I. Cuesta, F. Giralt**, Flow transitions in laminar Rayleigh-Benard convection in a cubical cavity at moderate Rayleigh numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 42, pp.753-769, 1999.
- [37] **G.De Vahl Davis**, Natural convection in a square enclosure: a benchmark numerical exercise, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 3, pp.249-264, 1983.
- [38] **P. Le Quéré**, Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number, *Computers & Fluids*, Vol. 20, pp.29-41, 1991.
- [39] **E.R.G. Eckert, W.O. Carlson**, Natural Convection in an Air Layer Enclosed Between Two vertical Plates with Different Temperatures, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 2, pp.106–120, 1961.
- [40] **M.E. Newell, F.W. Schmidt**, Heat Transfer by Laminar Natural Convection Within Rectangular Enclosures, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 92, pp.159–168, 1970.
- [41] **W. Schopf, J.C. Patterson**, Visualization of natural convection in a side-heated cavity: transition to the final steady state, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp.3497–3509, 1996.
- [42] **L. Yang, L. Chengwang, J. C. Patterson**, Natural convection in a differentially heated cavity with two horizontal adiabatic fins on the sidewalls, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.72, pp.23–36, 2014.
- [43] **C. Cianfrini, M.Corcione, P. P. Dell'Omo**, Natural convection in tilted square cavities with differentially heated opposite walls, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 44 (5), pp.441-451, 2005.
- [44] **A. Sergent, S. Xin, P. Joubert, P. Le Quéré, J. Salat, F. Penot**, Resolving the stratification discrepancy of turbulent natural convection in differentially heated air-filled cavities – Part I: Reference solutions using Chebyshev spectral methods, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 39, pp. 1-14, 2013.

- [45] **J. Boussinesq**, Théorie analytique de chaleur, volume 2, *Gauthier Villars*, Paris, 1903
- [46] **G. K. Batchelor**, The conditions for dynamical similarity of motions of a frictionless perfect-gas atmosphere, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol. 79, pp.224-235, 1953.
- [47] **E. A. Spiegel, G. Veronis**, On the Boussinesq approximations for a compressible fluid, *Astrophys. J.*, Vol. 131, pp. 442-447, 1960.
- [48] **J. M. Mihaljan**, Arigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid, *Astrophys. J.*, Vol. 136, pp.1126-1133, 1962
- [49] **Y. Ogura, N. A. Phillips**, Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 19, pp. 173-179, 1962.
- [50] **W. V. R. Malkus**, Boussinesq equations, *Geophysical Fluid Dynamics*, Vol. 1, Woods Hole Oceanographic Institution, pp. 1-12, 1964.
- [51] **D. O. Gough**, The anelastic approximation for thermal convection, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 26, pp. 448-456, 1969.
- [52] **T. ASAI, I. NAKASUJI**, Applicability of Boussinesq approximation to thermal instability in a shear flow. *Special Contributions, Geophysical Institute, Kyoto University*, No. 10, pp. 49-57, 1970.
- [53] **R. Perez Cordon, M. G. Velarde**, On the (non linear) foundations of Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid, *J. Phys.*, Vol. 36 (7-8), pp.591-601, 1975.
- [54] **D. D. Gray, A. Giorgini**, The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 545-551, 1976.
- [55] **D. J. Tritton**, Physical fluid dynamics, *Oxford Science Publications*, 1988.
- [56] **D. Y. Shang, B. X. Wang**, The deviation of heat transfer calculation for laminar free convection of gas due to ignoring the variable thermophysical properties, *Wärme- und Stoffübertragung*, Vol. 28, pp. 33-36, 1993.
- [57] **D.A. Nield, A. Bejan A.**, Convection in Porous Media. 3rd ed., *Springer*, New York, USA, 2006.
- [58] **N. Laaroussi, G. Lauriat, G. Desrayaud**, Effects of variable density for film evaporation on laminar mixed convection in a vertical channel. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 52 (1-2), pp.151-164, 2009.
- [59] **A.R. Rubel, F. Landis**, Laminar Natural Convection in a Rectangular Enclosure with Moderately Large Temperature Differences, *Heat Transfer*, Publishers V.D.I., Dusselaorf, Paper NC2.10, P. 1, 1970.
- [60] **B. Gebhart**, Heat Transfer, 2d ed., *McGraw-Hill*, New York, 1971.
- [61] **S. Paolucci**, On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations, *Technical report, Sandia National Laboratory*, SAND82-8257, 1982.

- [62] C. Rey, Analyse des effets de la variation de volume des gaz dans les équations générales de bilan, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 43, pp.4311-4326, 2000.
- [63] M. Pavageau, C. Rey, Observation of volume variation effects in turbulent free convection, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 45, pp.181-192, 2002.
- [64] M. Pons, P. Le Quéré, An exemple of entropy balance in natural convection, Part 1 : the usual Boussinesq equations. *C.R.Mécanique*, Vol. 333, pp.127-132, 2005.
- [65] M. Pons, P. Le Quéré, An exemple of entropy balance in natural convection, Part 2 : the thermodynamic Boussinesq equations. *C.R.Mécanique*, Vol. 333 : pp.133-138, 2005.
- [66] M. Pons, P. Le Quéré, Modeling natural convection with the work of pressure forces, a thermodynamic necessity, *Int. J. Numer. Method. H.*, Vol. 17 (3), pp. 322-332, 2007.
- [67] M. Pons, Les routes vers l'équilibre en convection naturelle - le travail des forces de pression. *Congrès Français de Thermique*, Efficacité Energétique, Vol.1, pp.75-80, 2009.
- [68] S. Klainerman, A. Majda, Singular perturbation of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 34, pp. 481-524, 1981.
- [69] S. Klainerman, A. Majda, Compressible and incompressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 35, pp.629-651, 1982.
- [70] S. Schochet, The compressible euler equations in a bounded domain : Existence of solutions and the incompressible limit, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 104, pp.49-75, 1986.
- [71] H. Guillard, C. Viozat, On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit, *Computers & Fluids*, Vol. 28(1), pp.63-86, 1999.
- [72] E. Turkel, Preconditioned methods for solving the incompressible and low Mach compressible equations, *J. Comput. Phys.*, Vol.72, pp.277-298, 1987.
- [73] F. Harlow, A. Armsden, A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds, *J. Comput. Phys.*, Vol. 8, pp. 197-213, 1971.
- [74] H. Bijl, P. Wesseling, A unified method for computing incompressible and compressible flows in boundary-fitted coordinates, *J. Comput. Phys.*, Vol. 141, pp.153-173, 1998.
- [75] K. Nerinckx, J. Vierendeels, E. Dick, Mach-uniformity through the coupled pressure and temperature correction algorithm, *J. Comput. Phys.*, Vol. 206, pp.597-623, 2005.
- [76] C. Rossow, A blended pressure/density based method for the computation of incompressible and compressible flows. *J. Comput. Phys.*, Vol.185, pp.375-398, 2003.
- [77] D. R. Chenoweth, S. Paolucci, Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences, *J. Fluid Mech.*, Vol. 169, pp.173-210, 1986

- [78] **F. Golanski, C. Prax, E. Lamballais, V. Fortuné, J-C. Valière**, An aeroacoustic hybrid approach for non-isothermal flows at low mach number, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.45, pp.441–461, 2004.
- [79] **H.A. Barrios-Pina**, Développement d'un code de calcul non Boussinesq dédié aux écoulements de gaz chauffé en convection naturelle, *Thèse de doctorat en Mécanique et Physique des Fluides*, Université Paul Cézanne Aix-Marseille III, 2010.
- [80] **R.M. Goody**, The influence of radiative transfer on cellular convection, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 1, pp. 424-435, 1956.
- [81] **K.A. Spiegel**, The convective instability of radiating fluid layer, *Astrophys. J.*, Vol.132, pp.715-728, 1960.
- [82] **L.C. Chang, KT. Yang, J.R LLOYD**. Radiation-natural convection interactions in two-dimensional complex enclosures. *J. Heat Transf.*, Vol.105, pp.89-95, 1983.
- [83] **T. Fusegi**, Radiation-convection interaction in asymmetrically heated square enclosures, *In 7th International Heat Transfer Conference*, pp. 131-140, IHTC, San Francisco, 17-22 August, 1986.
- [84] **T. Fusegi, F. Bakhtier**, Laminar and turbulent natural convection-radiation interactions in a square enclosure filled with a non gray gas, *J. Heat Trans.*, Vol.15, pp.303-322, 1989.
- [85] **A. Draoui, F. Allard, C. Beghein**, Numerical analysis of heat transfer by natural convection and radiation in participation fluids enclosed in square cavities, *J. Heat Trans.*, Vol.20, pp.253-261, 1991.
- [86] **A. Draoui, F. Allard, C. Beghein**. Numerical analysis of heat transfer by natural convection and radiation in absorbing, emitting and scattering fluids enclosed in square cavities, *J. Heat Trans.* Vol.10 (1-2), pp.160-177, 1992.
- [87] **M. Akiyama, Q. Chong**, Numerical analysis of natural convection with surface radiation in square enclosure, *Numer. Heat Transfer, Part A*, Vol.32, pp.419-433, 1997.
- [88] **S. Mahapatra, S. Sen, S. Baek**, Numerical analysis of surface radiation and variable property natural convection in a differentially heated square cavity, *Int. J. Numerical Meth. Heat Fluid Flow*, Vol.8(4), pp.423-443, 1999.
- [89] **C. Balaji, S.P. Venkateshan**, Interaction of surface radiation with free convection in a square cavity, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 14, pp 260–267, 1993.
- [90] **J. Salat, F. Penot**, Approche expérimentale de la convection naturelle en transition turbulente dans une cavité cubique différentiellement chauffée, *VIe Colloque Interuniversitaire Franco-québécois de Thermique des Systèmes*, Québec, pp. 75-81, 26-28, 2003

- [91] **G. Lauriat, G Desrayaud**, Effect of surface radiation on conjugate natural convection in partially open enclosures, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol.45, pp.335-346, 2006.
- [92] **S. Xin**, Etudes Numériques de Convection Naturelle en Cavité et Problèmes Connexes, *HDR*, Université de Paris Sud, 2005.
- [93] **H. Wang, S. Xin, P. Le Quéré**, Etude numérique du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces en cavité carrée remplie d'air, *C.R. Académie des Sciences*, Vol. 334, pp 48-57, 2006.
- [94] **K. Velusamy, T. Sundararajan, K.N. Seetharamu**, Interaction effects between surface radiation and turbulent natural convection in square and rectangular enclosures, *J. Heat Transfer*, Vol.123, pp 1063–1070, 2001.
- [95] **S. Jaballah, H. Sammouda, A. Belghith**, Effect of surface radiation on the natural convection stability in a two-dimensional enclosure with diffusely emitting boundary walls, *Numer. Heat Transfer, Part A*, 51, pp 495-516, 2007.
- [96] **J. Xamán, J. Arce, G. Álvarez, Y. Chávez**, Laminar and turbulent natural convection combined with surface thermal radiation in a square cavity with a glass wall, *Int. J. Thermal Sciences*, Vol. 47, pp 1630-1638, 2008.
- [97] **S. Chandrasekhar**, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, *Oxford University Press*, Dover, 1961.
- [98] **D. Braithwaite, E. Beaugnon, R. Tournier**, Magnetically controlled convection in a paramagnetic fluid, *Nature*, Vol. 354-14, 667–673, 1991.
- [99] **H. Ozoe**, Magnetic Convection, *Imperial College Press*, ISBN 1-86094-578-3, 2005.
- [100] **J. Qi, et al**, Suppression of natural convection in nonconducting and lowconducting fluids by the application of a static magnetic field *Materials transactions, JIM*, Vol. 8, pp. 970-975, 2000.
- [101] **K. Kitazawa et al.**, Prospects of new magneto-science, novel magnetic fields effects on non-magnetic substances, *Proceedings of the Symposium on New Magneto Science*, pp 147-152, 1999.
- [102] **Ph. Mathon, A. Nouri**, Magnetic control of electrochemical processes, *Fundamental and Applied MHD Conference*, 15th Riga and 6th Pamir, Latvia, Juin 2005.
- [103] **Ph. Mathon, A. Nouri, A. Alemany, J. P. Chopart, V. Sobolik**, Experimental Investigations of Electro-chemical Processes Controlled by High Magnetic Fields, *Magnetohydrodynamic* Vol. 42(2-3), pp. 3-9, 2006.
- [104] **A. Nouri, Ph. Mathon, A. Alemany, J. P. Chopart, V. Sobolik**, Experimental study of the influence of an intense magnetic field on the hydrodynamics and transport in the electrochemical processes” *5ième conférence de la Société Française d'Electrostatique*, Grenoble, 2006.

- [105] **Ph. Mathon, A. Nouri, A. Alemany, J.-P. Chopart**, Experimental and Numerical Investigations of Electro-chemical Processes Controlled by High Magnetic Fields, First *International Seminar on Fluid Dynamics and Materials processing*, Alger, Juin 2007.
- [106] **A. Nouri, Ph. Mathon, A. Alemany, J.-P. Chopart, V. Sobolik**, Influence of the magnetic forces on the electrochemical processes, *7th pamir International Conference on Fundamental and Applied MHD*, Presqu'île de Giens - France, September 2008.
- [107] **Ph. Mathon, A. Nouri, A. Alemany, J.-P. Chopart, V. Sobolik**, Electro-chemical processes controlled by high magnetic fields: application to MHD sea water propulsion, *7th pamir International Conference on Fundamental and Applied MHD*, Presqu'île de Giens - France, September 2008.
- [108] **H. Onodera, Z. Jin, S. Chida**, Human body risk assessment under high magnetic field environment, in: *Proceedings of the 7th Symp. on New Magneto-Science, Tsukuba, Japan*, pp. 208–216, 2003.
- [109] **K. Honda, A. Sato, S. Nakabayashi**, Magneto-taxis of nonlinear chemical reaction, in: *Proceedings of the 7th Symp. on New Magneto- Science, Tsukuba, Japan*, pp. 52–53, 2003.
- [110] **C. Uyeda, K. Tanaka, M. Sakakibara, R. Takashima**, Development of a method to detect magnetic anisotropy with high sensitivity in microgravity condition, in: *Proceedings of the 7th Symp. on New Magneto- Science, Tsukuba, Japan*, pp. 92–95, 2003.
- [111] **K. Ezaki, M. Kaneda, T. Tagawa, H. Ozoe**, Numerical computation for the melt convection of the model system of continuous steel casting with various magnetic fields, *ISIJ Internat.*, Vol.43, pp.907–914, 2003
- [112] **N.I. Wakayama**, Magnetic promotion of combustion in diffusion flames, *Combust. Flame*, Vol. 93, pp.207–214, 1993.
- [113] **M. Wakayama, N.I. Wkayama**, Magnetic acceleration of inhaled and exhaled flows in breathing, *Japanese J. Applied Physics*, Vol. 39, pp.262-264, 2000.
- [114] **N. I. Wakayama**, Effect of decreasing magnetic field on the flow of nitrogen gas, *Chem. Phys. Letters*, Vol. 185, pp.449-451.
- [115] **N. Hirota, Y. Ikezoe, H. Uetake, T. Kaihatsu, T. Takayama, K. Kitazawa**, Magneto-Archimedes levitation and its application, *RIKEN Rev.*, Vol. 44, pp.159-161, 2002.
- [116] **Y. Ikezoe, N. Hirota, T. Sakihama, K. Mogi, H. Uetake, T. Homma, J. Nakagawa, H. Sugawara, K. Kitazawa**, Acceleration effect of the rate of dissolution of oxygen in a magnetic field, *J. of Jap. Inst. Of Applied Magnetism*, Vol. 22, pp.821-824, 1998
- [117] **T. P. Bednarz , L. Chengwang, J. C. Patterson, H. Ozoe**, Effects of a transverse, horizontal magnetic field on natural convection of a paramagnetic fluid in a cube, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol.48, pp.26–33, 2009

- [118] **M.S. Krakov, I.V. Nikiforov**, To the influence of uniform magnetic field on thermomagnetic convection in square cavity., *J. Magn. Magn. Mater.*, Vol.252, pp.209-211, 2002.
- [119] **M.S. Krakov, I.V. Nikiforov, A.G. REKS**, Influence of the uniform magnetic field on natural convection in cubic enclosure: experiment and numerical simulation, *J. Magn. Magn. Mater.*, Vol 289, pp. 272-274, 2005.
- [120] **S. Ueno, K. Harada**, Effects of magnetic fields on flames and gas flow, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.23 (5), pp.2752-2754
- [121] **S. Ueno**, Quenching of flames by magnetic fields, *J. Appl. Phys.*, Vol.65 (3), pp.1243-1245, 1988.
- [122] **S. Ueno, M. Iwasaka, H. Eguchi, T.Kitajima**, Dynamic behaviour of gas flow in gradient magnetic fields, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.29 (6), pp.3264-3266, 1993.
- [123] **N. I. Wakayama**, Magnetic acceleration and deceleration of O₂ gas streams injected into air, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.31(1), pp.897-901, 1995.
- [124] **N. I.Wakayama, M. Sugie**, Magnetic promotion of combustion in diffusion flames, *Physica B*, Vol. 216, pp.403-405, 1996.
- [125] **N.I. Wakayama, H. Ito, Y. Kuroda, O. Fujita, K. Ito**, , « Magnetic support of combustion in diffusion flames under microgravity» *Combust. Flame* 107,187-192, 1996.
- [126] **S. Kinoshita, T. Takagi, H. Kotera, N.I. Wakayama**, Numerical simulation of diffusion flames with and without magnetic field, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol.14 (2), pp.1685-1688, 2004.
- [127] **F. Khaldi**, Flammes de diffusion laminaires dans un gradient magnétique vertical, *Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2004.
- [128] **H.Yamaguchi, Z. Zhang, S. Shuchi, K. Shimada**, Gravity simulation of natural convection in magnetic fluid, *JSME International Journal*, Series B, Vol. 45(1), pp.61-65, 2002.
- [129] **B.M. Berkovsky**, Magnetic fluids engineering applications, *1st ed.*, *Oxford Univ. Press*, New York, pp. 214-228, 1993.
- [130] **T. Lyubimova, A. Mailfert**, Thermal convection in a closed cavity in zero-gravity space conditions with stationary magnetic forces. NAMES10, *J. Phys., Conference Series* 416, 012027, 2013.

Chapitre 2

***Modélisation mathématique sous
l'approximation Faible nombre de
Mach***

2.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons, en partant d'un formalisme général, les équations de bilan décrivant le mouvement instationnaire d'un fluide newtonien, visqueux et compressible. Puis, après différents degrés de simplification successifs, on fait apparaître les hypothèses adoptées dans chaque type d'écoulement et souligner les limites d'application relatives à chaque système d'équations.

2.2. ÉQUATIONS DE CONSERVATION

L'état d'écoulement d'un fluide est donné par le vecteur de vitesse \vec{V} , la densité ρ , la pression p et la température T . Le vecteur vitesse \vec{V} a les composantes u, v et w dans les directions x, y et z . Pourvu que les propriétés internes, à savoir μ, λ, c_v et c_p soient connues, on dispose des équations pour déterminer les six variables dépendantes inconnues u, v, w, ρ, p et T comme fonctions de x, y, z et t . Les équations de bilan décrivant le mouvement d'un fluide dans un domaine de l'espace forment un ensemble de trois lois de conservation, en plus de l'équation d'état du fluide :

- la conservation de la masse qui exige la conservation de la masse de la particule de fluide.
- la conservation de la quantité de mouvement qui traduit la loi de newton appliquée à des particules de fluide.
- la conservation de l'énergie qui exige que l'énergie ne peut pas être créée ou détruite, et exprime la conservation de l'énergie de la particule de fluide.
- l'équation d'état thermodynamique (ou l'équation constitutive) qui donne une relation entre les variables d'état $f(p, \rho, T)$.

2.2.1. Ecoulement compressible

Ce modèle sans approximation est le plus général et permet de rendre compte des écoulements à forts taux de compression.

2.2.1.1. Equations de conservation

En négligeant les pertes de chaleur par rayonnement, pour un écoulement bidimensionnel compressible de fluide visqueux newtonien vérifiant l'hypothèse de Stokes et la loi des gaz parfaits, et on suppose que la seule force de volume est la force de gravité, $\vec{F} = \vec{g}$, on obtient un système de cinq équations [1,2] (détails en [Annexe I](#)):

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

- Equation de quantité du mouvement :

$$\rho \left((\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mu \nabla \vec{V} + \frac{1}{3} \nabla \mu \nabla \vec{V} \quad (2.2)$$

- Equation d'énergie :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) T \right) = r + \nabla \cdot k \nabla T + \frac{dp}{dt} + \nabla \vec{V} : \vec{\tau} \quad (2.3)$$

- Equation d'état :

$$p = \rho R T \quad (2.4)$$

Les équations (2.1-2.4) sont de validité absolument générale et s'appliquent quelles que soient les variations des propriétés physiques avec la pression et la température. Il est ensuite possible d'établir une série d'équations, d'utilisation plus simple mais de portée plus limitée, qui correspondent à divers cas particuliers.

2.2.1.2. Forme adimensionnelle des équations de conservation

Il est intéressant de présenter les équations de conservation sous forme adimensionnée. Ces expressions sans dimension sont notamment nécessaires pour effectuer le développement menant aux équations simplifiées des écoulements à faibles nombre de Mach [3], qui sont présentées ci-après.

Les échelles utilisées pour écrire les variables dépendantes sous forme adimensionnelle sont c_0, p_0, ρ_0, T_0 pour la vitesse, la pression, la masse volumique et la température respectivement. $\mu_0, k_0, c_{p0}, c_{v0}$ sont les échelles des propriétés thermo-physiques. l_0 et l_0/U_f sont celles des longueurs et du temps, où U_f est une vitesse caractéristique de l'écoulement.

On définit alors, les variables adimensionnelles suivantes :

$$(u^*, v^*) = \frac{(u, v)}{c_0}, p^* = \frac{p}{p_0}, \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, T^* = \frac{T}{T_0}, \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}, k^* = \frac{k}{k_0}, c_p^* = \frac{c_p}{c_{p0}}, c_v^* = \frac{c_v}{c_{v0}},$$

$$(x^*, y^*) = \frac{(x, y)}{l_0} \text{ et } t^* = \frac{t}{l_0/U_f}$$

Introduisons ces variables dans le système d'équations précédent (2.1-2.4), les équations décrivant l'évolution des variables dépendantes d'un écoulement compressible s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + Ma^{-1} \nabla \rho^* \vec{V}^* = 0 \quad (2.5)$$

$$\rho^* \left(\frac{\partial \bar{V}^*}{\partial t^*} + Ma^{-1} (\bar{V}^* \cdot \nabla) \bar{V}^* \right) = \frac{Ma}{Fr} \rho^* \bar{g}^* - \frac{Ma^{-1}}{\gamma} \nabla p^* + Re^{-1} \nabla \cdot \mu^* \nabla \bar{V}^* + \frac{1}{3} Re^{-1} \nabla \mu^* \nabla \bar{V}^* \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \rho^* c_p^* \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + Ma^{-1} (\bar{V}^* \cdot \nabla) T^* \right) &= Pe^{-1} \nabla \cdot k^* \nabla T^* + \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{\partial p^*}{\partial t^*} + Ma^{-1} \bar{V}^* \cdot \nabla p^* \right) \\ &+ \frac{\gamma-1}{Re} \nabla \bar{V}^* : \bar{\tau}^* \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$p^* = \rho^* T^* \quad (2.8)$$

Les groupements adimensionnels qui apparaissent dans ces équations sont définis par :

$$\text{Nombre de Reynolds :} \quad Re = \frac{\rho_0 U_f l_0}{\mu_0} \quad (2.9)$$

$$\text{Nombre de Froude :} \quad Fr = \frac{U_f^2}{l_0 g} \quad (2.10)$$

$$\text{Nombre de Mach :} \quad Ma = \frac{U_f}{c_0} = \frac{U_f}{\sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}} = \frac{U_f}{\sqrt{\gamma r T_0}} \quad (2.11)$$

$$\text{Nombre de Péclet :} \quad Pe = Re Pr = \frac{\rho_0 c_{p0} U_f l_0}{k_0} \quad (2.12)$$

$$\text{Rapport de capacité thermique:} \quad \gamma = \frac{c_{p0}}{c_{v0}} \quad (2.13)$$

2.2.2. Écoulement à faible nombre de Mach

L'approximation à faible nombre de Mach appliquée par Paolucci [3], consiste à développer les variables de l'écoulement en série de puissance du paramètre $Ma^2 \ll 1$ sous la forme :

$$v^* = Ma \left[v^{(0)} + Ma^2 v^{(1)} + o(Ma^2) \right] \quad (2.14)$$

$$T^* = T^{(0)} + Ma^2 T^{(1)} + o(Ma^2) \quad (2.15)$$

$$p^* = p^{(0)} + Ma^2 p^{(1)} + o(Ma^2) \quad (2.16)$$

$$\rho^* = \rho^{(0)} + Ma^2 \rho^{(1)} + o(Ma^2) \quad (2.17)$$

$$k^* = k^{(0)} + Ma^2 k^{(1)} + o(Ma^2) \quad (2.18)$$

$$\mu^* = \mu^{(0)} + Ma^2 \mu^{(1)} + o(Ma^2) \quad (2.19)$$

$$c_p^* = c_p^{(0)} + Ma^2 c_p^{(1)} + o(Ma^2) \quad (2.20)$$

Ces développements asymptotiques sont insérés dans les équations de Navier-Stokes écrites sous la forme adimensionnelle. La formulation des équations à faible nombre de Mach est déduite en regroupant les termes de plus faible ordre en Ma^2 , pour but de réduire artificiellement la représentation numérique de la vitesse du son. On remplace alors les variables par leurs développements asymptotiques dans les équations (2.5) à (2.8), on obtient, en ne conservant que les termes d'ordre inférieur ou égale à 2 :

2.2.2.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial(\rho^{(0)} + Ma^2 \rho^{(1)})}{\partial t^*} + Ma^{-1} \nabla \cdot [(\rho^{(0)} + Ma^2 \rho^{(1)})(Ma v^{(0)} + Ma^3 v^{(1)})] = 0 \quad (2.21)$$

on obtient :

$$o(1) : \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t^*} + \nabla \cdot \rho^{(0)} v^{(0)} = 0 \quad (2.22)$$

$$o(Ma^2) : \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} v^{(1)} + \rho^{(1)} v^{(0)}) = 0 \quad (2.23)$$

2.2.2.2 Équation de quantité de mouvement

$$Ma^2 \rho^{(0)} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial t^*} + Ma^2 \rho^{(0)} (v^{(0)} \nabla) v^{(0)} = \frac{Ma^2}{Fr} \rho^{(0)} \overline{g^*} - \frac{1}{\gamma} \nabla p^{(0)} - \frac{Ma^2}{\gamma} \nabla p^{(1)} + \frac{Ma^2}{Re} \nabla \cdot \mu^{(0)} \nabla v^{(0)} + \frac{1}{3} \frac{Ma^2}{Re} \nabla \mu^{(0)} \nabla v^{(0)} \quad (2.24)$$

il vient que :

$$o(1) : \frac{1}{\gamma} \nabla p^{(0)} = 0 \Rightarrow \nabla p^{(0)} = 0 \quad (2.25)$$

La conclusion est que le terme principal du développement de la pression ne dépend que du temps, soit $p^{(0)} = p^{(0)}(t)$, c'est la pression thermodynamique [3].

Dans l'écriture de l'équation précédente, deux hypothèses sont supposées :

$$o\left(\frac{Ma^2}{Re}\right) = o(Ma^2) \quad (2.26)$$

et

$$o\left(\frac{Ma^2}{Fr}\right) = o(Ma^2) \quad (2.27)$$

Alors, les termes d'ordre $\frac{Ma^2}{Re}$ et $\frac{Ma^2}{Fr}$ sont négligés. Le premier doit être important pour des écoulements à faible nombre de Reynolds Re , tandis que pour le second terme, il y a une possibilité dans laquelle le nombre de Froude Fr doit être de l'ordre de Ma^2 dans quelques problèmes où g_0 et/ou l_0 sont extrêmement large, comme dans les problèmes de recirculations atmosphériques ou stellaire.

A petite échelle (échelle de laboratoire), le nombre de Froude $Fr = \frac{U_f^2}{l_0 g_0}$ devient supérieur à 1 et le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho_0 U_f l_0}{\mu_0}$ est aussi supérieur à 1. On admet alors que [3,4,5] :

$$\frac{Ma^2}{Fr} \ll 1 \quad (2.28)$$

$$\frac{Ma^2}{Re} \ll 1 \quad (2.29)$$

Frohlich [6] a montré aussi que ces hypothèses doivent être vérifiées pour que l'approximation à faible nombre de Mach soit applicable.

En tenant compte du fait que $\nabla p^{(0)} = 0$ et en conservant uniquement les termes d'ordre Ma^2 , on obtient :

$$o(Ma^2) : \rho^{(0)} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial t^*} + \rho^{(0)} (v^{(0)} \nabla) v^{(0)} = \frac{1}{Fr} \rho^{(0)} \overline{g^{*-2}} - \frac{1}{\gamma} \nabla p^{(1)} + Re^{-1} \nabla \cdot \mu^{(0)} \nabla v^{(0)} + \frac{1}{3} Re^{-1} \nabla \mu^{(0)} \nabla v^{(0)} \quad (2.30)$$

Le résultat principal de l'approximation s'illustre dans le fait que la pression p est décomposée en deux parties [3] ; une pression thermodynamique moyenne $p^{(0)}(t)$ et une pression dynamique $p^{(1)}(\vec{x}, t)$; la pression totale s'écrit alors :

$$p(\vec{x}, t) = p^{(1)}(\vec{x}, t) + p^{(0)}(t)$$

Le gradient de pression totale fait alors disparaître la contribution moyenne.

Pour un gaz parfaits, le champ de pression moyen dans le système (ou pression thermodynamique) est calculé par la loi d'état du mélange.

2.2.2.3 Equation d'énergie

En tenant compte du fait que $\nabla p^{(0)} = 0$, on obtient :

$$o(1) : \rho^{(0)} c_p^{(0)} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t^*} + v^{(0)} \nabla T^{(0)} \right) = Pe^{-1} (\nabla \cdot k^{(0)} \nabla T^{(0)}) + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp^{(0)}}{dt^*} \quad (2.31)$$

Les facteurs de la fonction de dissipation visqueuse sont donnés par :

$$\frac{\gamma-1}{Re} (\mu^{(0)} + Ma^2 \mu^{(1)}) Ma^2 \phi' = \frac{\gamma-1}{Re} Ma^2 \mu^{(0)} \phi' + \frac{\gamma-1}{Re} Ma^4 \mu^{(1)} \phi'$$

Donc, à l'ordre $o(1)$, la fonction de dissipation ϕ' n'apparaît plus dans l'équation (2.31).

Lorsque le nombre de Mach est faible, la dissipation visqueuse est faible [3].

$o(Ma^2)$:

$$\begin{aligned} & \rho^{(0)} c_p^{(0)} \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t^*} + v^{(0)} \nabla T^{(1)} \right) + \left(\frac{c_p^{(1)}}{c_p^{(0)}} + \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} \right) \rho^{(0)} c_p^{(0)} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t^*} + v^{(0)} \nabla T^{(0)} \right) + \rho^{(0)} c_p^{(0)} v^{(1)} \nabla T^{(0)} = \\ & Pe^{-1} (\nabla \cdot k^{(0)} \nabla T^{(1)} + \nabla \cdot k^{(1)} \nabla T^{(0)}) + \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{dp^{(1)}}{dt^*} + v^{(0)} \nabla p^{(1)} \right) + \frac{\gamma-1}{Re} \mu^{(0)} \phi' \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\Phi' = -\frac{2}{3} (div \vec{V}^*)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial V_i^*}{\partial x_i^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial V_j^*}{\partial x_i^*} \right)^2 \right] \quad (2.33)$$

2.2.2.4 Equation d'état

$$(p^{(0)} + Ma^2 p^{(1)}) = (\rho^{(0)} + Ma^2 \rho^{(1)}) (T^{(0)} + Ma^2 T^{(1)}) \quad (2.34)$$

$$o(1) : p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} \quad (2.35)$$

$$o(Ma^2) : p^{(1)} = \rho^{(0)} T^{(1)} + \rho^{(1)} T^{(0)} \quad (2.36)$$

D'où :

$$\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} = \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} \quad (2.37)$$

2.2.2.5 Récapitulatif des équations

Dans l'approximation de faible nombre de Mach, on a $Ma \ll 1$. Les termes d'ordre supérieur ou égal à Ma^2 peuvent donc être négligés (dans les équations de continuité, d'énergie et d'état). L'équation de quantité de mouvement est l'équation à l'ordre $o(Ma^2)$, on obtient les équations simplifiées régissant les écoulements à petit nombre de Mach :

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t^*} + \nabla \cdot \rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} = 0 \quad (2.38)$$

$$\nabla p^{(0)} = 0 \quad (2.39)$$

$$\rho^{(0)} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial t^*} + \rho^{(0)} (\mathbf{v}^{(0)} \nabla) \mathbf{v}^{(0)} = \frac{1}{Fr} \rho^{(0)} \bar{\mathbf{g}}^* - \frac{1}{\gamma} \nabla p^{(1)} + Re^{-1} \nabla \cdot \mu^{(0)} \nabla \mathbf{v}^{(0)} + \frac{1}{3} Re^{-1} \nabla \mu^{(0)} \nabla \mathbf{v}^{(0)} \quad (2.40)$$

$$\rho^{(0)} c_p^{(0)} \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t^*} + \mathbf{v}^{(0)} \nabla T^{(0)} \right) = Pe^{-1} (\nabla \cdot k^{(0)} \nabla T^{(0)}) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp^{(0)}}{dt^*} \quad (2.41)$$

$$p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} \quad (2.42)$$

2.2.2.6 Redimensionnement des équations de conservation

Pour remettre les équations de conservation sous forme dimensionnelle, on utilise cette fois U_f comme échelle de vitesse et $\rho_0 U_f^2 / \gamma$ comme échelle de pression. Les variables adimensionnelles s'écrivent alors:

$$x^* = x / l_0, \quad t^* = t / (l_0 / U_f), \quad V^{(0)} = V / U_f, \quad p^{(1)} = \gamma p_{dyn} / \rho_0 U_f^2, \quad \rho^* = \rho / \rho_0, \quad \mu^* = \mu / \mu_0, \\ k^* = k / k_0, \quad T^* = T / T, \quad c_p^* = c_p / c_{p0}, \quad g^* = g / g_0, \quad p^{(0)} = \bar{p} / p_0$$

On obtient finalement les équations de conservation dans l'approximation faible nombre de Mach dans la forme dimensionnelle (on omet les exposants « 0 » par souci de simplification) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (2.43)$$

$$\nabla \bar{p} = 0 \quad (2.44)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p_{dyn} + \nabla \cdot \mu \nabla \vec{V} + \frac{1}{3} \nabla \mu \nabla \vec{V} \quad (2.45)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right) = (\nabla \cdot k \nabla T) + \frac{d\bar{p}}{dt} \quad (2.46)$$

$$\bar{p} = \rho R T \quad (2.47)$$

Dans le cas particulier d'une masse volumique ρ constante, la convection ne se produit pas. En supposant que cet état est représenté par :

$\vec{V} = 0$, $\rho = \rho_0$, $p = p_0$ et $T = T_0$, l'équation (2.45) donne :

$$0 = \rho_0 \vec{g} - \nabla p_0 \quad (2.48)$$

Lorsqu'une différence de température existe, la densité change avec la température. La pression p_{dyn} peut donc être exprimée comme la somme d'une pression p' perturbée et la pression statique P_0 :

$$p_{dyn} = p' + p_0 \quad (2.49)$$

La pression totale peut donc s'écrire : $p(\vec{x}, t) = p' + p_0 + \bar{p}(t)$

La soustraction des équations (2.45) et (2.48) permet d'écrire :

$$\rho \left((\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = (\rho - \rho_0) \vec{g} - \nabla p' + \nabla \cdot \mu \nabla \vec{V} + \frac{1}{3} \nabla \mu \nabla \vec{V} \quad (2.50)$$

On admet en outre que la viscosité dynamique est prise soit constante $\mu(T) = \mu(T_0) = \mu_0$ soit donnée par la loi de Sutherland [7] :

$$\frac{\mu(T)}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S_\mu}{T + S_\mu} \quad (2.51)$$

Avec $T_0 = 273K$, $S_\mu = 110.5K$, $\mu_0 = 1.68 \times 10^{-5} kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ [8]. La conductivité thermique est donnée par :

$$k(T) = \mu(T) \frac{C_{p0} k_0}{\nu_0} \quad (2.52)$$

2.2.3. Écoulement incompressible

Un écoulement incompressible se caractérise par une masse volumique constante et uniforme. Cette propriété se traduit dans l'équation de continuité par le caractère isovolume de l'écoulement : $\nabla \vec{V} = 0$. Cette propriété permet aussi de ne pas avoir à interpréter la pression comme une grandeur thermodynamique. Cette approximation consiste donc, à imposer $\rho = \rho_0$ partout et à neutraliser la loi d'état $p = p(\rho, T)$ qui n'a alors plus de sens. Ceci revient à se placer dans la limite où la vitesse du son est infiniment grande devant la vitesse de l'écoulement. La pression, qui était une grandeur thermodynamique dans le cas compressible, devient une grandeur purement dynamique permettant de satisfaire la contrainte.

On considère donc cette fois des conditions telles que les propriétés du fluide (ρ, μ, k) sont constantes, égales à leur valeur à l'état de référence, et que le gradient de pression thermodynamique est négligeable. Ces hypothèses sont valides à bas nombre de Mach, lorsque les variations de p' et de T sont très faibles.

On a donc :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\bar{p}}{dt} = 0 \quad (2.53)$$

$$\nabla \vec{V} = 0 \quad (2.54)$$

La simplification des équations de faible nombre de Mach permet d'aboutir aux équations incompressibles suivantes :

$$\nabla \vec{V} = 0 \quad (2.55)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \nabla V \right) = \bar{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_{dyn} + \nu \Delta \vec{V} \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \nabla T = a \Delta T \quad (2.57)$$

Le problème thermique est ainsi découplé du problème dynamique et peut être résolu séparément.

2.2.4. Écoulement dilatable (Approximation de Boussinesq)

Pour certains écoulements, l'approximation de fluide incompressible est trop drastique, car elle ne permet pas de prendre en compte les variations de densité dues aux variations de température. En présence de gravité, des inhomogénéités de densité induisent un champ de force d'Archimède qui peut mettre le fluide en mouvement. Ces mouvements ne sont pourtant

pas de même nature que les ondes sonores que l'on souhaite continuer à "filtrer". L'approximation de Boussinesq permet de prendre en compte ces variations de densité tout en supposant que la vitesse des ondes sonores est infinie devant la vitesse de l'écoulement.

Dans les cas les plus courants de la convection naturelle, les variations de masse volumique au sein du fluide sont faibles et les vitesses d'écoulement sont assez lentes (Nombre de Mach petit). Il est alors possible de considérer le fluide comme quasi incompressible. Les variations de ρ sont négligées partout, excepté dans la force de gravité (le terme d'Archimède) à l'origine du phénomène de thermoconvection. C'est l'hypothèse de Boussinesq [9] :

On a alors :

$$\nabla V = 0 \text{ et } \frac{d\bar{p}}{dt} = 0 \quad (2.58)$$

Le système d'équation devient alors :

$$\nabla V = 0 \quad (2.59)$$

$$(\bar{V} \nabla) \bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \bar{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla \cdot \nabla \bar{V} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \nabla T = a T \Delta \quad (2.61)$$

Donc, pour pouvoir utiliser cette approximation, le rapport entre la variation de densité et la densité doit être petit : $\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \ll 1$

En pratique, cette hypothèse consiste tout d'abord à simplifier l'équation d'état du fluide en linéarisant l'expression de ρ en fonction des variations de la température T comme suit :

$$\rho = \rho_0 + \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_0 (T - T_0) \quad (2.62)$$

Pour un gaz parfait :

$$\rho = \frac{p}{RT} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{\rho}{T} \quad (2.63)$$

Ce qui nous donne :

$$\rho = \rho_0 + \left[-\frac{\rho}{T} \right]_0 (T - T_0) \quad (2.64)$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 - \frac{\rho_0}{T_0} (T - T_0) \quad (2.65)$$

et puisque : $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p=p_0} = \frac{1}{T_0}$ pour un gaz parfait, on obtient finalement :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta (T - T_0)) \quad (2.66)$$

Ensuite, constatons que la valeur de β est faible et que les gradients de température sont rarement très élevés, on peut remplacer ρ par ρ_0 dans tous les termes des équations (2.43)-(2.46) (équations faible nombre de Mach) sauf dans le terme de gravité (terme d'Archimède ou force de flottabilité), qui est linéarisé comme suit :

$$\rho \bar{g} = \rho_0 \bar{g} - \rho_0 \beta (T - T_0) \bar{g} \quad (2.67)$$

Et le système d'équations décrivant l'écoulement de la convection naturelle d'un fluide Newtonien, supposé être un gaz parfait, dans le cadre des hypothèses de Boussinesq est :

$$\nabla V = 0 \quad (2.68)$$

$$(\bar{V} \nabla) \bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \beta (T - T_0) \bar{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \bar{V} \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \nabla T = a \Delta T \quad (2.70)$$

Dans le cas où la gravité peut être négligée les équations dilatables (Boussinesq) sont identiques aux équations incompressibles et on retrouve le découplage de la vitesse et de la température.

Dans le présent travail, les écoulements considérés sont l'écoulement compressible à faible nombre de Mach et l'écoulement incompressible dilatable ou tout simplement l'écoulement de Boussinesq.

2.2.5 Adimensionnement des équations faible nombre Mach :

Pour conserver la généralité des solutions pour la validation numérique du modèle et la comparaison des résultats obtenus avec ceux de la littérature, les variables adimensionnées suivantes sont introduites dans les équations de conservation de l'approximation faible nombre de Mach :

$$\tau = \frac{\alpha t}{H^2}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{uH}{\alpha}, \quad V = \frac{vH}{\alpha}, \quad \Pi = \frac{p'H^2}{\rho\alpha^2}, \quad \bar{P} = \frac{\bar{p}}{\rho_0}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T} \quad \text{où :}$$

$$\Delta T = T_C - T_F, \quad T_0 = \frac{T_C + T_F}{2}$$

On pose $\varepsilon_b = \Delta T / 2T_0$, paramètre mesurant la différence de température entre les parois actives. Les grandeurs thermophysiques adimensionnelles sont définies à partir de leurs valeurs dans les conditions de référence :

$$\rho^* = \rho / \rho_0, \quad \mu^* = \mu / \mu_0; k^* = k / k_0 \text{ et } c_p^* = c_p / c_{p0} = 1 \text{ [3].}$$

On obtient le système d'équation adimensionnelle suivant :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho^* U}{\partial X} + \frac{\partial \rho^* V}{\partial Y} = 0 \quad (2.71)$$

$$\rho^* \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial X} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu^* \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu^* \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{1}{3} \nabla \mu^* \nabla \bar{V} \right\} \quad (2.72)$$

$$\rho^* \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial Y} - Ra \text{Pr} \frac{\rho^* - 1}{2\varepsilon_b} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu^* \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu^* \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{1}{3} \nabla \mu^* \nabla \bar{V} \right\} \quad (2.73)$$

$$\rho^* \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \left(k^* \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(k^* \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{\gamma - 1}{2\varepsilon_b \gamma} \frac{d\bar{P}}{dt} \quad (2.74)$$

$$\rho^* = \frac{\bar{P}}{(2\varepsilon_b \theta + 1)} \quad (2.75)$$

La viscosité dynamique et la conductivité thermique deviennent alors :

$$\mu^* = (2\varepsilon_b \theta + 1)^{3/2} \frac{(1 + S_\mu / T_0)}{2\varepsilon_b \theta + 1 + S_\mu / T_0} \quad (2.76)$$

$$k^*(\theta) = \frac{\mu^*(\theta)}{\text{Pr}} \quad (2.77)$$

Dans le cas de l'approximation Boussinesq, les équations adimensionnelles sont :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + v \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial X} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right\} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right\} + Ra \text{Pr} \theta \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (2.81)$$

2.3. CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis de décrire le modèle mathématique d'un écoulement compressible. Après différents degrés de simplification successifs, nous avons fait apparaître les hypothèses simplificatrices adoptées dans chaque type d'écoulement (écoulement à faible nombre de Mach, écoulement incompressible et écoulement dilatable ou de Boussinesq) et souligner les limites d'application relatives à chaque système d'équations, afin de les résoudre par la méthode numérique des volumes finis qui fait l'objet du prochain Chapitre.

RÉFÉRENCES :

- [1] **G. K. Batchelor**, An Introduction to Fluid Dynamics. *Cambridge University Press*, Cambridge, UK, 1967.
- [2] **P. L. Lions**, Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol.1, Incompressible Models. *Oxford University Press*, 1996.
- [3] **S. Paolucci**, On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations. *Tech. Rep. SAND82-8257*. Sandia National Laboratories, Livermore, California. 1982
- [4] **D. O. Gough**, The anelastic approximation for thermal convection. *J. Atmos. Sci.* 26. 448-456, 1969.
- [5] **J. A. Dutton and G. H. Fichtl**, Approximate equations of motion for gases and liquids. *J. Atmos. Sci.* 26. 241-251, 1969.
- [6] **J. Frohlich**, Résolution numérique des équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach par méthode spectrales. *Thèse de doctorat Sciences de l'Ingénieur*, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1990.
- [7] **W. Sutherland**, The viscosity of gases and molecular force, *Philosophical Magazine*, S. 5, 36, pp. 507-531, 1893.
- [8] **F. M. White**, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, 1974.
- [9] **J. Boussinesq**, Théorie analytique de chaleur, vol.2, *Gauthier Villars*, Paris, 1903.

Chapitre 3

Résolution numérique

3.1. INTRODUCTION

Les équations présentées au deuxième chapitre sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées. En raison de leur complexité, elles ne peuvent être résolues analytiquement. Ces équations sont résolues à l'aide de méthodes numériques. Plusieurs techniques numériques sont disponibles dans la littérature. On peut distinguer les méthodes des différences finies, méthodes des éléments finis, méthodes des volumes finis et méthodes spectrales. La méthode des volumes finis, sans doute la plus employée actuellement, et celle que nous allons décrire, pour les différents avantages qu'elle offre, en particulier :

- les équations aux différences traduisent la conservation de bilan de quantité de mouvement et d'énergie. Cela signifie que l'extension du principe de conservation écrit sous une forme discrétisée pour un volume de contrôle typique fini est vérifiée pour l'ensemble du domaine numérique ;
- sa robustesse numérique, sa maniabilité et son formalisme très proche de la réalité physique (conservation des bilans d'énergie et de quantité de mouvement).

3.2. FORME GENERALE DES EQUATIONS DE CONSERVATION

Pour simplifier la présentation, les équations de conservation à faible nombre de Mach sous leur forme adimensionnelle donnée au chapitre précédent (Eq. 2.71-2.74) sont traduites mathématiquement par des équations de transport de fonctions scalaires qui prennent la forme générale d'une équation de convection-diffusion de ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \quad (3.1)$$

Le premier terme de cette équation : terme transitoire, $\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\phi)$, représente l'accumulation de ϕ dans le temps. Le second, $\nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi)$, représente le transport de ϕ par convection. Dans le second membre, le premier terme, $\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)$, correspond au transport de ϕ par diffusion, et le dernier, S_ϕ , terme source, la production locale de ϕ . Les termes : ϕ , Γ et S_ϕ sont expliqués en détail dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Expressions de ϕ, Γ et S_ϕ pour les équations faible Mach.

Equation	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	U	$\text{Pr } \mu^*$	$-\frac{\partial \Pi}{\partial X} + \frac{1}{3} \nabla \mu^* \cdot \nabla \vec{V} \Big _X$
Quantité de mouvement suivant Y	V	$\text{Pr } \mu^*$	$-\frac{\partial \Pi}{\partial Y} - Ra \text{Pr} \frac{\rho^* - 1}{2\varepsilon_b} + \frac{1}{3} \nabla \mu^* \cdot \nabla \vec{V} \Big _Y$
Energie	θ	k^*	$\frac{\gamma - 1}{2\varepsilon_b \gamma} \frac{d\bar{P}}{dt}$

A ces équations, s'ajoute l'équation d'état donnée sous sa forme adimensionnelle :

$$\rho^* = \frac{\bar{P}}{(2\varepsilon_b \theta + 1)} \quad (3.2)$$

Dans la résolution numérique de ces équations, le problème qui se pose est qu'il y a plus d'inconnues que d'équations (à 2D, on a six inconnues). cela provient de la décomposition de la pression qui introduit la pression thermodynamique \bar{p} (ou $p^{(0)}$) comme inconnue supplémentaire. Afin de fermer le problème, il faut une équation supplémentaire traduisant l'état initial, c'est celle de la conservation de la masse.

3.2.1. Calcul de \bar{p}

Dans une cavité ouverte, la pression thermodynamique est la pression ambiante :

$$\bar{p}(t) = p_0, \forall t \quad (3.3)$$

Dans une cavité fermée, elle est déterminée par la conservation de la masse totale :

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = M_0 = \int_{\Omega} \rho_0 d\Omega, \forall t \quad (3.4)$$

Où Ω est le volume du système et M_0 est définie comme étant la masse initiale du système :

$$M_0 = \int_{\Omega} \rho_0 d\Omega = \frac{1}{R} \int_{\Omega} \frac{p_0}{T_0} d\Omega \quad (3.5)$$

De l'équation d'état, on obtient :

$$\rho = \frac{\bar{p}}{RT} \text{ et } \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} \quad (3.6)$$

L'intégrale sur un volume de contrôle nous donne :

$$\int_{\Omega} \frac{\bar{p}}{RT} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{p_0}{RT_0} d\Omega \Rightarrow \bar{p} \int_{\Omega} \frac{1}{T} d\Omega = p_0 \int_{\Omega} \frac{1}{T_0} d\Omega \quad (3.7)$$

Finalement, on obtient l'expression :

$$\bar{p} = p_0 \frac{\int_{\Omega} \frac{1}{T_0} d\Omega}{\int_{\Omega} \frac{1}{T} d\Omega} \quad (3.8)$$

3.2.2. Calcul de $\frac{d\bar{p}}{dt}$

La deuxième équation supplémentaire est donnée par le calcul du terme $\frac{d\bar{p}}{dt}$. L'équation de conservation de masse, associée à l'équation d'énergie et l'équation d'état permettent d'écrire la divergence de la vitesse sous la forme donnée par l'équation (3.12). On a donc :

Pour l'équation d'état (2.47) :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{RT} \frac{d\bar{p}}{dt} - \frac{\bar{p}}{RT^2} \frac{dT}{dt} \quad (3.9)$$

Pour l'équation de continuité (2.43) :

$$\nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \quad (3.10)$$

Pour l'équation d'énergie (2.46) :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot k \nabla T + \frac{1}{\rho c_p} \frac{dp}{dt} \quad (3.11)$$

La combinaison des équations (3.10) et (3.11) donne :

$$\nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{\gamma - 1}{\rho \gamma RT} \nabla \cdot k \nabla T + \frac{\gamma - 1}{\rho \gamma RT} \frac{dp}{dt} \quad (3.12)$$

$$\text{Avec : } c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

L'intégrale sur le volume de contrôle de (3.12) donne :

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{V} d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ -\frac{1}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{\gamma-1}{\bar{p}\gamma} \nabla \cdot k \nabla T + \frac{\gamma-1}{\bar{p}\gamma} \frac{d\bar{p}}{dt} \right\} d\Omega \quad (3.13)$$

L'application du théorème de la divergence donne pour des conditions de parois imperméables :

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{V} d\Omega = \int_S \bar{V} \cdot \bar{n} dS = 0 \quad (3.14)$$

On obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\bar{p}} \frac{1}{\gamma} \frac{d\bar{p}}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\gamma-1}{\bar{p}\gamma} \nabla \cdot k \nabla T d\Omega \quad (3.15)$$

\bar{p} ne dépend que du temps, donc :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\bar{p}}{dt} \int_{\Omega} d\Omega = \frac{\gamma-1}{\gamma} \int_{\Omega} \nabla \cdot k \nabla T d\Omega \quad (3.16)$$

Utilisons le théorème de la divergence :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot k \nabla T d\Omega = \int_S k \nabla T dS = \int_S k \frac{\partial T}{\partial n} dS \quad (3.17)$$

Donc :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\bar{p}}{dt} \int_{\Omega} d\Omega = \frac{\gamma-1}{\gamma} \int_S k \nabla T dS \quad (3.18)$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{(\gamma-1) \int_S k \nabla T dS}{\int_{\Omega} d\Omega} \quad (3.19)$$

En adimensionnant les expressions de \bar{p} et $\frac{d\bar{p}}{dt}$, il vient alors,

$$\bar{P} = \frac{\int_{\Omega} d\Omega}{\int_{\Omega} \frac{1}{2\varepsilon_b \theta + 1} d\Omega} \quad (3.20)$$

$$\frac{d\bar{P}}{d\tau} = 2\varepsilon_b \gamma \cdot \frac{1}{\int_{\Omega} d\Omega^*} \cdot \int_S k^* \frac{\partial \theta}{\partial n^*} dS^* \quad (3.21)$$

3.3. LA METHODE DES VOLUMES FINIS

3.3.1. Principe

Les formulations conservatrices des équations aux dérivées partielles offrent l'avantage de pouvoir être reformulées de façon intégrale à l'aide du théorème de la divergence. Le principe de conservation est la loi fondamentale de la méthode des volumes finis. Il stipule que la variation d'une propriété dépend du flux net traversant la frontière S qui enveloppe le volume Ω . La méthode des volumes de contrôle est, donc, une technique de discrétisation pour la résolution des équations s'écrivant sous la forme conservatrice. Son principe est très simple, initialement développé dans le cas des écoulements compressibles par Godunov [1] et Glimm [2], puis répandu dans la communauté scientifique des mécaniciens par Patankar & Spalding [3] dans les années 70 et est discuté en détail par Patankar [4] en 1980. Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer l'équation à résoudre sur chacun des volumes de contrôle.

Comme il est montré dans la figure 3.1, le domaine est discrétisé à l'aide d'une grille dimensionnelle (uniforme ou non) dans les deux directions et orienté positivement vers la droite (Est) et vers le haut (Nord) respectivement. Pour écrire le schéma de discrétisation en un point P , on choisit une nomenclature adaptée au principe de la méthode de volumes finis pour le stockage des variables dans notre maillage et tout cela dans le but de rendre les choses plus faciles dans la suite de la discrétisation. On considère, donc, l'élément P comme indiqué sur la figure 3.1, et on note que les indices majuscules (E, W, N, S) caractérisent les variables ayant trait aux centroides voisins de P , et les minuscules (e, w, n, s) sont ceux qui nous ramènent aux faces de l'élément.

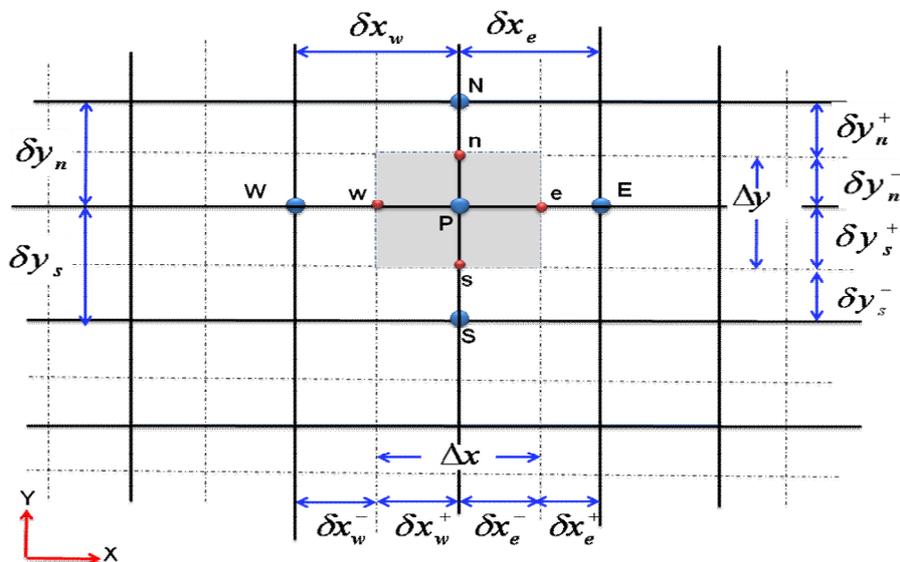


Figure 3.1 : Volume de contrôle dans le cas de 2D.

3.3.2. Maillage décalé

La discrétisation d'une équation de transport diffusion sur un volume de contrôle par la méthode des volumes finis fait intervenir les valeurs des vitesses aux interfaces des volumes (u_e, u_w, v_n, v_s). Il est donc intéressant de calculer ces vitesses directement sur les interfaces (sans avoir à effectuer d'interpolations). D'autre part, la discrétisation de l'équation de continuité et du gradient de pression avec l'utilisation d'une interpolation linéaire peut induire des erreurs importantes à cause de la répartition de pression ou de vitesse en "damier" (un champ de pression oscillatoire dans un maillage collocatif, (figure 3.2a) [5] est vu comme un champ uniforme). Pour contourner ces difficultés on préfère utiliser des grilles décalées "staggered grid" (figure 3.2b). Cependant, des méthodes récentes ont été proposées sur des maillages collocatifs par Rhie & Chow [6] qui éliminent les problèmes d'oscillations néfastes au moyen d'interpolation appropriée [7].

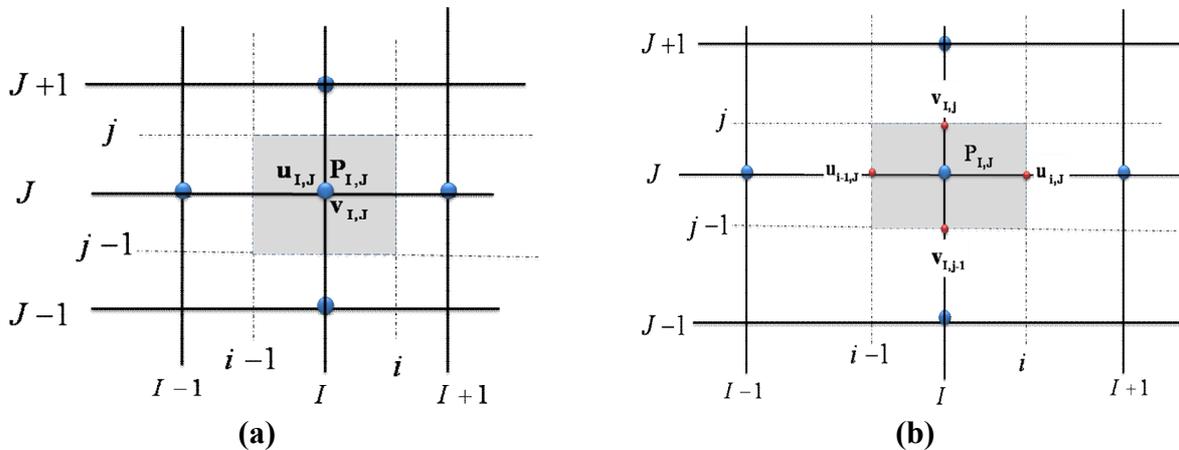


Figure 3.2 : Maillage de la formulation vitesse-pression : (a) maillage collocatif ; (b) maillage décalé.

On décompose le maillage principal (figure 3.1) en trois maillage secondaires. Un maillage principal est construit pour calculer la pression, la température, la densité (P, ϕ, ρ) et pour l'équation de conservation de masse (au centre de chaque volume de contrôle). Deux maillages décalés vers la droite et vers le haut respectivement sont utilisés pour le calcul des vitesses (u, v) dans les deux directions (sur les faces du volume de contrôle), c'est-à-dire que les inconnues du problème ne sont pas toutes calculées sur le même maillage de calcul. On peut employer pour des variables différentes des maillages différents, des volumes de contrôle différents, des points de stockage différents. L'arrangement relatif aux différentes variables est schématisé sur la figure 3.3.

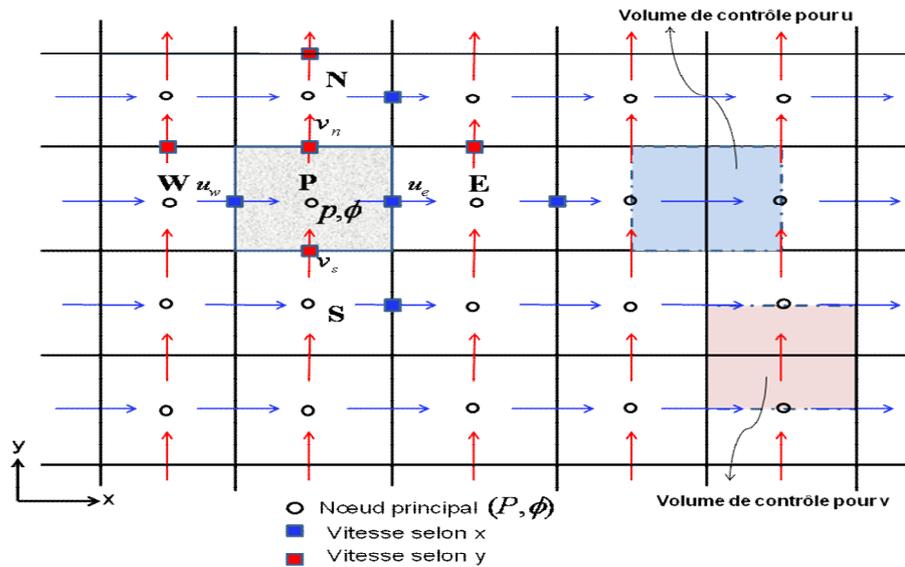


Figure 3.3: Volumes de contrôle pour les scalaires et les vitesses.

Le maillage décalé a été proposé par Harlow et Welch [5] en 1965 pour la méthode MAC (Marker And Cell) qui était destinée à la simulation numérique de l'écoulement à surface libre. Ce maillage est très ramassé au sens où les vitesses discrètes sont disposées de manière rapprochée autour des nœuds de pression. Il donne lieu à des approximations compactes qui font intervenir des points très voisins. Le maillage décalé jouit de propriétés de convergence spatiale qui en font un maître choix [4].

3.4. DISCRETISATION DES EQUATIONS DE CONSERVATION

L'équation différentielle instationnaire sous la forme générale (3.1) est intégrée dans le temps sur le volume de contrôle Ω_{CV} entourant le nœud courant P , on obtient :

$$\int_t \int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dt d\Omega + \int_t \int_{\Omega_{CV}} \text{div} (\rho\phi\vec{u}) dt d\Omega - \int_t \int_{\Omega_{CV}} \text{div} (\Gamma \text{grad} \phi) dt d\Omega = \int_t \int_{\Omega_{CV}} S_\phi dt d\Omega \quad (3.22)$$

Grace au théorème de la divergence de Gauss, on obtient :

$$\int_t \int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dt d\Omega + \int_t \int_{A_{CV}} (\rho\phi\vec{u}) d\vec{A} dt - \int_t \int_{A_{CV}} (\Gamma \text{grad} \phi) d\vec{A} dt = \int_t \int_{\Omega_{CV}} S_\phi dt d\Omega \quad (3.23)$$

Où A est la surface qui limite le volume de contrôle Ω_{CV} .

3.4.1. Terme transitoire

Pour l'intégration de ce terme particulier, on considère uniquement la variation en temps, en assimilant la variable ϕ à sa valeur au centre du volume de contrôle :

$$I_1 = \int_t \int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial t} \rho \phi d\Omega dt = \left\{ (\rho \phi)_P - (\rho \phi)_P^0 \right\} \Delta \Omega \quad (3.24)$$

Où Ω désigne le volume de contrôle de ϕ et $\Delta \Omega$ sa mesure ($\Delta \Omega = \Delta x \Delta y$) dans le cas 2D et l'exposant 0 indique que la quantité est considérée au pas de temps précédent.

3.4.2. Terme convectif

$$I_2 = \int_t \int_{A_{CV}} (\rho \phi \vec{u}) d\vec{A}_n dt = \int_t \int_{A_{CV}} (\rho \phi \vec{u})(d\vec{A}_e - d\vec{A}_w + d\vec{A}_s - d\vec{A}_n) dt$$

$$= \left\{ (\rho \phi u A)_e - (\rho \phi u A)_w + (\rho \phi v A)_n - (\rho \phi v A)_s \right\} \Delta t \quad (3.25)$$

On définit la variable $F_i = (\rho v A)_i$, qui représente le flux de masse convectif traversé par la surface (i), $i = (e, w, n, s)$.

Tableau 3.2 : Expression des coefficients convectifs

Face	e	w	n	s
Flux de masse convectif	$F_e = \rho_e u_e A_e$	$F_w = \rho_w u_w A_w$	$F_n = \rho_n v_n A_n$	$F_s = \rho_s v_s A_s$

Il vient que :

$$I_2 = \left\{ F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s \right\} \Delta t \quad (3.26)$$

3.4.3. Terme diffusif

Le gradient de ϕ aux interfaces est finalement calculé en supposant que ϕ varie linéairement entre chaque point du maillage (figure 3.4). On obtient ainsi:

$$I_3 = \int_t \int_{A_{CV}} (\Gamma grad \phi) d\vec{A} dt = \left\{ \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} A \right)_w + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} A \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} A \right)_s \right\} \Delta t \quad (3.27)$$

$$I_3 = \left(\Gamma \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta x)_w} A \right)_w + \left(\Gamma \frac{\phi_N - \phi_P}{(\delta y)_n} A \right)_n - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_S}{(\delta y)_s} A \right)_s \Delta t \quad (3.28)$$

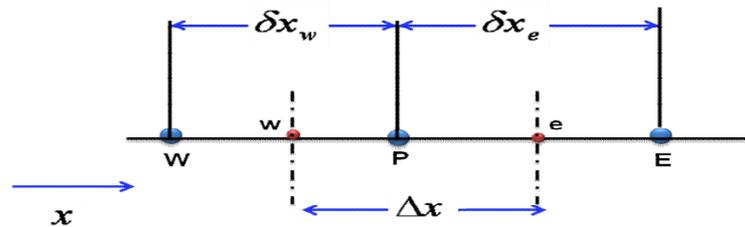


Figure 3.4 : interpolation pour le gradient de ϕ

On pose $D_i = \frac{\Gamma_i A_i}{\delta x_i}$ qui représente le coefficient diffusif, où $i = (e, w, n, s)$

Tableau 3.3 : Expressions des coefficients diffusifs

Face	E	w	n	s
Conductance de diffusion	$D_e = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e}$	$D_w = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w}$	$D_n = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_n}$	$D_s = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_s}$

On obtient finalement :

$$I_3 = (D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) + D_n(\phi_N - \phi_P) - D_s(\phi_P - \phi_S))\Delta t \quad (3.29)$$

Calcul de la conductance Γ :

En général $\Gamma_e \neq \Gamma_w$, la conductivité thermique étant fonction de la température $\Gamma = \Gamma(T)$, ou même fonction de l'espace $\Gamma = \Gamma(x)$ pour les matériaux composites.

Si l'on considère le flux à l'interface "e" (figure 3.5), il peut être écrit ainsi :

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e^-}{\Gamma_P} + \frac{\delta x_e^+}{\Gamma_E}} = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e}{\Gamma_e}} \quad (3.30)$$

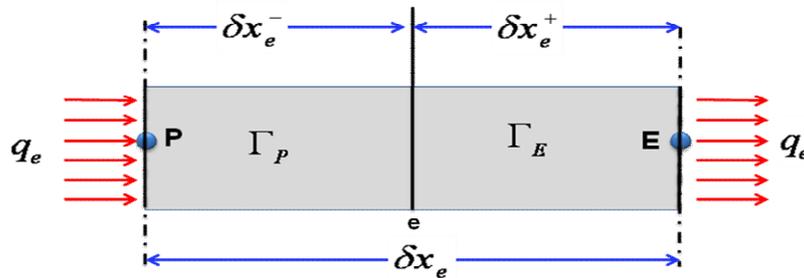


Figure 3.5 : diffusivité pour un matériau composite

De la relation (3.30) on sort l'expression de la conductivité thermique à l'interface du volume de contrôle :

$$\Gamma_e = \frac{\delta x_e}{\frac{\delta x_e^-}{\Gamma_P} + \frac{\delta x_e^+}{\Gamma_E}} = \delta x_e \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{\Gamma_P \delta x_e^+ + \Gamma_E \delta x_e^-} \quad (3.31)$$

Si on définit les paramètres : $f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e}$ et $1 - f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e}$, la relation (3.31) devient :

$$\Gamma_e = \frac{1}{\frac{1-f_e}{\Gamma_P} + \frac{f_e}{\Gamma_E}} = \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{f_e \Gamma_P + (1-f_e) \Gamma_E} \quad (3.32)$$

3.4.4. Terme source

l'intégration de ce terme est donné par :

$$I_4 = \int_t \int_{\Omega_{CV}} S_\phi d\Omega = \bar{S} \Delta t \Delta \Omega \quad (3.33)$$

Où \bar{S} est la valeur moyenne de S sur le volume considéré.

Souvent le terme source S_ϕ dépend de la variable ϕ . Il est exprimé comme une fonction linéaire de ϕ_p . La méthode de Pantakar [4] est recommandée dans la linéarisation du terme source; elle consiste à écrire :

$$\bar{S} = S_C + S_P \phi_p \quad (3.34)$$

Où S_C représente la partie constante de \bar{S} (qui ne dépend pas de ϕ_p), alors que S_P est le coefficient de ϕ_p (S_P ne représente pas \bar{S} évalué au point P).

L'utilisation des expressions de I_1, I_2, I_3 et I_4 permet d'écrire l'équation (3.23) sous forme discrétisée:

$$\left\{ (\rho\phi)_P - (\rho\phi)_P^0 \right\} \Delta \Omega + \{ F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s \} \Delta t - (D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) + D_n (\phi_N - \phi_P) - D_s (\phi_P - \phi_S)) \Delta t = (S_C + S_P \phi_p) \Delta t \Delta \Omega \quad (3.35)$$

3.4.5. Équation de continuité

Dans le cas des équations de Navier-Stokes, on doit aussi résoudre l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (3.36)$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle Ω_{CV} conduit à :

$$\int_t \left(\int_{\Omega_{CV}} \rho d\Omega \right) dt + \int_{dt} \left(\int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) d\Omega \right) dt + \int_t \left(\int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) d\Omega \right) dt = 0 \quad (3.37)$$

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} + (\rho u A)_e - (\rho u A)_w + (\rho v A)_n - (\rho v A)_s = 0 \quad (3.38)$$

Ce qui donne:

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} = F_w - F_e + F_s - F_n \quad (3.39)$$

Effectuons l'opération $[(3.35) - (\phi_P \times (3.39))]$, on obtient :

$$\left\{ \rho_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + F_w - F_e + F_s - F_n - S_P \Delta\Omega \right\} \phi_P + \{ F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s \} - \\ (D_e \phi_E - D_e \phi_P - D_w \phi_P + D_w \phi_W + D_n \phi_N - D_n \phi_P - D_s \phi_P + D_s \phi_S) = S_C \Delta\Omega + \rho_P^0 \phi_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (3.40)$$

3.4.6. Schémas numériques

Dans l'équation (3.40), l'inconnue ϕ n'est pas encore exprimée sur son domaine de définition (dans les termes convectifs), les nœuds de discrétisation. L'interpolation assurant cette opération dépendra du choix du schéma de discrétisation spatiale. Il existe plusieurs schémas donnant la valeur de ϕ sur son domaine (tel que : *CDS*, *upwind*, *exponentiel*, *hybride*, *puissance*) et qui sont détaillés dans l'[Annexe II](#).

Si on pose $Pe = \frac{F}{D}$ qui désigne le nombre de Péclet de maille, l'équation de conservation une fois discrétisée implicitement en temps, est de la forme :

$$a_P^{n+1} \phi_P^{n+1} = a_E^{n+1} \phi_E^{n+1} + a_W^{n+1} \phi_W^{n+1} + a_N^{n+1} \phi_N^{n+1} + a_S^{n+1} \phi_S^{n+1} + b \quad (3.41)$$

Où les coefficients de l'équation (3.41) sont exprimés sous la forme générale suivante :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad (3.42)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w, 0] \quad (3.43)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0] \quad (3.44)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [F_s, 0] \quad (3.45)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \quad (3.46)$$

$$a_P^0 = \rho_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (3.47)$$

$$b = S_C \Delta\Omega + a_P^0 \phi_P^0 \quad (3.48)$$

L'expression entre crochets représente le maximum entre les quantités et $A(|P|)$ est une fonction caractéristique du schéma choisi (Tableau 3.4) [4].

Tableau 3.4 : Expressions de la fonction $A(|P|)$ pour les différents schémas.

Schéma	$A(P)$
CDS	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Exponentiel	$ P / (\exp(P) - 1)$
Hybride	$[0, 1 - 0.5 P]$
Power Law	$[0, (1 - 0.1 P)^5]$

Le schéma exponentiel discrétise l'ensemble des termes convectifs et diffusifs, contrairement aux schémas habituels tels que les schémas décentré et amont. Cette discrétisation concerne l'expression des coefficients J aux faces des volumes de contrôle. Ceux-ci sont interpolés entre les deux nœuds que sépare la face de telle sorte que l'équation stationnaire 1D de convection-diffusion soit vérifiée entre ces deux points, et ce, indépendamment du problème que l'on résout.

Le schéma hybride [8] et le schéma puissance [9] utilisé dans cette étude, sont dérivés directement du schéma exponentiel. Ils reposent tous deux sur l'approximation des coefficients où apparaît l'exponentiel, qui est coûteuse en temps de calcul. En fonction du nombre de Péclet, le schéma hybride effectue une approximation linéaire par morceaux de la fonction $A(P)$ et le schéma puissance une approximation polynomiale.

3.4.7. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

L'idée générale permettant d'obtenir les valeurs des vitesses u et v est de résoudre les équations de Navier-stokes de la même manière que la résolution de l'équation générale de transport (3.1), en remplaçant ϕ par chacune de ces variables et en considérant les maillages décalés correspondants pour le calcul des coefficients a_{nb} (a_P, a_E, a_W, a_N, a_S). Les paramètres sont calculés de sorte qu'une translation (décalage) soit faite pour le maillage principal d'une valeur $\delta x = \Delta x/2$ suivant la direction x pour obtenir u et d'une valeur $\delta y = \Delta y/2$ suivant la direction y pour obtenir v .

Les grandeurs scalaires telles que la pression, la température, etc., seront repérées par l'indice (I, J) , tandis que les composantes des vecteurs seront calculées sur une grille décalée d'une demi-maille dans la direction de la composante considérée (Figure 3.6).

Dans ce cas, le gradient de pression en un nœud du maillage décalé est intégré en considérant, tout simplement, la différence de pression entre les deux points voisins du maillage principal.

Dans la figure 3.6, les lignes continues du maillage sont numérotées au moyen de lettres majuscules. Dans la direction x la numérotation est $\dots, I-1, I, I+1, \dots$ etc., sur laquelle les variables scalaires (température, pression, densité...) sont calculées. Dans la direction y la numérotation est $\dots, J-1, J, J+1, \dots$ etc. Les lignes discontinues qui construisent les faces de la cellule scalaire sont désignées par des lettres minuscules : $\dots, i-1, i, i+1, \dots$ et $\dots, j-1, j, j+1, \dots$ dans la direction x et la direction y , respectivement.

Donc, les nœuds des variables scalaires (T, P, ρ, \dots) sont définis par l'intersection des lignes continues qui sont données par des lettres majuscules, par exemple le point P dans la figure 3.6 est identifié par l'indice (I, J) . Les composantes de vitesse (u, v) sont stockées aux centres des faces des mailles (cellule scalaire), les faces (e, w) de la cellule scalaire pour la composante u et les faces (n, s) pour la composante v . Leurs nœuds correspondants sont situés à l'intersection d'une ligne continue avec une ligne discontinue, et sont donc définis par une combinaison d'une lettre minuscule et une lettre majuscule. La composante u de la vitesse est définie par l'indice (i, J) et la composante v par l'indice (I, j) (Figures 3.7 et 3.8).

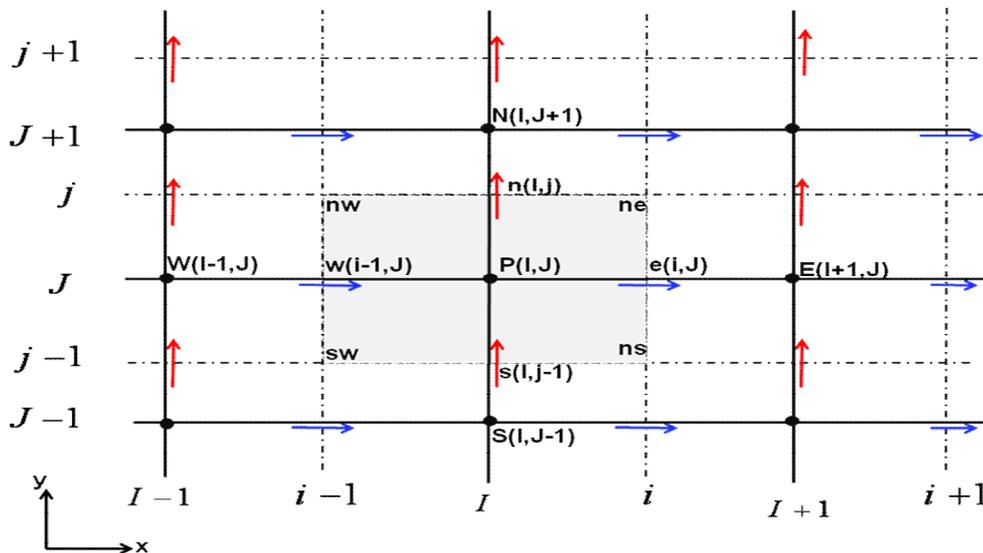


Figure 3.6 : Volume de contrôle pour les quantités scalaires (P, ϕ) et l'équation de continuité.

Le décalage entre la grille de pression et les grilles de vitesse permet de calculer la divergence du champ de vitesse directement sur les nœuds de pression et d'éviter les oscillations de pression observées dans le cas de l'utilisation de maillages collocatifs.

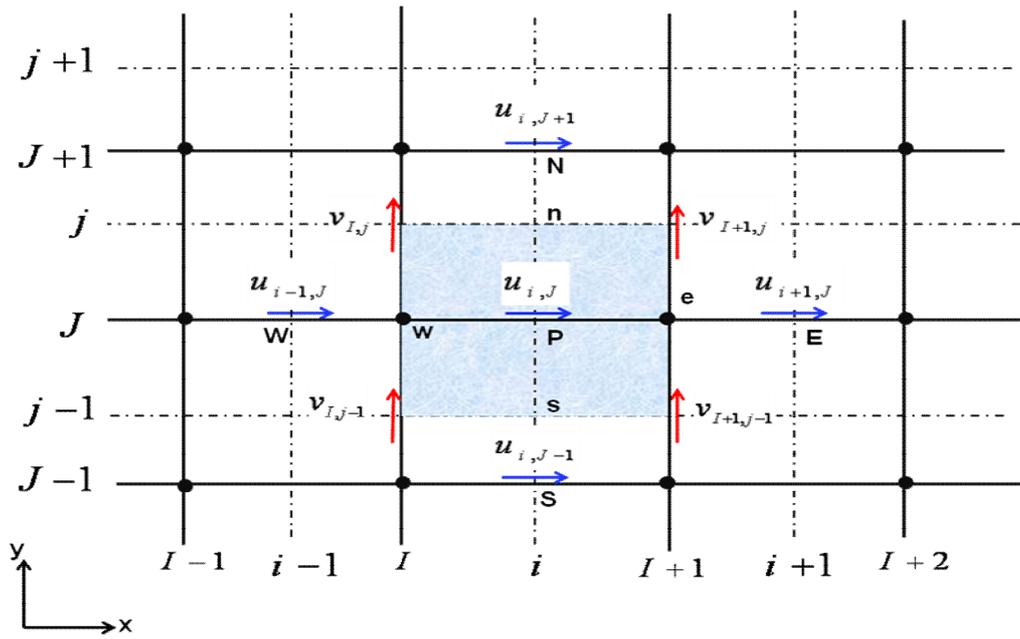


Figure 3.7 : Volume de contrôle pour la composante u et ses voisines.

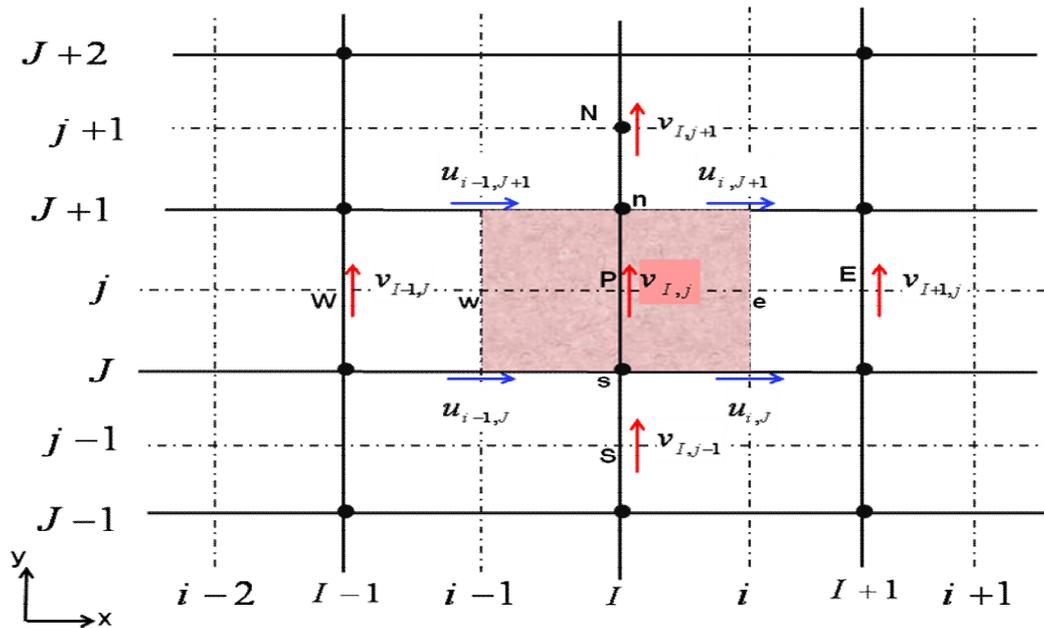


Figure 3.8 : Volume de contrôle pour la composante v et ses voisines.

Exprimée dans le nouveau système de coordonnées, l'équation de quantité de mouvement suivant la direction x discrétisée au point (i, J) est donnée par :

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} - \frac{P_{I,J} - P_{I-1,J}}{\delta x_u} \Delta V_u + \bar{S} \Delta V_u \quad (3.49)$$

Où

$$a_{i,j}u_{i,j} = \sum a_{nb}u_{nb} + (P_{I-1,J} - P_{I,J})A_{i,j} + b_{i,j} \quad (3.50)$$

Où ΔV_u est le volume du volume de contrôle de u , $b_{ij} = \bar{S}\Delta V_u$ est le terme source de l'équation de quantité de mouvement suivant x et $A_{i,j}$ est la surface de la face (e ou w) du volume de contrôle de u .

Dans le nouveau système de numérotation, les nœuds voisins E, W, N et S de la somme ($\sum a_{nb}u_{nb}$) sont donnés par les indices $(i-1,J)$, $(i+1,J)$, $(i,J+1)$ et $(i,J-1)$ (voir figure 3.7).

Les valeurs des coefficients $a_{i,j}$ et a_{nb} peuvent être calculées avec l'une des méthodes de différenciation des schémas numériques présentés précédemment (Upwind, Hybride, Power...) adaptée pour des problèmes de convection-diffusion. Les coefficients contiennent des combinaisons de flux convectif par unité de masse F et de la conductance de diffusion D aux faces des volumes de contrôle de la vitesse u . L'application du nouveau système de notation (maillage décalé) nous donne les valeurs de F et D pour chacune des faces e , w , n et s du volume de contrôle pour u .

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-2,j}}{2} \right) u_{i-1,j} \right] \quad (3.51)$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} \right] \quad (3.52)$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} + \left(\frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-1,j-1}}{2} \right) v_{i-1,j} \right] \quad (3.53)$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{i,j+1} + F_{i-1,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}}{2} \right) v_{i,j+1} + \left(\frac{\rho_{i-1,j+1} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) v_{i-1,j+1} \right] \quad (3.54)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{I-1,J}}{x_i - x_{i-1}} \quad (3.55)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{I,J}}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.56)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{I-1,J} + \Gamma_{I,J} + \Gamma_{I-1,J-1} + \Gamma_{I,J-1}}{4(y_j - y_{j-1})} \quad (3.57)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I-1,J+1} + \Gamma_{I,J+1} + \Gamma_{I-1,J} + \Gamma_{I,J}}{4(y_{j+1} - y_j)} \quad (3.58)$$

Par analogie, l'équation de quantité de mouvement suivant y devient :

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{nb}v_{nb} + (P_{I,J-1} - P_{I,J})A_{I,j} + b_{I,j} \quad (3.59)$$

De même, Les coefficients $a_{I,j}$ et a_{nb} contiennent des combinaisons de F et D , leurs valeurs sont obtenues par le même procédé de calcul que la vitesse u et sont données par :

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\rho_{I-1,j-1} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) u_{i,j-1} \right] \quad (3.60)$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i+1,j-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I+1,j} + \rho_{I,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{\rho_{I,j-1} + \rho_{I+1,j-1}}{2} \right) u_{i+1,j-1} \right] \quad (3.61)$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{I,j-1} + F_{I,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j-1} + \rho_{I,j-2}}{2} \right) v_{I,j-1} + \left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) v_{I,j} \right] \quad (3.62)$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{I,j} + F_{I,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) v_{I,j} + \left(\frac{\rho_{I,j+1} + \rho_{I,j}}{2} \right) v_{I,j+1} \right] \quad (3.63)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{I-1,j-1} + \Gamma_{I,j-1} + \Gamma_{I-1,j} + \Gamma_{I,j}}{4(x_I - x_{I-1})} \quad (3.64)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{I,j-1} + \Gamma_{I+1,j-1} + \Gamma_{I,j} + \Gamma_{I+1,j}}{4(x_{I+1} - x_I)} \quad (3.65)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{I,j-1}}{y_j - y_{j-1}} \quad (3.66)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I,j}}{y_{j+1} - y_j} \quad (3.67)$$

3.5. COUPLAGE VITESSE-PRESSION

La résolution des équations de Navier-Stokes ne peut pas s'effectuer séparément par composante car la contrainte représentée par l'équation de continuité porte sur les trois composantes de la vitesse ou de la quantité de mouvement. Si toutefois la résolution est fractionnée par composante, on parle de prédiction de la vitesse et celle-ci doit être suivie d'une étape de correction pour satisfaire par exemple ($div \vec{V} = 0$) en incompressible.

Il existe plusieurs méthodes que l'on peut classer en deux familles : l'une où l'on se débarrasse du problème de la pression en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes et l'autre où l'on compose avec la pression en établissant une équation spécifique. Dans le premier cas on parle de formulation en Vorticité-Potentiel Vecteur en 3D ou

Vorticité-Fonction de Courant en 2D ($\Omega - \Psi$) et dans le second cas on a une formulation en variables primitives Vitesse-Pression (P, V). L'équation de l'énergie peut être aussi couplée pour certaines applications (convection naturelle par exemple).

Le problème du couplage se manifeste par l'apparition des variables vitesse et pression dans les deux équations de quantité de mouvement. Le gradient de pression qui apparaît comme terme source dans ces équations joue le rôle du moteur de l'écoulement. Malheureusement, on ne dispose d'aucune équation de transport pour cette troisième variable qu'est la pression (les deux autres étant les deux composantes de la vitesse). En d'autres termes, si le gradient de pression est connu a priori on peut calculer le champ vitesse qui dans ce cas vérifie bien l'équation de continuité. Malheureusement, la pression est toujours une inconnue à déterminer aussi bien que la vitesse. Un champ de vitesse donné peut satisfaire l'équation de continuité sans pour autant vérifier les équations de transport de quantité de mouvement. Cette particularité des équations rend nécessaire l'utilisation d'un algorithme de couplage pression-vitesse.

3.5.1. Algorithme SIMPLER

Des techniques de couplage des équations de Navier-Stokes équivalentes à la technique de projection ont été élaborées et mise en œuvre par Spalding et Patankar à l'Impérial Collège de Londres dans les années 1960-1970. Elles ont donné lieu à de multiples versions intitulées SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEST,

L'algorithme le plus universel et le plus utilisé est sans doute l'algorithme SIMPLE de Patankar et Spalding [3] détaillé en [Annexe III](#) avec l'Algorithme SIMPLER, ensuite ses variantes telles que : SIMPLEC (van Doormal and Raithby [10]), PISO (Issa [11]) et SIMPLER (Patankar [4]) que nous avons utilisé dans ce travail.

La supériorité de l'algorithme SIMPLER par rapport à SIMPLE réside dans le fait que la déduction de l'équation de la pression ne fait intervenir aucune simplification. Dans SIMPLE, la déduction de l'équation de correction de la pression passe par l'annulation du terme $\sum a_{nb} u'_{nb}$. Par conséquent le champ de pression dans SIMPLER est plus proche de la réalité que celui de SIMPLE, puisqu'en général l'estimation d'un champ de vitesse initial est plus facile que celle d'un champ de pression. Notons, ici que l'algorithme SIMPLER ne nécessite pas de champ de pression initial. La pression est directement générée à partir de l'initialisation de la vitesse. Par conséquent des coefficients de sous relaxation plus consistants peuvent être utilisés pour les vitesses. Mieux encore, aucune sous relaxation n'est nécessaire pour la pression. Il est vrai qu'une itération suivant l'algorithme SIMPLER nécessite environ 30% de temps plus que celle de SIMPLE, mais cet effort est largement compensé par la réduction consistante en nombre d'itérations nécessaires pour la convergence.

Cependant, en termes de vitesse de convergence des calculs, l'algorithme SIMPLER est de 30 à 50% plus efficace que SIMPLE selon Anderson [12] et Jang [13].

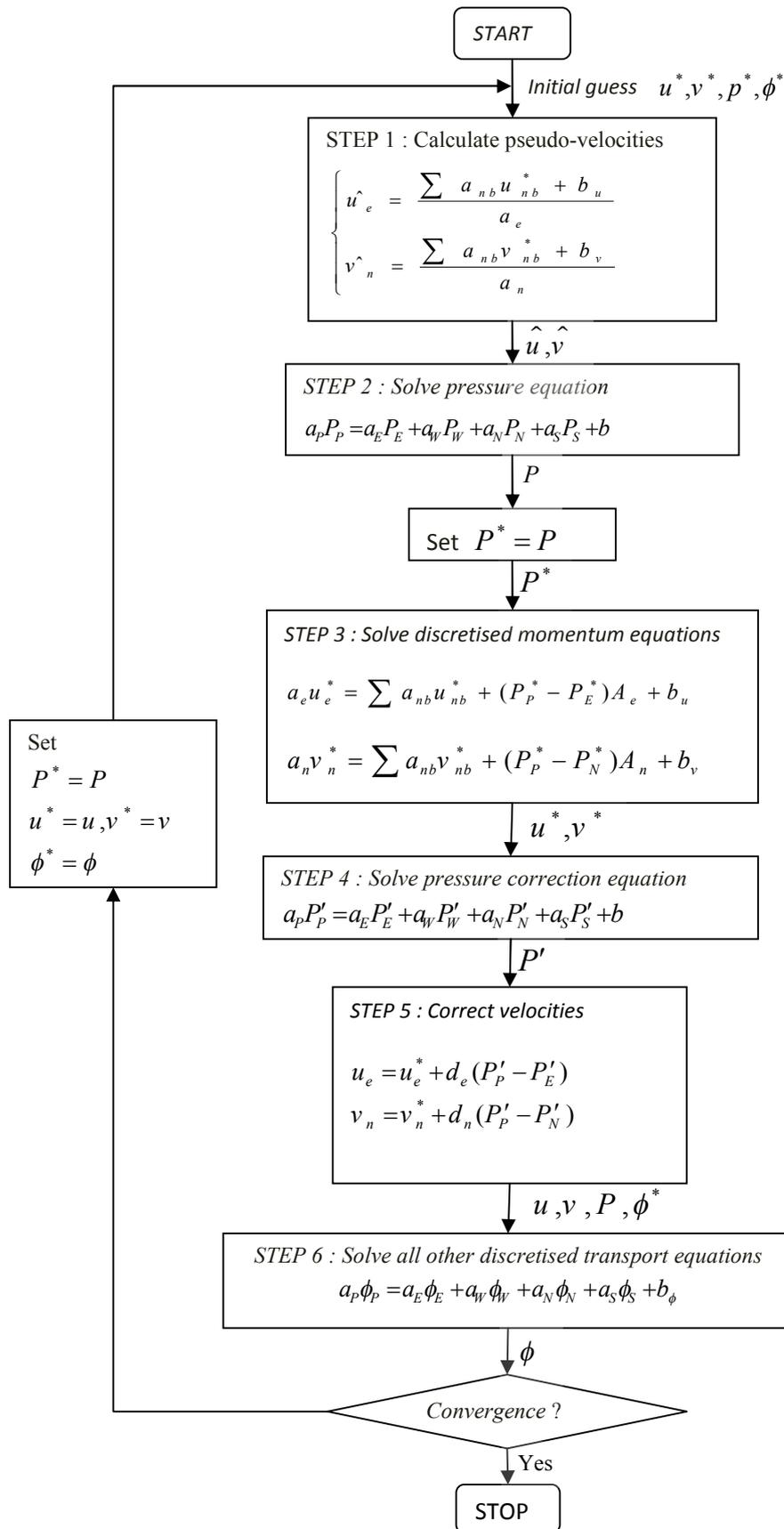


Figure 3.9 : Algorithme SIMPLER

3.5.2. Algorithme SIMPLER transitoire

Pour décrire les phénomènes transitoires, une discrétisation temporelle est réalisée, en plus de la discrétisation spatiale. Elle est caractérisée par le pas de temps Δt . L'algorithme *SIMPLER*, utilisé pour la solution des problèmes en régime stationnaire, peut être utilisé pour les problèmes en régime instationnaire. Les équations de quantité de mouvement, contiennent maintenant des termes instationnaires.

Dans les régimes instationnaires, avec formulation implicite; la procédure itérative *SIMPLER* est appliquée à chaque niveau du temps jusqu'à ce que la convergence soit accomplie. La figure (3.10) expose la structure de l'algorithme.

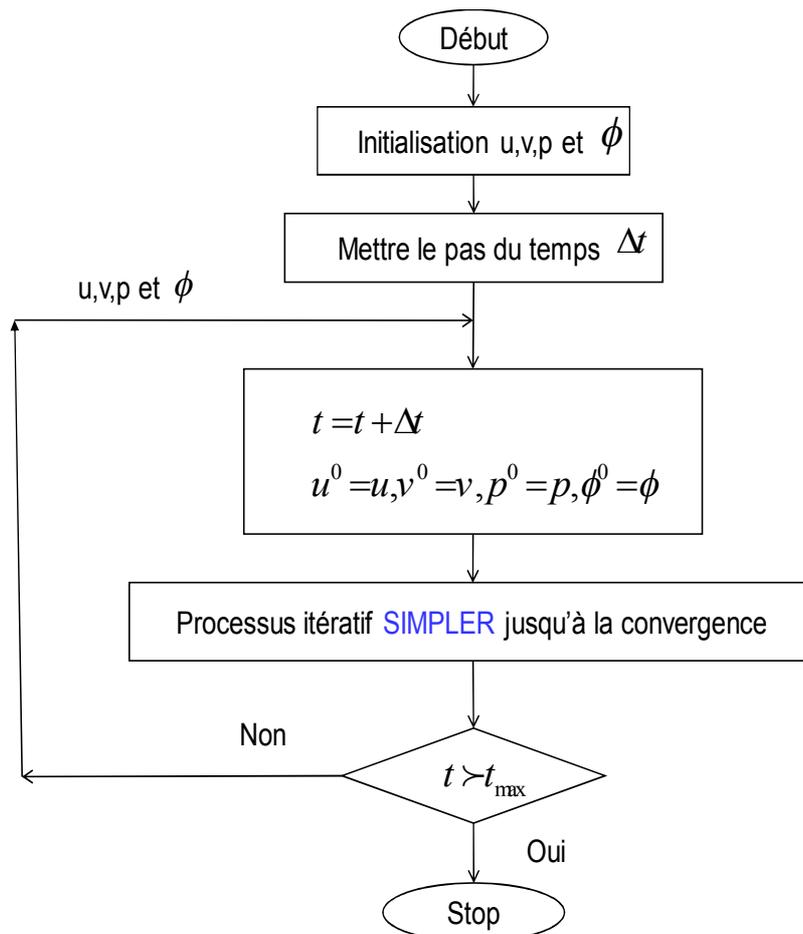


Figure 3.10 : Algorithme SIMPLER transitoire.

3.6. RELAXATION

Le processus itératif utilisé dans *SIMPLER* exige le contrôle du taux de variation des inconnues au cours de chaque itération. Ceci est réalisé par des méthodes dites de sous-relaxation [12] :

Soit ϕ_p^* la valeur de ϕ_p à l'itération courante. Si ϕ_p satisfait à l'équation:

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (3.68)$$

Alors, pour que le système soit résolu pour l'itération courante, on estime une valeur de ϕ_p donnée par :

$$\phi_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} \quad (3.69)$$

Le changement dans ϕ_p d'une itération à la suivante est donné par :

$$\Delta \phi_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \quad (3.70)$$

Le changement de ϕ_p s'effectue d'une fraction α définie par:

$$\phi_p = \phi_p^* + \alpha \left(\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \right) \quad (3.71)$$

Après réarrangements des termes, on trouve :

$$\frac{a_p}{\alpha} \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_p \phi_p^* \quad (3.72)$$

Ainsi la nouvelle valeur de la grandeur ϕ_p dépend de la valeur précédente ϕ_p^* et de sa correction $\Delta \phi = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^*$ en utilisant le coefficient de sous-relaxation α dont la valeur est strictement inférieure à 1.

3.7. RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE DES EQUATIONS DISCRETISEES

3.7.1. Algorithme de THOMAS (TDMA)

C'est un algorithme développé par Thomas [14] en 1949, c'est une méthode directe pour la situation unidimensionnelle (1D), mais peut être utilisée d'une manière itérative ligne par ligne (line by line) pour la résolution des problèmes bidimensionnel (2D).

La discrétisation par volumes finis donne un système tridiagonal pour le cas 1D, un système penta-diagonal pour le cas 2D et un système septa-diagonal pour le cas 3D. D'autres schémas de discrétisation donnent plusieurs diagonal, par exemple le schéma QUICK donne sept diagonal dans le cas 2D. Dans ce cas on pose deux diagonal dans le terme source.

Un système tridiagonal peut s'écrire sous la forme générale, (voir [15] pour plus de détails) :

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i \quad (3.73)$$

Sous forme d'une matrice, ce système s'écrit

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Le calcul se fait de la manière suivante :

- Pour $i=2$, on utilise les équations :

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2}, \quad Q_2 = \frac{d_2 + c_2 \phi_1}{a_2} \quad (3.75)$$

- Pour i variant de 3 à $N-1$, on utilise les équations :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.76)$$

avec $P_N = 0$ et $Q_N = \phi_N$ (où ϕ_N est une condition aux limites).

- La dernière étape détermine les inconnues, pour i variant de $N-1$ à 1, on utilise l'équation : $\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i$

ϕ_1 et ϕ_N sont des valeurs aux limites du domaine.

3.7.2. Application de l'algorithme de THOMAS à des problèmes à 2D (TDMA)

L'algorithme de Thomas (TDMA) peut être appliqué itérativement pour résoudre un problème d'un système d'équations bidimensionnel [9]. Considérons le maillage envisagé dans la figure (3.11) et une équation générale de transport discrétisée sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (3.77)$$

Pour résoudre ce système, l'algorithme de Thomas est appliqué pour une ligne choisie, par exemple la ligne Nord-Sud (N-S). L'équation de transport discrétisée est réarrangée sous la forme :

$$-a_S \phi_S + a_P \phi_P - a_N \phi_N = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (3.78)$$

Le membre droit de l'équation (3.78) est supposé temporairement connu. L'équation (3.78) est de la même forme que l'équation (3.73), avec :

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i$$

$$a_i = -a_S$$

$$b_i = a_P$$

$$c_i = -a_N$$

$$d_i = a_W \phi_W + a_E \phi_E + b$$

(3.79)

On peut maintenant résoudre le système le long de la direction (N-S) de la ligne choisie pour des valeurs $j = 2, 3, 4, \dots, n$ comme indiqué sur la figure (3.11).

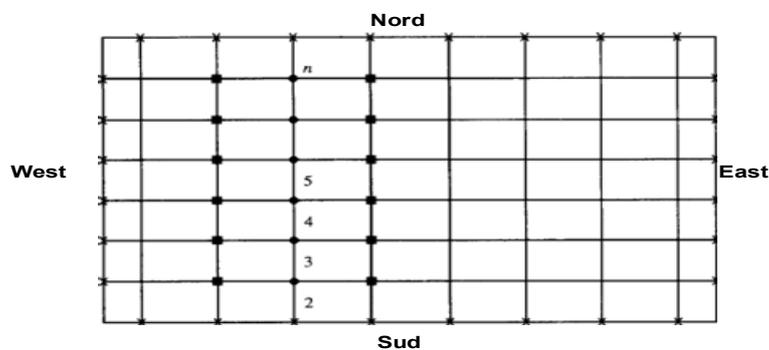


Figure 3.11 : Application ligne par ligne de la méthode TDMA

- Points auxquels les valeurs sont calculées
- Points auxquels les valeurs sont considérées être temporairement connues
- ✕ Valeurs connues à la frontière

A gauche de l'équation (3.78), il n'y a que le système tridiagonal qui peut être résolu efficacement par l'algorithme de Thomas. La solution est d'abord calculée sur la deuxième ligne des volumes de contrôle, on suppose que les valeurs de la première ligne sont connues (valeurs connues à la frontière) et les valeurs de la troisième ligne sont considérées être temporairement connues. Après que le vecteur $[\phi_2]$ ait été calculé avec l'algorithme de Thomas, on passe au vecteur $[\phi_3]$ et on suppose que la deuxième ligne est déjà calculée (à l'itération précédente) et les valeurs de la quatrième ligne sont supposées temporairement connues, puis plus généralement au vecteur $[\phi_j]$ où l'ensemble de la zone de résolution est ainsi balayé.

La procédure de calcul ligne par ligne est répétée jusqu'à atteindre la convergence de la solution.

3.8. CRITERE DE CONVERGENCE

Le critère de convergence utilisé dans SIMPLER est : $\max(\phi_{n+1} - \phi_n) \leq e_\phi$, en balayant toutes les cellules du domaine où n est l'ordre d'itération et ϕ désigne U , V ou θ . Dans la plupart des cas e_u , e_v , e_T sont pris inférieurs à 10^{-5} . Pour la pression et la correction de pression, le test de convergence est réalisé sur la divergence de la vitesse qui doit être inférieure à 10^{-7} . Le régime permanent est supposé atteint lorsque l'écart entre deux variables calculées pour deux pas de temps successifs est inférieur à 10^{-6} .

3.9. CONCLUSION

A travers ce chapitre, nous avons présenté brièvement la méthode des volumes finis appliquée pour des écoulements fluides, et d'une manière générale, les étapes de discrétisation du modèle mathématique. Nous avons également présenté en détails l'algorithme SIMPLE et SIMPLER pour le couplage vitesse-pression. Nous nous sommes intéressés aux schémas CDS, Upwind, Exponentielle, Hybride et le schéma Puissance qui a été utilisé dans cette étude à cause de son efficacité en résultats et temps de calcul. La résolution des équations algébriques par la méthode ligne par ligne (line by line) basée sur l'algorithme de Thomas (TDMA) a été également décrite dans ce chapitre.

Dans les trois Chapitres suivants, nous allons appliquer la méthode qui vient d'être décrite pour traiter les problèmes de la convection naturelle de l'air dans l'approximation faible Mach, le couplage de la convection naturelle dans le cas hors Boussinesq avec le rayonnement et en présence d'un gradient de champ magnétique.

RÉFÉRENCES

- [1] **S. K. Godunov**, A Finite Difference Method for the Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics. *Mat. Sb.*, Vol. 47, pp. 357-393, 1959
- [2] **J. Glimm**, Solution in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations. *Comm. Pure. Appl. Math.*, Vol. 18, pp. 697-715, 1965
- [3] **S.V. Patankar, D.G. Spalding**, Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, 2nd Ed, *Intertext*, London, 1970.
- [4] **S.V. Patankar**, Numerical heat transfer and fluid flow. *Hemisphere, Washington, D.C., U.S.A*, 1980
- [5] **F. H. Harlow, J. E. Welch**, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, Vol. 8, pp. 2182, 1965.
- [6] **C.M. Rhie, W.L. Chow**, Numerical study of turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, Vol. 21(11), pp. 1525-1532, 1983.
- [7] **G.D. Thiart**, Finite difference scheme for the numerical solution of fluid flow and heat transfer problems on non-staggered grids, *Numer. Heat Transfer. Part B.*, Vol. 17, pp. 43-62, 1990.

-
- [8] **D. B. Spalding**, A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.4(4), pp.551-559, 1972.
- [9] **S. V. Patankar**, A calculation procedure for two-dimensionnal elliptic situations. *Numer. Heat Transfer. Part A*, Vol. 14(25), pp. 409, 1981.
- [10] **J. P. Van Doormal, G.D. Raithby**, Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147-163, 1984.
- [11] **R. I. Issa**, Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting”, *Internal Report, Dept. of Min. Resources Engineering*, Imperial College, London, 1982.
- [12] **D. A. Anderson, J. C. Tannehill, R. H. Pletcher** , Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, *Hemisphere Publishing Corporation*, Taylor & Francis Group, New York., pp. 599, 1984.
- [13] **D. S. Jang, R. Jetli, S. Acharya**, Comparison of the piso, simpler, and simplec algorithms for the treatment of the pressure-velocity coupling in steady flow problems, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 19, pp. 209–228, 1986.
- [14] **L.H. Thomas**, Elliptic Problems in Linear Differential Equations over a Network, *Watson Sci. Comput. Lab Report*, Columbia University, New York, 1949.
- [15] **G. D. Smith**, Numerical solution of partial differential equations, *Oxford Univ. Press*, London, 1969.

Chapitre 4

Convection naturelle en écoulement hors-Boussinesq

4.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la validation du code de calcul développé pour la simulation numérique de la convection naturelle à faible nombre de Mach, à l'étude des conditions de validité de l'approximation Boussinesq et à la présentation des résultats de simulation de la convection naturelle hors Boussinesq d'un fluide (air) confiné dans une cavité carrée différentiellement chauffée, pour de faibles ($\Delta T = 10 K$) et larges ($\Delta T = 360 K$) gradients thermiques. L'effet de grande différence de température entre les deux parois verticales ainsi que la variation des propriétés physiques du fluide sur le régime thermique et hydrodynamique de l'écoulement sera examiné et analysé en comparant les résultats obtenus avec ceux de obtenus pour le cas faible ΔT .

4.2. CONFIGURATION PHYSIQUE

Le modèle physique considéré est présenté sur la figure 4.1. Il s'agit d'une cavité carrée, de côté H , contenant de l'air, supposé compressible soumis à un champ de pesanteur $\vec{g} = (0, -g)$. Les parois verticales sont maintenues isothermes à des températures différentes afin d'assurer un gradient de température horizontal qui est à l'origine de l'écoulement de base. La paroi de droite est à une température T_F et celle de gauche à une température T_C , avec $T_C > T_F$. Les parois horizontales sont, quant à elles, considérées comme adiabatiques. Dans le système de coordonnées cartésiennes utilisé, l'axe des y est vertical et l'axe des x est horizontal.

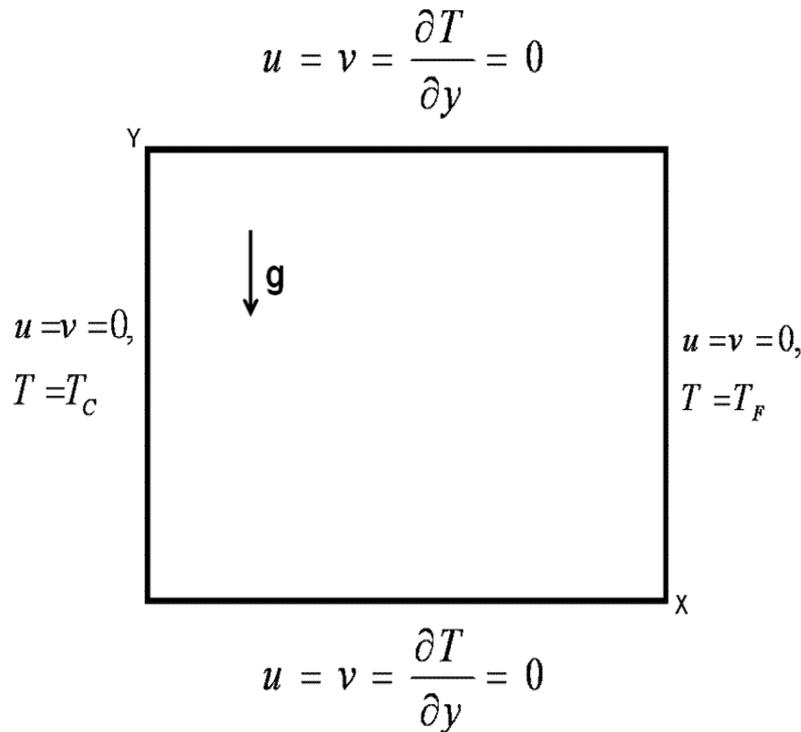


Figure 4.1 : Géométrie physique et conditions aux limites

4.3. ÉQUATIONS DE MOUVEMENT

On considère que le fluide est compressible et obéit à une équation d'état (loi des gaz parfaits), qu'il est à la fois visqueux, newtonien et conducteur de la chaleur. Le système d'équations de conservation décrivant l'évolution bidimensionnelle de la configuration donnée dans le paragraphe précédent est celui d'un écoulement à faible nombre de Mach, détaillé au chapitre 2, (Eq.2.71-2.75).

4.3.1. Conditions initiales et conditions aux limites

Des conditions aux limites sont indispensables pour résoudre le système d'équations de bilan, les conditions initiales et aux limites reproduisant le modèle physique décrit à la figure 4.1 s'expriment comme suit :

Les conditions initiales imposées $\forall (x, y) \in [0, H]^2$ sont :

$$T(x, y) = T_0 \quad (4.1)$$

$$\rho(x, y) = \rho_0 \quad (4.2)$$

$$\bar{p}(t = 0) = p_0 \quad (4.3)$$

$$u(x, y) = v(x, y) = 0 \quad (4.4)$$

Les conditions aux limites appliquées $\forall t > 0$ sont:

$$u = v = 0, \quad T = T_C \quad \text{pour } 0 \leq y \leq H \text{ et } x = 0 \quad (4.5)$$

$$u = v = 0, \quad T = T_F \quad \text{pour } 0 \leq y \leq H \text{ et } x = H \quad (4.6)$$

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq H \text{ et } y = 0 \quad (4.7)$$

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq H \text{ et } y = H \quad (4.8)$$

4.3.2. Conditions aux limites adimensionnées

Les conditions aux limites adimensionnelles correspondantes sont donc données par :

$$U = V = 0, \quad \theta = \theta_i \quad \text{pour } \tau = 0 \quad (4.9)$$

$$U = V = 0, \quad \theta = \theta_C = 0.5 \quad \text{pour } 0 \leq Y \leq 1 \text{ et } X = 0 \quad (4.10)$$

$$U = V = 0, \quad \theta = \theta_F = -0.5 \quad \text{pour } 0 \leq Y \leq 1 \text{ et } X = 1 \quad (4.11)$$

$$U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ et } Y = 0 \quad (4.12)$$

$$U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ et } Y = 1 \quad (4.13)$$

4.3.3. Paramètres adimensionnels

L'ensemble des équations de conservation, les expressions de la pression thermodynamique et de la masse volumique et les conditions initiales et aux limites font apparaître les nombres sans dimension suivants :

Nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T H^3}{\nu \alpha} \quad (4.14)$$

Nombre de Prandtl :

$$Pr = \nu / \alpha \quad (4.15)$$

Rapport des capacités thermiques :

$$\gamma = \frac{c_{p0}}{c_{v0}} \quad (4.16)$$

Paramètre de Boussinesq :

$$\varepsilon_b = \Delta T / 2T_0 \quad (4.17)$$

4.4. VALIDATION

La validation du code numérique porte sur un écoulement de convection naturelle dans une cavité de section carrée et différentiellement chauffée lorsque les écarts de température ne permettent plus de justifier l'hypothèse de Boussinesq. Ce problème a fait l'objet d'un test de comparaison et des solutions, qu'on peut considérer comme précises, et qui sont disponibles en littérature [1,2].

Pour les deux valeurs du nombre de Rayleigh considérées ($Ra = 10^6, 10^7$), et pour une différence de température $\Delta T = 720 \text{ K}$ avec une température de référence $T_0 = 600 \text{ K}$ ($\varepsilon_b = 0.6$), des calculs ont été effectués pour l'air ($Pr = 0.71$), d'abord en supposant que la conductivité thermique et la viscosité dynamique étaient constantes puis en tenant compte de leurs variations avec la température suivant la loi de Sutherland.

Les paramètres des trois cas étudiés sont reportés dans le tableau 4.1. On constate un très bon accord entre nos résultats numériques et ceux obtenus par [1,2].

Tableau 4.1: Cas testés. Air Benchmark [1,2]

	Heuveline [1]	Vierendeels [2]	Présent travail			
Type maillage	400 000	2048× 2048	300× 300	360×360 (raffiné)	360×360 (très raffiné)	300×120 (très raffiné)
1er cas de test ($Ra = 10^6$, $\varepsilon_b = 0.6$ et propriétés constantes)						
Nu(C)	8.859778	8.85978	8.85847	8.8571	8,85588	8,8454
Nu(F)	8.85978	8.85978	8.85847	8.8570	8,85599	8,84572
\bar{p}/p_0	0.85634	0.856340	0.85584	0.8560	0.85599	0.85580
2ème cas de test ($Ra = 10^6$, $\varepsilon_b = 0.6$ et propriétés variables selon la loi de Sutherland)						
Nu(C)	8.6889	8.6866	8.70078	8.69559	8.69355	8,68631
Nu(F)	8.6831	8.6866	8.70057	8.69166	8.69006	8,68683
\bar{p}/p_0	0.9249	0.924489	0.92498	0.92482	0.92495	0.92274
3ème cas de test ($Ra = 10^7$, $\varepsilon_b = 0.6$ et propriétés variables selon la loi de Sutherland)						
Nu(C)	16.242	16.2410	16.3329	16.2923	16.2742	16,2459
Nu(F)	16.224	16.2410	16.3311	16.2906	16.2737	16,2445
\bar{p}/p_0	0.923	0.92264	0.91600	0.9191	0.9200	0.92082

Pour terminer la validation du code de calcul, nous avons aussi étudié l'effet du maillage sur la solution numérique qui représente une étude indispensable pour n'importe quel travail de modélisation. Les temps de calcul deviennent de plus en plus longs avec l'augmentation du nombre de cellules de maillage. Cela est normal car le solveur aura plus de valeurs à déterminer. C'est la nécessité d'utiliser un maillage optimisé afin d'obtenir, d'une part, un temps de calcul relativement court et d'autre part une bonne précision sur la mesure.

Pour analyser cet effet, on travaillera avec le schéma puissance car il donne des résultats plus précis avec un temps de calcul court, on va analyser différents maillages raffinés au niveau des zones de plus grands gradients, c.-à-d., au niveau des parois actives et horizontales : 360×360 raffiné, 440×440 raffiné, et 300×120 très raffiné au niveau des parois actives (voir figure 4.2 et tableau 4.1), et c'est ce maillage 300×120 (figure 4.2), qu'on utilisera dans la suite des simulations numériques.

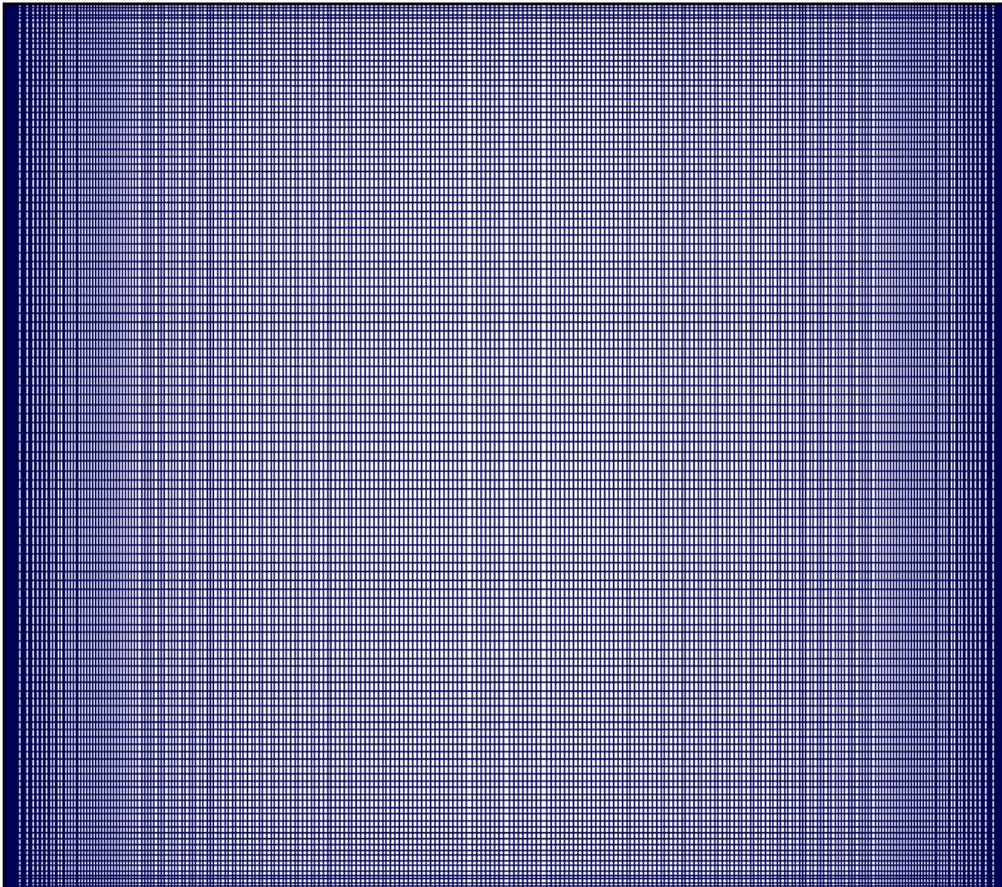


Figure 4.2 : Maillage utilisé

4.5. RESULTATS ET INTERPRETATIONS

On se propose dans cette partie d'utiliser le code de calcul développé, pour étudier numériquement la convection naturelle dans une cavité carré différentiellement chauffée remplie d'air dans l'approximation faible nombre de Mach. L'étude aborde dans une première section, le domaine de validité de l'approximation de Boussinesq. On reste toujours à des vitesses d'écoulement très faibles devant la célérité de son et on fait varier le gradient de température imposé entre les deux parois actives. Dans une deuxième section, on aborde l'effet combiné d'un large gradient de température et des propriétés thermophysiques variables sur le régime dynamique et thermique des mouvements convectifs.

4.5.1 Limite du modèle de Boussinesq

Il est souvent supposé d'une manière implicite que l'hypothèse de Boussinesq est une approximation, c'est-à-dire une relation qui aurait un fondement théorique, et qui deviendrait exacte à la limite des faibles gradients. Nous considérons cette question ici. Tout d'abord nous définissons un indicateur $\Delta(\rho^*, k^*, \mu^*)$ qui caractérise directement la validité de l'hypothèse de Boussinesq, défini par le taux de variation des propriétés thermophysiques du fluide (ρ^*, k^*, μ^*) par rapport à leurs valeurs moyennes (c-à-d, les valeurs de références). Ensuite,

nous appliquons cet indicateur sur l'écoulement à faible nombre de Mach, puis l'appliquons à un écoulement de Boussinesq, pour tester cette hypothèse dans la limite des faibles gradients.

On se propose de calculer avec précision la valeur extrême de la différence de température ΔT à laquelle le modèle de Boussinesq reste toujours valable. Dans la référence [3], les auteurs ont supposé que l'hypothèse de Boussinesq reste valable pour une variation des propriétés thermophysiques (ρ^* , μ^* et k^*) ne dépassant pas 10% par rapport aux valeurs considérées à la température de référence. Dans notre cas, on choisit un nombre de Rayleigh égal à 10^6 , et on fait varier le paramètre de Boussinesq ε_b d'une valeur de $\varepsilon_b = 0.017$ à $\varepsilon_b = 0.083$, ce qui correspond à une différence de température variant de $\Delta T = 5K$ à $\Delta T = 50K$.

La figure 4.3, représente les profils du taux de variation des propriétés thermophysiques (ρ^* , μ^* et k^*) en pourcentage. On remarque d'après cette figure pour un taux de variation des propriétés thermophysiques allant jusqu'à 10 % [3] (limite du modèle de Boussinesq), l'écart de température correspondant est égal à 30K pour la densité et allant jusqu'à 40 K pour la conductivité et la viscosité. Cette différence en valeurs de ΔT pour ρ^* d'un côté et pour μ^* et k^* d'un autre côté, se traduit par le fait qu'à une température donnée, ρ^* évolue plus rapidement en fonction de ΔT que la conductivité k^* et la viscosité μ^* , (Fig. 4.4).

Pour la symétrie de la solution, les figures 4.5 et 4.6 présentent la variation des valeurs maximale et minimale des vitesses horizontale et verticale respectivement en fonction de ΔT . Ces variations sont identiques dans le cas du modèle de Boussinesq en raison de la symétrie de l'écoulement. On remarque qu'à partir d'une différence de température $\Delta T = 20k$ la vitesse horizontale perd sa symétrie assez rapidement en comparaison avec la vitesse verticale, qui ne subit pas un grand changement même pour de larges différences de température allant jusqu'à $\Delta T = 40K$.

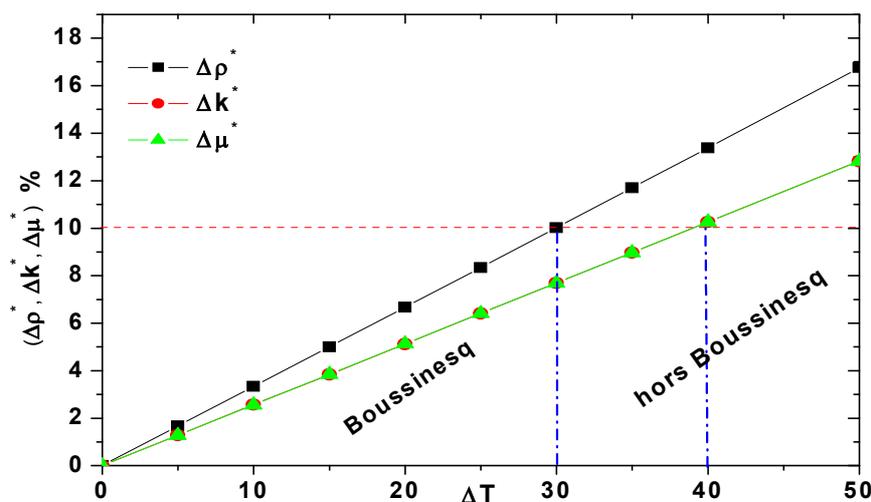


Figure 4.3 : Taux de variation de ρ^* , μ^* et k^* en fonction de ΔT

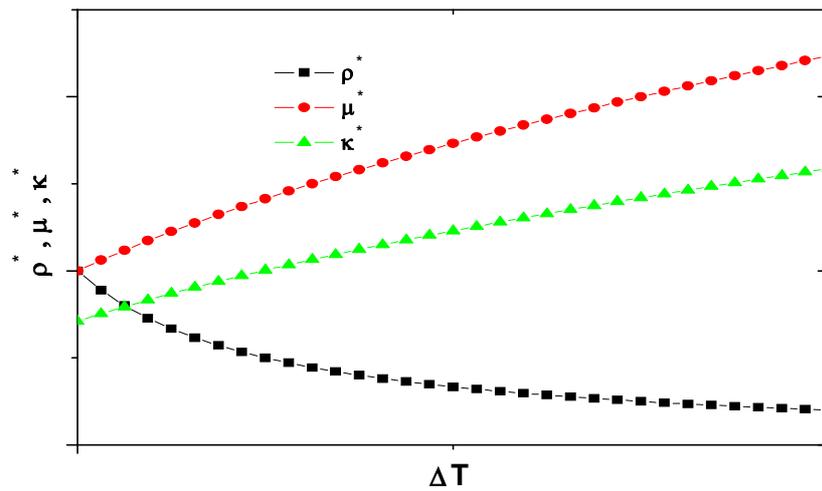


Figure 4.4 : Variation de ρ^* , μ^* et k^* en fonction de ΔT .

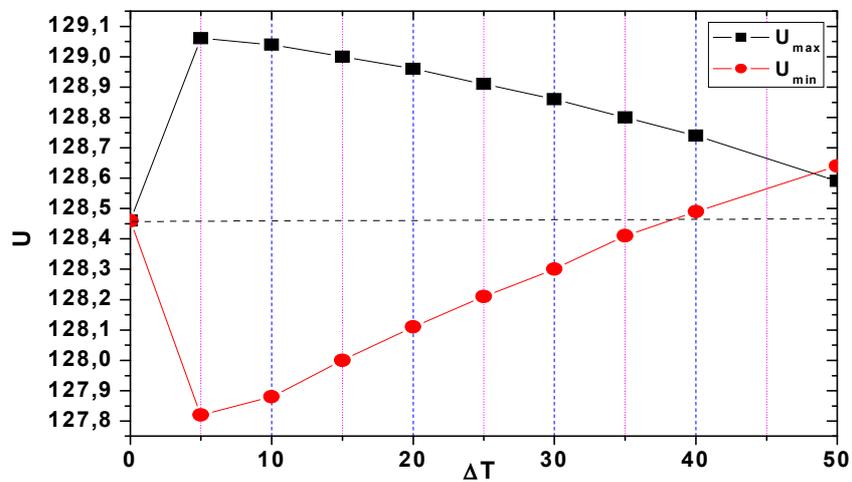


Figure 4.5 : Vitesses horizontale maximale et minimale en fonction de ΔT .

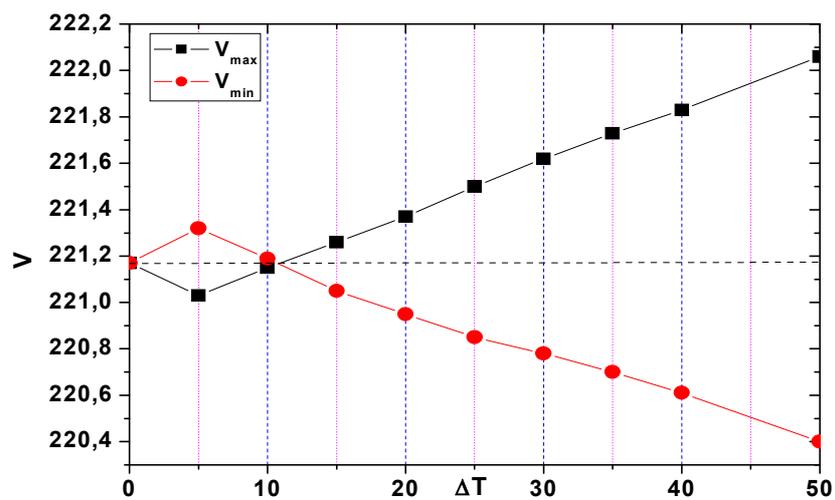


Figure 4.6 : Vitesses verticale maximale et minimale en fonction de ΔT .

Pour $\Delta T \leq 30K$, les champs dynamiques et thermiques présentés en termes de lignes de courant et isothermes (Fig. 4.7), les isovaleurs de la vitesse horizontale et verticale (Fig. 4.8), profils de vitesses horizontale et verticale (Figures 4.9 et 4.10) dans le plan médian vertical et horizontal respectivement de la cavité, ainsi que les profils de température dans le plan médian vertical (Fig. 4.11) et horizontal (Fig. 4.12) et la distribution de température aux parois supérieure et inférieure de la cavité (Fig. 4.13); sont symétriques par rapport à $(x=0.5, y=0.5)$ à cause de la symétrie des conditions aux limites, et la solution est toujours stable et se confond avec la solution de Boussinesq.

En terme d'échange de chaleur, la distribution du nombre de Nusselt local au niveau de la paroi chaude pour le cas LMN se confond avec le cas Boussinesq.

En outre, la variation du nombre de Nusselt moyen à la paroi chaude correspondant à une différence de température de $30K$ est de 0.02% par rapport à la valeur obtenue par l'approximation de Boussinesq (Fig.4. 15).

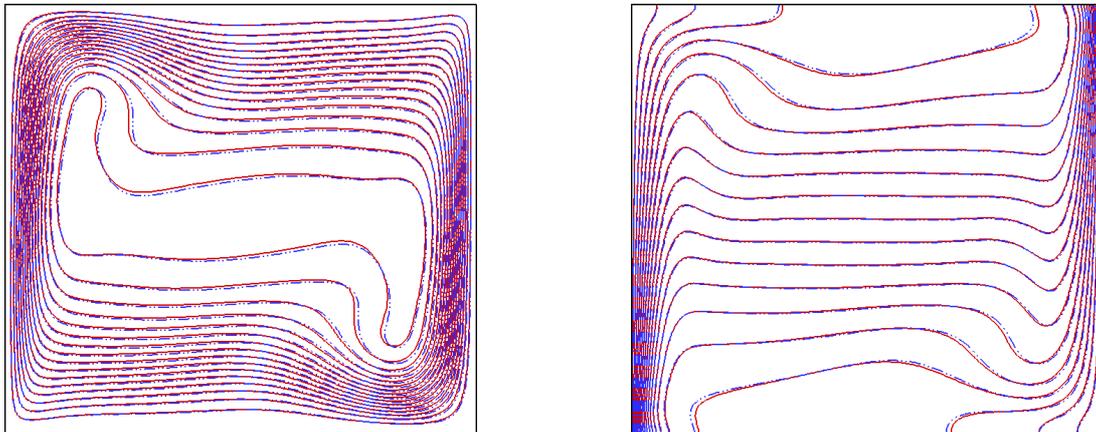


Figure 4.7 : Lignes de courant (gauche) et isothermes (droite) pour le modèle Boussinesq (ligne continue) et le modèle LMN à $\Delta T = 30K$ (ligne discontinue).

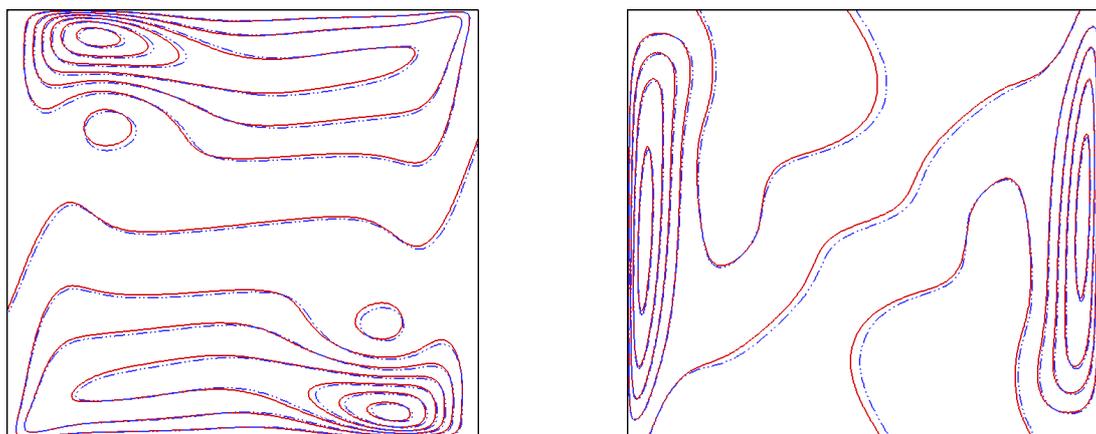


Figure 4.8 : Isovitesses horizontale (gauche) et verticale (droite) pour le modèle Boussinesq (ligne continue) et le modèle LMN à $\Delta T = 30K$ (ligne discontinue).

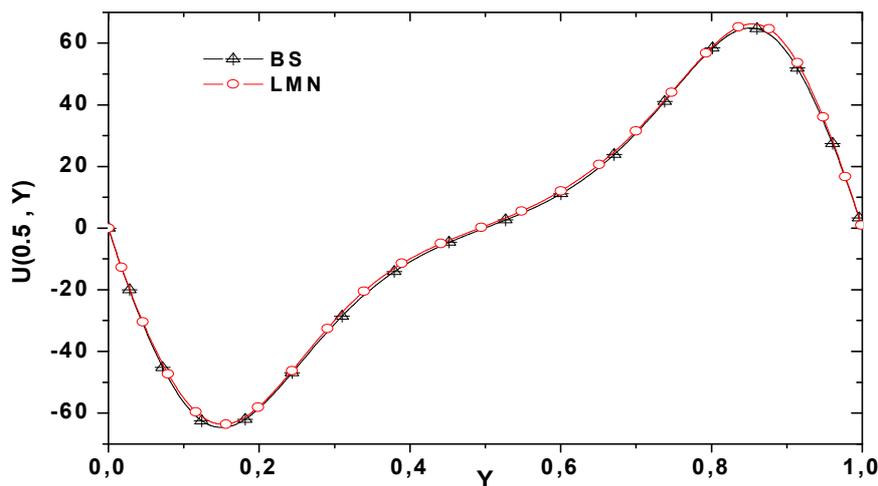


Figure 4.9 : Profils des vitesses horizontales dans le plan médian vertical de la cavité ($X = 0.5$), pour les cas Boussinesq et LMN à $\Delta T = 30K$ pour $Ra = 10^6$

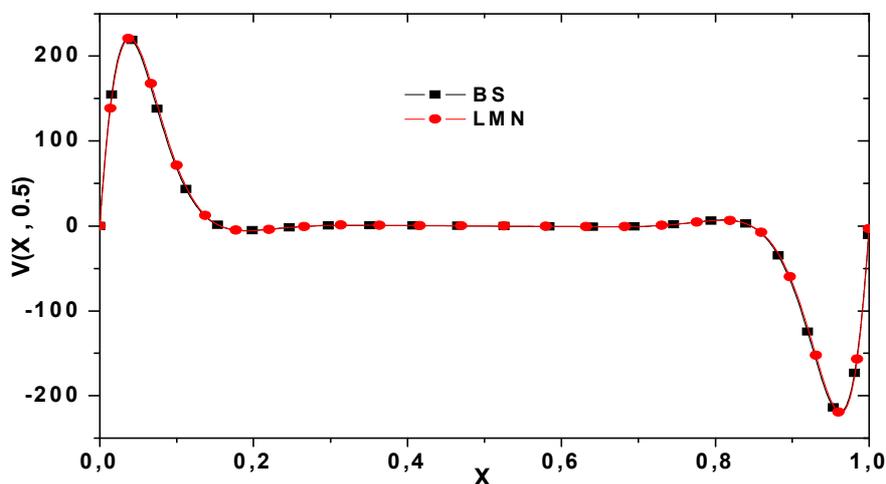


Figure 4.10 : Profils des vitesses verticales dans le plan médian horizontal de la cavité ($Y = 0.5$), pour les cas Boussinesq et LMN à $\Delta T = 30K$ pour $Ra = 10^6$

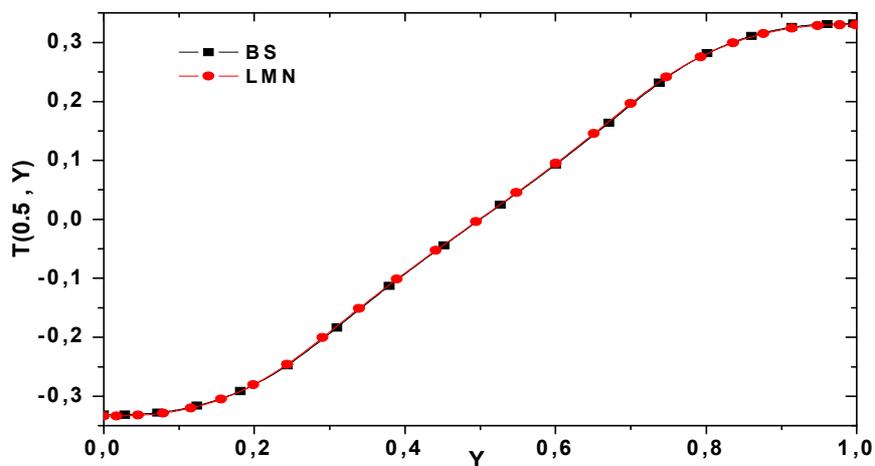


Figure 4.11 : Profils de la température sur le plan médian vertical de la cavité ($X = 0.5$), pour les cas Boussinesq et LMN à $\Delta T = 30K$ pour $Ra = 10^6$

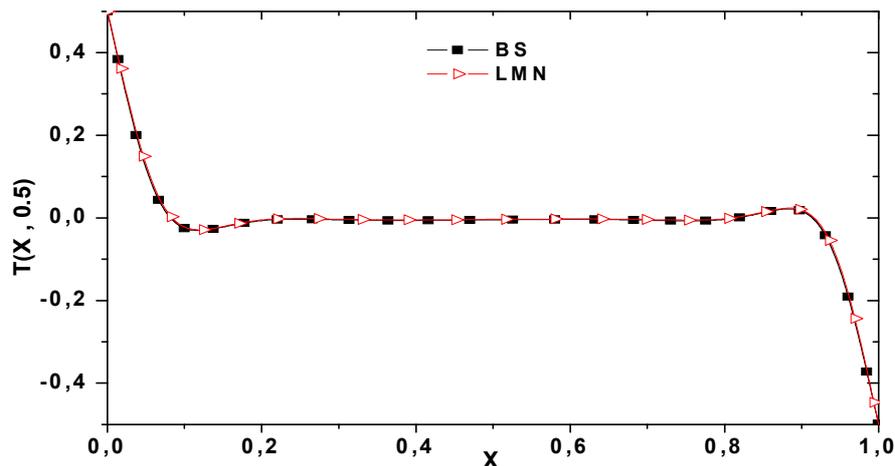


Figure 4.12 : Distribution de la température sur le plan médian horizontal de la cavité ($Y = 0.5$), pour les cas Boussinesq et LMN à $\Delta T = 30K$ pour $Ra = 10^6$

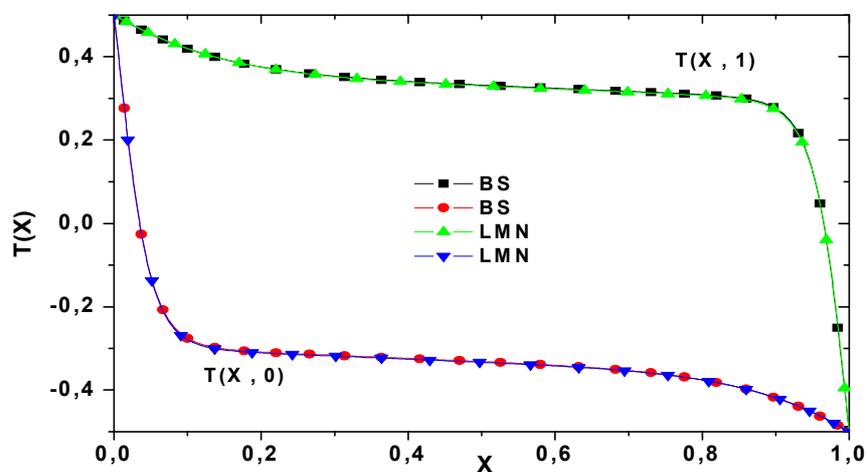


Figure 4.13 : Distribution de la température aux parois adiabatiques supérieure et inférieure pour les cas Boussinesq et LMN à $\Delta T = 30K$ pour $Ra = 10^6$

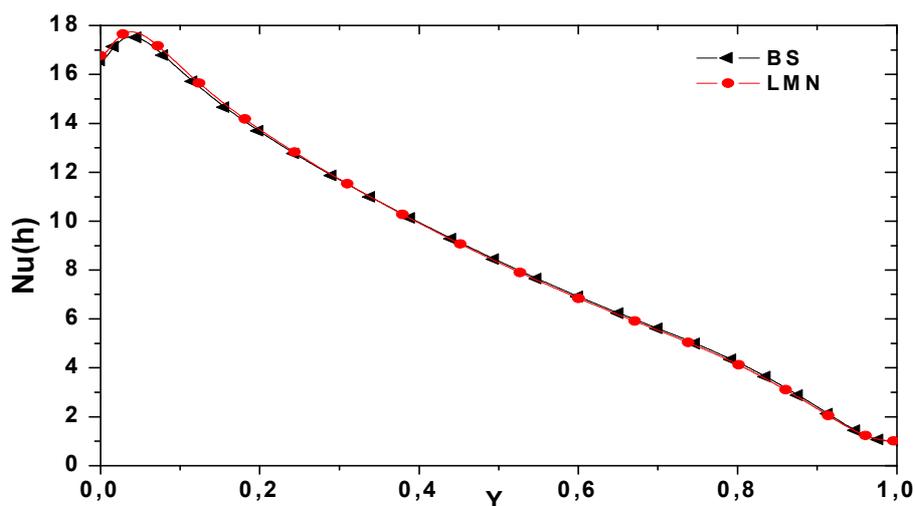


Figure 4.14 : Profils du nombre Nusselt convectif à la paroi chaude pour les cas Boussinesq et LMN à $\Delta T = 30K$ pour $Ra = 10^6$

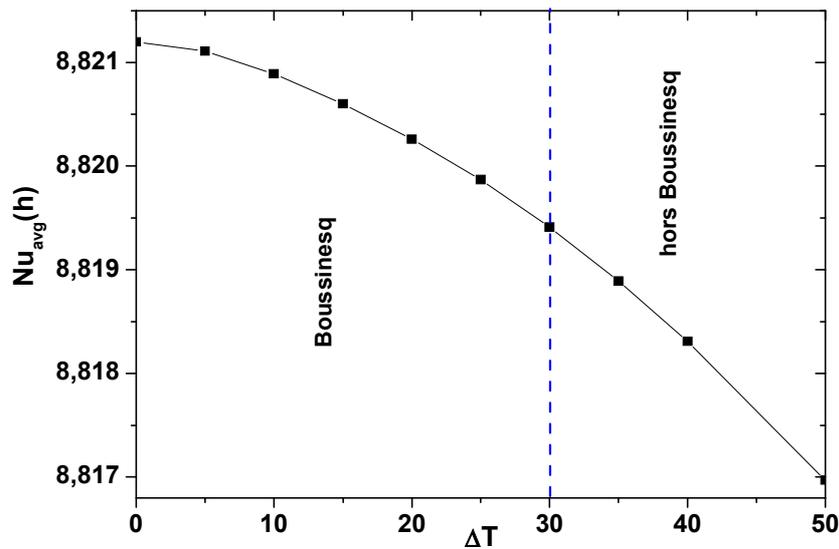


Figure 4.15 : Nombre de Nusselt moyen à la paroi chaude en fonction de ΔT pour $Ra = 10^6$.

4.5.2. Effet combiné de la différence de température et de la variation des propriétés physiques

Cette partie est consacrée à l'étude de l'effet du gradient thermique ΔT et de la variation des propriétés thermophysiques du fluide (μ^*, k^*) sur le régime thermique et dynamique de l'écoulement convectif se produisant dans la cavité, en comparant le cas de large gradient ($\Delta T = 360K$) au cas de faible gradient de température ($\Delta T = 10K$) pour un nombre de Rayleigh compris entre 10^4 et 10^7 . L'ensemble des résultats sont présentés sous forme de lignes de courant et d'isothermes, de profils du nombre de Nusselt local convectif au niveau des parois actives, de distribution de température aux parois adiabatiques dans les plans médians horizontal et vertical, et de distribution de vitesses horizontale et verticale dans les plans médians vertical et horizontal respectivement.

En faisant varier le nombre de Rayleigh Ra de 10^4 à 10^7 , le fait le plus marquant dans les résultats numériques est la dissymétrie de l'écoulement lorsqu'on passe du cas de faible gradient thermique ($\Delta T = 10 K$) qui correspond au modèle de Boussinesq au cas de large gradient thermique ($\Delta T = 360 K$) et ce pour des propriétés thermophysiques constantes et variables.

Pour des propriétés physiques μ^*, k^* constantes, le seul paramètre influent est la densité. Les figures 4.16 et 4.17 représentent les lignes de courant et les isothermes dans la cavité lorsque le régime stationnaire est atteint, pour différentes valeurs de Ra et pour les deux cas faible et large gradients thermiques. La différence évidente entre les deux solutions est la dissymétrie des lignes de courant observée dans le cas de large gradient thermique. La dissymétrie de la solution compressible est un résultat direct de la détente du gaz (diminution de la densité) le long de la paroi chaude et la contraction (augmentation de la densité) du gaz le long de la paroi froide, du fait que la densité varie de manière inversement proportionnelle à la température. Contrairement au cas de faible ΔT où la variation de la densité est très faible

imposant un écoulement à divergence nulle (pas d'expansion ou de contraction, dilatation ou compression), la solution est alors symétrique.

Pour les isothermes, qualitativement, les deux solutions (faible et large ΔT) semblent être très similaires. Ceci est prévisible, car les termes de la conduction de la chaleur dans les deux cas sont les mêmes (k^* constante).

Pour des propriétés variables, et en raison du large gradient thermique le centre des cellules de recirculation se déplacent vers la coté froid de la cavité provoquant un fort gradient de vitesses et de température près de la paroi froide. Les isothermes se renforcent et deviennent très serrées particulièrement au niveau de la partie supérieure de la paroi froide et de la partie inférieure de la paroi chaude. Cet effet est plus remarquable pour un nombre de Rayleigh élevé.

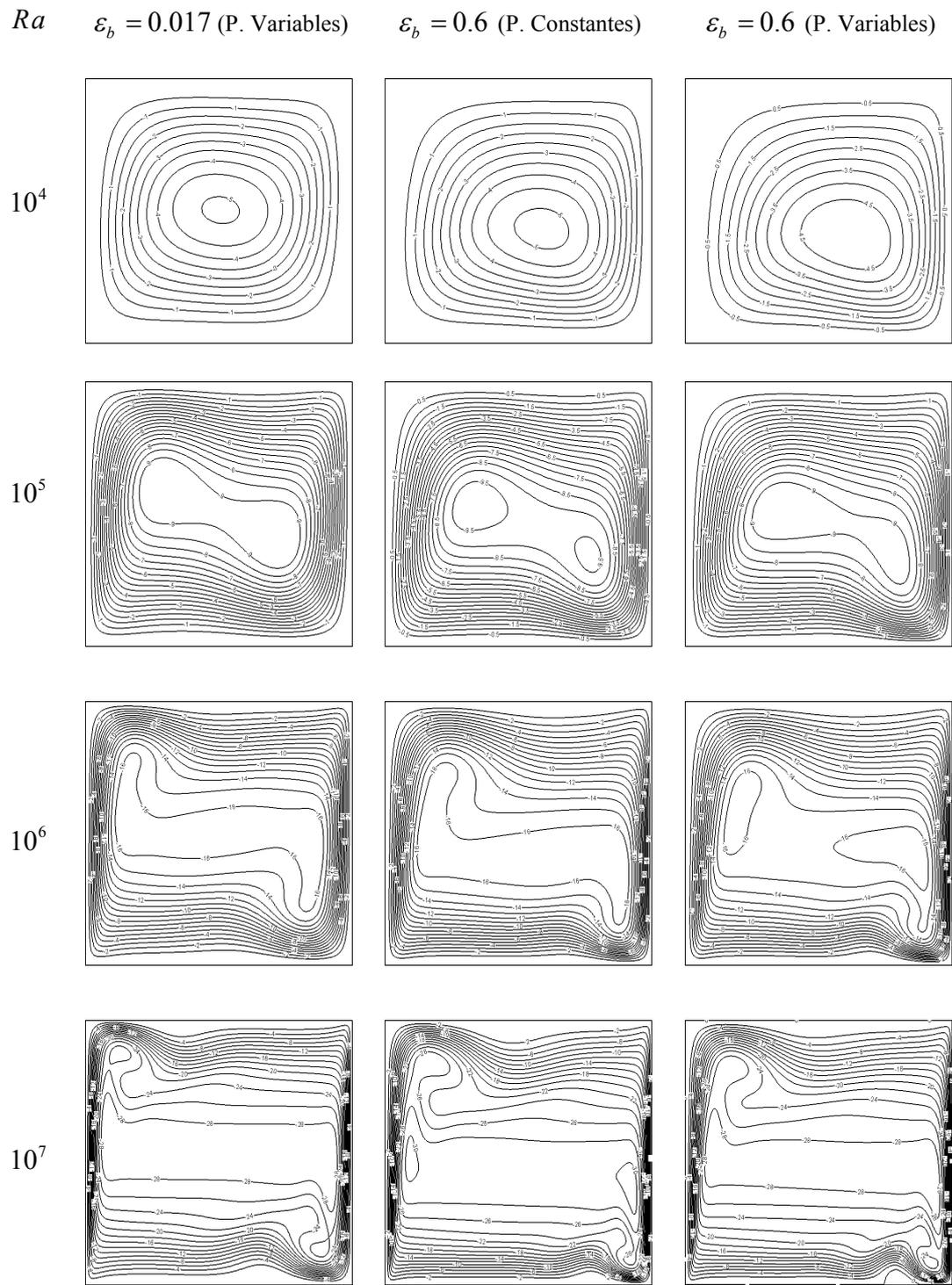


Figure 4.16 : Lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

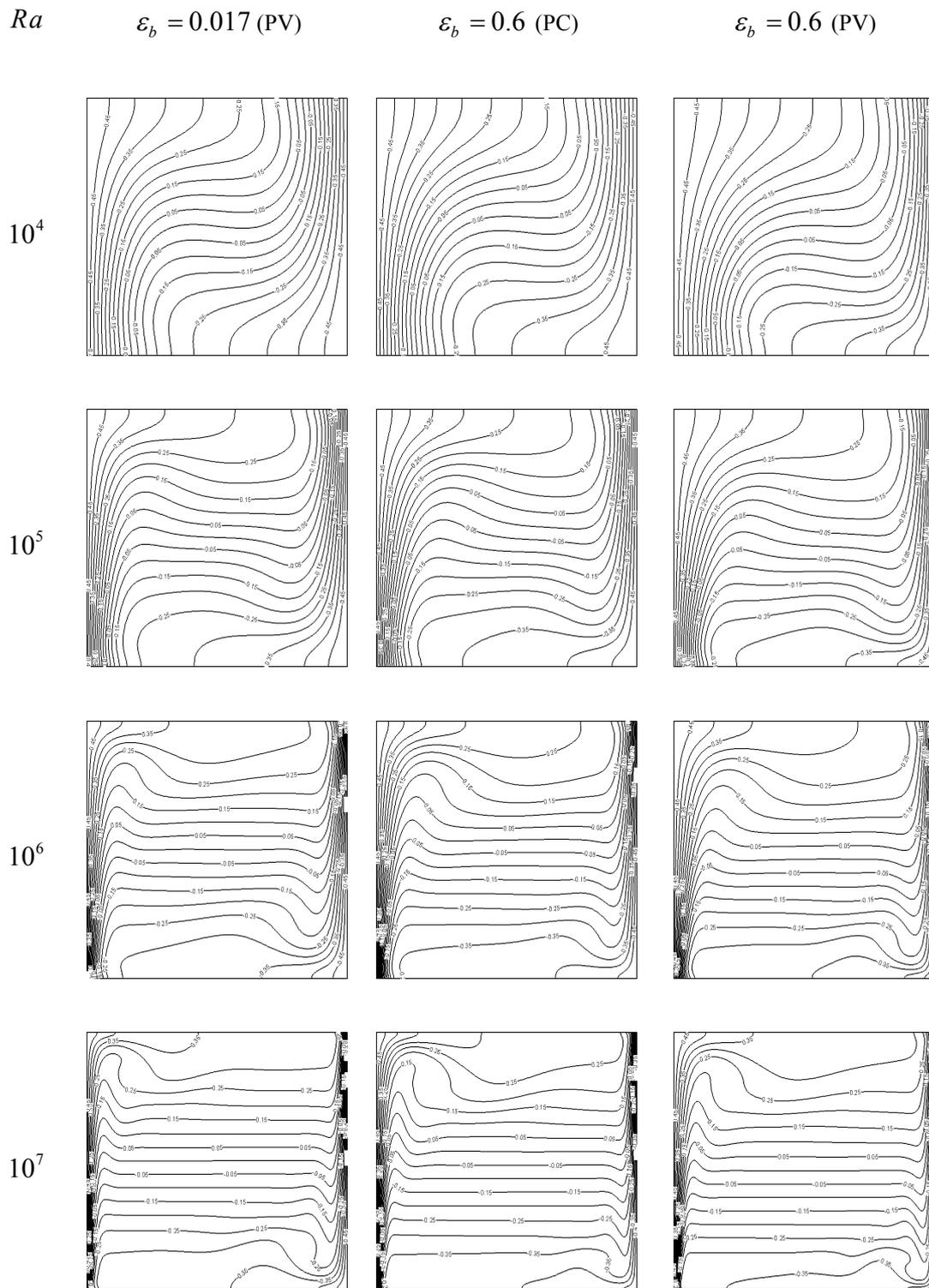


Figure 4.17 : Isothermes pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

Tableau 4.2 : Paramètres thermiques et dynamiques à différentes valeurs de Ra .

	Propriétés constantes			Propriétés variables	
	BS	LMN, $\varepsilon_b = 0.017$	LMN, $\varepsilon_b = 0.6$	LMN, $\varepsilon_b = 0.017$	LMN, $\varepsilon_b = 0.6$
$Ra = 10^4$					
$Nu_{avg}(h)$	2,24348	2,24211	2,22872	2,24281	2,22351
$Nu_{avg}(c)$	2,24348	2,24333	2,25653	2,24257	2,197
\bar{P}/P_0		0.99988	0.84493	0.99993	0.92604
ψ_{max}	5.081	5.082	5.187	5.082	4.996
$Ra = 10^5$					
$Nu_{avg}(h)$	4,52056	4,51961	4,54307	4,52015	4,4665
$Nu_{avg}(c)$	4,52055	4,52	4,54497	4,51943	4,45863
\bar{P}/P_0		0.99987	0.85092	0.99992	0.93318
ψ_{max}	9.624	9.6257	9.842	9.625	9.527
$Ra = 10^6$					
$Nu_{avg}(h)$	8,8212	8,82079	8,84459	8,82087	8,64992
$Nu_{avg}(c)$	8,82108	8,82107	8,84672	8,82075	8,64888
\bar{P}/P_0		0.99987	0.85573	0.99993	0.93464
ψ_{max}	16.844	16.859	17.178	16.861	16.748
$Ra = 10^7$					
$Nu_{avg}(h)$	16,50351	16,50283	16,56988	16,50259	16,18396
$Nu_{avg}(c)$	16,50325	16,50364	16,5723	16,50339	16,18851
\bar{P}/P_0		0.99988	0.85714	0.99993	0.93151
ψ_{max}	30.302	30.335	30.842	30.336	29.939

Tableau 4.3 : Pression thermodynamique moyenne à différentes valeurs de Ra . Cas de faible et de larges gradients thermiques.

\bar{p}/p_0	P. Constantes	P. Variables	P. Constantes	P. Variables
Ra	$\varepsilon_b = 0.05$		$\varepsilon_b = 0.6$	
10^3	0.99991	0.99995	0.86291	0.93944
10^4	0.99988	0.99993	0.84493	0.92604
10^5	0.99987	0.99992	0.85092	0.93318
10^6	0.99987	0.99993	0.85573	0.93464
10^7	0.99988	0.99993	0.85714	0.93151

Parmi les résultats obtenus en termes d'échange thermique au niveau des parois actives, on présente la figure 4.18 illustrant la comparaison de la distribution du nombre de Nusselt aux

parois chaude et froide pour les deux cas de faible et large gradients thermiques. Un écart significatif est observé entre les deux cas (voir Tableau 4.2). Dans le cas de large ΔT les profils perdent leur symétrie par rapport à $Y=0.5$.

L'asymétrie est due à la variation non-linéaire de la densité qui provoque une dilatation du gaz près de la paroi chaude avec une accélération de l'écoulement ascendant et une contraction près de la paroi froide. On remarque cet effet sur la figure 4.18 où le flux de chaleur au niveau de la paroi chaude est plus grand que celui de la paroi froide pour le cas de large ΔT . Le pic du nombre de Nusselt (Nu_{max}) à la paroi chaude est plus grand pour le cas de large ΔT et présente une valeur minimale plus faible que celle observée sur la paroi froide. L'écart entre les maximums de Nusselt augmente avec le nombre de Rayleigh et s'accroît davantage si les propriétés physiques sont variables. Ce constat est prévisible, car la conductivité thermique varie proportionnellement avec la température. Cet écart se traduit par la perte de la centro-symétrie du champ de température liée aux effets de compressibilité. Pour $Ra \geq 10^6$, les valeurs minimales du nombre de Nusselt aux parois actives (Nu_{min}) sont presque les mêmes.

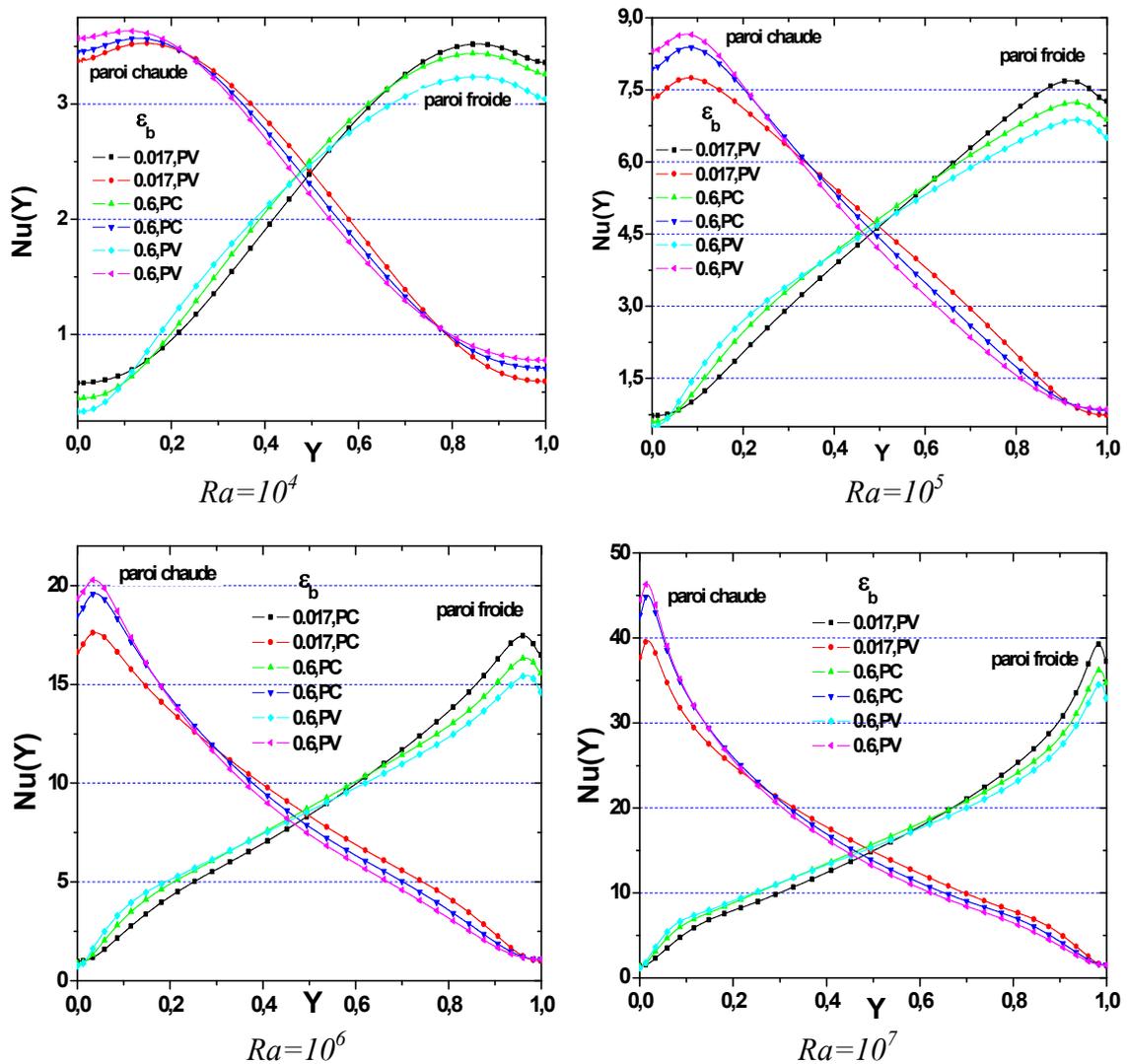


Figure 4.18 : Profils du nombre de Nusselt local aux parois actives.

Comparé au cas de faible ΔT , la distribution de température sur le plan médian horizontal illustrée sur la figure 4.19 montre que pour le cas de large gradient thermique avec λ, k variables, la couche limite thermique près des parois actives présente un maximum et une petite épaisseur près de la paroi chaude et un minimum et une grande épaisseur près de la paroi froide contrairement au cas où λ, k sont constantes. Ceci se traduit par le déplacement des couches limites verticales vers la paroi chaude et vers l'écoulement extérieur, montrant un gradient thermique important du côté de la paroi froide contrairement à ce qui se passe du côté la paroi chaude. Cet écart en valeurs minimale et maximale de la couche limite augmente en intensité et diminue en épaisseur avec l'augmentation de Ra . Loin de la couche limite (dans l'écoulement libre), la distribution de la température montre un refroidissement dans le milieu de la cavité pour des propriétés constantes et un réchauffement pour des propriétés variables.

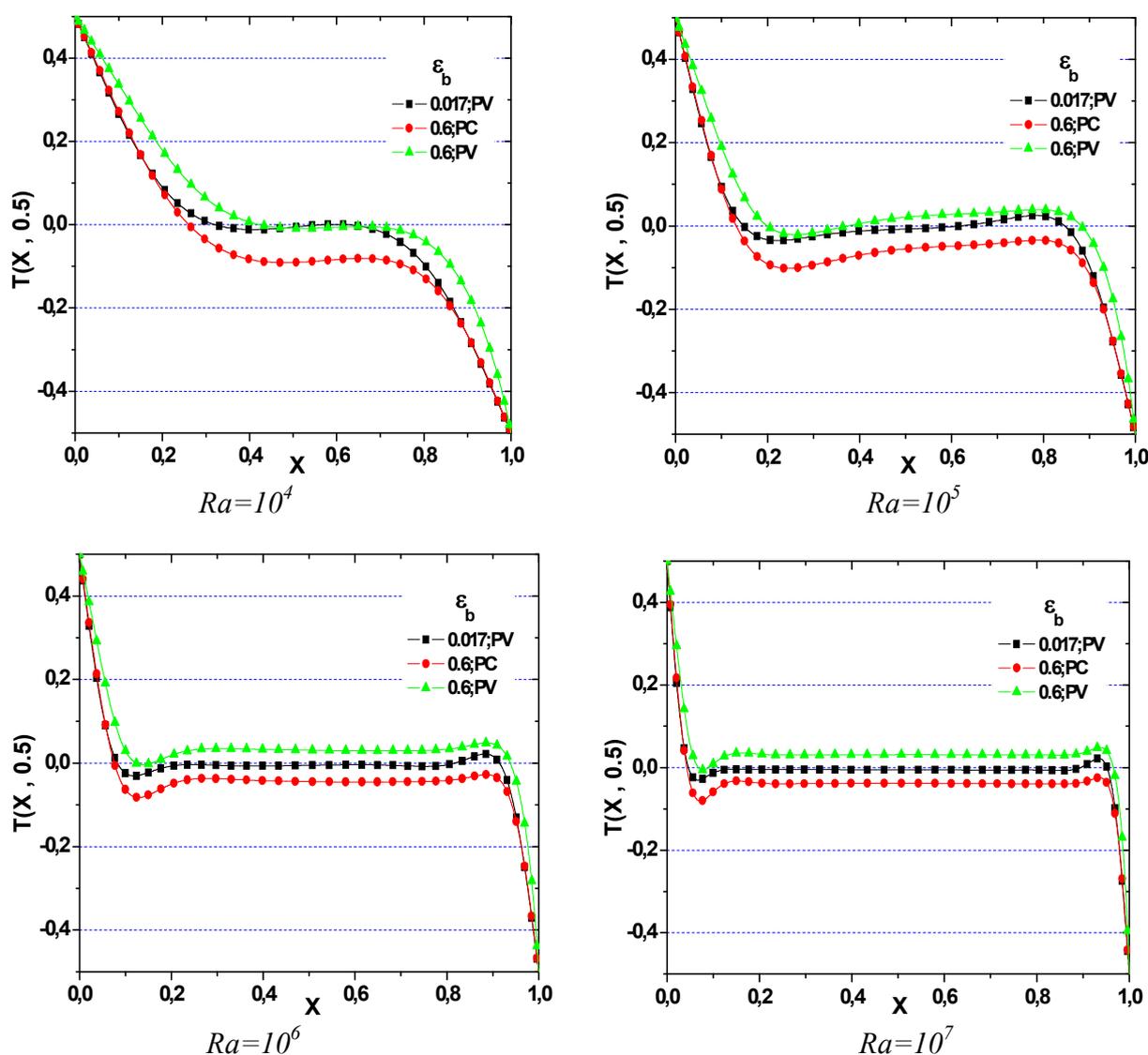


Figure 4.19 : Distribution de la température sur le plan médian horizontal de la cavité ($Y = 0.5$).

Concernant la couche limite dynamique, pour de large ΔT , le pic (maximum) de la couche limite horizontale, (Fig. 4.20), est plus grand près de la paroi supérieure et plus faible près de la paroi inférieure. L'écart en intensité devient de plus en plus important au fur et à mesure que Rayleigh augmente. Pour un nombre de $Ra \leq 10^6$, une augmentation est remarquée sur l'épaisseur de la couche limite dynamique près de la paroi supérieure, et devient plus importante pour de grandes valeurs de Rayleigh ($Ra = 10^7$), traduisant ainsi un déplacement de la couche limite vers le centre de la cavité. Par opposition, l'épaisseur près de la paroi inférieure est plus petite et tend à se déplacer vers la paroi quand Ra augmente.

Pour des propriétés physiques thermo-dépendantes, la couche limite près de la paroi inférieure ne subit pas un grand changement par rapport au cas de propriétés constantes, contrairement à la couche limite supérieure qui présente un écart assez important entre les pics. Ce résultat est prévisible car la zone proche de la paroi supérieure reçoit des courants chauds aidant à augmenter la viscosité dynamique qui s'accroît avec la température. Loin des deux couches limites, l'écoulement est accéléré dans les deux cas (propriétés constantes et variables).

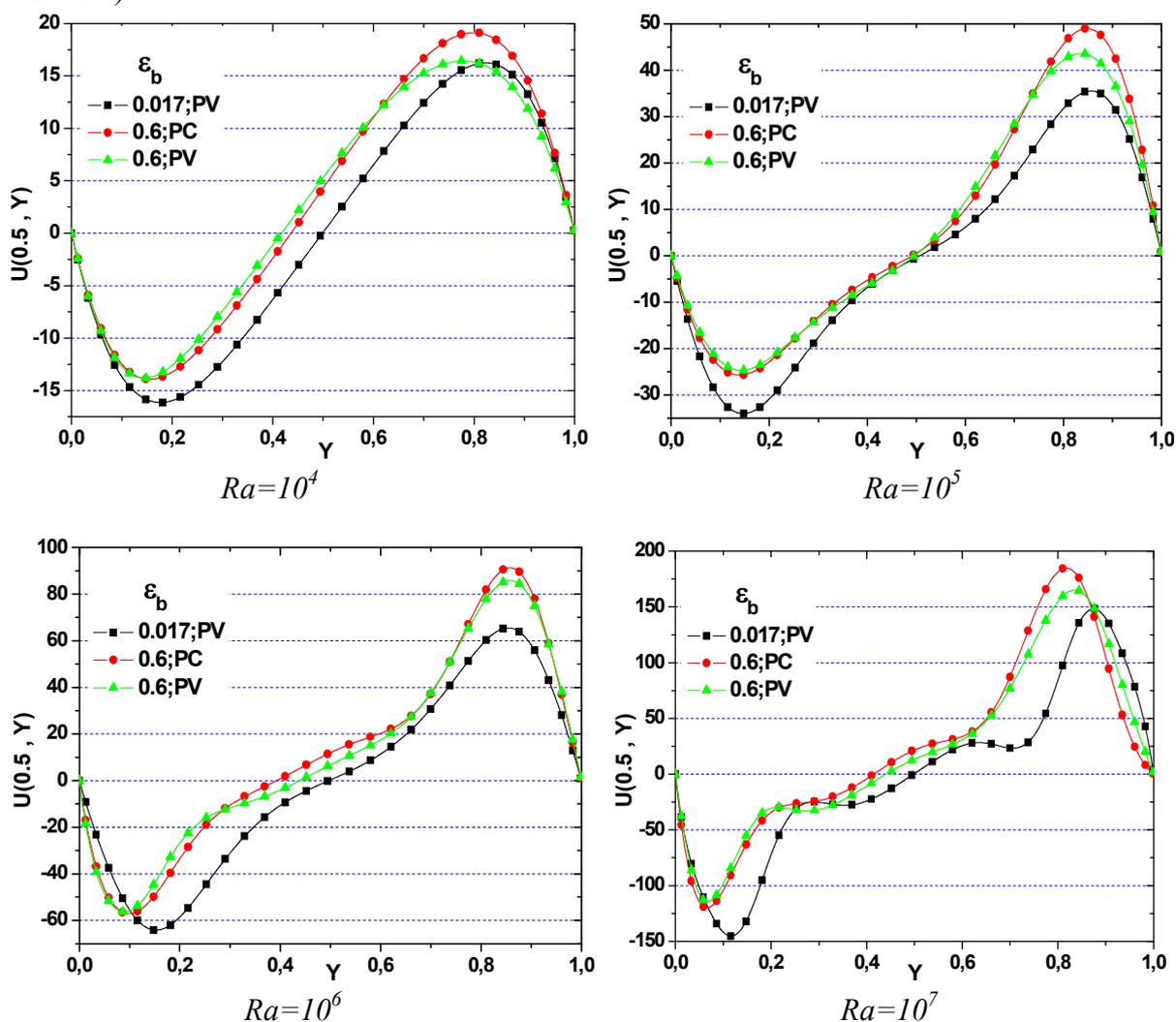


Figure 4.20 : Profils des vitesses horizontales dans le plan médian vertical de la cavité ($X = 0.5$).

Les profils de la vitesse verticale présentée sur la figure 4.21, montrent que par rapport au cas de faibles écarts de température, les couches limites dynamiques dans le cas de larges écarts de température présentent un pic (maximum) et une épaisseur plus grande près de la paroi chaude et une réduction en intensité et en épaisseur près de la paroi froide, ce changement est plus remarquable pour de faible valeurs de Rayleigh ($Ra \leq 10^5$). En augmentant la valeur du nombre de Rayleigh, le pic de la vitesse du côté de la paroi chaude devient de plus en plus grand, se traduisant par une forte expansion thermique dans cette région. La variation de l'épaisseur de la couche limite près de la paroi froide devient faible en augmentant la valeur de Ra , particulièrement pour $Ra = 10^7$. Loin des deux couches limites, le fluide est accéléré pour de faible Ra ($Ra=10^4$), ralenti pour $Ra = 10^5$, puis prend une vitesse constante ($V(X, 0.5)=0$) identique à celle trouvée dans le cas de faible ΔT pour $Ra \geq 10^5$. Les zones concernées sont ($0.2 \leq X \leq 0.8$) pour $Ra = 10^6$ et ($0.15 \leq X \leq 0.9$) pour $Ra = 10^7$.

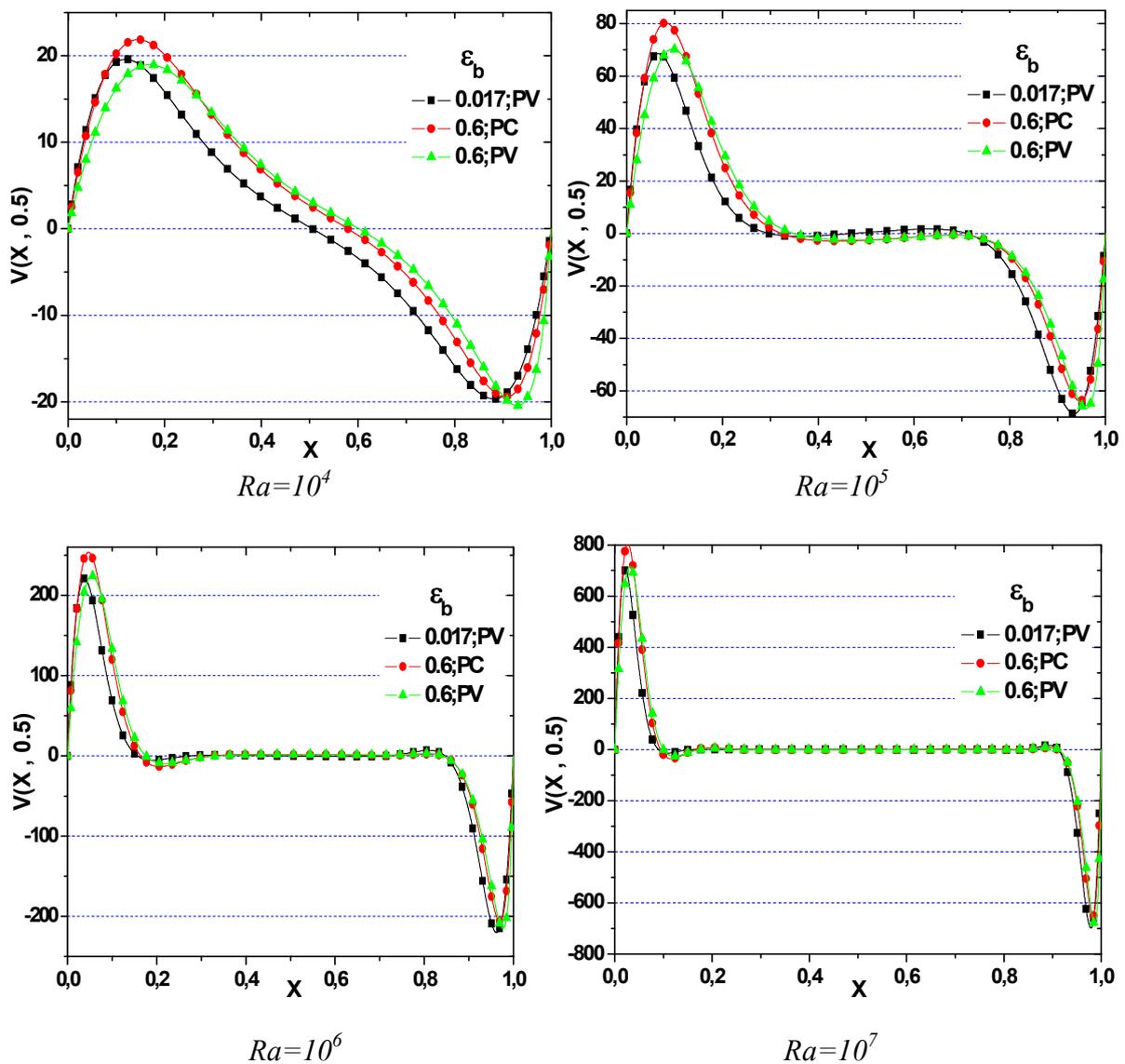


Figure 4.21 : Profils des vitesses verticales dans le plan médian horizontal de la cavité ($Y = 0.5$).

Quand les propriétés physiques sont variables, les maximums de vitesse (en module) diminuent près de la paroi chaude et augmentent près de la paroi froide pour $Ra=10^4$. Un comportement inverse est observé pour $Ra=10^5$. Pour un nombre de Rayleigh plus grand, ces maximums ne subissent pas un grand changement notamment près de la paroi chaude. Ceci est évident, car à faible nombre de Rayleigh l'effet le plus dominant est la viscosité qui varie proportionnellement avec la température ; à grand nombre de Ra , l'effet de la densité est le plus important (selon le cas où la force de viscosité domine sur la force de flottabilité ou le contraire). Concernant l'épaisseur de la couche limite, quelque soit le nombre de Rayleigh, l'épaisseur est plus grande du côté de la paroi chaude et plus petite près de la paroi froide traduisant un déplacement des couches limites dynamiques verticales gauche et droite vers le milieu et vers la paroi froide respectivement.

La figure 4.22 illustre la distribution de la température dans le plan médian vertical de la cavité $\theta(0.5, Y)$. Pour des propriétés physiques constantes, le fluide est refroidi dans tout le plan quelque soit le nombre de Ra , car le fluide est accéléré dans cette région (Fig. 4.20). Cette réduction en température est plus remarquée pour de faibles valeurs de Ra . L'écart entre les deux approximations (Boussinesq et LMN) devient de plus en plus faible quand le nombre de Ra augmente. Pour des propriétés physiques variables, à faible nombre de Rayleigh ($Ra = 10^4$) le profil de température montre un refroidissement près des deux parois adiabatiques et garde une température identique au cas de faible ΔT dans la région $0.3 \leq Y \leq 0.8$. A partir de $Ra = 10^5$, le fluide est toujours faiblement refroidi près des deux parois et se réchauffe de plus en plus en augmentant Ra dans la région $0.2 \leq Y \leq 0.6$ pour $Ra = 10^5$, dans la zone $0.1 \leq Y \leq 0.8$ pour $Ra = 10^6$ et dans l'intervalle $0.08 \leq Y \leq 0.85$ pour $Ra = 10^7$.

La figure 4.23 représente la distribution de la pression thermodynamique moyenne \bar{p}/p_0 en fonction du nombre de Rayleigh pour des propriétés physiques constantes ou variables selon la loi de Sutherland. Par rapport au cas de faible gradient thermique ΔT où la pression thermodynamique est égale à la pression de référence $\bar{p}/p_0 \approx 1$, le rapport \bar{p}/p_0 montre une décroissance de la pression d'un taux maximal égal à 22.2% environ, (Tab. 4.3), lorsque les propriétés sont constantes et de seulement 11.1% lorsqu'elles sont variables. Cette décroissance prend une valeur minimale pour $Ra = 10^4$ quelque soit l'état des propriétés physiques, parce que pour le cas de propriétés constantes, l'effet le plus efficace est celui de la densité.

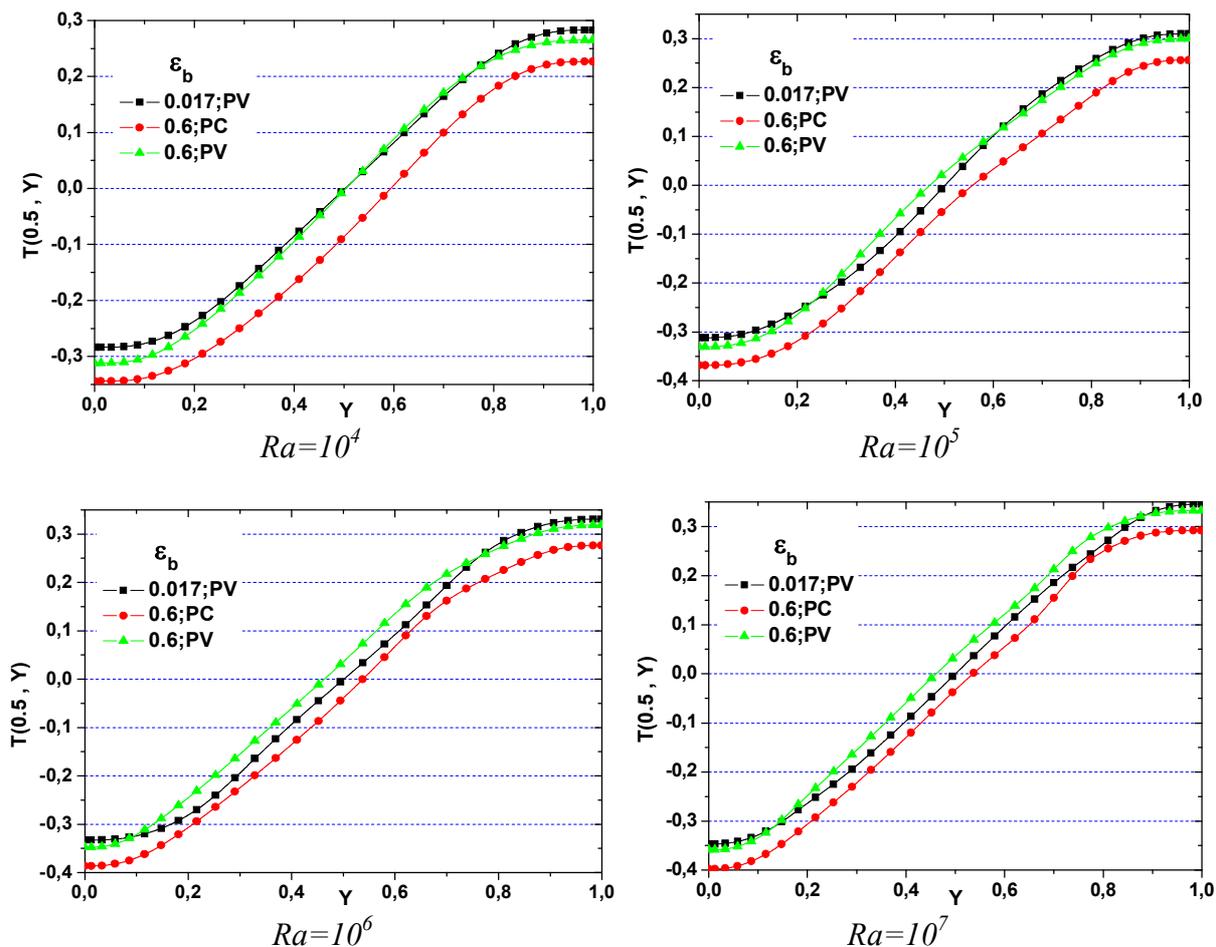


Figure 4.22 : Profils de la température sur le plan médian vertical de la cavité ($X = 0.5$).

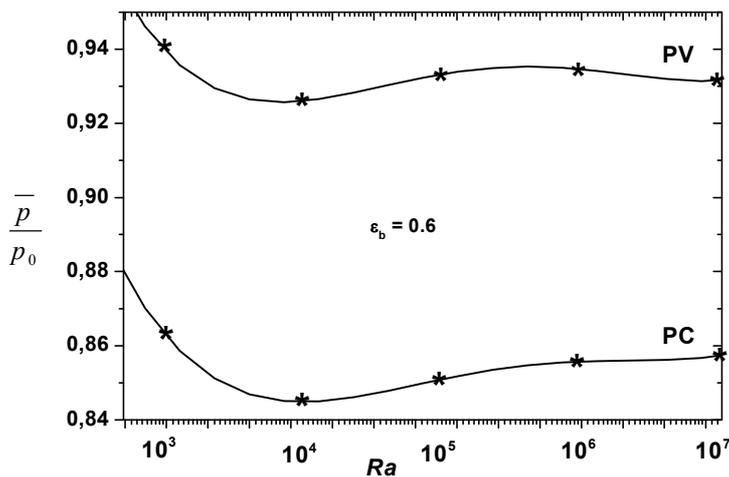


Figure 4.23 : Variation de la pression thermodynamique en fonction de Ra pour $\epsilon_b = 0.6$

4.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a présenté une étude numérique de la convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée pour de large gradient thermique où le modèle de Boussinesq ne peut pas être appliqué. L'approximation valable dans de telles conditions est

basée sur les équations de Navier-Stokes compressible à faible vitesse. Ce régime est décrit par une vitesse caractéristique de l'écoulement très faible devant la célérité du son. Le système d'équations de conservation décrivant l'évolution bidimensionnelle de la configuration étudiée est celui d'un écoulement à faible nombre de Mach.

La première partie de ce chapitre concerne la limite de validation de l'approximation de Boussinesq. Lorsque les vitesses d'écoulement sont très faibles, pour un taux de variation des propriétés thermophysiques ne dépassant pas 10% par rapport à leurs valeurs moyennes, le modèle de Boussinesq est valide seulement pour des différences de température ne dépassant pas 30 K . au delà de cette valeur, l'approximation de Boussinesq n'est plus valide et un autre modèle dit faible nombre de Mach est utilisé pour étudier ce type d'écoulement.

A faible différence de température ($\Delta T \leq 30\text{ K}$), les effets de compressibilité et les ondes acoustiques sont absents, la solution est toujours symétrique, la pression thermodynamique est égale à la pression statique. Dans ces conditions, il est plus judicieux d'utiliser les équations incompressibles (modèle de Boussinesq) dans la formulation du problème de la convection.

Pour des propriétés physiques constantes, le seul paramètre influent est la densité. Lorsque la différence de température est élevée, les champs dynamiques et thermiques perdent leurs symétries qui sont observées pour le cas de faibles ΔT à cause de la détente du gaz le long de la paroi chaude et de sa contraction le long de la paroi froide. L'échange de chaleur aux parois actives diminue pour de faibles valeurs de Ra et augmente lorsque $Ra \geq 10^5$, contrairement au cas de propriétés physiques variables où le transfert de chaleur est plus faible surtout pour de grandes valeurs de Ra .

Parce que la viscosité dynamique et la conductivité thermique d'un gaz parfait augmentent avec la température, leurs variations produisent une réduction très sensible des vitesses maximales dans les zones chaudes et une légère augmentation dans les zones froides.

L'application du modèle faible nombre de Mach entraîne une décomposition de la pression en une pression thermodynamique constante dans l'espace utilisée dans l'équation d'état et une pression mécanique utilisée dans les équations de quantité de mouvement. La pression thermodynamique subit une réduction très sensible lorsque les propriétés physiques sont constantes ou variables avec la température. Cet écart en valeurs de la pression thermodynamique varie avec le nombre de Rayleigh.

REFERENCES

- [1] **J. Vierendeels, K. Riemsdijk, E. Dick**, A Multigrid Semi-Implicit Line-Method for Viscous Incompressible and Low-Mach Number Flows on High Aspect Ratio Grids, *J. Comput. Phys.*, Vol. 154, pp.310-341, 1999.
- [2] **V. Heuveline**, On higher-order mixed FEM for low Mach number flows: application to a natural convection benchmark problem, *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 41, pp 1339-1356, 2003.
- [3] **D. D. Gray, A. Giorgini**, The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 545-551, 1976.

Chapitre 5

***Couplage convection naturelle-
rayonnement de surfaces sous
l'approximation faible nombre de
Mach***

5.1. INTRODUCTION

Cette partie consiste à étudier la convection naturelle couplée au rayonnement surfacique dans une cavité carrée différentiellement chauffée dans le cas hors Boussinesq. L'objectif ici est d'analyser l'effet du rayonnement de surface sur la convection naturelle en prenant en compte des grands écarts de température et des propriétés physiques variables par le choix du modèle dit faible nombre de Mach. La résolution numérique de ce problème passe essentiellement par l'approximation en volumes finis des équations Navier-Stokes généralisées et des conditions aux limites radiatives et la méthode de radiosité qui permet de résoudre le problème des échanges radiatifs dans l'enceinte.

5.2. CONFIGURATION PHYSIQUE

Le système étudié est schématisé dans la figure 5.1. Il s'agit d'une cavité carrée remplie d'air supposé être un gaz parfait et transparent au rayonnement. Les surfaces verticales de la cavité sont supposées isothermes et portées respectivement aux températures T_C et T_F avec $T_C > T_F$. Les surfaces horizontales sont considérées adiabatiques. Le domaine fluide est supposé dépourvu de toute source ou puits de chaleur. D'un point de vue radiatif, les hypothèses retenues pour la modélisation des transferts radiatifs sont les suivantes :

- les surfaces sont grises, lambertiennes (réflexion diffuse), opaques pour le rayonnement et sont de même émissivité,
- les densités de flux et les températures de surface sont uniformes,
- le milieu contenu dans l'enceinte est parfaitement transparent.

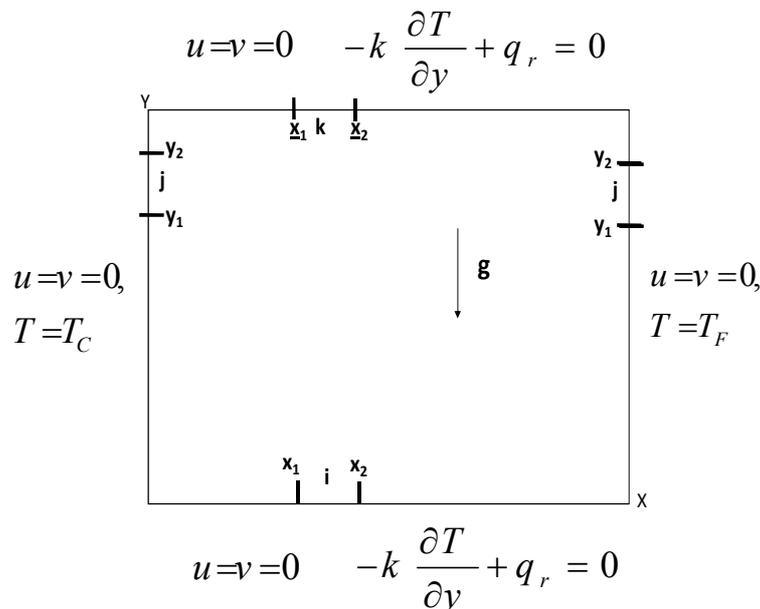


Figure 5.1 : Configuration physique du problème

5.3. EQUATIONS DE MOUVEMENT

Les équations utilisées dans cette section et décrivant le problème de la configuration schématisée dans la figure 5.1 sont celles formulées au chapitre 2 (équations à faible nombre de Mach), et qui sont exprimées sous forme adimensionnelle, en utilisant les mêmes paramètres d'adimensionnement.

5.4. RAYONNEMENT DE SURFACES

Le rayonnement de surfaces ne modifie pas les équations gouvernant le mouvement du fluide mais altère seulement les conditions aux limites thermiques. Le couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces se fait uniquement à travers les conditions aux limites thermiques.

Sans rayonnement de surfaces, la condition adiabatique implique que le gradient de température normal à ces parois est nul :

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0,H} = 0 \quad (5.1)$$

En présence du rayonnement de surfaces, la condition adiabatique est traduite par l'équilibre entre les flux conductif et radiatif :

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0,H} + q_r \Big|_{y=0,H} = 0 \quad (5.2)$$

q_r est la densité de flux net radiatif, déterminée par les systèmes d'équations suivantes (Voir [Annexe IV](#) pour plus de détails) :

$$q_r = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} (\sigma T^4 - J) \quad (5.3)$$

$$AJ = b \quad (5.4)$$

J représente le vecteur Radiosité.

A est une matrice dont les éléments sont donnés par :

$$A_{ij} = \delta_{ij} - (1-\varepsilon)F_{ij} \quad (5.5)$$

et

$$b_i = \varepsilon \sigma T_i^4 \quad (5.6)$$

5.4.1. La méthode de radiosité

Cette méthode, présentée pour la première fois par Poljak [1] et développée ultérieurement par Hottel [2] et Gebhart [3], permet de modéliser les échanges radiatifs à grandes longueurs d'ondes GLO dans une enceinte composée d'un nombre quelconque N de parois. Elle fait intervenir la notion de radiosité J d'une surface, grandeur représentant la quantité d'énergie (flux) quittant cette surface par rayonnement émis et réfléchi.

Les surfaces radiatives de la cavité solide sont divisées en un certain nombre de zones (surfaces) $A_i, i = 1, \dots, N$ (figure 5.1). N est le nombre de surfaces radiatives totales formant la cavité, qui est égal au nombre de volumes de contrôle total des interfaces solide-air. En fait, les faces des volumes de contrôle sont également disposées de manière à ce que la face d'un volume de contrôle coïncide avec une interface solide-gaz. Le nombre de zones retenues est déterminé par le maillage utilisé pour résoudre les équations de conservation. En effet, le maillage est construit de sorte que les limites du domaine physique coïncident avec les lignes du maillage des vitesses (maillage décalé).

On adimensionne le système décrivant le rayonnement de surfaces en utilisant les paramètres suivant :

- la température de rayonnement est adimensionnée par T_0 , donc :

$$\Theta_i = \frac{T_i}{T_0} = [(T_h - T_c)\theta_i + T_0] / T_0 = \theta_i \frac{\Delta T}{T_0} + 1 \quad (5.7)$$

Si on pose $\theta_0 = \frac{T_0}{\Delta T}$, la température radiative adimensionnelle devient :

$$\Theta_i = \frac{\theta_i}{\theta_0} + 1 \quad (5.8)$$

- le flux de rayonnement q_r est adimensionné par σT_0^4 , donc :

$$Q_r = q_r / \sigma T_0^4 \quad (5.9)$$

Si l'enceinte se compose de N parois, la radiosité adimensionnelle de la paroi i est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - (1 - \varepsilon_i) F_{i-j}) R_j = \varepsilon_i \Theta_i^4 \quad (5.10)$$

Où R est la radiosité adimensionnelle définie par :

$$R = J / \sigma T_0^4 \quad (5.11)$$

Par conséquent, le flux radiatif adimensionné le long d'une surface A_i est exprimée par :

$$Q_{r,i} = R_i - \sum_{j=1}^N R_j F_{i-j} \quad (5.12)$$

En écrivant cette expression pour chaque surface, on obtient un système d'équations en radiosités :

$$\begin{bmatrix} 1 - \Upsilon_1 F_{11} & -\Upsilon_2 F_{12} & -\Upsilon_3 F_{13} & -\Upsilon_4 F_{14} \dots \dots -\Upsilon_n F_{1n} \\ -\Upsilon_1 F_{21} & 1 - \Upsilon_2 F_{22} & -\Upsilon_3 F_{23} & -\Upsilon_4 F_{24} \dots \dots -\Upsilon_n F_{2n} \\ -\Upsilon_1 F_{31} & -\Upsilon_2 F_{31} & 1 - \Upsilon_3 F_{33} & -\Upsilon_4 F_{34} \dots \dots -\Upsilon_n F_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ -\Upsilon_1 F_{n1} & -\Upsilon_2 F_{n1} & -\Upsilon_3 F_{n3} & -\Upsilon_4 F_{n4} \dots \dots 1 - \Upsilon_n F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \dots \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \Theta_1^4 \\ \varepsilon_2 \Theta_2^4 \\ \varepsilon_3 \Theta_3^4 \\ \dots \\ \dots \\ \varepsilon_n \Theta_n^4 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Avec Υ est la réflectivité donnée par :

$$\Upsilon_i = 1 - \varepsilon_i \quad (5.14)$$

La résolution de l'équation de radiosité revient à résoudre un système de N équations linéaires à N inconnues: $AX = B$

Sous forme matricielle, ce système fait intervenir les matrices A et B définies par :

$$A = \{a_{ij} = \delta_{ij} - (1 - \varepsilon_i) F_{ij} ; i = 1, N ; j = 1, N\} \quad (5.15)$$

$$B = \{b_i = \varepsilon_i \Theta_i^4 ; i = 1, N\} \quad (5.16)$$

La résolution de ce système fournit le vecteur des radiosités R_j , contenant les valeurs des radiosités des différentes surfaces élémentaires des parois de l'enceinte.

En supposant que tous les facteurs de forme de l'équation de radiosité soient connus, n'importe quelle méthode de résolution de systèmes d'équations linéaires peut être appliquée.

L'inverse de la matrice A est déterminé (une seule fois) par la méthode de Gauss. Les coefficients de A (a_{ij}) sont des constantes et ne dépendent que de l'émissivité et des facteurs de forme qui ne sont pas fonction de la température.

En 2D, les expressions analytiques des facteurs de forme [4] sont données par : (voir les détails dans l'Annexe IV)

$$F_{i-j} = \frac{-1}{2(x_2 - x_1)} \left[\sqrt{x_2^2 + y^2} \Big|_{y_1}^{y_2} - \sqrt{x_1^2 + y^2} \Big|_{y_1}^{y_2} \right] \quad (5.17)$$

$$F_{i-k} = -\frac{1}{2(x_2 - x_1)} \left[\sqrt{(x_2 - x)^2 + H^2} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \sqrt{(x_1 - x)^2 + H^2} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \right] \quad (5.18)$$

Après la détermination de la radiosité, on peut facilement calculer le flux radiatif à chaque surface par l'expression :

$$Q_i = \sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - F_{ij}) R_j \quad (5.19)$$

5.4.2 Algorithme de calcul

Pour introduire le flux radiatif aux conditions aux limites dans la procédure de calcul, on intègre l'algorithme de la radiosité dans l'algorithme SIMPLER transitoire tel qu'il est représenté dans la figure 5.2.

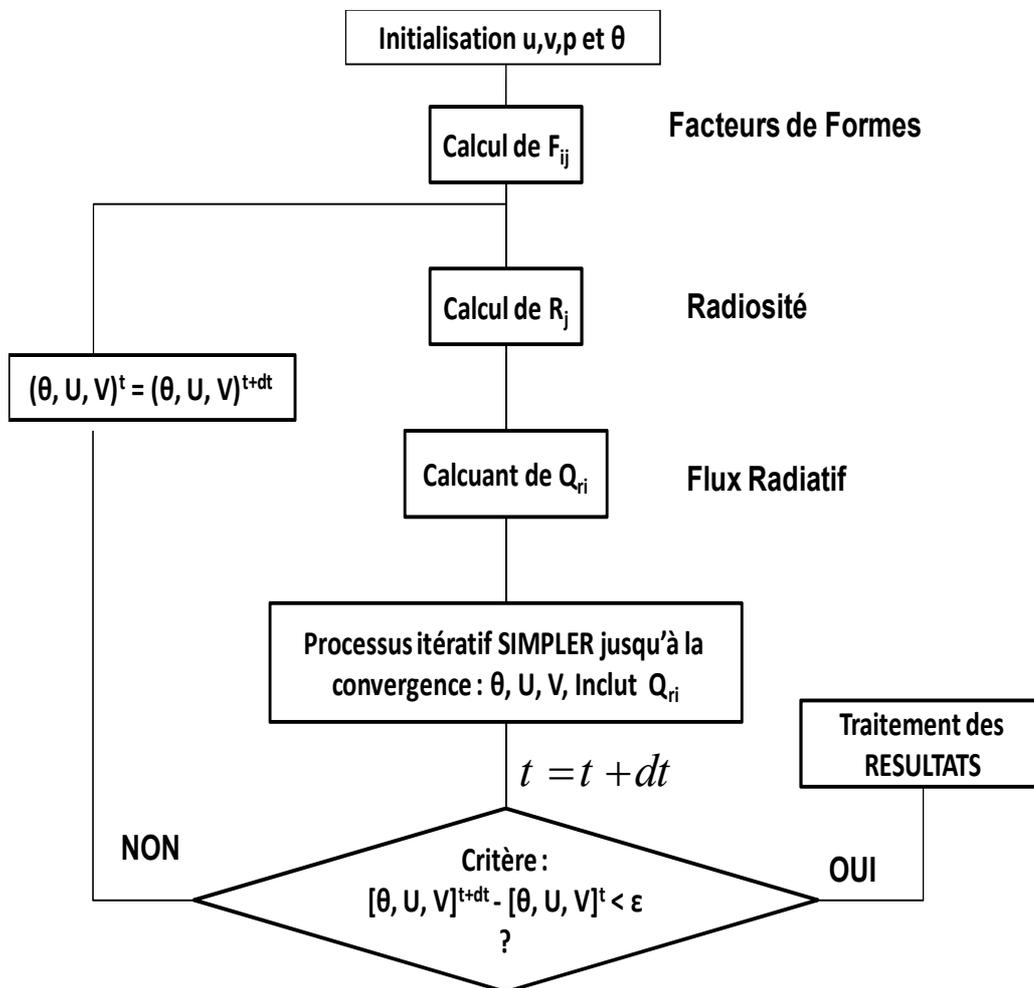


Figure 5.2 : Algorithme de radiosité.

5.5. CONDITIONS AUX LIMITES ADIMENSIONNEES

Puisque le couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces se fait uniquement à travers les conditions aux limites thermiques, les conditions aux limites adimensionnelles correspondantes sont données par :

$$U = V = 0, \quad \theta = \theta_i \quad \text{pour } \tau = 0 \quad (5.27)$$

$$U = V = 0, \quad \theta = \theta_c = 0.5 \quad \text{pour } 0 \leq Y \leq 1 \text{ et } X = 0 \quad (5.28)$$

$$U = V = 0, \quad \theta = \theta_f = 0.5 \quad \text{pour } 0 \leq Y \leq 1 \text{ et } X = 1 \quad (5.29)$$

$$U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} - NrQ_r = 0 \quad \text{pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ et } Y = 0 \quad (5.30)$$

$$U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} - NrQ_r = 0 \quad \text{pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ et } Y = 1 \quad (5.31)$$

Où :

$$Nr = \sigma T_0^4 H / k \Delta T \quad (5.32)$$

est un paramètre sans dimension appelé nombre de rayonnement.

5.6. VALIDATION NUMERIQUE

Contrairement à la convection naturelle pure en cavité, il existe peu de données en littérature traitant du couplage convection naturelle-rayonnement dans l'approximation Boussinesq, et elles sont rares voir inexistantes dans le cas hors Boussinesq, nous avons donc considéré le problème du couplage en approximation Boussinesq pour valider notre code de calcul. Le modèle numérique a été réduit au cas classique de la convection naturelle sous l'hypothèse de Boussinesq couplée au rayonnement de surfaces dans une cavité carrée différentiellement chauffée, rapporté dans les travaux de Hong [4]. Les nombres de Nusselt convectifs, radiatifs et totaux des parois actives, (tableaux 5.1 et 5.2), sont comparés aux résultats de [4]. Un excellent accord a été observé pour toutes les valeurs du nombre de Rayleigh testées et sur les deux parois actives.

Tableau 5.1 : Nombres de Nusselt convectif, radiatif et total à la paroi chaude, pour $T_0 = 293,5 \text{ K}$ et $\Delta T = 10 \text{ K}$, $Nut = Nuc + Nur$; comparaison avec les valeurs publiées par [4].

Ra	H	ε	Réf. [4]			Présent travail		
			Nu_c	Nu_r	Nu_t	Nu_c	Nu_r	Nu_t
10^4	0.021	0	2.246	0	2.246	2.246	0	2.246
10^4	0.021	0.2	2.260	0.507	2.767	2.262	0.507	2.769
10^4	0.021	0.8	2.249	2.401	4.650	2.255	2.401	4.656
10^5	0.045	0	4.540	0	4.540	4.532	0	4.532
10^5	0.045	0.2	4.394	1.090	5.484	4.398	1.090	5.489
10^5	0.045	0.8	4.189	5.196	9.385	4.200	5.196	9.397
10^6	0.097	0	8.852	0	8.852	8.863	0	8.863
10^6	0.097	0.2	8.381	2.355	10.736	8.379	2.355	10.734
10^6	0.097	0.8	7.815	11.265	19.080	7.861	11.265	19.126

Tableau 5.2 : Nombres de Nusselt convectif, radiatif et total à la paroi froide, pour $T_0 = 293,5 \text{ K}$ et $\Delta T = 10 \text{ K}$, $Nut = Nuc + Nur$; comparaison avec les valeurs publiées par [4].

Ra	H	ε	Réf. [4]			Présent travail		
			Nu_c	Nu_r	Nu_t	Nu_c	Nu_r	Nu_t
10^4	0.021	0	2.246	0	2.246	2.246	0	2.246
10^4	0.021	0.2	2.268	0.499	2.767	2.271	0.498	2.769
10^4	0.021	0.8	2.278	2.372	4.650	2.284	2.371	4.656
10^5	0.045	0	4.540	0	4.540	4.532	0	4.532
10^5	0.045	0.2	4.411	1.073	5.484	4.417	1.072	5.489
10^5	0.045	0.8	4.247	5.137	9.384	4.261	5.136	9.397
10^6	0.097	0	8.852	0	8.852	8.863	0	8.863
10^6	0.097	0.2	8.417	2.319	10.736	8.416	2.318	10.734
10^6	0.097	0.8	7.930	11.150	19.078	7.971	11.151	19.126

5.7 RESULTATS ET INTERPRETATIONS

L'objectif de cette section est d'analyser l'effet du rayonnement de surface (émissivité) sur la convection naturelle dans l'approximation faible Mach, ainsi que l'effet de la variation des propriétés physiques sur les échanges radiatifs. L'ensemble des résultats obtenus, sont présentés sous forme de lignes de courant, isothermes, vitesses horizontale et verticale, températures et nombres de Nusselt convectif et radiatif, et ce dans les deux cas : faibles et larges écarts de température, afin de mettre en exergue la différence entre les deux approximations. Les paramètres de simulation utilisés sont le nombre de Rayleigh qui prend les valeurs $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ et 10^7 , ce qui correspond à une hauteur de la cavité $H = 0.0064, 0.014, 0.029$ et 0.064 respectivement, l'émissivité de surfaces variant de 0 à 1, le paramètre de Boussinesq qui prend les deux valeurs $\varepsilon_b = 0.017$ et $\varepsilon_b = 0.6$ et enfin les propriétés physiques qui sont constantes ou variables selon la loi de Sutherland.

5.7.1 Effet du rayonnement sur les isothermes et les lignes de courant

A des différences de température élevées, même en présence de rayonnement, les champs dynamiques et thermiques perdent leur symétrie obtenue pour le cas de faible gradient de température.

Pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh ($Ra = 10^4$), la figure 5.3 indique que dans les deux types d'écoulement à propriétés constantes et thermodépendantes, les lignes de courant sont peu influencées par le rayonnement et la cellule de recirculation garde presque la même forme. A partir de $Ra = 10^5$, les courbes sont plus sensibles à l'émissivité, (Fig.5.5 et 5.7); la stratification diminue au centre de la cavité et les lignes de courant sont moins serrées à partir d'une émissivité $\varepsilon = 0.2$ pour le cas de propriétés constantes et à partir de $\varepsilon = 0.4$ pour le cas de propriétés variables, montrant ainsi une réduction dans les gradients de vitesse.

En augmentant le nombre de Rayleigh à $Ra = 10^6$ (Fig. 5.7), les isocourants sont moins serrés à partir de $\varepsilon = 0.8$ pour des propriétés constantes et une déformation des deux cellules centrales occupant presque tout le milieu de la cavité est observée.

Concernant la distribution des champs thermiques, (Fig. 5.4, 5.6, 5.8), la structure des isothermes près des parois adiabatiques supérieure et inférieure est à observer et analyser. En effet, pour de faibles valeurs de Rayleigh ($Ra = 10^4$), (Fig.5.4), et dans les deux types d'écoulement à propriétés physiques constantes ou variables, l'influence du rayonnement sur la paroi inférieure est marquée par l'inclinaison des isothermes, même pour de faibles valeurs de l'émissivité ($\varepsilon = 0.2$). Cependant, les isothermes restent perpendiculaires à la paroi supérieure dans le cas hors Boussinesq ($\varepsilon_b = 0.6$), et inclinées dans le cas Boussinesq ($\varepsilon_b = 0.017$), montrant ainsi une faible influence du rayonnement dans cette région de l'enceinte.

Pour un nombre de Rayleigh plus élevé ($Ra \geq 10^5$), (Fig. 5.6 et 5.8), les isothermes sont de plus en plus inclinées du côté de la paroi inférieure et elles ne sont inclinées, du côté de la paroi supérieure, qu'à partir d'une émissivité $\varepsilon = 0.6$ et un Rayleigh $Ra = 10^5$.

Quand l'émissivité augmente, les isothermes deviennent moins serrées en bas de la paroi chaude et au cœur de la cavité et deviennent de plus en plus serrées en haut de la paroi froide, indiquant ainsi un gradient de température assez fort dans cette région.

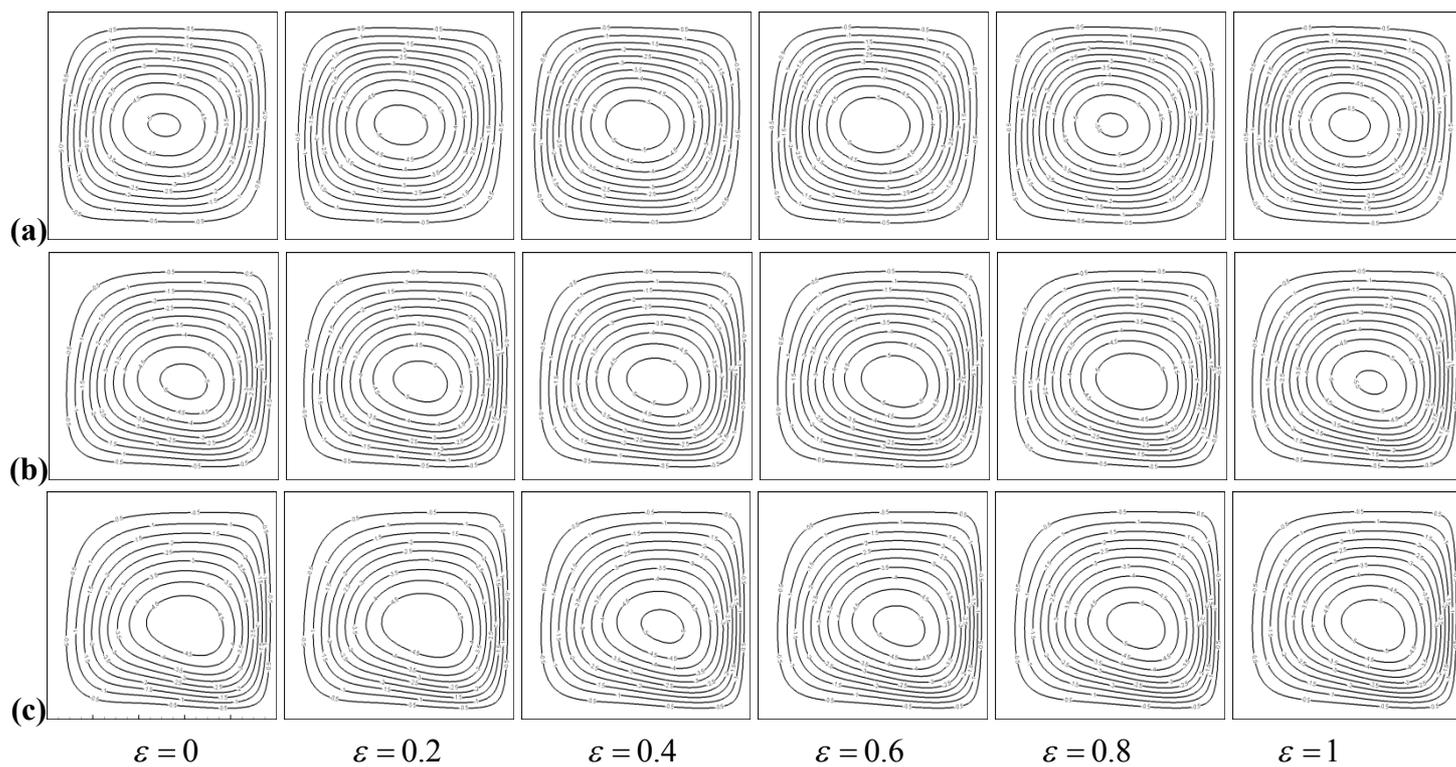


Figure 5.3 : Lignes de courant (a): $\varepsilon_b = 0.017$ et PV, (b) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC, (c) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV pour $Ra = 10^4$

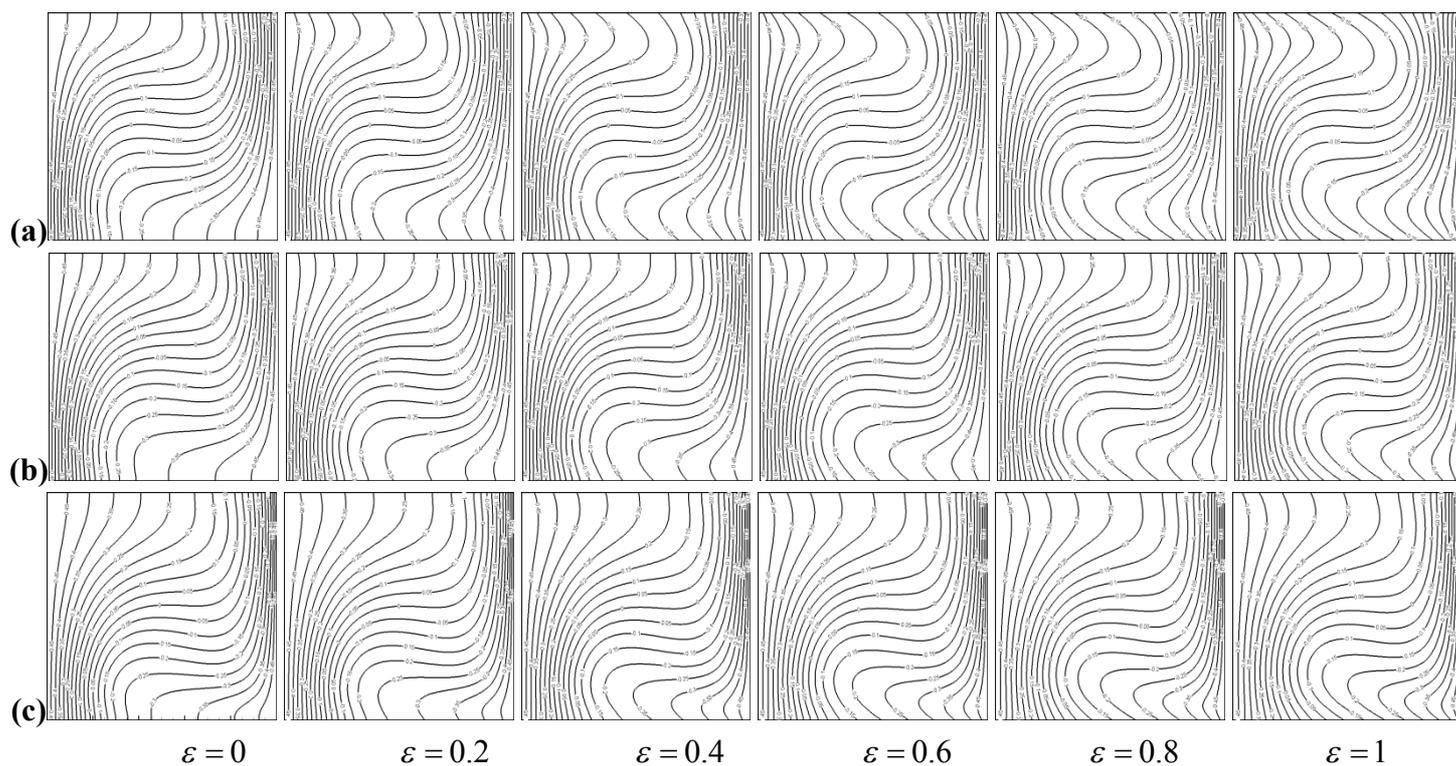


Figure 5.4 : Isothermes (a): $\varepsilon_b = 0.017$ et PV, (b) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC, (c) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV pour $Ra = 10^4$

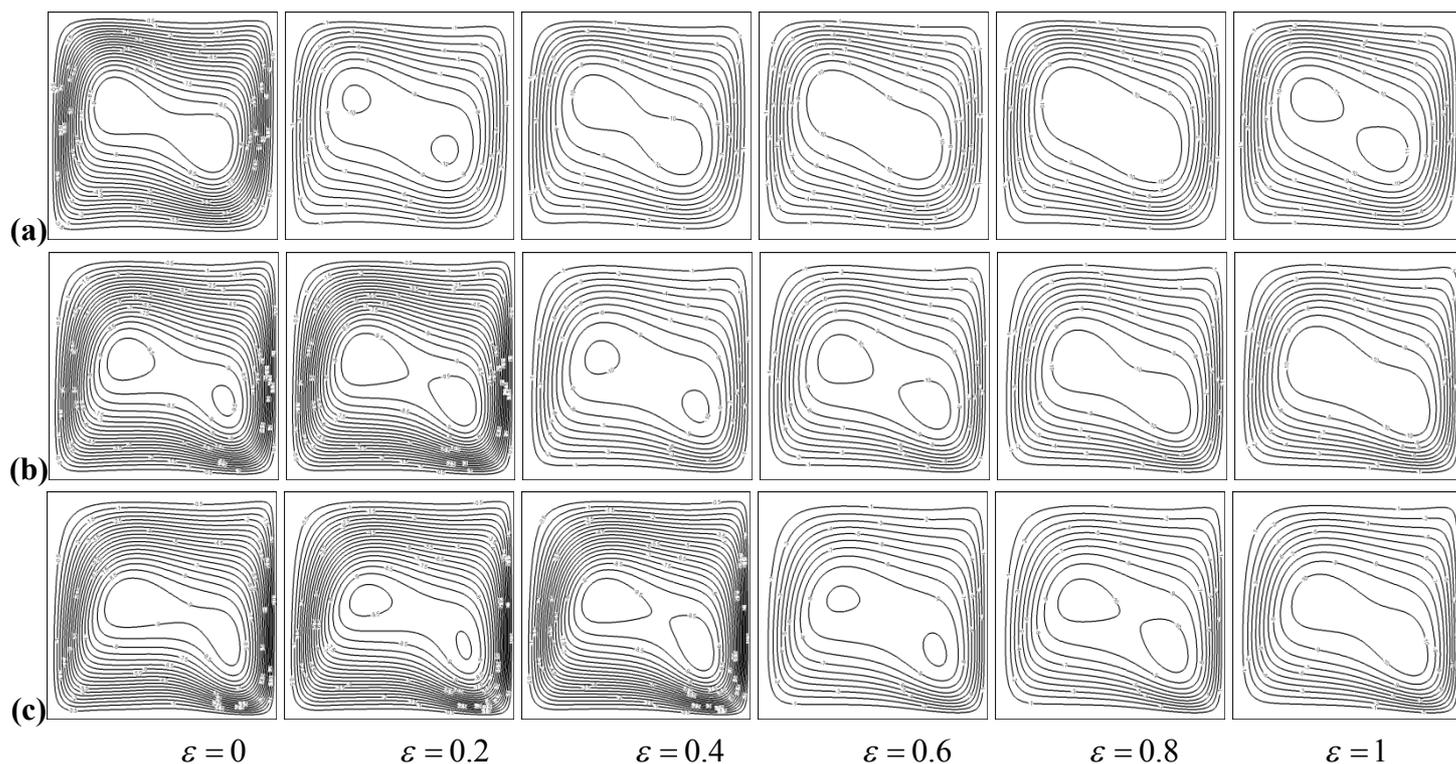


Figure 5.5 : Lignes de courant (a): $\varepsilon_b = 0.017$ et PV, (b) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC, (c) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV pour $Ra = 10^5$

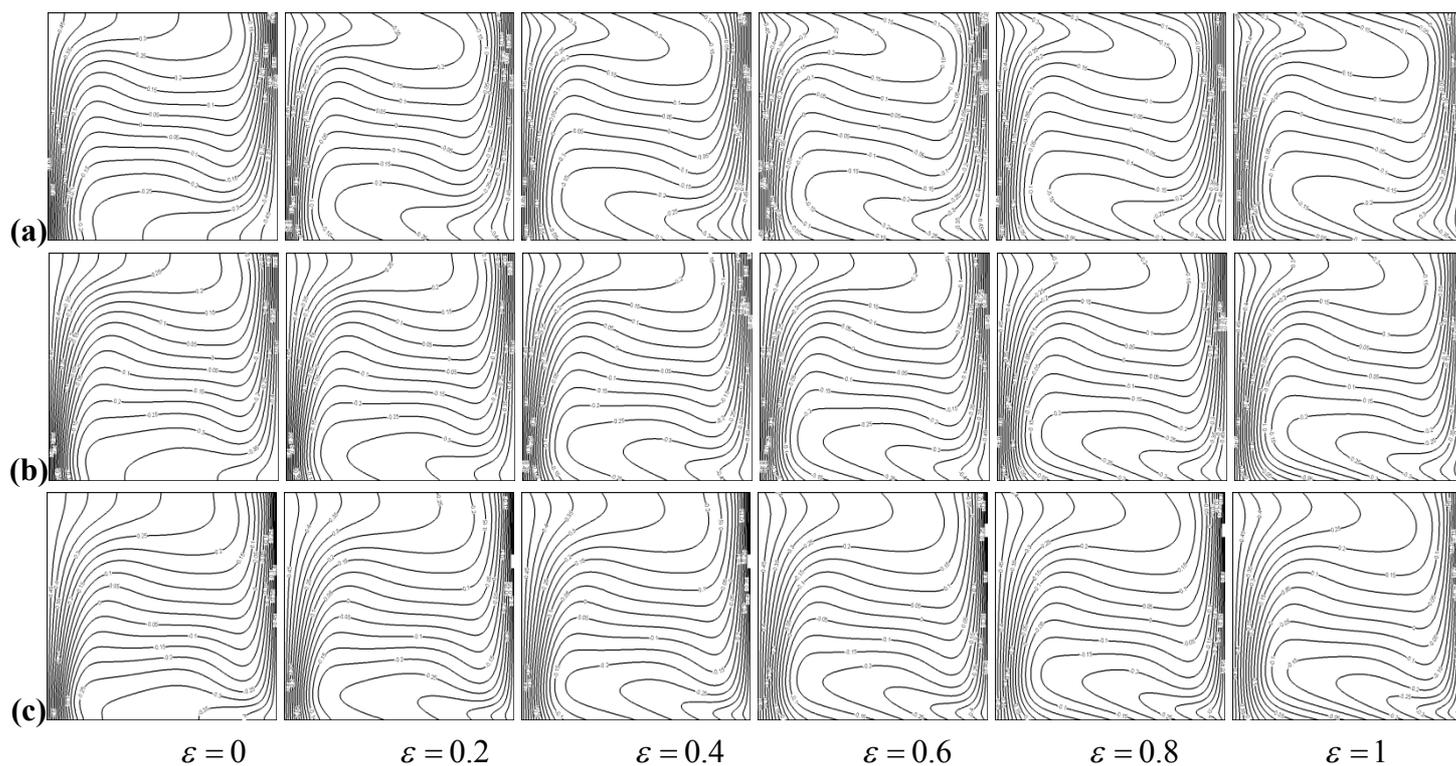


Figure 5.6 : Isothermes (a): $\varepsilon_b = 0.017$ et PV, (b) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC, (c) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV pour $Ra = 10^5$

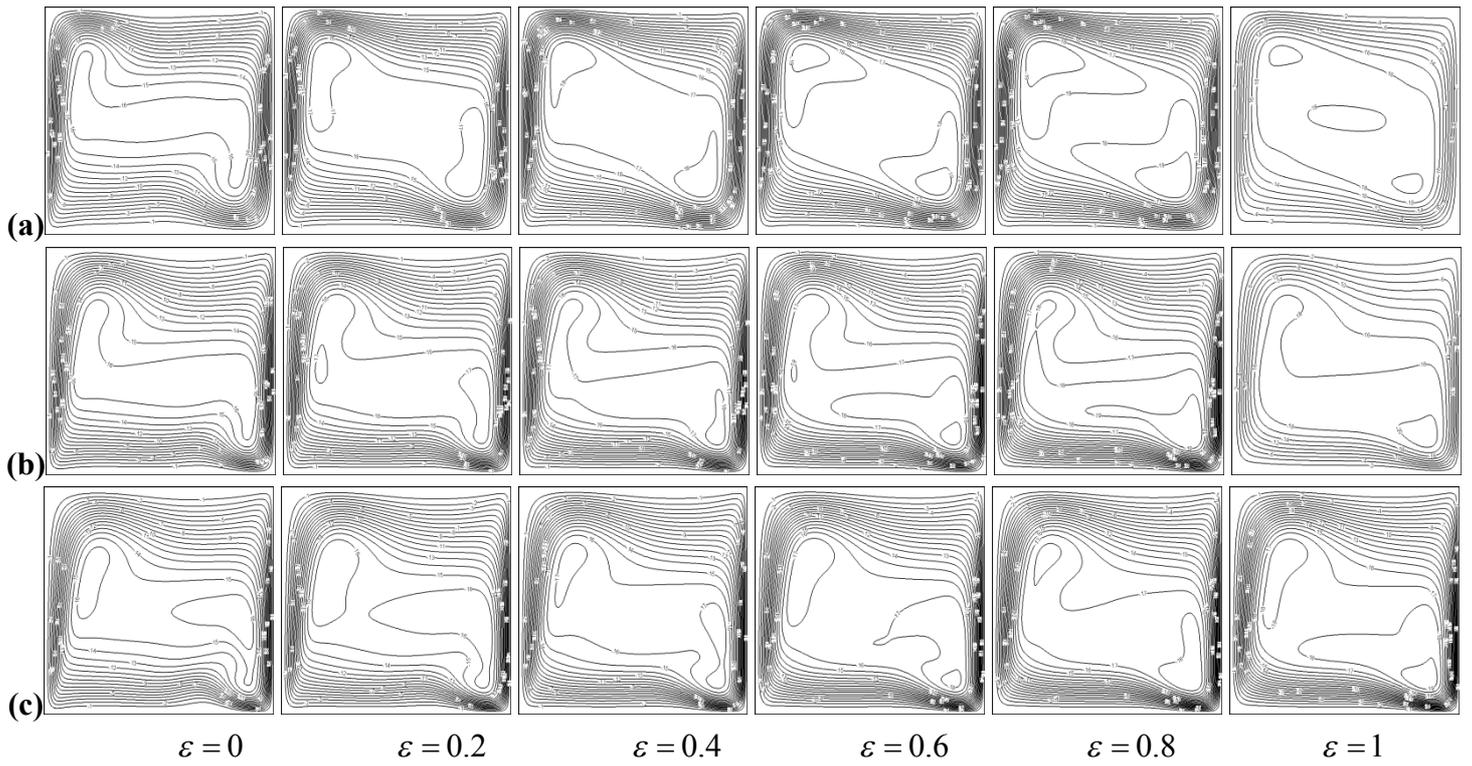


Figure 5.7 : Lignes de courant (a): $\varepsilon_b = 0.017$ et PV, (b) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC, (c) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV pour $Ra = 10^6$

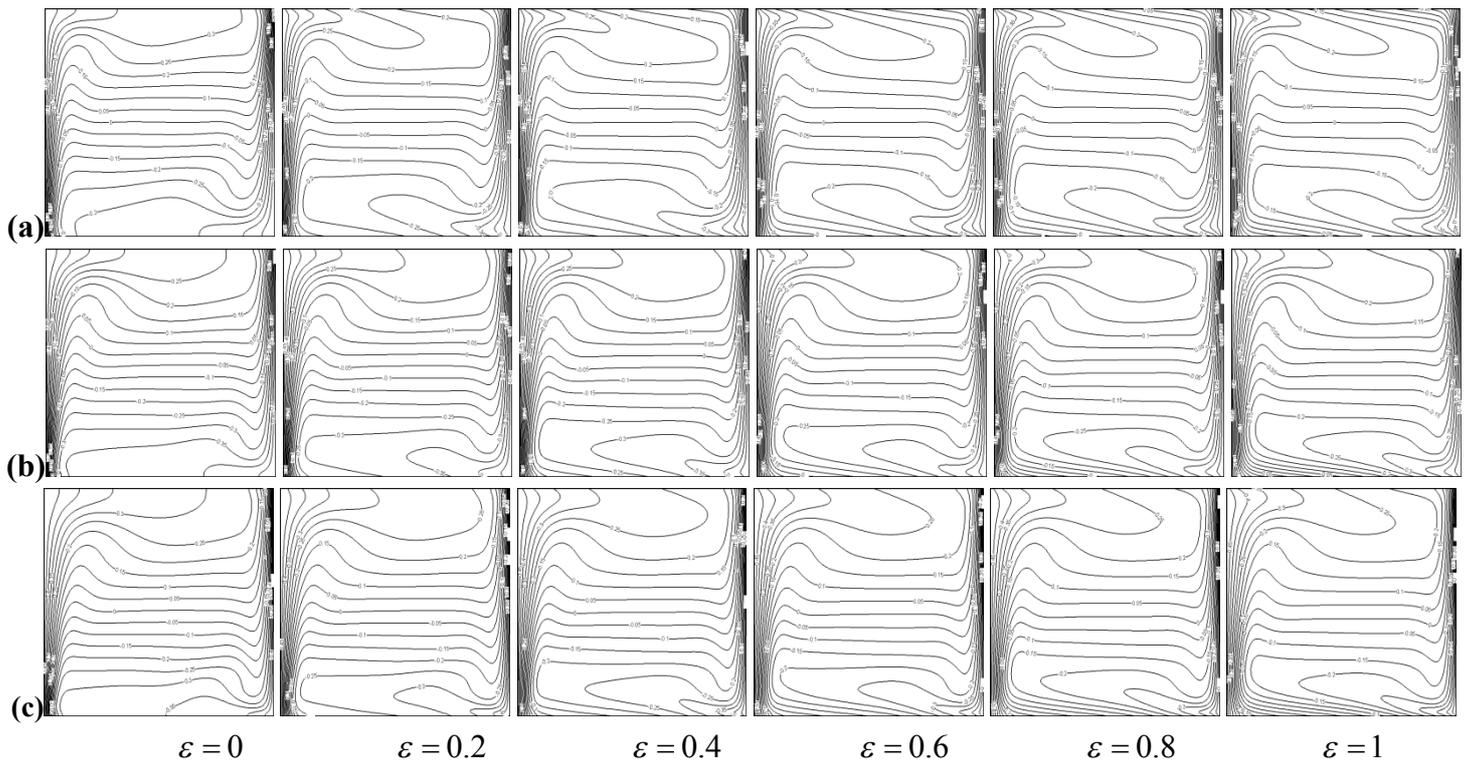


Figure 5.8 : Isothermes (a): $\varepsilon_b = 0.017$ et PV, (b) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC, (c) : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV pour $Ra = 10^6$

5.7.2 Effet du rayonnement sur le transfert thermique

Dans le cas de larges écarts de température, l'échange de chaleur au niveau des parois actives présenté en termes de nombres de Nusselt convectif et radiatif en fonction de l'émissivité et pour différentes valeurs de Ra , montre que la variation locale du Nusselt convectif au niveau de la paroi chaude, est suffisamment affectée par le rayonnement surfacique (Fig. 5.9), où on observe une diminution du transfert thermique avec l'augmentation de l'émissivité. Ce phénomène est nettement marqué au niveau de la partie inférieure de la paroi particulièrement pour des grandes valeurs de Ra , ($Ra \geq 10^5$), où l'échange convectif baisse considérablement. Le rayonnement réduit donc le transfert convectif par affaiblissement du gradient thermique près de la paroi chaude, (voir figures 5.4, 5.6 et 5.8). Au niveau de la paroi froide, l'effet de rayonnement de surface sur le transfert de chaleur convectif n'est pas significatif, notamment pour de grandes valeurs de Rayleigh, ($Ra \geq 10^5$).

Par ailleurs, l'échange radiatif local au niveau des deux parois, (Fig. 5.10), possède une tendance inverse, puisque l'augmentation de l'émissivité des parois conduit à une augmentation du nombre de Nusselt radiatif mais avec un taux de variation assez faible (de moitié) dans le cas de large ΔT comparé au cas de faible ΔT .

L'effet du rayonnement de surface sur le transfert radiatif local au niveau de la paroi adiabatique supérieure, illustré sur la figure 5.11, montre le même comportement dans les deux cas : large et faible ΔT mais avec des intensités différentes. Cependant, la sensibilité du Nusselt radiatif au rayonnement est plus importante au niveau de la paroi inférieure (Fig. 5.12), comparée à celle de la paroi supérieure notamment pour les grandes valeurs de Rayleigh ($Ra \geq 10^5$) où une diminution très considérable des valeurs de Nusselt radiatif en fonction de l'émissivité est observée. Ce comportement peut être dû à la perte de la chaleur par la paroi supérieure, alors que la paroi inférieure reçoit de la chaleur. Pour les deux parois, le transfert radiatif diminue de moitié par rapport au cas de faible ΔT .

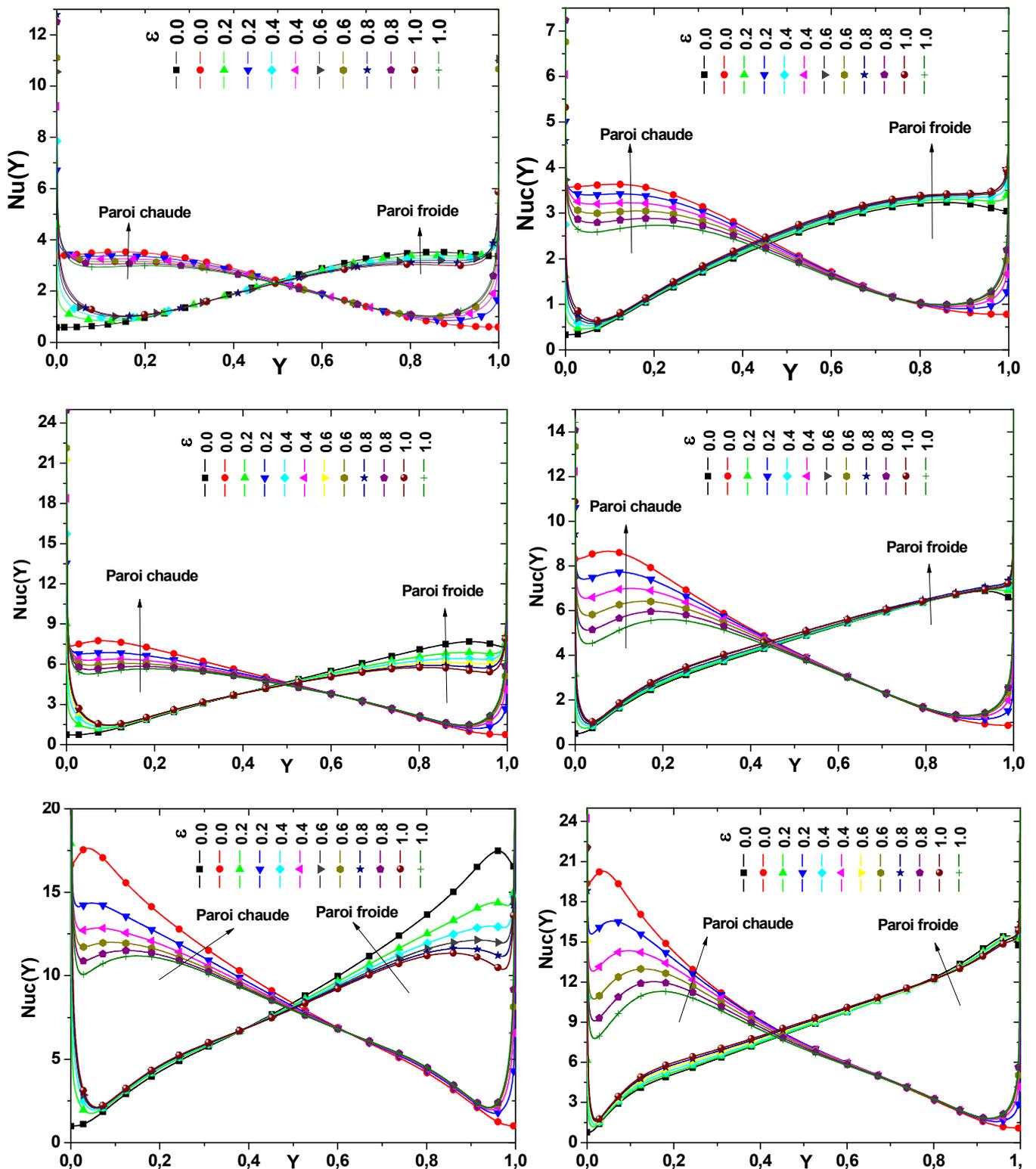


Figure 5.9 : Profils du nombre Nusselt convectif aux parois actives pour $\Delta T = 10K$ (gauche) , $\Delta T = 360K$ (droite) et pour $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ (du haut vers le bas) à différentes valeurs de l'émissivité.

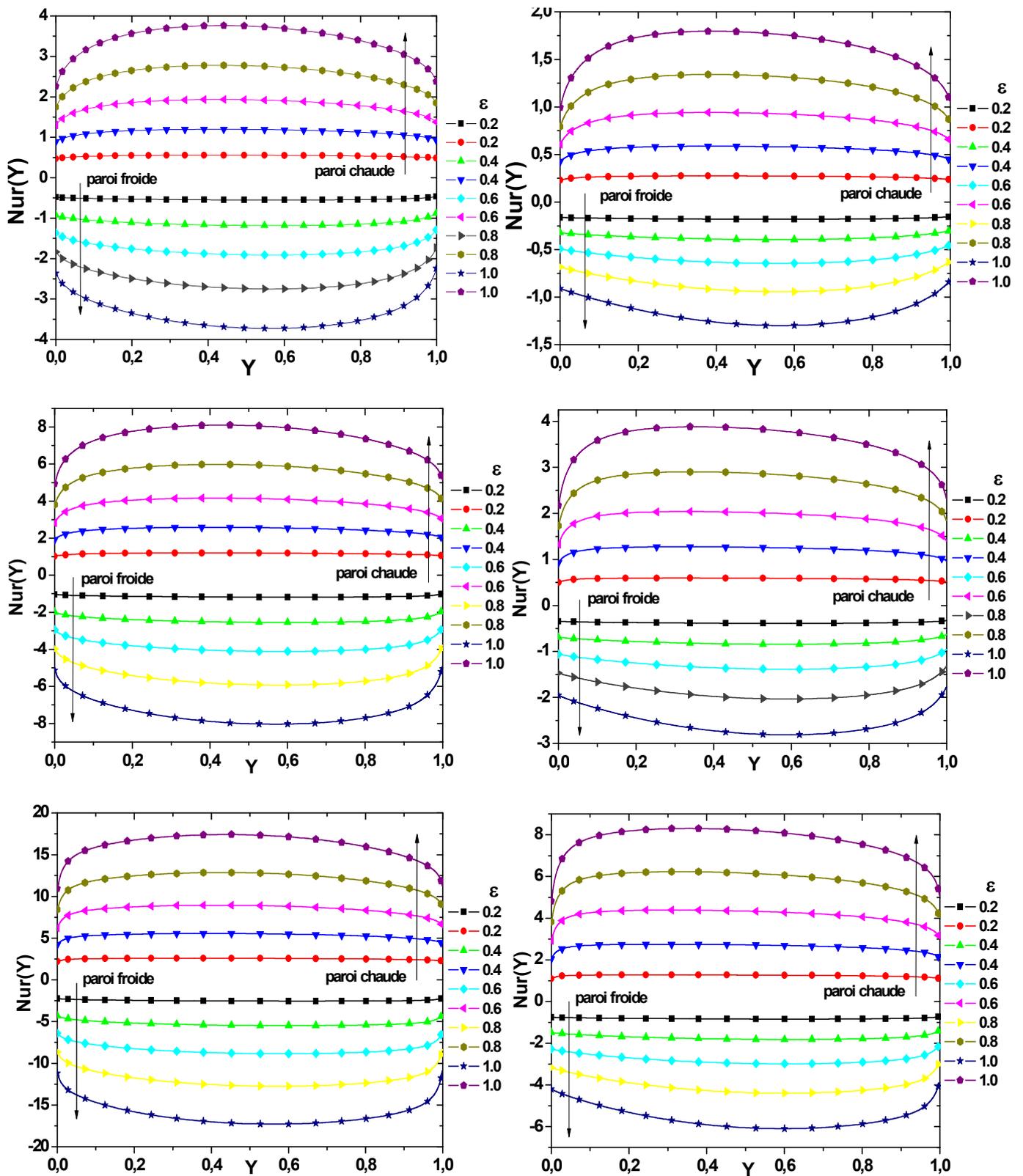


Figure 5.10 : Profils du nombre Nusselt radiatif aux parois actives pour $\Delta T = 10K$ (gauche), $\Delta T = 360K$ (droite) et pour $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ (du haut vers le bas) à différentes valeurs de l'émissivité.

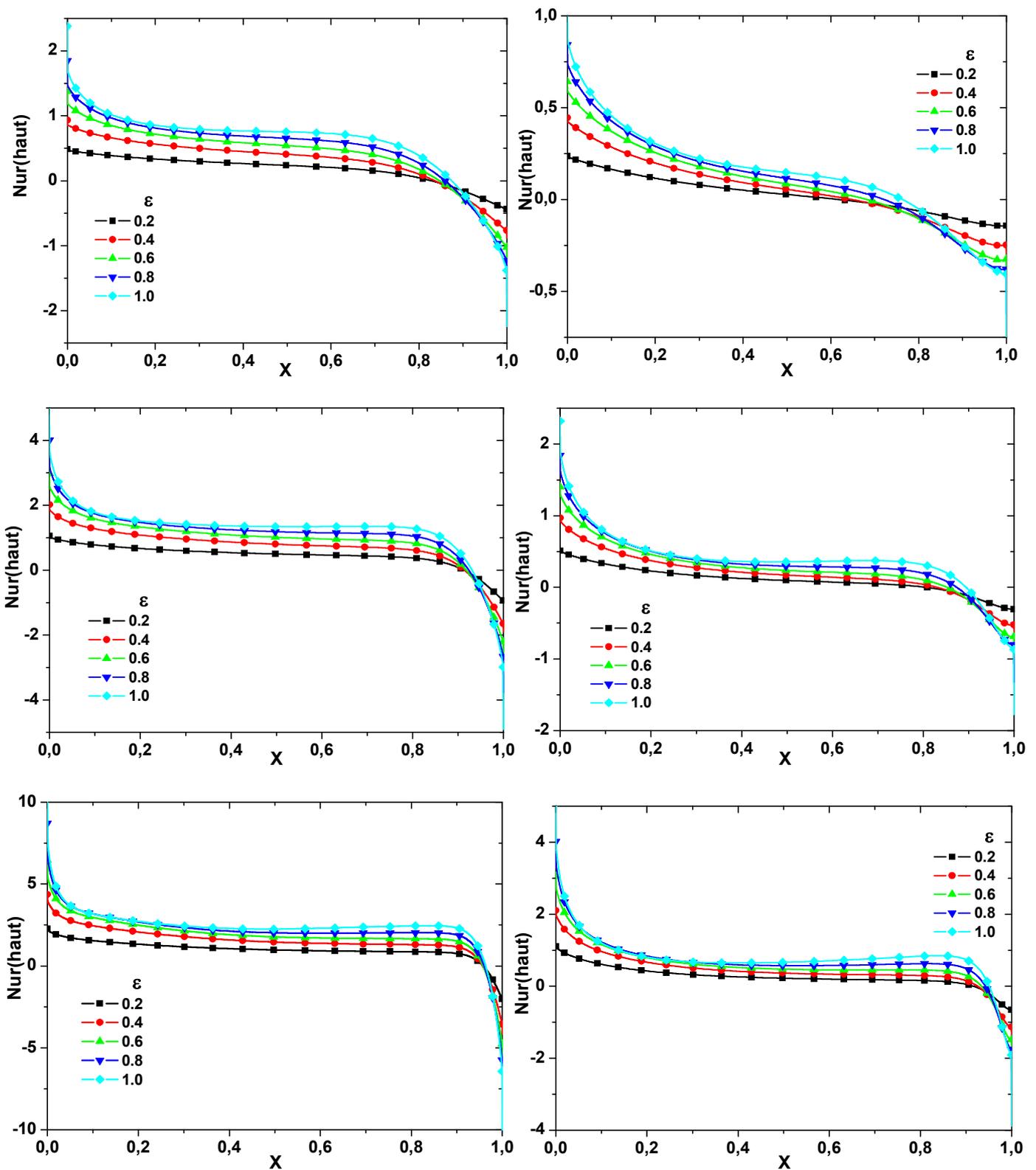


Figure 5.11 : Profils du nombre Nusselt radiatif à la paroi horizontale supérieure pour $\Delta T = 10K$ (gauche) , $\Delta T = 360K$ (droite) et pour $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ (de haut vers le bas) et à différentes valeurs de l'émissivité.

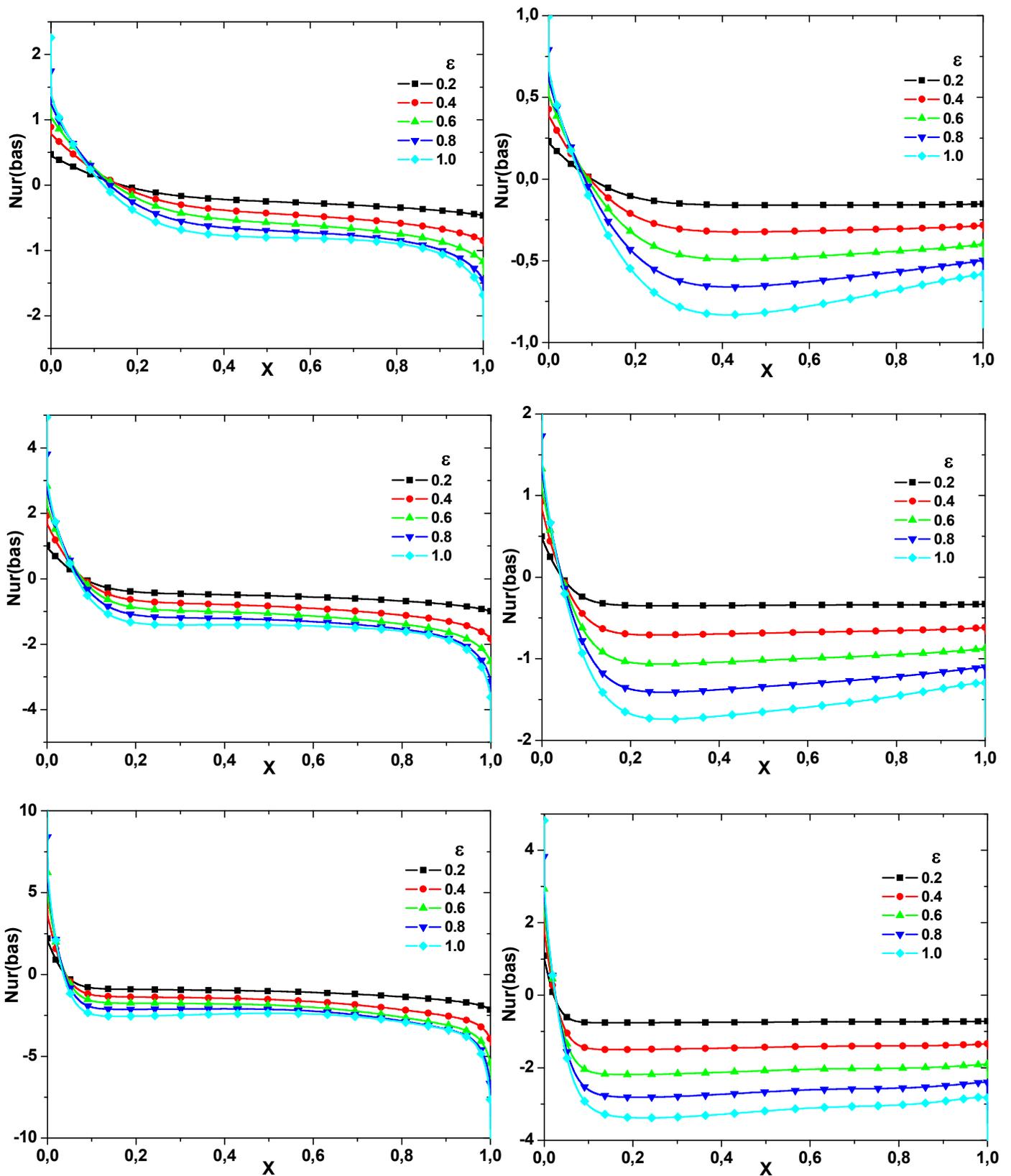


Figure 5.12: Profils du nombre Nusselt radiatif à la paroi horizontale inférieure pour $\Delta T = 10K$ (gauche), $\Delta T = 360K$ (droite) et pour $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ (de haut vers le bas) et à différentes valeurs de l'émissivité.

5.7.3 Effet du rayonnement sur la distribution des températures

La figure 5.13 illustre la distribution des températures au niveau des parois adiabatiques horizontales, et montre que le rayonnement influe énormément sur les profils de température de la paroi inférieure pour un écart de température élevé ($\Delta T = 360K$) quand $Ra \geq 10^5$, ce qui dénote que l'augmentation de l'émissivité provoque un échauffement de la paroi inférieure, alors que la paroi supérieure est un peu refroidie du côté de la paroi chaude et réchauffée du côté de la paroi froide pour une valeur de Rayleigh $Ra = 10^4$. La paroi supérieure présente des faibles variations lorsque les écarts ΔT sont élevés comparée à ce qui se passe au niveau de la paroi inférieure. Pour un Rayleigh plus élevé ($Ra \geq 10^5$), la paroi supérieure se refroidit intégralement lorsque l'émissivité augmente mais avec des intensités faibles pour $\Delta T = 360K$.

La figure 5.14 montre que si l'émissivité des parois augmente, la distribution de la température sur le plan médian horizontal pour un écoulement hors Boussinesq ($\Delta T = 360K$) garde la même évolution que celle obtenue au cas Boussinesq ($\Delta T = 10K$), mais avec un échauffement dans la plus grande partie du plan ($Y=0.5$).

Dans le cas de larges écarts de température, et au voisinage de la paroi adiabatique supérieure, la distribution de la température sur le plan médian vertical ($X = 0.5$) telle qu'elle est présentée sur la figure 5.15, n'est pas beaucoup affectée par le rayonnement, principalement pour les faibles valeurs de Rayleigh, ($Ra = 10^4$). Par ailleurs, la température garde la même évolution que celle pour le cas de faible ΔT mais avec des intensités plus élevées.

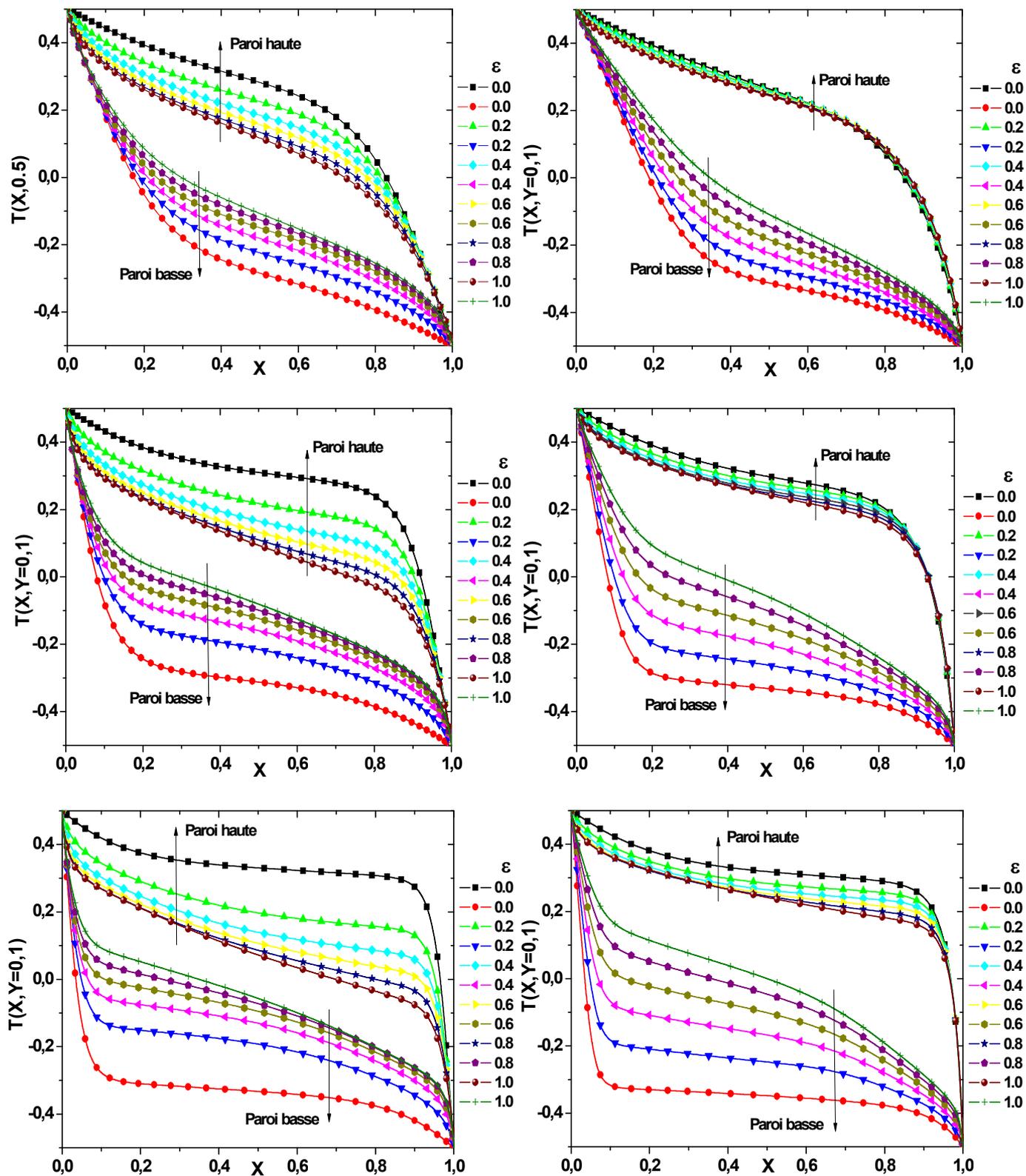


Figure 5.13 : Distribution de la température aux parois adiabatiques supérieure et inférieure pour un écart $\Delta T = 10K$ (gauche) et $\Delta T = 360K$ (droite) et pour $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ (de haut vers le bas) pour différentes valeurs de l'émissivité.

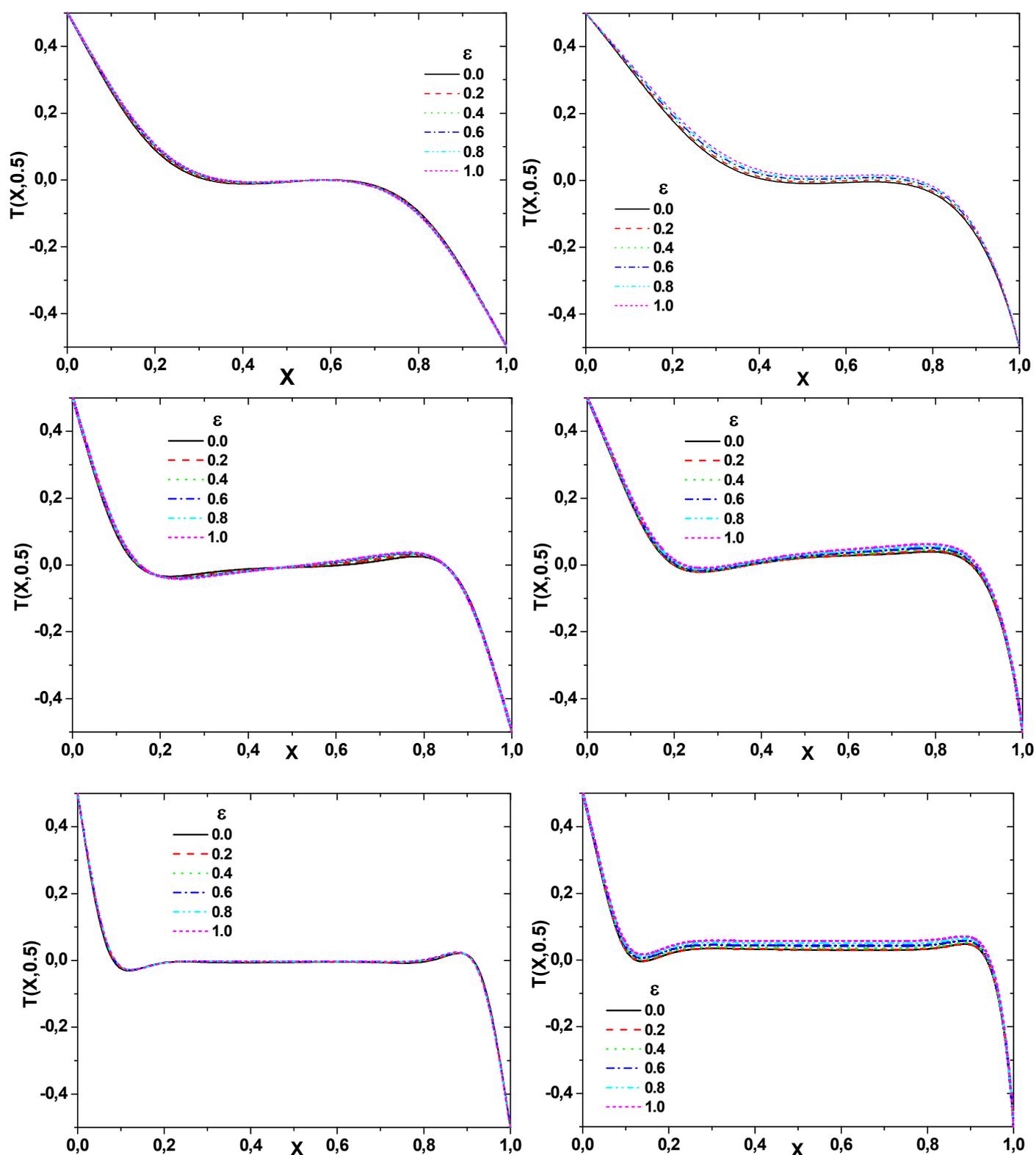


Figure 5.14 : Distribution de la température sur le plan médian horizontal de la cavité ($Y = 0.5$), pour $\Delta T = 10K$ (gauche), $\Delta T = 360K$ (droite) et pour $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ (de haut vers le bas) à différentes valeurs de l'émissivité

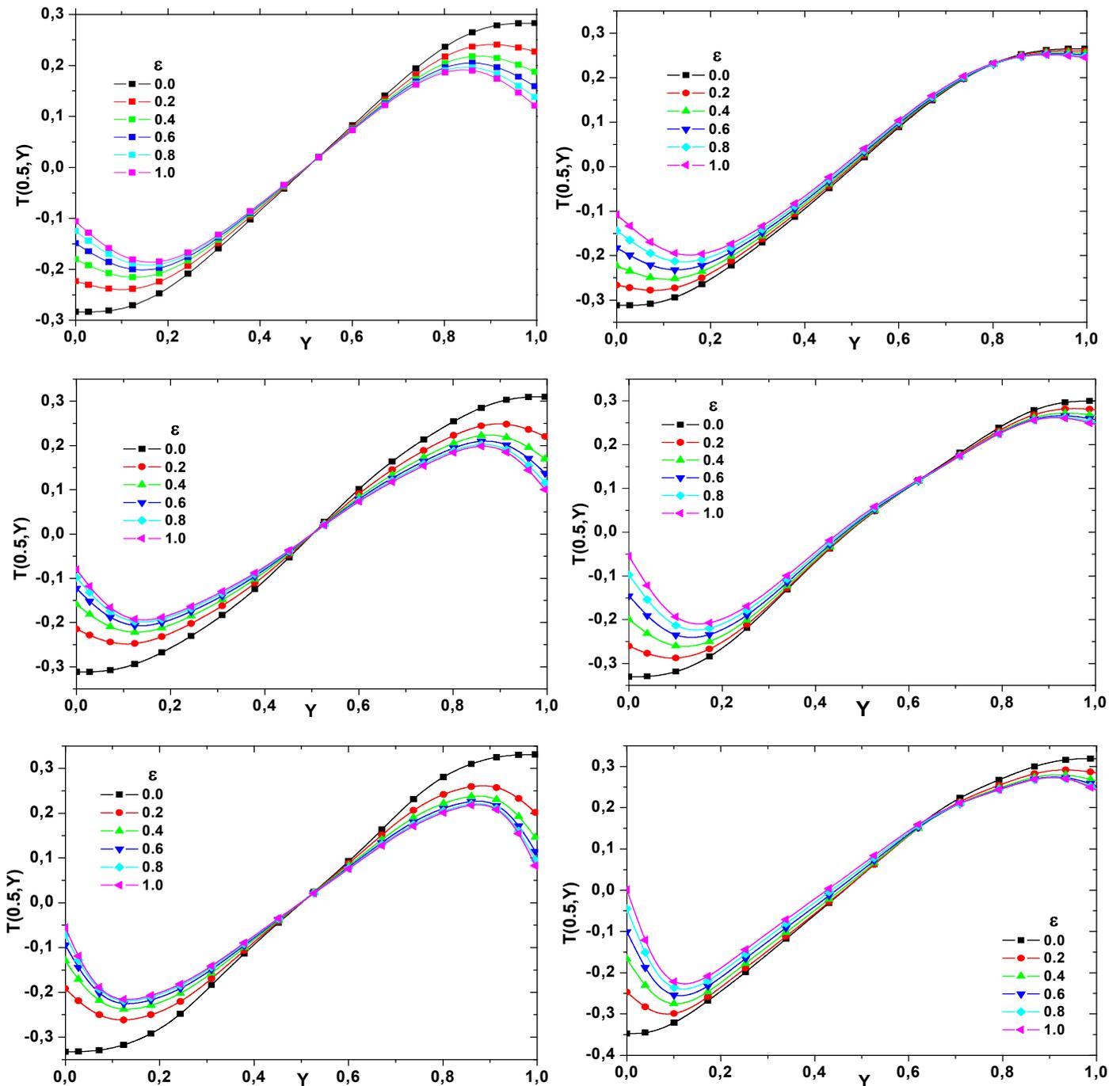


Figure 5.15 : Profils de la température sur le plan médian vertical de la cavité ($X = 0.5$), pour $\Delta T = 10K$ (gauche), $\Delta T = 360K$ (droite) et $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ (de haut vers le bas) pour différentes valeurs de l'émissivité.

5.7.4 Effet du rayonnement sur les champs dynamiques

Concernant le régime dynamique dans le cas hors Boussinesq (Large ΔT), et en comparaison avec le cas Boussinesq (Faible ΔT), la figure 5.16 montre que le rayonnement de surface n'a que peu d'effet sur la distribution de la vitesse horizontale à $X = 0.5$ près de la paroi adiabatique supérieure, et ce pour de faibles valeurs de Rayleigh, ($Ra \leq 10^5$).

L'épaisseur de la couche limite dynamique diminue au niveau de la paroi inférieure et augmente au niveau de la paroi supérieure pour de grandes valeurs de Rayleigh. Les vitesses maximales diminuent en fonction de l'émissivité, en particulier près de la paroi inférieure et pour de grandes valeurs de Rayleigh ($Ra = 10^6$). En dehors de la couche limite, le fluide est également affecté par le rayonnement.

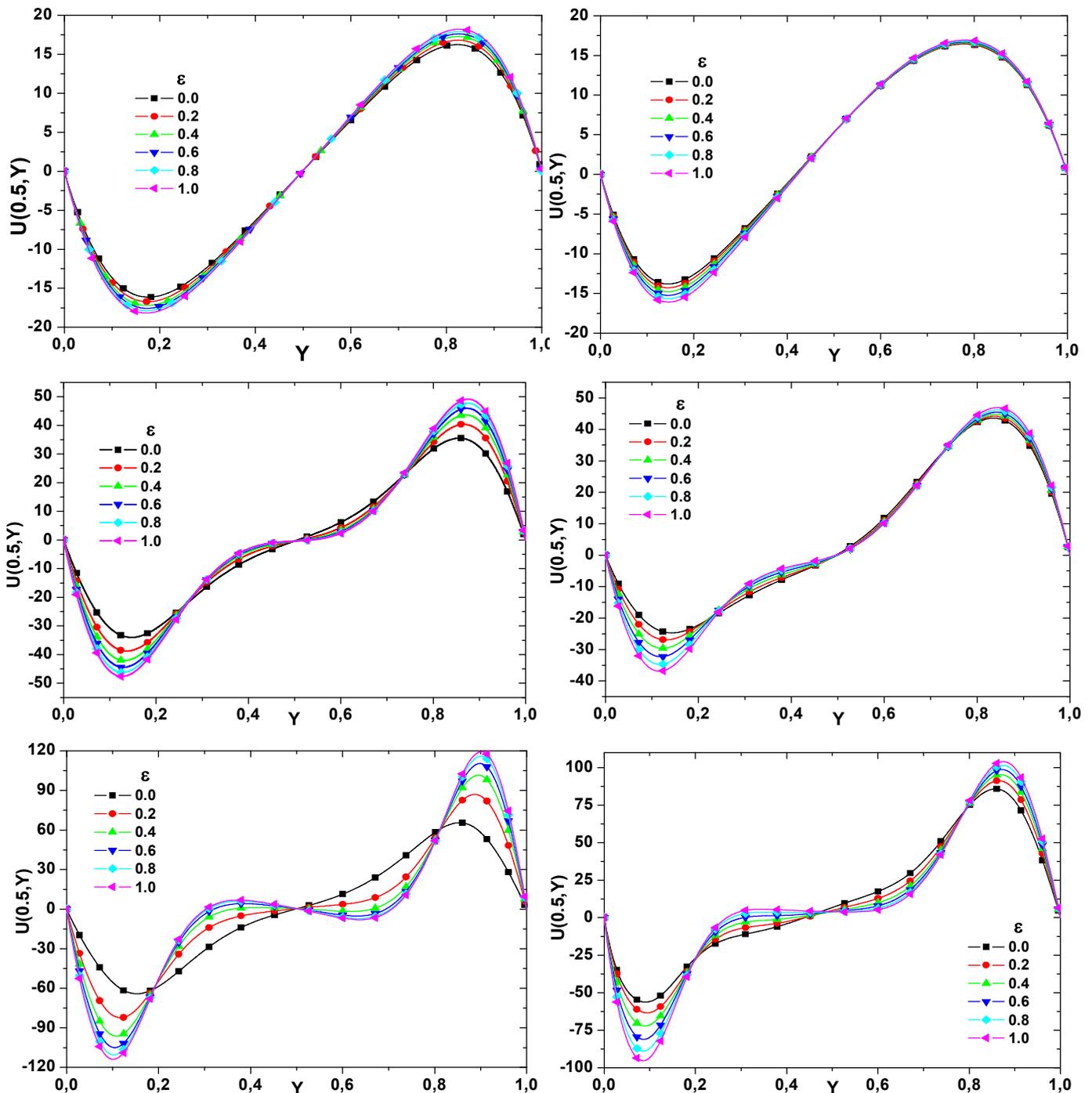


Figure 5.16 : Profils des vitesses horizontales à $X = 0.5$, pour $\Delta T = 10K$ (gauche), $\Delta T = 360K$ (droite) et $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ (de haut vers le bas) pour différentes valeurs de l'émissivité.

Concernant la vitesse verticale au plan médian horizontal, et lorsque $\Delta T = 360K$, la figure 5.17 n'illustre pratiquement pas de changement sur les profils de vitesse en raison du rayonnement, notamment quand le nombre de Rayleigh est élevé ($Ra \geq 10^5$), alors qu'ils sont légèrement affectés par l'effet de l'émissivité lorsque $\Delta T = 10K$, particulièrement pour de faibles valeurs de Ra où les valeurs maximales de la vitesse sont un peu plus élevées.

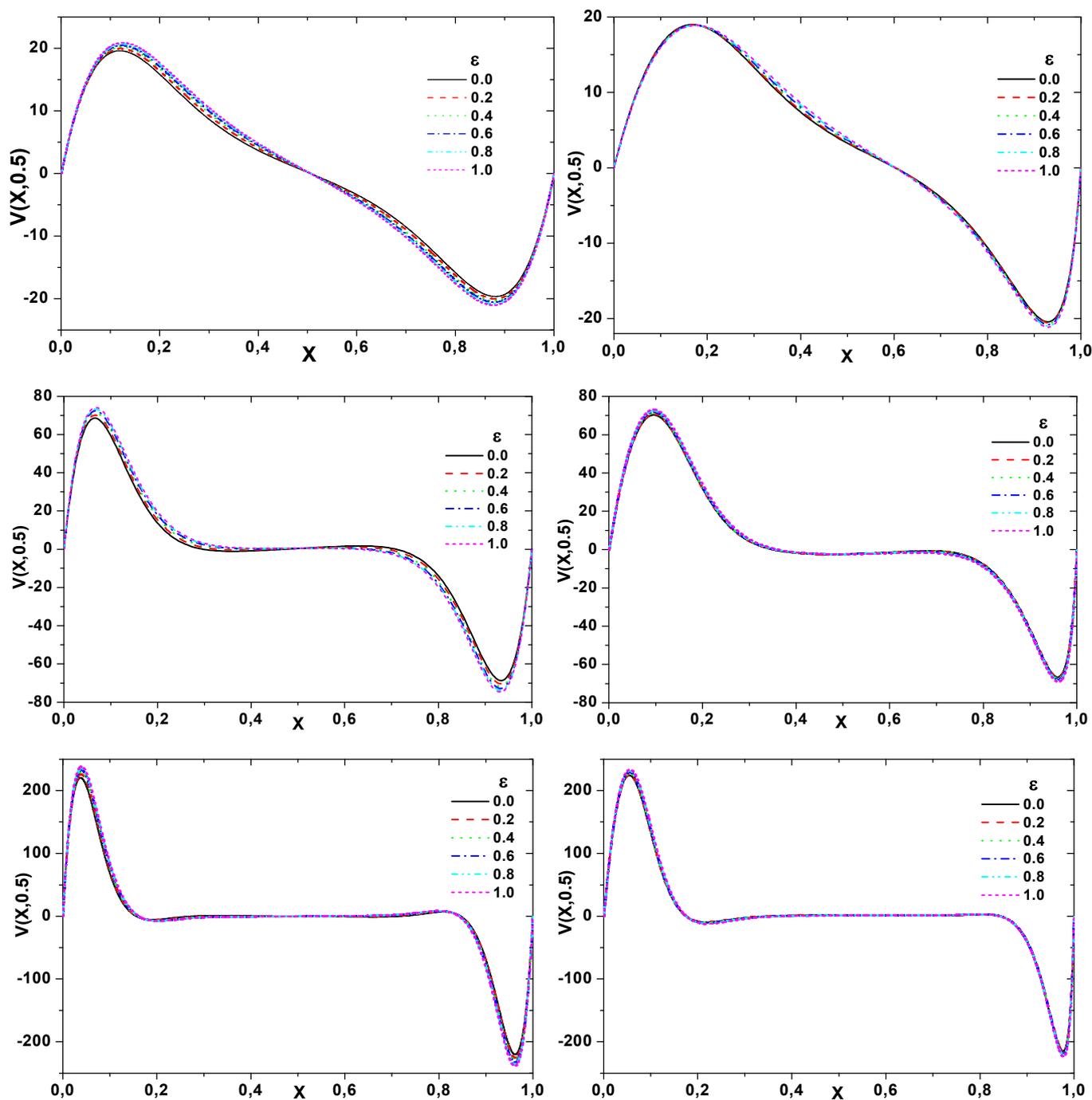


Figure 5.17 : Profils des vitesses verticales à $Y = 0.5$, pour $\Delta T = 10K$ (gauche), $\Delta T = 360K$ (droite) et $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ (de haut vers le bas) pour différentes valeurs de l'émissivité.

Dans le cas de larges différences de température ΔT , le nombre de Nusselt moyen convectif présenté sur la figure 5.18 décroît avec l'émissivité quelque soit la valeur du Rayleigh, et possède un comportement variable en fonction du nombre de Rayleigh pour le cas de faibles ΔT (une augmentation pour $Ra = 10^3$, une augmentation puis une diminution pour $Ra = 10^3$ et une augmentation pour $Ra \geq 10^5$).

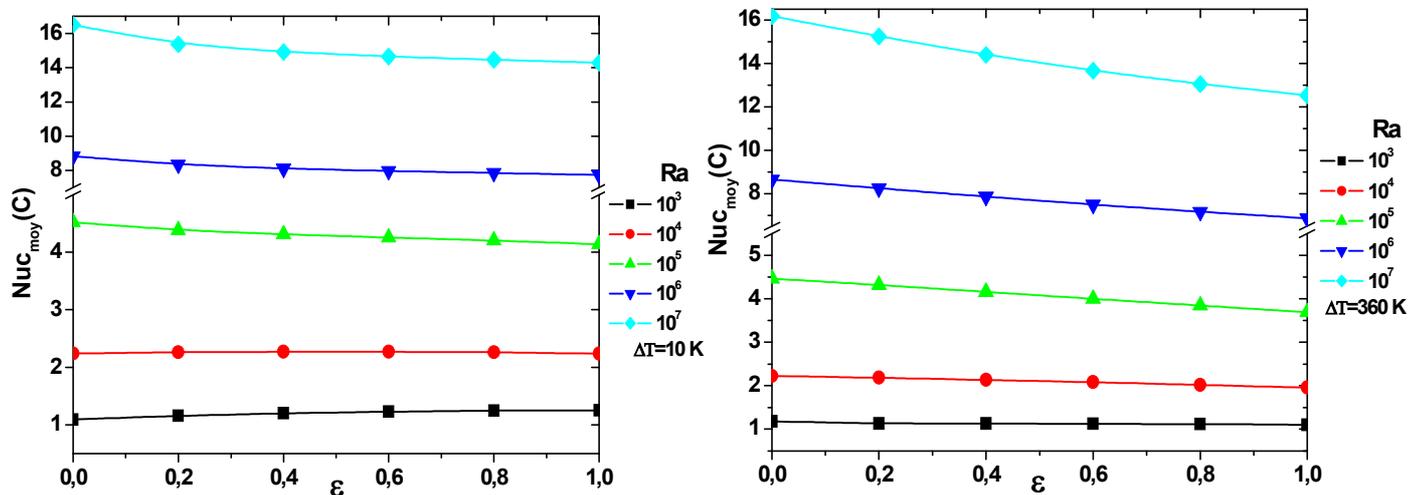


Figure 5.18: Nombre de Nusselt moyen convectif en fonction de l'émissivité pour $\Delta T = 10K$ (gauche), $\Delta T = 360K$ (droite) et différentes valeurs de Ra .

D'autre part, la figure 5.19 montre que le Nusselt moyen radiatif augmente avec de l'émissivité des parois et que le taux de variation pour le cas de larges ΔT est égal à la moitié de celui observé au cas de faibles ΔT .

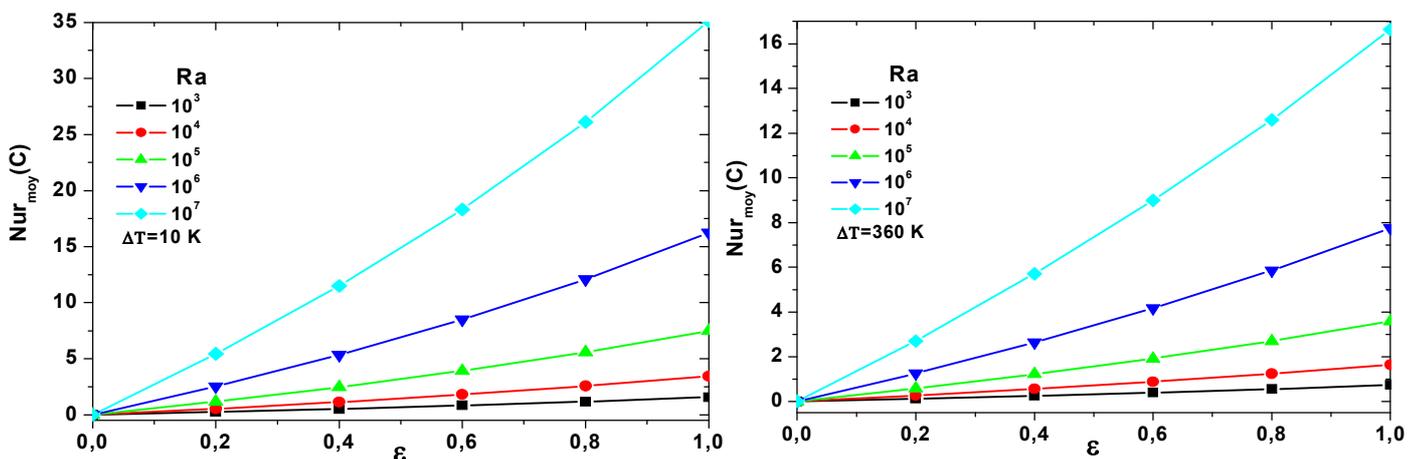


Figure 5.19 : Evolution du nombre de Nusselt moyen radiatif en fonction de l'émissivité pour $\Delta T = 10K$ (gauche) et $\Delta T = 360K$ (droite), pour différentes valeur de Ra .

5.7.5 Effet du rayonnement sur la pression thermodynamique

L'évolution de la pression thermodynamique avec l'émissivité des parois est présentée sur la figure 5.20. On constate que la pression thermodynamique augmente avec l'émissivité pour des

propriétés constantes et variables. Pour ces dernières et quand $Ra = 10^6, 10^7$ à des valeurs $\varepsilon = 0.8$ et $\varepsilon = 0.7$ la pression thermodynamique dépasse l'unité, signifiant que dans cette situation la pression thermodynamique est supérieure à la pression de référence ($p_{th} > p_0$).

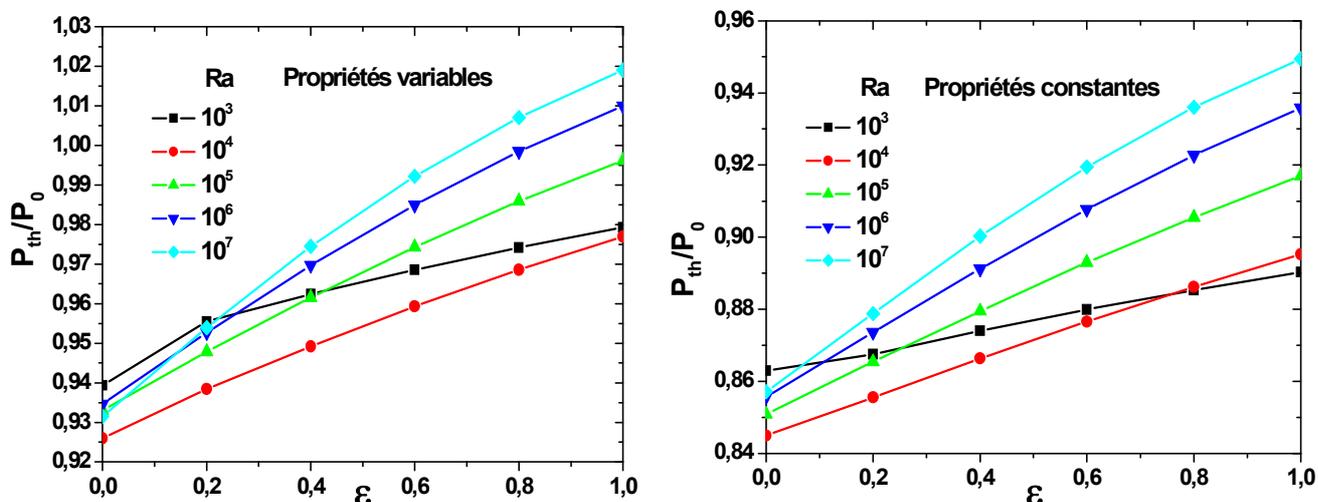


Figure 5.20 : Evolution de la pression thermodynamique en fonction de l'émissivité pour $\Delta T = 360K$ et pour différentes valeurs de Ra .

Etant donné que les propriétés physiques varient en fonction de la température, elles modifient considérablement l'échange radiatif le long des parois actives et adiabatiques pour toutes les valeurs du nombre de Rayleigh (Fig. 5.21, 5.22). La variation de ces propriétés selon la loi de Sutherland réduit le transfert radiatif au niveau des parois actives globalement, et le fait accroître au niveau des parois adiabatiques supérieure et inférieure.

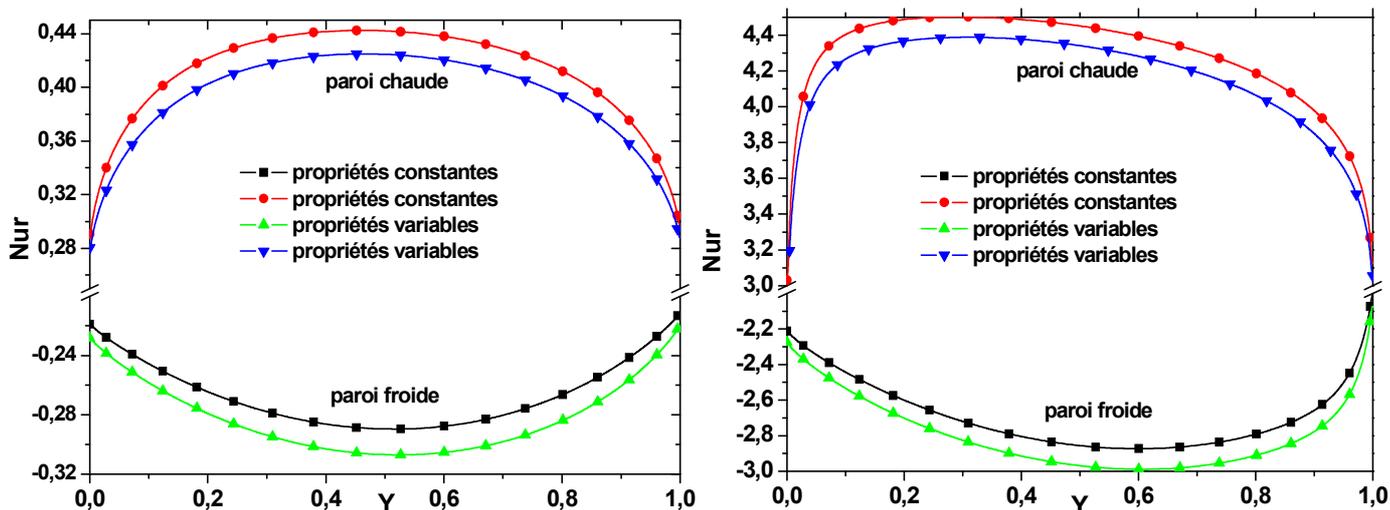


Figure 5.21 : Profils du nombre Nusselt radiatif aux parois actives pour $\Delta T = 360K$ à $Ra = 10^4$ (gauche) et $Ra = 10^6$ (droite) pour $\varepsilon = 0.4$.

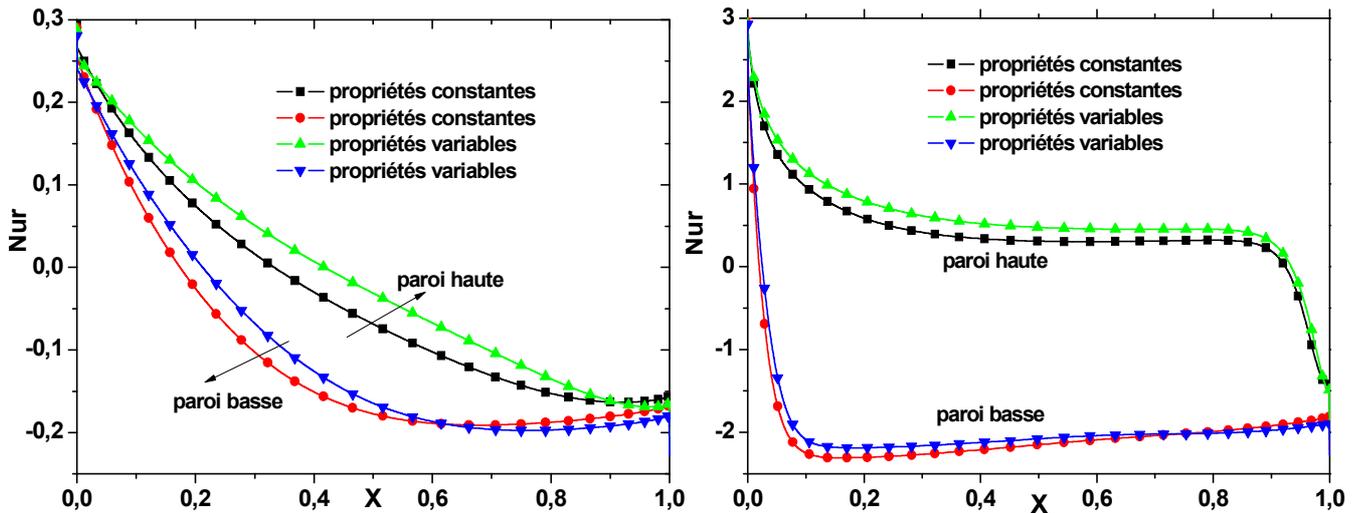


Figure 5.22 : Profils du nombre Nusselt radiatif aux parois adiabatiques pour $\Delta T = 360K$ à $Ra = 10^4$ (gauche) et $Ra = 10^6$ (droite) pour $\varepsilon = 0.4$.

5.8. CONCLUSION

L'influence du rayonnement de surface sur l'écoulement de la convection naturelle hors boussinesq est analysé numériquement dans une cavité carrée remplie d'air supposé un milieu transparent. D'après l'ensemble des résultats trouvés, les principales conclusions de ce chapitre peuvent se résumer ainsi :

- En présence du rayonnement et de larges écarts de température, les champs dynamique et thermique perdent leurs symétries trouvées pour le cas de faibles gradients thermiques.
- le rayonnement de surfaces en écoulement hors Boussinesq modifie l'échange convectif essentiellement sur la paroi chaude et réduit de moitié l'échange radiatif.
- pour des faibles valeurs de Rayleigh et à des gradients thermiques élevés, le régime dynamique n'est pas beaucoup influencé par le rayonnement de surfaces.
- les régions les plus affectées par le rayonnement sont la paroi chaude et la paroi adiabatique inférieure, ainsi que les régions proches de ces deux parois.
- en général, l'augmentation de l'émissivité des parois conduit à une réduction dans l'échange convectif et à une augmentation dans l'échange radiatif.
- la variation des propriétés physiques de l'air avec la température modifie considérablement le transfert radiatif au niveau des parois de l'enceinte.
- Les champs dynamiques et thermiques sont également affectés par le rayonnement de surfaces dans la région centrale de la cavité.

REFERENCES

- [1] **C. Poljack**, Analysis of heat interchange by radiation between diffuse surfaces . *Tech. Phys. USSR*, 1, pp. 555-590, 1935.
- [2] **H.C. Hottel**, Radiant heat transmission. 3ème éd. New York, *Mc Graw-Hill Book Company*, 1954.
- [3] **B. Gebhart**, Unified treatment for thermal radiation transfer processes – Gray, diffuse, radiators and absorbers, *ASME*, 57-A-34. 1957.
- [4] **W. Hong, S. Xin, P. Le Quéré**, Étude numérique du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces en cavité carrée remplie d'air. *C. R. Mécanique*, Vol. 334, pp. 48–57, 2006.

Chapitre 6

***Couplage convection naturelle
champ magnétique sous
l'approximation faible nombre de
Mach***

6.1. INTRODUCTION

Ce chapitre a pour objectif d'appréhender les mécanismes mis en jeu lors de l'application d'un gradient de champ magnétique sur une cavité remplie d'air. Supposé être une substance paramagnétique, le fluide est soumis à un large gradient de température, même dans un environnement de gravité zéro où un mouvement de convection peut se générer. Le système d'équations utilisé pour décrire ce problème est celui de l'approximation faible nombre de Mach. De plus, les résultats seront comparés à ceux obtenus pour le cas de faibles gradients thermiques et le cas Boussinesq.

6.2. LA SUSCEPTIBILITE MAGNETIQUE DES MATERIAUX

Les substances magnétiques sont les milieux susceptibles de s'aimanter dans un champ magnétique, c'est-à-dire de créer un champ magnétique propre. D'après leurs propriétés magnétiques, ces composés se divisent en trois groupes principaux : diamagnétiques, paramagnétiques et ferromagnétiques. L'aimantation M est le paramètre qui correspond à la réponse d'un matériau magnétique à un champ magnétique, elle est donnée par :

$$M = \chi_m H \quad (6.1)$$

H étant l'intensité du champ magnétique imposé.

La constante de proportionnalité χ_m est un nombre sans dimension appelé "susceptibilité magnétique spécifique" du matériau. Les substances paramagnétiques acquièrent une faible aimantation dirigée dans le sens du champ H ($\chi_m > 0$). Les substances diamagnétiques acquièrent une très faible aimantation dirigée en sens inverse de H ($\chi_m < 0$). Les matériaux ferromagnétiques sont des substances jouissant de propriétés magnétiques particulières. On peut rapporter les susceptibilités magnétiques à l'unité de masse. On a la relation :

$$\chi = \chi_m / \rho \quad (6.2)$$

La susceptibilité paramagnétique est inversement proportionnelle à la température absolue. On appelle constante de CURIE la constante de proportionnalité C relative à une mole de matière [1]

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (6.3)$$

Cette loi dite loi de Curie, est suivie rigoureusement par l'oxygène gazeux, les sels minéraux en solution et certains solides. Ce sont des corps paramagnétiques parfaits.

6.3. FORCES MAGNETIQUES

Un champ magnétique uniforme n'exerce ni force ni couple sur un corps diamagnétique ou paramagnétique puisque le moment magnétique est constamment parallèle au champ magnétique. Pour les corps ferromagnétiques ; que le champ magnétique appliqué soit

uniforme ou non, les propriétés ferromagnétiques font que la substance est soumise à une force dépendant du gradient du champ nécessairement existant par la création d'un champ magnétique induit non uniforme.

Pour des particules chargées q d'une substance électro conducteur se déplaçant dans une région de l'espace à la vitesse \vec{V} où règne un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{b} ; la particule est alors soumise à une force électromagnétique (ou force de Lorentz) telle que [2,3] :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{b}) \quad (6.4)$$

Cette force à deux composantes :

$$\vec{F}_e = q\vec{E} : \text{force électrostatique.}$$

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{b} = q\vec{E}_m : \text{force magnétique.}$$

Que ce soit pour le diamagnétisme ou le paramagnétisme, l'expression de la force magnétique appliquée aux matériaux linéaires paramagnétiques et diamagnétiques s'exprime sous la forme dite force de Kelvin [3] :

$$\vec{F}_{kelvin} = \frac{\chi_m(T)}{2\mu_m} \nabla b^2 = \frac{\rho\chi(T)}{2\mu_m} \nabla b^2 \quad (6.5)$$

Où b est l'induction magnétique (T) de la distribution de champ en absence de substance magnétique.

Dans le système de coordonnées cartésiennes bidimensionnel, cette force est donnée par :

$$\vec{F}_{kelvin} = \frac{\chi_m(T)}{2\mu_m} \nabla b^2 = \frac{\rho\chi(T)}{2\mu_m} \left(\frac{\partial b^2}{\partial x} \vec{ex} + \frac{\partial b^2}{\partial y} \vec{ey} \right) \quad (6.6)$$

6.4. CONFIGURATION PHYSIQUE

La géométrie spatiale considérée est illustrée sur la figure 6.1, il s'agit d'une cavité carrée de côté H contenant de l'air supposé être un gaz parfait et considéré comme une substance paramagnétique, les parois verticales sont maintenues à des températures T_C et T_F différentes, $T_C > T_F$, tandis que les parois horizontales sont supposées adiabatiques.

Nous supposons davantage que la cavité est soumise à un gradient vertical, Fig. 6.1a, (ou horizontal, Fig. 6.1b) uniforme de champ magnétique extérieur exciteur.

En outre, Les variations spatiales des champs magnétiques sont modélisées à l'aide de profils gaussiens sous les formes suivantes [4]:

- Dans le cas d'un gradient vertical du champ magnétique :

$$b(y) = b_0 e^{-\lambda(y-y_m)^2} \tag{6.7}$$

- Dans le cas d'un gradient horizontal du champ magnétique :

$$b(x) = b_0 e^{-\lambda(x-x_m)^2} \tag{6.8}$$

avec :

$$\lambda = -4Ln(10^{-2}) \tag{6.9}$$

y_m et x_m représentent l'ordonnée ou l'abscisse du point où le champ est maximum.

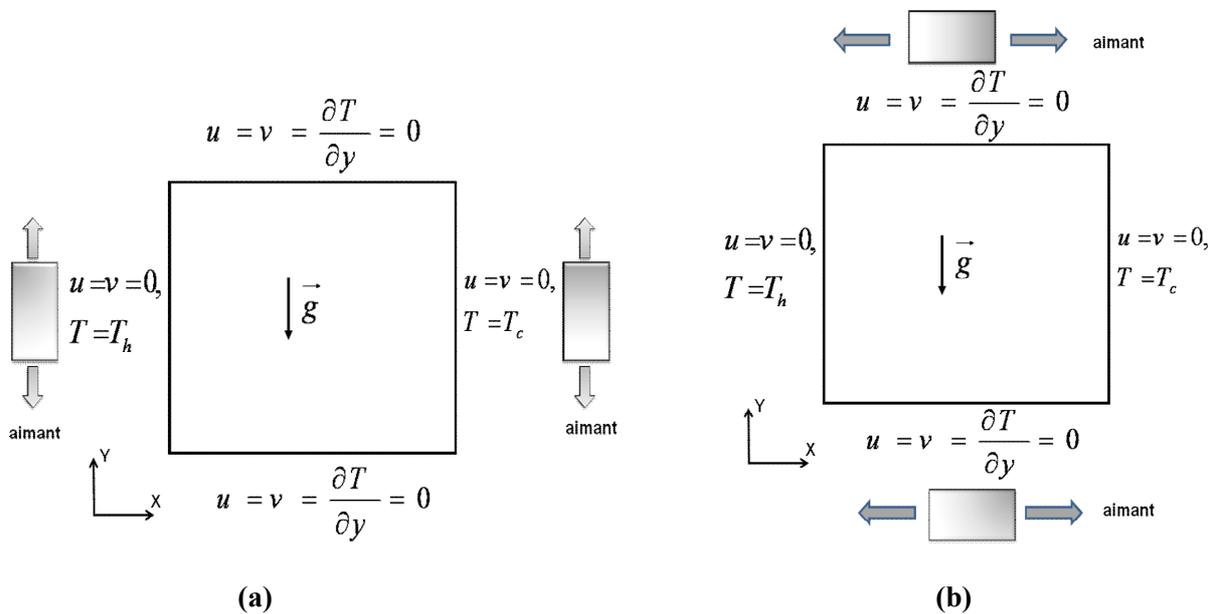


Figure 6.1: Configuration physique.

6.5. FORMULATION MATHÉMATIQUE

Dans le modèle faible nombre de Mach, les équations adimensionnelles décrivant le problème étudié sont ceux données dans les chapitres précédents (équations à faible nombre de Mach).

La force magnétique peut être incluse en tant que force extérieure supplémentaire dans les équations faible nombre de Mach comme suit:

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \nabla V \right) = \rho \vec{g} + \frac{\chi \rho}{2\mu_m} \nabla b^2 - \nabla p_{dyn} + \nabla \cdot \mu \nabla V + \frac{1}{3} \nabla \mu \nabla \cdot V \tag{6.10}$$

Cependant, lorsque χ et ρ sont des constantes, la convection ne se produit pas. En

supposant que cet état est représenté par :

$\vec{V} = 0$, $\rho = \rho_0$, $\chi = \chi_0$, $p = p_0$ et $T = T_0$, l'équation (6.10) donne :

$$0 = \rho_0 \vec{g} - \nabla p_0 + \frac{\chi_0 \rho_0}{2\mu_m} \nabla b^2 \quad (6.11)$$

Avec P_0 la pression statique.

Lorsqu'une différence de température existe, la susceptibilité magnétique et la densité change avec la température. La pression p_{dyn} peut donc être exprimée comme la somme d'une pression p' perturbée et la pression statique P_0 :

$$p_{dyn} = p' + p_0 \quad (6.12)$$

La différence entre les équations (6.10) et (6.11) est :

$$\rho \left((\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = (\rho - \rho_0) \vec{g} - \nabla p' + \nabla \cdot \mu \nabla \vec{V} + \frac{1}{3} \nabla \mu \nabla \cdot \vec{V} + \frac{\chi \rho - \chi_0 \rho_0}{2\mu_m} \nabla b^2 \quad (6.13)$$

Pour le cas Boussinesq, on utilise la même procédure d'approximation de la densité dans le terme d'Archimède, pour approximer la susceptibilité dans le terme de la force magnétique. Et qui peut être représentée en utilisant le développement en série Taylor, comme suit :

$$\rho \chi = \rho_0 \chi_0 + \left[\frac{\partial(\rho \chi)}{\partial T} \right]_0 (T - T_0) \quad (6.14)$$

Pour un gaz parfait : $\rho = \frac{p}{rT}$, on a donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{\rho}{T} \quad (6.15)$$

En plus :

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} = \frac{\partial(C/T)}{\partial T} = -\frac{C}{T^2} = -\frac{\chi}{T} \quad (6.16)$$

Il vient que :

$$\rho \chi = \rho_0 \chi_0 + \left[\frac{\partial(\rho \chi)}{\partial T} \right]_0 (T - T_0) = \rho_0 \chi_0 + \left[\rho \frac{\partial \chi}{\partial T} - \chi \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_0 (T - T_0) \quad (6.17)$$

Tenir compte de (6.15) et (6.16), avec $\frac{1}{T_0} = \beta$ (pour un gaz parfait), on obtient finalement :

$$\rho\chi - \rho_0\chi_0 = -2\beta\rho_0\chi_0(T - T_0) \quad (6.18)$$

On utilise les mêmes paramètres d'adimensionnement, auxquels on ajoute les grandeurs $\chi^* = \chi / \chi_0$, $\mu_m^* = \mu_m / \mu_{m0}$ et $B = \frac{b}{b_0}$ pour adimensionner la susceptibilité, la perméabilité et le champ magnétique respectivement. Les équations bas Mach sont alors donnés par :

Pour un gradient horizontal de champ magnétique :

$$\begin{aligned} \rho^* \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = & -\frac{\partial \Pi}{\partial X} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu^* \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu^* \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{1}{3} \nabla \mu^* \cdot \nabla \vec{V} \right\} \\ & + \gamma_m Ra \cdot \text{Pr} \frac{(\chi^* \rho^* - 1) \partial B^2}{4\varepsilon \partial X} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Pour un gradient vertical de champ magnétique.

$$\begin{aligned} \rho^* \left(\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = & -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} - Ra \text{Pr} \frac{\rho - 1}{2\varepsilon_b} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu^* \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu^* \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{1}{3} \nabla \mu^* \cdot \nabla \vec{V} \right\} \\ & + \gamma_m Ra \cdot \text{Pr} \frac{(\chi^* \rho^* - 1) \partial B^2}{4\varepsilon \partial Y} \end{aligned} \quad (6.20)$$

La susceptibilité magnétique adimensionnelle est donnée par :

$$\chi^* = \frac{1}{2\varepsilon_b \theta + 1} \quad (6.21)$$

Où :

$$\gamma_m = \frac{\chi_0 B_0^2}{\mu_m g H} \quad (6.22)$$

est un nombre sans dimension appelé nombre magnétique.

pour le cas Boussinesq, les équations sont données sous leurs formes adimensionnelles pour les deux configurations :

pour un gradient horizontal de champ magnétique:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = & -\frac{\partial \Pi}{\partial X} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right\} - \gamma_m Ra \cdot \text{Pr} T \frac{\partial B^2}{\partial X} \end{aligned} \quad (6.23)$$

pour un gradient vertical :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right\} + Ra \text{Pr} \theta - \gamma_m Ra \cdot \text{Pr} \theta \frac{\partial B^2}{\partial Y} \quad (6.24)$$

Dans le cas de zéro gravité (gravité nulle), et pour les deux approximations, Boussinesq et faible nombre de Mach, le terme g dans l'expression $\gamma_m Ra$ disparaît et la quantité $\gamma_m Ra$ est remplacée par un nombre sans dimension appelé nombre de Rayleigh magnétique donné par :

$$Ra_m = \frac{\chi_0 B_0^2 \beta \Delta T H^2}{\mu_m \nu \alpha} \quad (6.25)$$

Dans ce cas ($g = 0$), l'équation de quantité de mouvement est exprimée sous la forme (pour un gradient vertical de champ magnétique) :

Cas faible Mach :

$$\rho^* \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} + Ra_m \cdot \text{Pr} \frac{(\chi^* \rho^* - 1) \partial B^2}{4\epsilon \partial Y} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu^* \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu^* \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{1}{3} \nabla \mu^* \nabla \bar{V} \right\} \quad (6.26)$$

Cas Boussinesq :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right\} - Ra_m \cdot \text{Pr} \theta \frac{\partial B^2}{\partial Y} \quad (6.27)$$

6.6. VALIDATION

Afin de tester la validité des résultats numériques obtenus, nous avons effectué des calculs par rapport au champ dynamique et thermique de l'écoulement dans le cas de la convection naturelle dans l'approximation Boussinesq, dans une cavité carrée différentiellement chauffée, sous des conditions qui se rapprochent de celles utilisées par Tonino et *al* [4].

Des calculs numériques ont été effectués par [4] pour l'air ($\text{Pr} = 0.71$) sur l'effet du paramètre

Gm , $Gm = \frac{\chi_0 H^2 b^2}{\mu_m \nu^2}$ et qui correspond pour notre cas au nombre magnétique

$\gamma_m = \frac{\chi_0 B_0^2}{\mu_m g H} = \frac{\text{Pr} Gm}{Ra} \frac{\Delta T}{T_0}$, sur la convection naturelle dans la cavité, pour un nombre de

Rayleigh ($Ra = 10^5$), pour une différence de température $\Delta T = 5 K$ et une température de référence $T_0 = 293 K$,

Le nombre de Nusselt convectif moyen de la paroi chaude, (Tableau 6.1), est comparé aux résultats de [4]. De ce tableau, il ressort une très bonne concordance de nos résultats avec ceux de la littérature.

Les figures 6.2 et 6.3, représentent les résultats numériques obtenu en utilisant notre code de calcul et ceux obtenus par [4] relatifs à la distribution des lignes de courant et isothermes, respectivement. Un excellent accord a été observé pour toutes les valeurs du paramètre Gm testées.

Tableau 1 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ra = 10^5$ et différentes valeurs de Gm .

Gm	0	2.5×10^5	10^6	4×10^6	9×10^6	1.6×10^7	2.5×10^7
Nu_c : [4]	4.525	4.522	4.480	3.8	5.305	6.649	7.635
Nu_c : notre travail	4.522	4.520	4.485	3.82	5,57	6.686	7.616

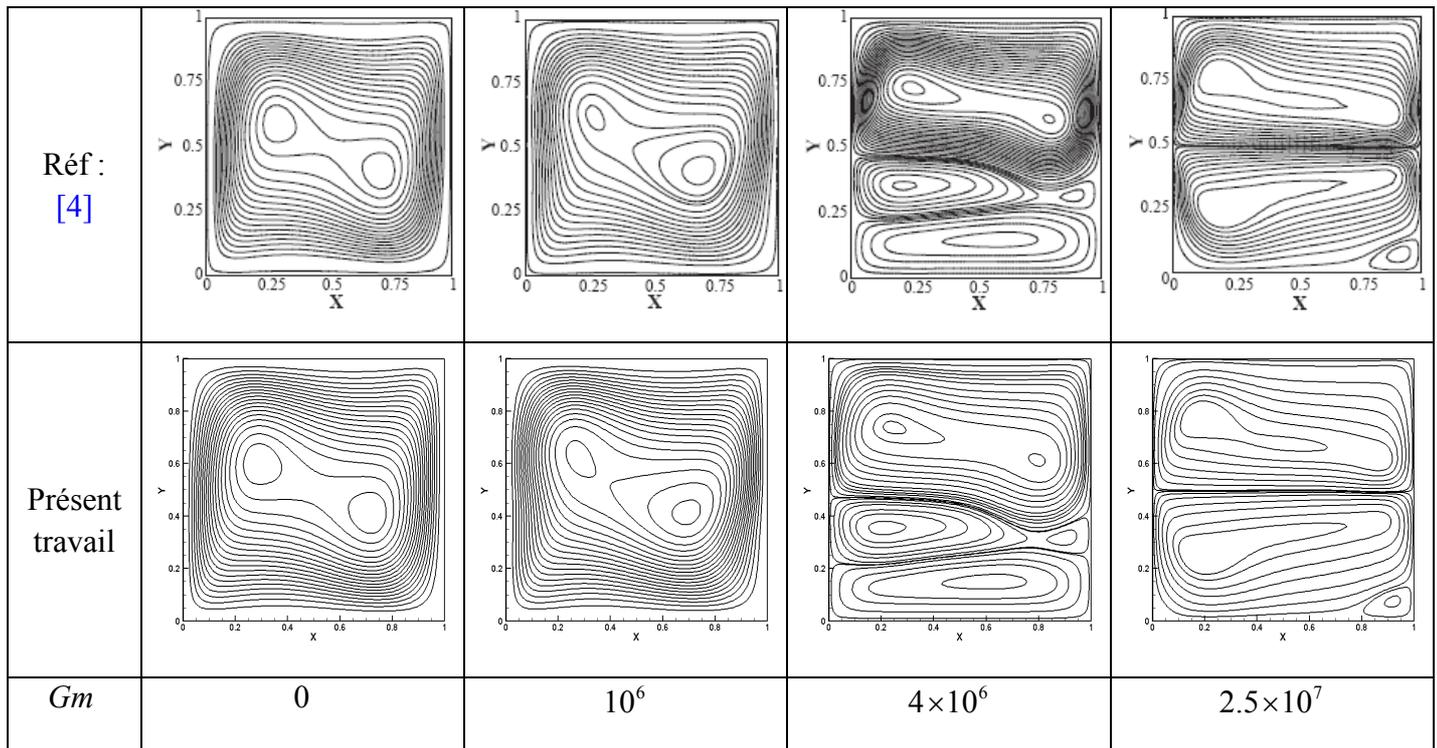


Figure 6.2 : lignes de courant pour $Ra = 10^5$ et différentes valeurs de Gm .

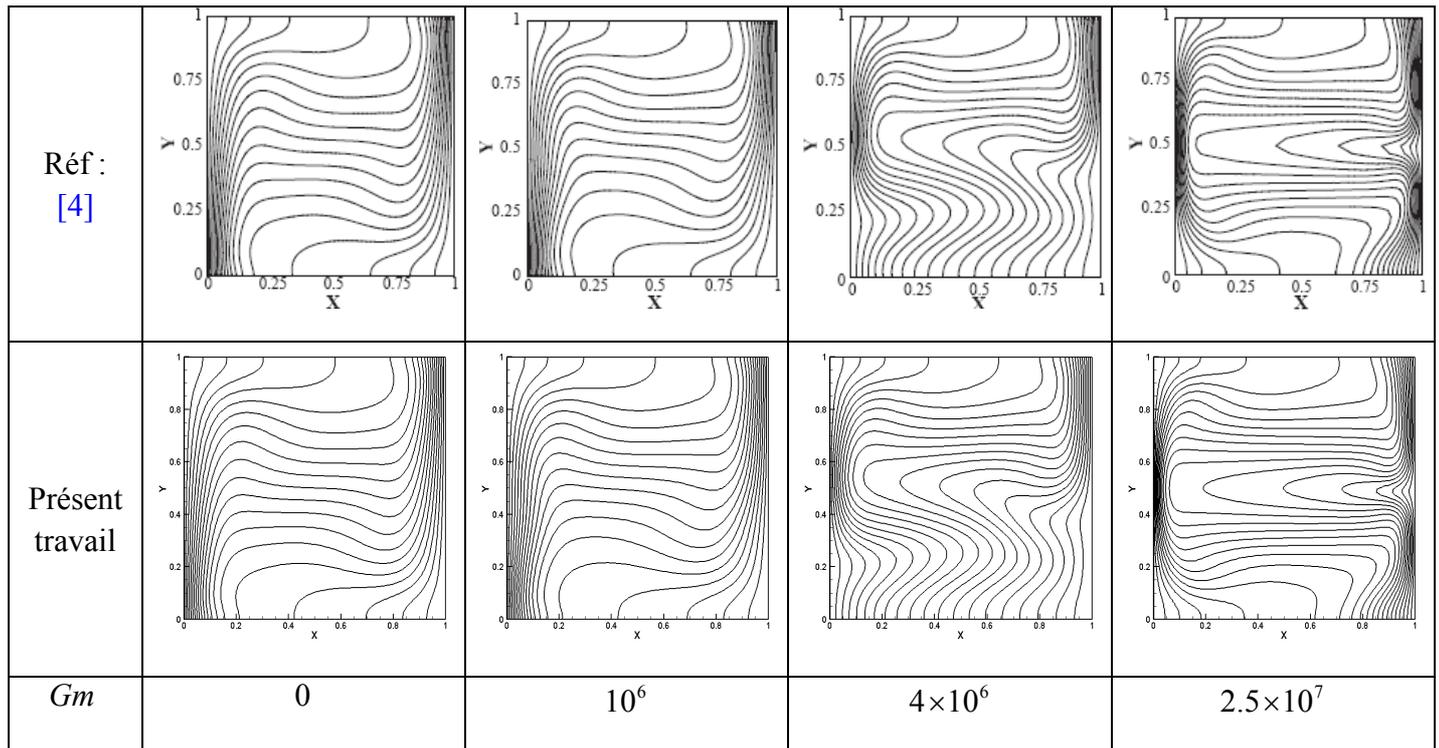


Figure 6.3 : isothermes pour $Ra = 10^5$ et différentes valeurs de Gm .

6.7. RESULTATS ET INTERPRETATIONS

L’objectif consiste à étudier l’influence de l’intensité d’un gradient magnétique vertical ou horizontal caractérisé par le nombre magnétique γ_m , sur la structure de l’écoulement et le transfert de chaleur du fluide dans la cavité. Dans le cas d’un environnement à gravité zéro ($g = 0$), l’influence du gradient de champ magnétique sur le mouvement convectif de l’air sera examiné, en analysant les effets sur la convection naturelle pour une grande différence de température. Dans tous les cas, les résultats seront comparés à ceux obtenus pour de faibles gradients thermiques.

En général, l’ensemble des résultats obtenus présentés en termes de lignes de courant, d’isothermes, de nombres de Nusselt local et moyen aux parois actives, montrent que, pour les deux cas ; en apesanteur ($g = 0$) ou en gravité terrestre, à faibles écarts de température on a toujours une convergence vers la solution incompressible où la solution faible Mach et la solution Boussinesq sont identiques.

6.7.1. Cas d’apesanteur (Zéro gravité)

En apesanteur, l’absence de poussée d’Archimède rend impossible la convection naturelle dans l’air. Ceci complique la réalisation des échanges thermiques, et une des pistes possible consiste à recréer une gravité artificielle à l’aide de l’effet d’un gradient de champ magnétique. L’application d’un gradient de champ magnétique induit une variation de la susceptibilité magnétique du gaz qui conduit ainsi à une variation spatiale de la force de Kelvin et peut donc, sous certaines conditions, créer un mouvement de convection.

Les figures 6.4, 6.5 illustrent les résultats de simulation numérique des courants fluides dans la cavité en apesanteur, soumis au champ magnétique produit par un aimant placé à $Y_m = 0.5$ pour $Ra_m = 10^4$ et $Ra_m = 10^6$. Ces résultats montrent qu'il est possible de recréer une convection thermique en apesanteur, à partir de sources de champ magnétiques bien choisies. Même pour une position $Y_m = 1$ de l'aimant, (Fig. 6.6), on peut observer des mouvements similaires à ceux de la convection naturelle thermogravitaire.

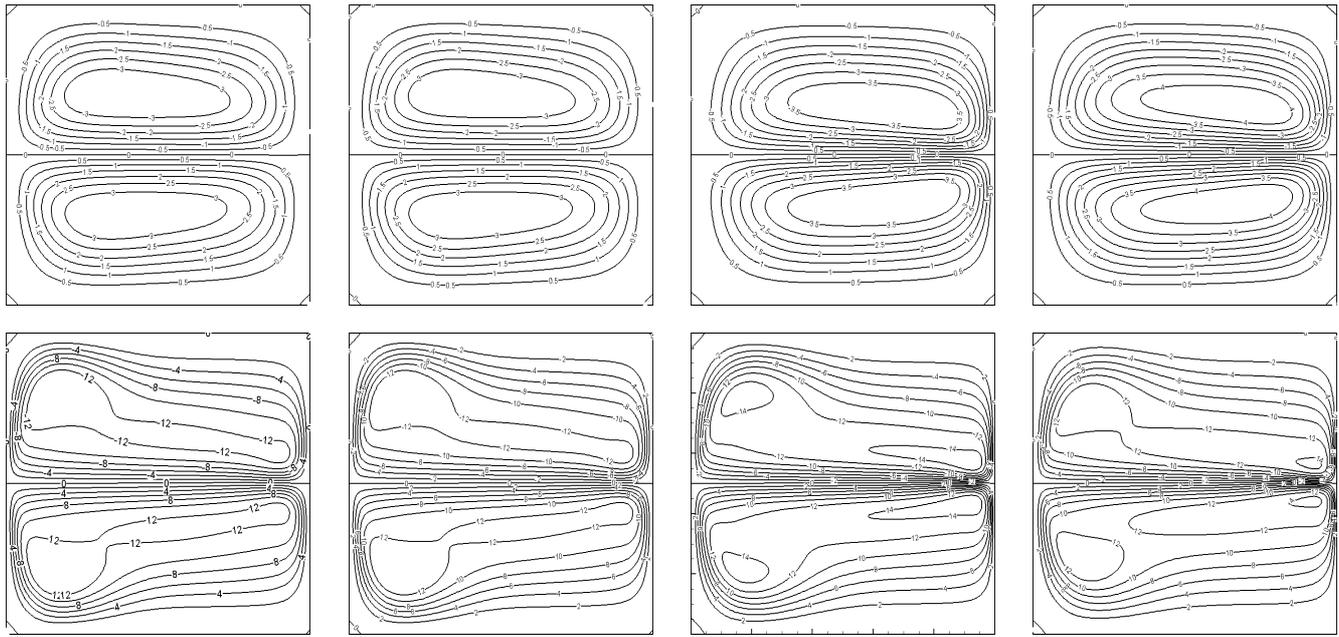
A cause de la symétrie des conditions aux limites en température ($\theta = \pm 0.5$) et à la position de l'aimant ($Y_m = 0.5$), les champs dynamique et thermique, (Fig. 6.4, 6.5 et 6.7) sont symétriques même pour de grande différence de température particulièrement dans le cas où les propriétés physiques sont constantes, cela est dû à l'absence de la force d'Archimède.

Par rapport au cas de faible différence de température, on remarque que les profils des lignes de courant et des isothermes gardent la même forme. Les gradients dynamiques et thermiques deviennent plus importants dans les régions où le champ magnétique est maximal près de la paroi froide à $Y = 0.5$, (Fig. 6.4, 6.5), et à $Y = 1$, (Fig. 6.6), à cause de la forte valeur de la force de Kelvin dans ces régions et surtout pour le cas où les propriétés physiques sont variables et Ra_m est élevé.

Tableau 6.2 : Nombre de Nusselt convectif moyen aux parois actives pour $Ra = 10^6$ et différentes valeurs de γ_m .

Paroi	<i>Boussinesq</i>	<i>LMN</i> : $\varepsilon_b = 0.017$ et <i>PV</i>	<i>LMN</i> : $\varepsilon_b = 0.6$ et <i>PC</i>	<i>LMN</i> : $\varepsilon_b = 0.6$ et <i>PV</i>
$Ra = 10^4$				
Nu_C	2,44621	2,44343	2,91564	2,76591
Nu_F	2,42327	2,44426	2,91748	2,76812
$Ra = 10^6$				
Nu_C	10,65441	10,66911	11,94421	11,38109
Nu_F	10,65268	10,66989	11,94654	11,38434

L'échange thermique au niveau des parois actives, présenté en termes de nombre de Nusselt, (Fig. 6.7 et 6.8 et Tab. 6.2), montre que pour une grande différence de température le transfert de chaleur au niveau de la paroi chaude est plus important que celui pour le cas de faible différence de température. Les propriétés physiques ont aussi un effet important sur le transfert thermique. Une réduction en échange thermique par rapport à des propriétés constantes est notée.



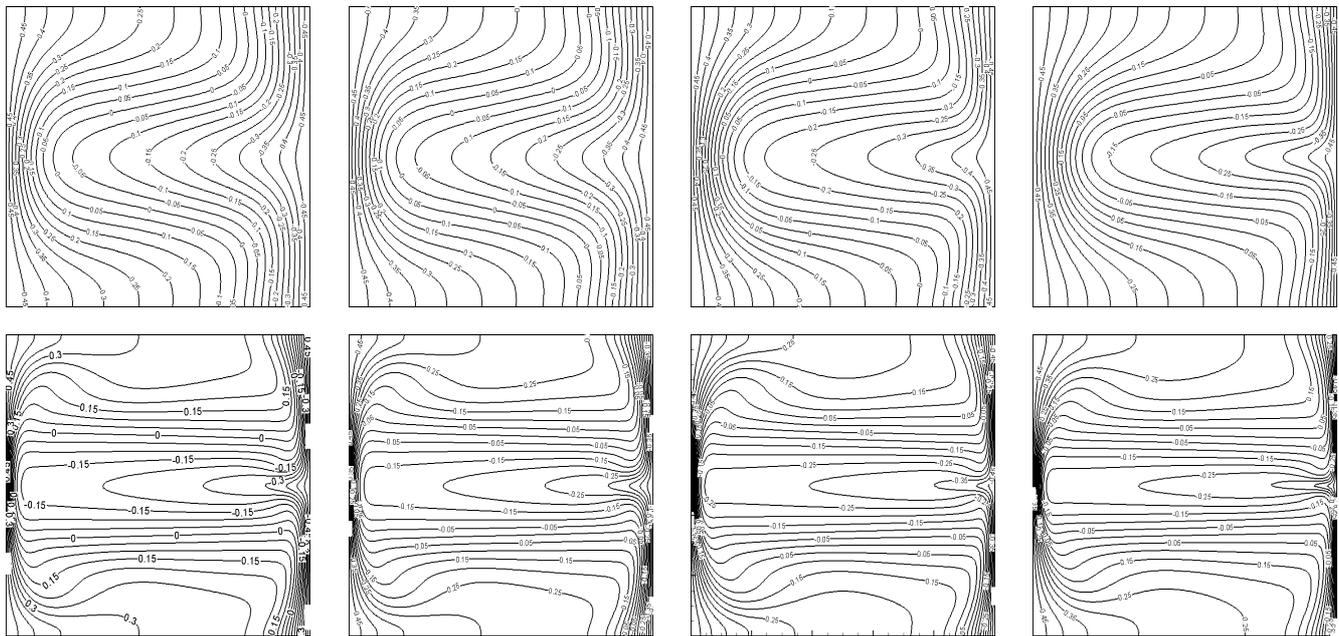
Boussinesq

LMN : $\varepsilon_b = 0.017$ et PV

LMN : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC

LMN : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV

Figure 6.4 : Lignes de courant pour $Ra_m = 10^4$ (haut) et $Ra_m = 10^6$ (bas) à zéro gravité pour $Ra_m = 10^6$ et $Y_m = 0.5$ (cas a).



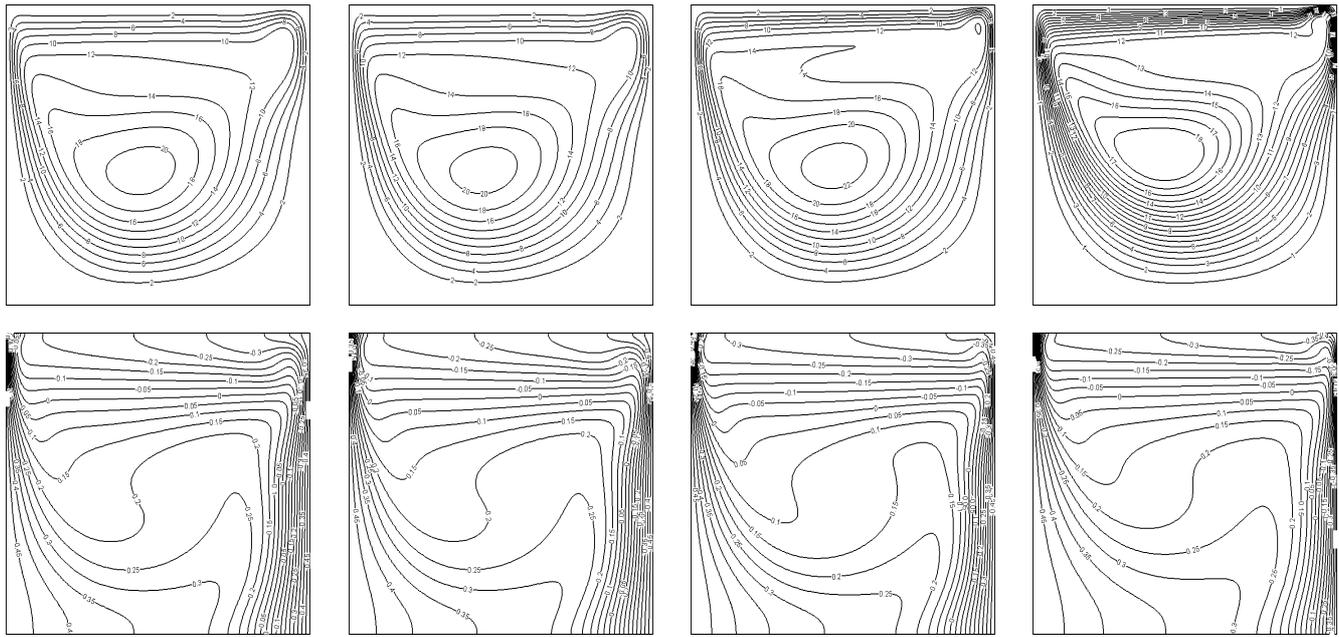
Boussinesq

LMN : $\varepsilon_b = 0.017$ et PV

LMN : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC

LMN : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV

Figure 6.5 : Isothermes pour $Ra_m = 10^4$ (haut) et $Ra_m = 10^6$ (bas) à zéro gravité pour $Y_m = 0.5$ (cas a).



Boussinesq

LMN : $\varepsilon_b = 0.017$ et PV

LMN : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC

LMN : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV

Figure 6.6 : Lignes de courant (haut) et isothermes (bas) à zéro gravité pour $Ra_m = 10^6$ et $Y_m = 1$ (cas a).

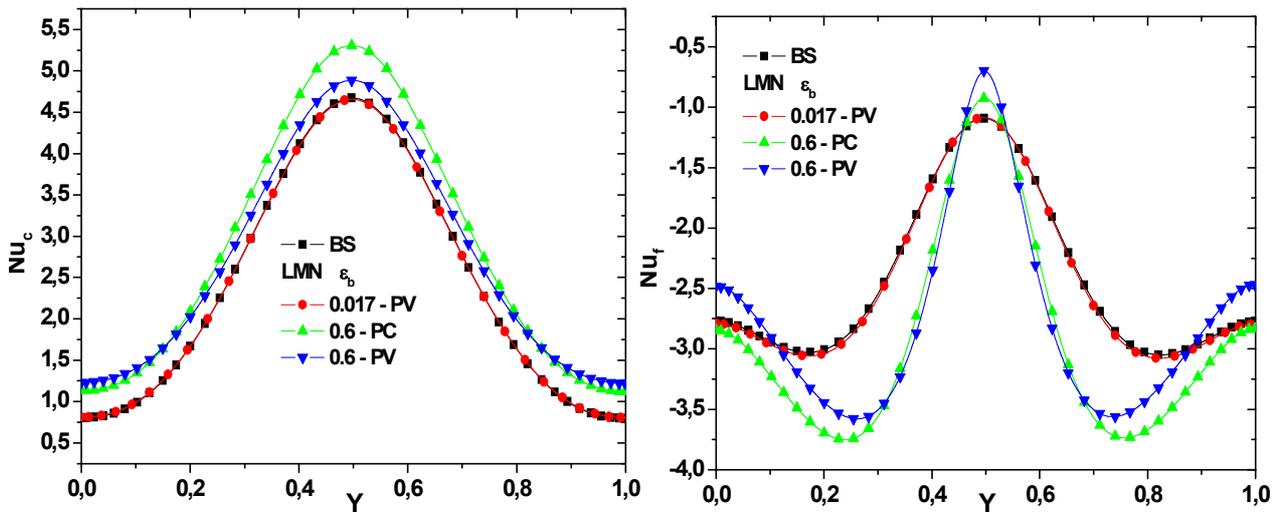


Figure 6.7 : Nombre de Nusselt sur la paroi chaude (gauche) et froide (droite) pour $Ra_m = 10^4$ à zéro gravité (cas a).

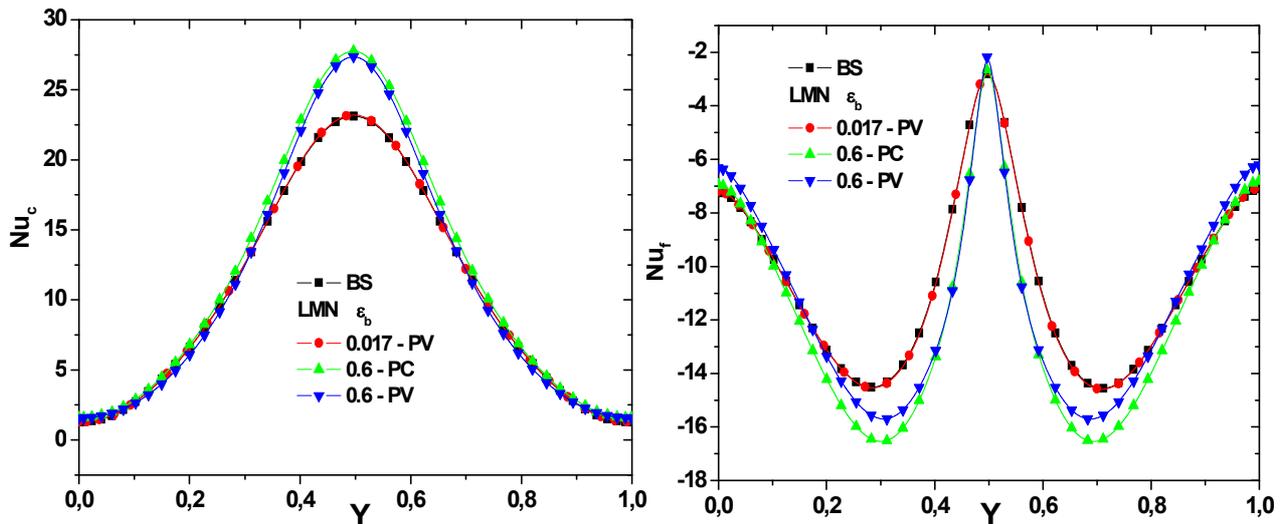


Figure 6.8 : Nombre de Nusselt sur la paroi chaude (gauche) et froide (droite) pour $Ra_m = 10^6$ à zéro gravité (cas a).

6.7.2. En présence de gravité

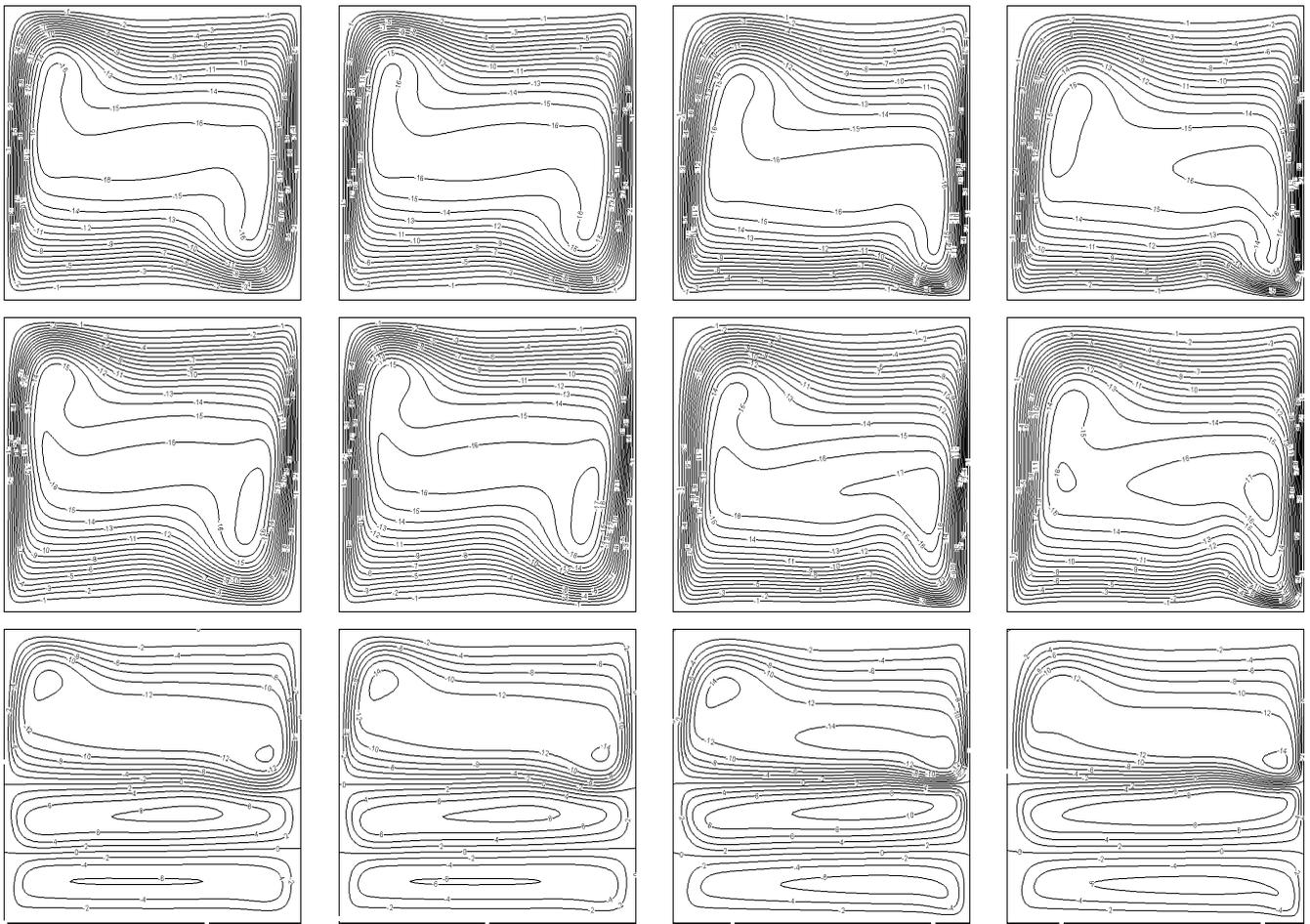
On passe maintenant à un environnement de gravité non nulle, pour examiner l’effet d’un gradient de champ magnétique sur la convection naturelle à grande différence de température, en le comparant au cas faible différence de température. Les paramètres de simulation sont le nombre de Rayleigh pris égal à 10^6 , le paramètre de Boussinesq $\epsilon_b = 0.6$ et 0.017 et le nombre magnétique γ_m qui varie entre 0 et 0.5 et pour de propriétés physiques constantes ou variables.

Pour ce cas aussi, le fait le plus marquant est qu’à faible différence de température, les deux solutions faible nombre de Mach et Boussinesq sont identiques, (Fig. 6.9, 6.10 et 6.11).

Par rapport au cas d’un faible gradient thermique, si on augmente l’intensité du champ magnétique, le changement est observé sur les petites recirculations centrales qui sont de plus en plus rapprochées de la paroi froide créant ainsi un gradient dynamique élevé près de cette paroi surtout pour une grande valeur de γ_m pour laquelle l’écoulement est multicellulaire, signifiant ainsi une importance dans les forces magnétiques.

Les isothermes gardent la même évolution que celle pour le cas faible différence de température, sauf qu’elles sont plus serrées près de la paroi froide pour des valeurs supérieures de γ_m indiquant un fort gradient thermique dans cette partie de la cavité.

En augmentant γ_m , les lignes de courant deviennent moins serrées indiquant un faible gradient dynamique dans le cœur de la cavité. Le nombre de Nusselt est parfaitement modifié particulièrement pour de grandes valeurs de γ_m , comme indiqué dans les tableaux 6.3 et 6.4.



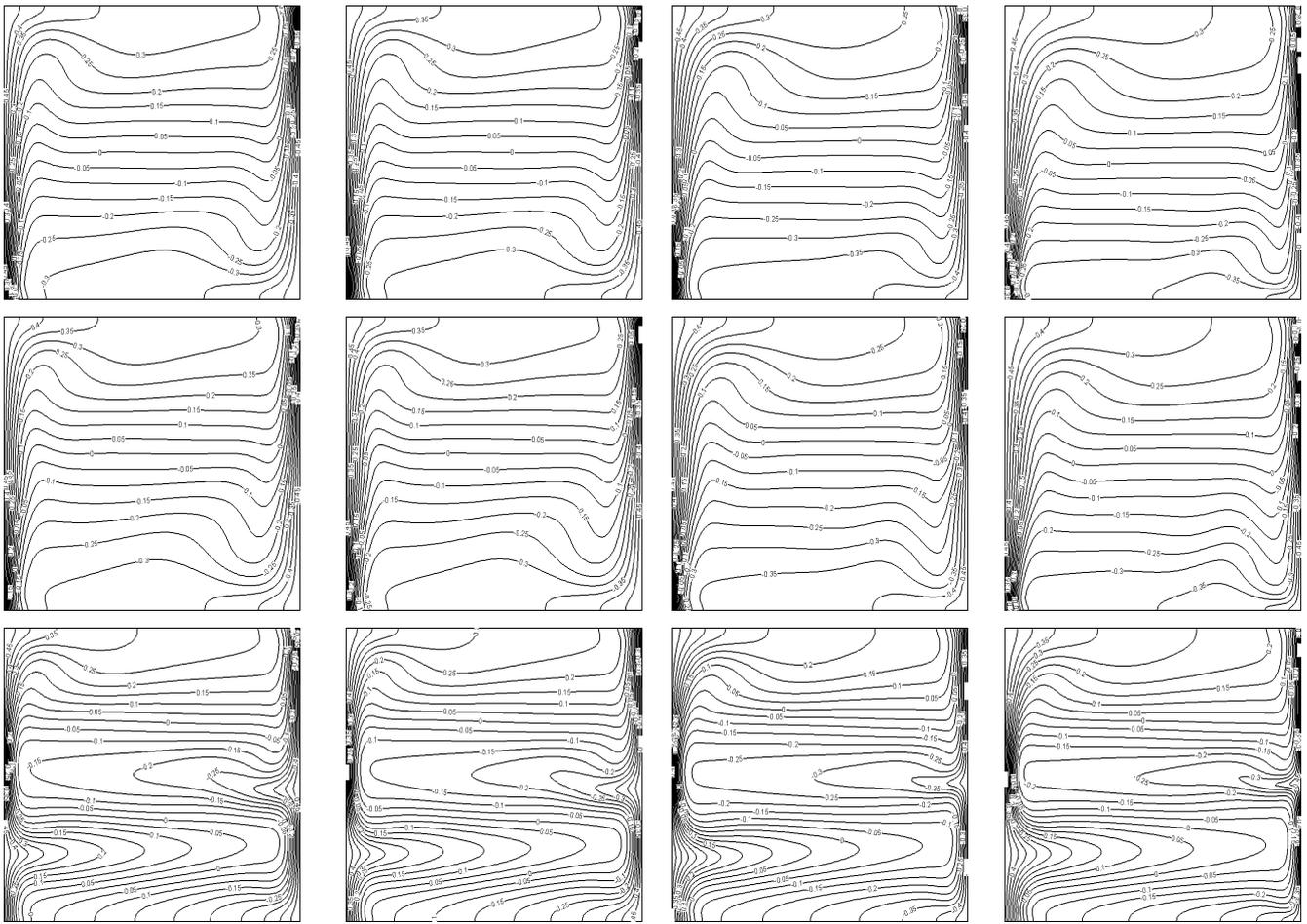
Boussinesq

LMN : $\varepsilon_b = 0.017$ et PV

LMN : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC

LMN : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV

Figure 6.9 : Lignes de courant pour $Ra = 10^6$ et pour (de haut vers bas) $\gamma_m = 0, 0.1, 0.5$ (cas a).



Boussinesq *LMN : $\varepsilon_b = 0.017$ et PV* *LMN : $\varepsilon_b = 0.6$ et PC* *LMN : $\varepsilon_b = 0.6$ et PV*

Figure 6.10 : Isothermes pour $Ra = 10^6$ et pour (de haut vers bas) $\gamma_m = 0, 0.1, 0.5$ (cas a).

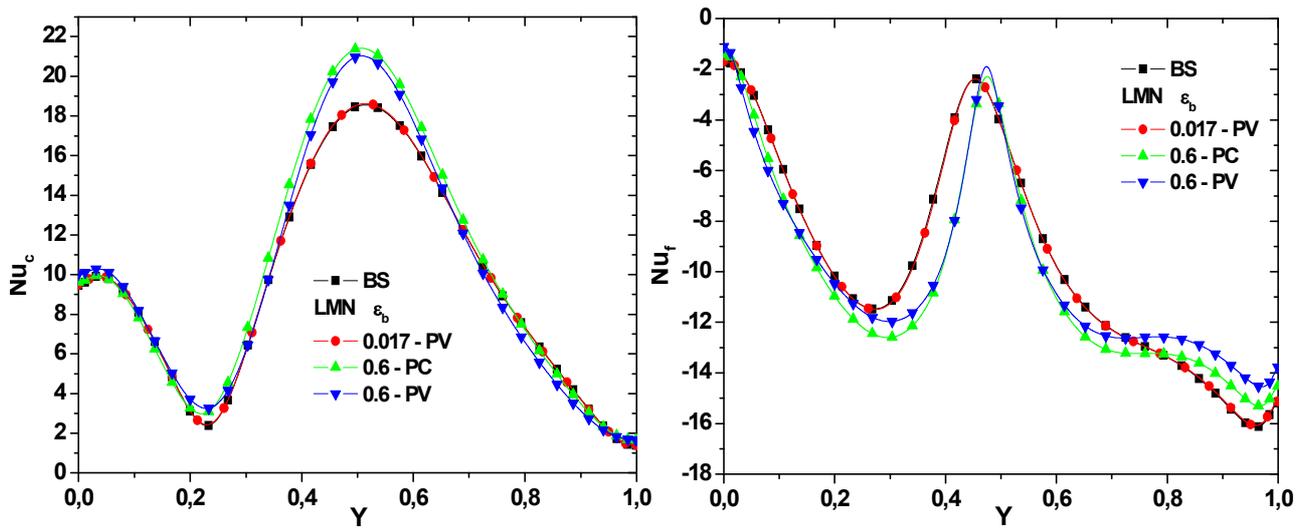


Figure 6.11 : Nusselt sur la paroi chaude (gauche) et froide (droite) pour $Ra = 10^6$ et $\gamma_m = 0.5$ et pour $g \neq 0$ (cas a).

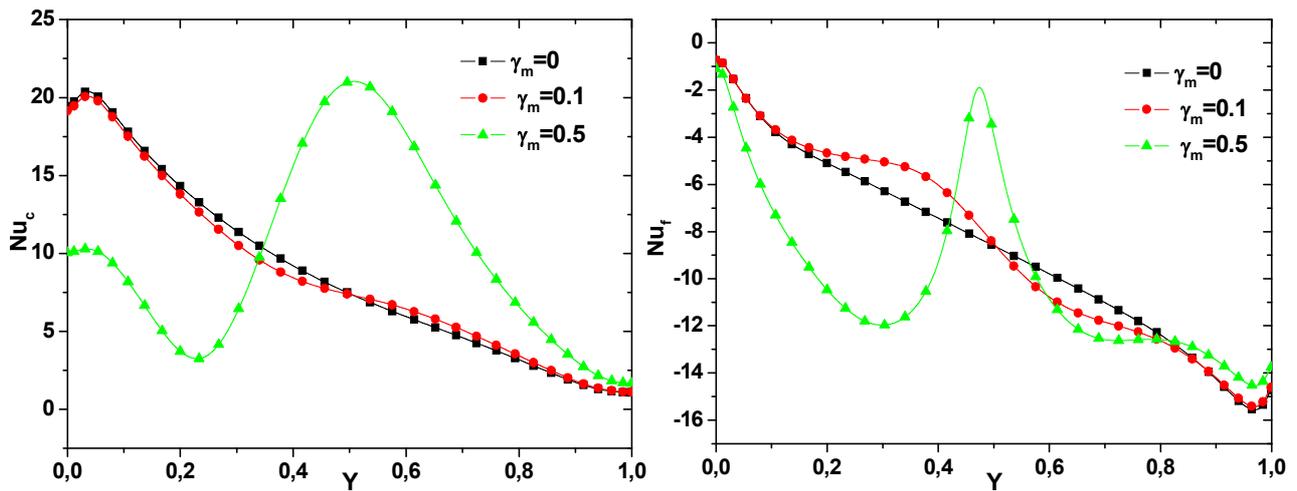


Figure 6.12 : Nusselt sur la paroi chaude (gauche) et froide (droite) pour $Ra = 10^6$ et différentes valeurs de γ_m pour $g \neq 0$ (cas a)

Comme indiqué sur les tableaux 6.3 et 6.4, et pour un gradient vertical du champ magnétique (cas (a)), l'échange thermique aux parois actives diminue pour de faibles valeurs de γ_m ensuite il augmente pour des valeurs supérieures de γ_m . Tandis qu'il subit une réduction remarquable, (Fig. 6.14), pour le cas (b) où le gradient du champ magnétique est horizontal, particulièrement, pour une grande valeur de γ_m et pour lesquelles les lignes de courant et les isothermes (Fig. 6.13) sont considérablement modifiés.

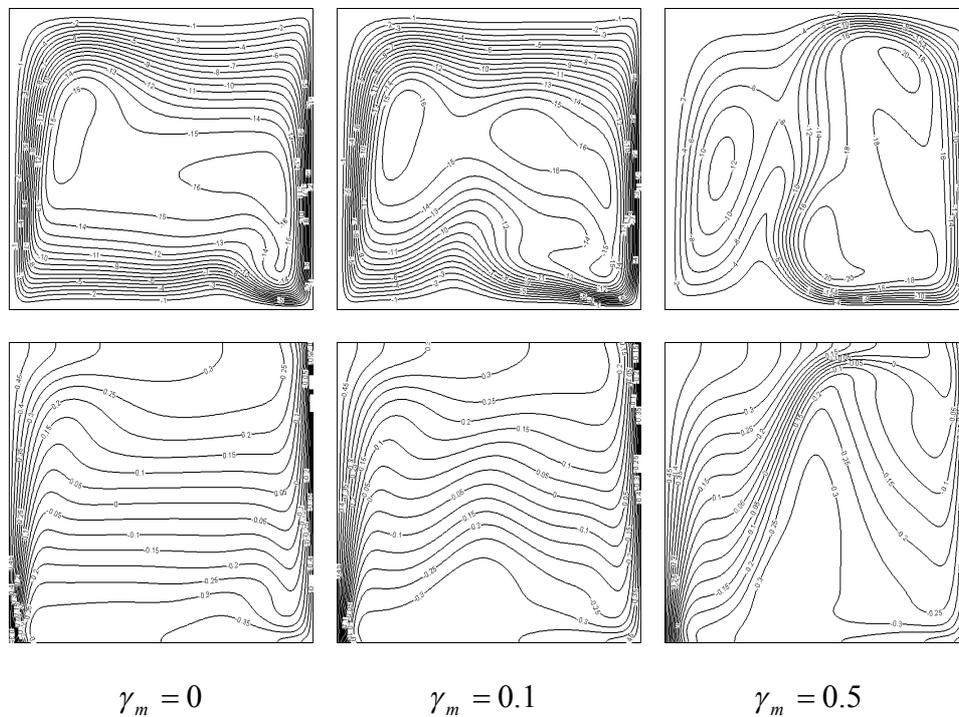


Figure 6.13 : Lignes de courant (haut) et isothermes (bas) pour différentes valeurs de γ_m pour $Ra = 10^6$ (cas b).

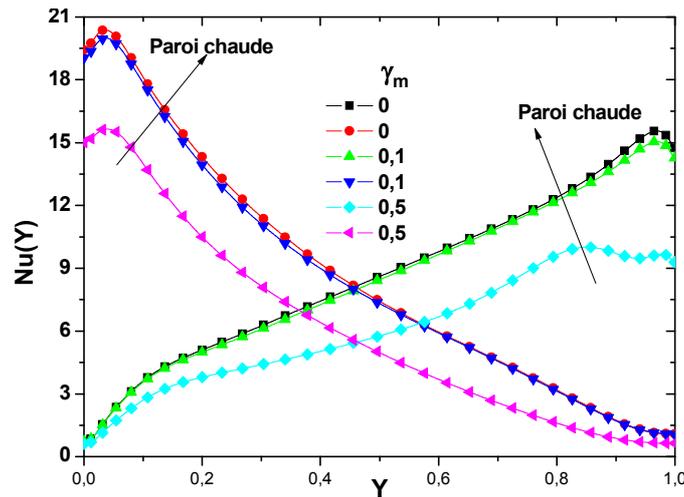


Figure 6.14 : Nusselt convectif sur les parois chaude et froide pour $Ra = 10^6$ et différentes valeurs de γ_m pour $g \neq 0$ (cas b)

γ_m	0	0.1	0.5
Nu_C	8,67349	8,5454	9,99409
Nu_F	8,67445	8,54684	9,99691

Tableau 6.3 : Nombre de Nusselt convectif moyen aux parois actives pour $Ra = 10^6$ et différentes valeurs de γ_m , (cas a).

γ_m	0	0.1	0.5
Nu_C	8,67349	8,50145	6,08952
Nu_F	8,67445	8,50322	6,09283

Tableau 6.4 : Nombre de Nusselt convectif moyen aux parois actives pour $Ra = 10^6$ et différentes valeurs de γ_m .

6.8. CONCLUSION

Nous nous sommes particulièrement intéressés à l'influence d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide non électroconducteur paramagnétique dont la susceptibilité varie avec la température selon la loi de Curie. En présence d'un gradient thermique, la force de Kelvin apparaissant dans le fluide peut varier d'un point à un autre et créer ainsi un mouvement de convection qui fait augmenter ou diminuer la convection naturelle. A titre d'exemple, nous avons simulé la convection naturelle dans une cavité carrée en présence d'un champ magnétique externe généré par des aimants. Nous avons ainsi pu mettre en évidence l'existence d'une valeur seuil du champ magnétique au-delà de laquelle les forces magnétiques l'emportent sur les forces de pesanteur et nous avons estimé également la vigueur de l'écoulement qui pourrait être ainsi généré en apesanteur. D'une façon générale, le

champ magnétique peut modifier complètement l'écoulement, et donc les transferts de chaleur, ce qui ouvre des perspectives en termes de contrôle de l'écoulement et des transferts.

REFERENCES :

- [1] **W. E.**, Theory and applications of molecular paramagnetisme, *Eds. E.A.*, 1976 (1835)
- [2] **S. Chandrasekhar**, Hydrodynamique and Hydromagnetic Stability, *Oxford University Press*, Dover, 1961.
- [3] **O. Hiroyuki**, Magnetic Convection, Kyushu University, *Japan, Imperial College Press*, London, 2005.
- [4] **S. Tonino, H. Sadat, L. Gbahoue**, Convection thermomagnétique dans une cavité différentiellement chauffée. *Int. Commun. Heat. Mass.*, Vol. 32, pp. 923–930, 2005.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Au cours de cette étude, nous avons développé une méthode de simulation numérique du comportement d'un fluide (air) dans une enceinte fermée différentiellement chauffée.

Nous avons d'abord élaboré le formalisme général issu des équations de bilan décrivant le mouvement instationnaire d'un fluide newtonien, visqueux et compressible. Puis à partir des hypothèses simplificatrices appliquées à différents degrés, nous avons montré comment on peut déduire les différents types d'écoulement : faible nombre de Mach, incompressible et dilatable.

Nous avons mis au point un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis et la loi de puissance (Power Law) comme schéma de discrétisation, pour déterminer les champs de température, de vitesse et les lignes de courant, ainsi que les distributions des nombres adimensionnels de Nusselt locaux et moyens sur les parois actives et horizontales de la cavité, en fonction des paramètres contrôlant le transfert de chaleur et l'écoulement.

Dans les différents phénomènes étudiés : convection naturelle pure, couplage convection naturelle-rayonnement surfacique et convection naturelle en présence d'un champ magnétique, nous avons discuté de l'influence des principales grandeurs agissant sur ces phénomènes. Compte tenu des résultats présentés Il s'avère en fait que :

- l'approximation de Boussinesq n'est pas suffisante pour simuler le transfert thermique du fluide lorsque l'écart de température entre les deux parois actives est élevé. L'écoulement devient dans ce cas plus compressible.
- L'augmentation du paramètre de Boussinesq caractérisant la différence de température dans la cavité fait perdre à l'écoulement sa symétrie obtenue dans le cas de faible gradient de température.
- la variation des propriétés thermophysiques peut avoir une influence significative sur l'écoulement du fluide et sur le transfert thermique dans la cavité.
- Dans les conditions non-Boussinesq et lorsque la différence de température augmente, une différence significative entre les solutions incompressible et compressible est observée. Dans ce cas, le modèle compressible basé sur l'approximation à faible nombre de Mach peut être utilisé avec une précision suffisante pour simuler la convection naturelle combinée au rayonnement de surface.

- Pour de larges écarts de température, et en présence du rayonnement de surfaces, la symétrie de l'écoulement est rompue, soit pour les champs dynamiques soit pour les champs thermiques.
- le rayonnement de surface réduit la stratification au centre de la cavité et intensifie l'écoulement sur les parois horizontales.
- la présence du rayonnement fait accroître la température au sein de la cavité, et modifie considérablement l'écoulement du fluide et la distribution de la température.
- en présence d'un champ magnétique, il est possible de recréer une convection thermique en apesanteur, à partir de sources de champ magnétiques bien choisies.
- le champ magnétique peut modifier complètement l'écoulement, et donc les transferts de chaleur, ce qui ouvre des perspectives en termes de contrôle de l'écoulement et des transferts.

Le modèle à faible nombre Mach a été vérifié de façon satisfaisante dans le cas des transferts thermiques couplés pour une cavité carrée remplie d'un fluide en écoulement laminaire. L'analyse mathématique et l'étude numérique présentées pourraient être poursuivies dans des cas plus complexes tels que : écoulement turbulent, cavité rectangulaire, cavité inclinée, combinaison au rayonnement volumique,

ANNEXES

ANNEXE I : EQUATIONS DE CONSERVATION

I.1 Équation de continuité

Soit une partie d'un fluide de volume Ω et de masse volumique ρ délimitée par une surface fermée S . La partie du fluide a une masse $m = \iiint_{\Omega} \rho d\Omega$. La conservation de la masse

s'écrit $\frac{dm}{dt} = 0$

En utilisant le théorème de transport de Reynolds et le théorème de la divergence (Green-Ostrogradski) on arrive à la forme différentielle de l'équation de continuité :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{variation locale}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \vec{V})}_{\text{divergence des flux}} = 0 \quad (\text{I.1})$$

Ou bien:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0 \quad (\text{I.2})$$

I.2 Equations de quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique indique que le taux de variation de la quantité de mouvement $\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega$ d'un système matériel est proportionnel aux efforts extérieurs qui lui sont appliqués.

Deux types de forces sont appliqués à un volume fluide :

- les forces intérieures : ce sont les forces de cohésion moléculaire, de viscosité et de pression qui forment un torseur nul puisque localement le principe de l'action et de la réaction doit être respecté.
- les forces extérieures, elles-mêmes classées en deux types : des actions à distance ou volumiques ou encore forces de champ $\iiint_{\Omega} \rho \vec{F} d\Omega$ et des actions de contact (contrainte) ou surfaciques $\iint_S \vec{T} dS$.

On peut donc écrire :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \vec{F} d\Omega + \int_S \vec{T} ndS \quad (\text{I.3})$$

En appliquant (I.3) à un fluide idéal, on obtient les équations d'Euler, établies par Euler [1] pour la première fois en 1755. Pour un fluide newtonien les équations sont dénommées les équations de Navier-Stokes, d'après Navier [2] et Stokes [3] qui furent les premiers à les formuler.

On peut décomposer le tenseur $\overline{\overline{T}}$ pour faire apparaître la pression p et le tenseur $\overline{\overline{\tau}}$ des contraintes visqueuses :

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (\text{I.4})$$

Pour un fluide newtonien, on admet que la contrainte normale de viscosité est proportionnelle aux vitesses de déformation linéaire selon toutes les directions. On a :

$$\overline{\overline{\tau}} = \mu \left(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}' \right) + (\mu + \eta) \left(\nabla \vec{v} \right) \overline{\overline{I}} \quad (\text{I.5})$$

Elle fait intervenir les coefficients de viscosité μ et η (coefficients de Lamé), μ est la viscosité dynamique et η est appelé second coefficient de viscosité ou encore viscosité de dilatation.

On peut donc définir le tenseur de contraintes $\overline{\overline{T}}$:

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{S}} + \eta \text{div} \vec{V} \overline{\overline{I}} \quad (\text{I.6})$$

Ou bien, en notation indicielles :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + \eta \nabla \vec{V} \delta_{ij} \quad (\text{I.7})$$

où $\overline{\overline{S}}$ est la partie symétrique du tenseur des déformations $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$ et $\overline{\overline{I}}$ la matrice identité.

Le bilan de quantité de mouvement à travers un domaine Ω quelconque s'écrit à partir des forces identifiées plus haut :

$$\rho \left(\vec{V} \nabla \right) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \rho \vec{F} - \nabla p + \nabla \cdot \mu \nabla \vec{V} + \nabla \cdot \left((\mu + \eta) \nabla \vec{V} \right) \quad (\text{I.8})$$

Si la condition de Stokes ($2\mu + 3\eta = 0$) est satisfaite [4, 5, 6], on suppose que la seule force de volume est la force de gravité, alors :

$$\overline{\overline{\tau}} = \mu \left(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}' \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\nabla \vec{v} \right) \overline{\overline{I}} \quad (\text{I.9})$$

L'équation de Navier devient l'équation de Navier-Stokes :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{vitesse d'accumulation}} + \underbrace{\rho \left(\vec{V} \nabla \right) \vec{V}}_{\text{gain net par convection}} = \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{force de volume}} - \underbrace{\nabla p}_{\text{gradient de pression}} + \underbrace{\nabla \cdot \overline{\overline{\tau}}}_{\text{gain net par diffusion visqueuse}} \quad (\text{I.10})$$

En remplaçant par l'expression de $\overline{\tau}$ (Eq.I.9)

$$\rho \left((\overline{V} \nabla) \overline{V} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} \right) = \rho \overline{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mu \nabla \overline{V} + \frac{1}{3} \nabla \mu \nabla \overline{V} \quad (\text{I.11})$$

I.3 Bilan d'énergie

I.3.1 Energie cinétique

La variation locale de l'énergie cinétique s'obtient aisément à partir de l'équation de N-S :

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{1}{2} V^2 = \rho \overline{F} \overline{V} + \overline{V} \cdot \nabla \overline{T} \quad (\text{I.12})$$

Ou encore, en remplaçant par l'expression de \overline{T} (Eq. I.4)

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\overline{V}^2}{dt} = -\overline{V} \cdot \nabla \cdot p + \overline{V} \cdot (\nabla \cdot \overline{\tau}) + \rho \overline{F} \overline{V} \quad (\text{I.13})$$

I.3.2 Energie interne

Le premier principe de la thermodynamique indique que la variation de la somme des énergies interne et cinétique d'un système est égale à la somme des travaux des forces extérieures qui lui sont appliquées et de ses échanges de chaleur avec l'extérieur.

Si l'on note e l'énergie interne par unité de masse et \vec{q} le vecteur densité de flux de chaleur, le premier principe se traduit par le bilan local :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} V^2 \right) = \rho \overline{V} \cdot \overline{F} + \nabla \cdot (\overline{T} \overline{V}) - \nabla \cdot \vec{q} + r \quad (\text{I.14})$$

En substituant l'expression de l'énergie cinétique, on a :

$$\rho \frac{de}{dt} = \overline{T} : \nabla \overline{V} - \nabla \cdot \vec{q} \quad (\text{I.15})$$

ou encore, en remplaçant par l'expression de \overline{T} (Eq. I.4):

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \nabla \overline{V} + \overline{\tau} : \nabla \overline{V} + r - \nabla \cdot \vec{q} \quad (\text{I.16})$$

I.3.3 Enthalpie

Elle s'obtient aisément à partir de la définition de la densité d'enthalpie: $h = e + p / \rho$, mise sous la forme différentielle:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{I.17})$$

Où l'on exprime le dernier terme à l'aide de l'équation de continuité, $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \vec{V}$:

On obtient alors :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + \frac{dp}{dt} + p \nabla \vec{V} \quad (\text{I.18})$$

et l'on substitue ($\rho \frac{de}{dt}$) par son expression (Eq. I.16). Il vient finalement:

$$\rho \frac{dh}{dt} = r - \nabla \cdot \vec{q} + \frac{dp}{dt} + \tau : \nabla \vec{V} \quad (\text{I.19})$$

I.3.4 Entropie

Pour établir l'équation du bilan de l'entropie, on utilise :

la première équation de Gibbs :

$$Tds = de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (\text{I.20})$$

et la forme différentielle de l'enthalpie :

$$dh = de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} dp \quad (\text{I.21})$$

On obtient alors la deuxième équation de Gibbs :

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (\text{I.22})$$

qu'on associe à l'équation (I.19) pour l'enthalpie. On obtient:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = r - \nabla \cdot \vec{q} + \tau : \nabla \vec{V} \quad (\text{I.23})$$

I.3.5 Température

De l'équation de l'enthalpie on a :

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) dp \quad (\text{I.24})$$

Où β est le coefficient d'expansion thermique, définie par :

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p \quad (I.25)$$

On obtient [7] :

$$\underbrace{\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) T \right)}_{\text{taux de variation de la chaleur par unité de volume et de temps}} = \underbrace{r}_{\text{apport de chaleur en volume}} - \underbrace{\nabla \cdot \vec{q}}_{\text{apport de chaleur en surface}} + \underbrace{\beta T \frac{dp}{dt}}_{\text{apport de chaleur par compression ou détente}} + \underbrace{\overline{\tau} : \nabla \vec{V}}_{\text{apport de chaleur par dissipation visqueuse}} \quad (I.26)$$

- Pour les gaz parfaits : l'équation d'état qui est de la forme : $p = \rho RT$, permet d'exprimer simplement le dérivée partielle (β) dans (I.26)

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p = - \frac{\rho}{T} \quad (I.30)$$

On obtient donc les formes suivantes de l'équation pour la température :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = r - \nabla \cdot \vec{q} + \frac{dp}{dt} + \overline{\tau} : \nabla \vec{V} \quad (I.31)$$

Ce résultat peut être exprimé en termes de c_v , en utilisant l'équation de continuité pour exprimer $\frac{d\rho}{dt}$ et l'équation d'état qui permet d'exprimer $\frac{dp}{dt}$:

$$\frac{dp}{dt} = r \rho \frac{dT}{dt} + r T \frac{d\rho}{dt} \quad (I.32)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = r - \nabla \cdot \vec{q} - p \nabla \cdot \vec{V} + \overline{\tau} : \nabla \vec{V} \quad (I.33)$$

On remarque que deux termes apparaissent, simultanément, dans l'équation de la chaleur, mais avec des signes opposés. Ils correspondent nécessairement à des transformations d'énergie mécanique en chaleur :

- Le terme $p \nabla \cdot \vec{V}$, correspond à une transformation qui est réversible puisque $\nabla \cdot \vec{V}$ peut être positif ou négatif. Ce terme correspond aux effets thermiques qui accompagnent les phénomènes de compression ou de détente. il est toujours nul pour les fluides incompressibles pour lesquels le principe de conservation de masse impose $\nabla \cdot \vec{V} = 0$.

- Le terme $\overline{\tau} : \nabla \vec{V}$ est toujours positif. On le démontre facilement pour les fluides newtoniens, en coordonnées rectangulaires, en mettant ce terme sous la forme :

$$\overline{\tau} : \nabla \vec{V} = \frac{1}{2} \mu \sum_i \sum_j \left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \nabla \vec{V} \delta_{ij} \right]^2 = \mu \phi \quad (\text{I.34})$$

Equation dans laquelle i et j désignent par permutation les coordonnées x , y et où $\delta_{ij} = 1$ quand $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ quand $i \neq j$

Ainsi, le produit $\overline{\tau} : \nabla \vec{V}$, opposé d'une somme de carrés, apparaît comme visiblement toujours négatif ; il correspond, donc, toujours à une dégradation irréversible d'énergie mécanique en énergie thermique, conséquence de l'existence des frottements visqueux. La fonction ϕ , toujours positive, est appelée la fonction de dissipation visqueuse.

$$\Phi = -\frac{2}{3} (\text{div } \vec{V})^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (\text{I.35})$$

Si l'on considère que les échanges de chaleur suivent uniquement le schéma de conduction de Fourier, on a par ailleurs :

$$q = -k \nabla T \quad (\text{I.36})$$

L'équation de chaleur s'écrit alors :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) T \right) = r + \nabla \cdot k \nabla T + \frac{dp}{dt} + \overline{\tau} : \nabla \vec{V} \quad (\text{I.37})$$

Ou, en terme de c_v :

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) T \right) = r + \nabla \cdot k \nabla T - p \nabla \vec{V} + \overline{\tau} : \nabla \vec{V} \quad (\text{I.38})$$

I.4 Équation d'état

Qui dans le cas d'un gaz parfait, est donnée par :

$$p = \rho RT \quad (\text{I.39})$$

ANNEXE II : SCHEMAS NUMERIQUES

Soit l'équation de transport

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \quad (\text{II.1})$$

Cette équation, une fois discrétisée implicitement en temps, en tenant compte de la discrétisation l'équation de continuité :

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} = F_w - F_e + F_s - F_n \quad (\text{II.2})$$

Prend la forme :

$$\left\{ \rho_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + F_w - F_e + F_s - F_n - S_P \Delta\Omega \right\} \phi_P + \{ F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s \} - \\ (D_e \phi_E - D_e \phi_P - D_w \phi_P + D_w \phi_W + D_n \phi_N - D_n \phi_P - D_s \phi_P + D_s \phi_S) = S_C \Delta\Omega + \rho_P^0 \phi_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (\text{II.3})$$

Dans cette équation, l'inconnue $\phi_i, i = e, w, n, s$ n'est pas encore exprimée sur son domaine de définition (E, W, N, S) . L'interpolation assurant cette opération dépendra du choix du schéma de discrétisation spatiale. Il existe plusieurs schémas donnant la valeur de ϕ sur son domaine tel que : schéma CDS, upwind, exponentiel, hybride, puissance, et qui sont détaillés ci-après.

II.1 Schéma centré (CDS)

Ce schéma consiste en des interpolations linéaires entre les nœuds voisins [8]. L'erreur de troncature du CDS est du second ordre. Le schéma est performant dans les régions où la diffusion domine et/ou pour les maillages fins. Le CDS peut produire des solutions oscillatoires.

Si on définit les paramètres :

$$f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e} \quad (\text{II.4})$$

et

$$1 - f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e} \quad (\text{II.5})$$

on obtient :

$$\phi_e = f_e \phi_P + (1 - f_e) \phi_E \quad (\text{II.6})$$

On aura donc :

Tableau II.1 : Valeurs de ϕ par interpolation linéaire

$\phi_e = f_e \phi_P + (1-f_e)\phi_E$	$\phi_w = f_w \phi_W + (1-f_w)\phi_P$
$\phi_n = f_n \phi_P + (1-f_n)\phi_N$	$\phi_s = f_s \phi_S + (1-f_s)\phi_P$

Pour un maillage uniforme on obtient :

Tableau II.2 : Valeurs de ϕ pour un maillage uniforme

Face	e	w	N	s
Valeur de ϕ	$(\phi_P + \phi_E)/2$	$(\phi_W + \phi_P)/2$	$(\phi_N + \phi_P)/2$	$(\phi_P + \phi_S)/2$

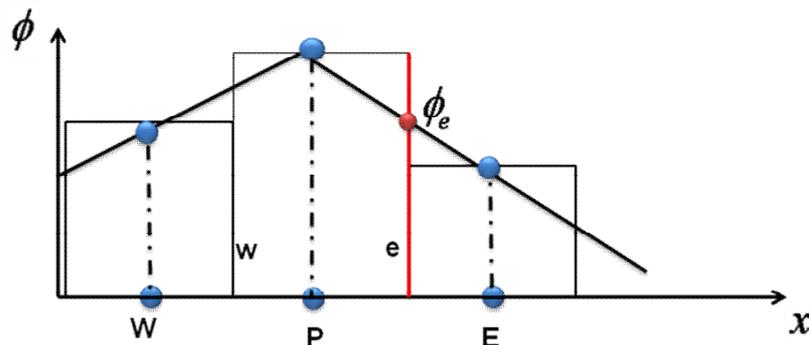


Figure II.1 : Interpolation linéaire entre les nœuds voisins

II.2 Schéma amont (Upwind scheme, upstream differencing)

En regardant le sens de l'écoulement on choisit la valeur du nœud en amont [8].

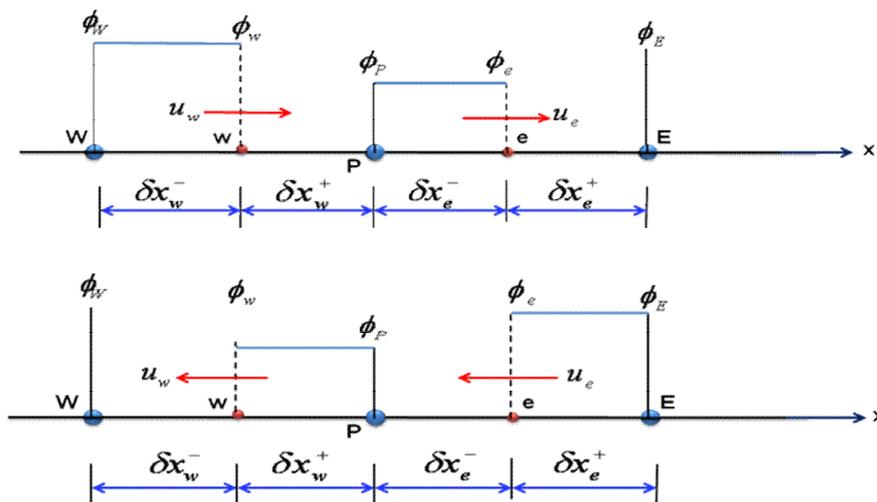


Figure II.2 : interpolation selon le schéma Upwind

Selon que l'écoulement soit dans la direction positive ou négative, on aura :

Tableau II.3 : Valeurs de ϕ aux interfaces

$(F_e, F_w, F_n, F_s) \succ 0$	$(F_e, F_w, F_n, F_s) \prec 0$
$\phi_e = \phi_P$	$\phi_e = \phi_E$
$\phi_w = \phi_W$	$\phi_w = \phi_P$
$\phi_n = \phi_P$	$\phi_n = \phi_N$
$\phi_s = \phi_S$	$\phi_s = \phi_P$

On obtient alors :

$$F_e \phi_e = \langle F_e, 0 \rangle \phi_P - \langle -F_e, 0 \rangle \phi_E \tag{II.7}$$

$$F_w \phi_w = \langle F_w, 0 \rangle \phi_W - \langle -F_w, 0 \rangle \phi_P \tag{II.8}$$

$$F_n \phi_n = \langle F_n, 0 \rangle \phi_P - \langle -F_n, 0 \rangle \phi_N \tag{II.9}$$

$$F_s \phi_s = \langle F_s, 0 \rangle \phi_S - \langle -F_s, 0 \rangle \phi_P \tag{II.10}$$

Cette méthode conduit à des solutions physiquement réalistes.

De sorte que l'opérateur $\langle A, B \rangle = \max(A, B)$ note la plus grande valeur entre A et B.

Schémas utilisant la solution exacte

On introduit la variable J définie aux frontières du volume de contrôle, par exemple à l'Est par :

$$J_e = (\rho u A)_e \phi_e - \Gamma_e \left(A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = F_e \phi_e - \Gamma_e \left(A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \tag{II.11}$$

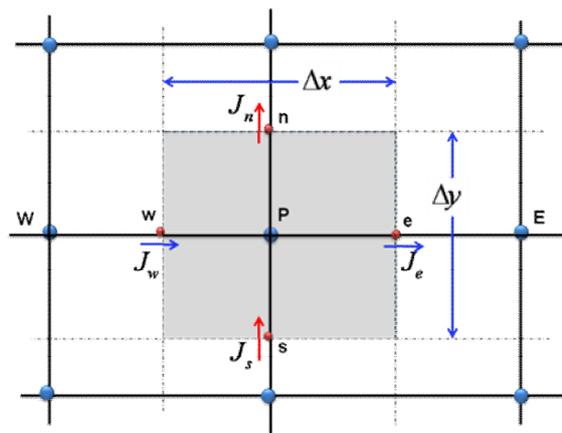


Figure II.3 : Volume de contrôle pour le flux total J_i

Le flux total J_i contient :

- le flux convectif causé par le mouvement du fluide,
- le flux de diffusion créée par le gradient de ϕ .

Il vient que l'équation II.1, peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi - \Gamma \nabla \phi) = S_\phi \quad (\text{II.12})$$

En considérant une direction i :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S_\phi \quad (\text{II.13})$$

tel que :

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \quad (\text{II.14})$$

L'équation (II.12) discrétisée pourra s'écrire dans le cas bidimensionnel, en linéarisant le terme source :

$$\left\{ (\rho\phi)_p - (\rho\phi)_p^0 \right\} \Delta\Omega + \{J_e - J_w + J_n - J_s\} \Delta t = (S_C + S_P \phi_p) \Delta\Omega \Delta t \quad (\text{II.15})$$

Si on effectue une combinaison des équations (II.15- ϕ_p II.2), on obtient l'équation suivante pour ϕ_p :

$$\left\{ \rho_p^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} - S_P \Delta\Omega + (-F_e + F_w - F_n + F_s) \right\} \phi_p + \{J_e - J_w + J_n - J_s\} = S_C \Delta\Omega + \rho_p^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \phi_p^0 \quad (\text{II.16})$$

Solution exacte :

L'équation $\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right)$ (dans la direction ox) peut être résolue exactement si Γ_ϕ est supposé constant (ρu est initialement constant. L'équation de continuité: $\frac{d}{dx} \rho u = 0$).

Si un domaine $0 \leq x \leq L$ est utilisé, avec des conditions aux limites :

$$\phi = \phi_0 \quad \text{pour } x = 0$$

$$\phi = \phi_L \quad \text{pour } x = L$$

la solution de l'équation $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right)$ est :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(Pex/L) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (\text{II.17})$$

Où Pe est le nombre de Péclet défini par :

$$Pe = \frac{\rho u L}{\Gamma} = \frac{F}{D} \quad (\text{II.18})$$

Le résultat de cette interpolation dépend donc de la nature de l'écoulement caractérisée par le nombre de Péclet qui indique l'importance relative de la convection et de la diffusion :

- si la convection est fortement dominante (Pe grand), l'interpolation se fait en adoptant la valeur de la cellule amont.
- si la diffusion est fortement dominante (Pe faible), c'est la valeur de la cellule aval qui est adoptée.

II.3 Schéma exponentiel (exponential scheme)

Dans ce cas, on utilise un profil se situant entre les points P et E pour l'évaluation du flux total convection-diffusion, avec ϕ_P et ϕ_E qui remplacent ϕ_0 et ϕ_L , et la distance $\delta x_e = x_E - x_P$ qui remplace L .

On a donc :

$$\frac{\phi - \phi_P}{\phi_E - \phi_P} = \frac{\exp(Pe.x / \delta x_e) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (\text{II.19})$$

$$\phi = \phi_P + \frac{\exp(Pe.x / \delta x_e) - 1}{\exp(Pe) - 1} (\phi_E - \phi_P) \quad (\text{II.20})$$

Utilisons cette formule pour déterminer J_e , On a :

$$(\phi)_e = \phi_P + \frac{\exp(Pe.x_e / \delta x_e) - 1}{\exp(Pe) - 1} (\phi_E - \phi_P) \quad (\text{II.21})$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right)_e = \Gamma_e \left(\frac{P}{\delta x_e} \frac{\exp(Px_e / \delta x_e)}{\exp(P) - 1} (\phi_E - \phi_P) \right) \quad (\text{II.22})$$

$$J_e = (\rho u \phi)_e - \left(\Gamma\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right)_e \quad (\text{II.23})$$

Remplaçant ϕ et $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ dans l'équation (II.23) par leurs expressions données respectivement par (II.21) et (II.22), et en posant $(\rho u)_e = F_e$, $\left(\frac{\Gamma}{\delta x}\right)_e = D_e$ et $P_e = \frac{F_e}{D_e}$ on arrive à:

$$J_e = F_e \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right) \quad (\text{II.24})$$

En suivant la même procédure pour l'évaluation du reste des termes : J_w , J_n , J_s et posons :

$$A^+[D, F] = \frac{F}{\exp(F/D) - 1} \quad (\text{II.25})$$

on arrive finalement à :

$$J_e = F_e \phi_P + A^+[D_e, F_e](\phi_P - \phi_E) \quad (\text{II.26})$$

$$J_w = F_w \phi_W + A^+[D_w, F_w](\phi_W - \phi_P) \quad (\text{II.27})$$

$$J_n = F_n \phi_P + A^+[D_n, F_n](\phi_P - \phi_N) \quad (\text{II.28})$$

$$J_s = F_s \phi_S + A^+[D_s, F_s](\phi_S - \phi_P) \quad (\text{II.29})$$

Ce schéma n'est pas utilisé tel quel, car les exponentielles sont coûteuses à calculer. Ce sont plutôt les deux schémas qui suivent qui sont employés.

II.4 Schéma Hybride (Hybrid Scheme)

Le schéma Hybride [9] consiste à rapprocher le comportement des coefficients $A^+[D, F]$ du schéma exponentiel, par la reproduction de leur régime de limitation correctement.

On a, pour une direction (ox) :

$$J_e = F_e \phi_P + A^+[D_e, F_e](\phi_P - \phi_E) \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{J_e}{D_e} = P_e \phi_P + \frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} (\phi_P - \phi_E) \quad (\text{II.31})$$

Le coefficient $A^+[D_e, F_e] = \frac{F_e}{\exp(P_e) - 1}$ cité dans le schéma exponentiel peut être écrit sous la forme :

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1} \quad (\text{II.32})$$

La variation de $\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e}$ avec P_e est représentée dans la figure II.4, on a alors :

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} \rightarrow 0 \quad \text{pour } P_e \rightarrow \infty \quad (\text{II.33})$$

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} \rightarrow -P_e \quad \text{pour } P_e \rightarrow -\infty \quad (\text{II.34})$$

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} \rightarrow 1 - \frac{P_e}{2} \quad \text{pour } P_e = 0 \quad (\text{II.35})$$

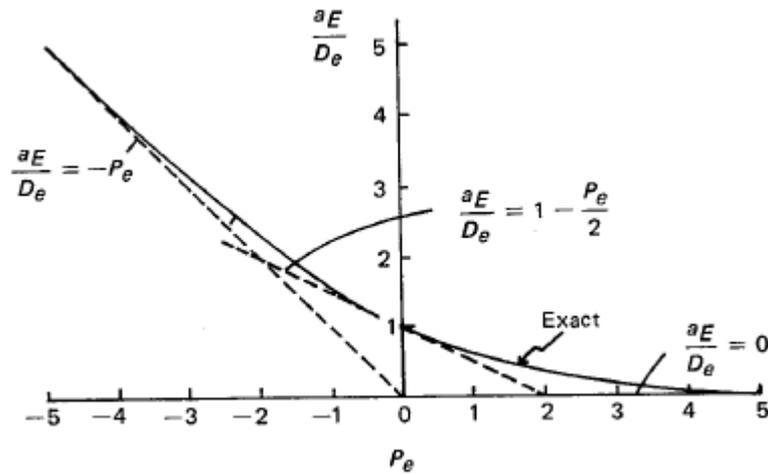


Figure II.4 : Variation de $\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e}$ en fonction de P_e [9].

On trace les trois tangentes du profil de la solution exacte, on arrive à [9] :

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} = 0 \quad \text{pour } P_e > 2 \quad (\text{II.36})$$

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2} \quad \text{pour } -2 \geq P_e \leq 2 \quad (\text{II.37})$$

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} = -P_e \quad \text{pour } P_e < -2 \quad (\text{II.38})$$

Qui peut s'écrire :

$$A^+[D_e, F_e] = 0 \quad \text{for } P_e > 2 \quad (\text{II.39})$$

$$A^+[D_e, F_e] = D_e - \frac{F_e}{2} \quad \text{for } -2 \geq P_e \leq 2 \quad (\text{II.40})$$

$$A^+[D_e, F_e] = -F_e \quad \text{for } P_e < -2 \quad (\text{II.41})$$

On obtient finalement la relation générale [9]:

$$A^+[D_e, F_e] = \text{Max}\left(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right) \quad (\text{3.42})$$

Même procédure pour estimer le reste des valeurs de $A^+[D, F]$ pour toutes les faces.

On a donc :

$$A^+[D_e, F_e] = \text{Max}\left(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right) \quad (\text{II.43})$$

$$A^+[D_w, F_w] = \text{Max}\left(F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0\right) \quad (\text{II.44})$$

$$A^+[D_n, F_n] = \text{Max}\left(-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0\right) \quad (\text{II.45})$$

$$A^+[D_s, F_s] = \text{Max}\left(F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0\right) \quad (\text{II.46})$$

II.5 Schéma puissance (Power law scheme)

Ce schéma est également une version approchée du schéma exponentiel, plus précis que le schéma hybride. Il a été introduit par Patankar [10] pour fournir une stabilité pour la simulation numérique. Le comportement du schéma puissance est similaire au CDS pour les faibles nombres de Péclet, et au schéma Upwind pour les grands nombres de Péclet. Bien qu'il ait une précision du premier ordre concernant l'erreur de troncature, le schéma puissance est une formulation conservative et ne souffre pas du problème d'oscillations numériques.

La computation de l'exponentiel $A^+[D, F] = \frac{F}{\exp(F/D) - 1}$ est une opération très coûteuse.

Une approximation du terme $A^+[D, F]$ a été introduite conduisant à [10]:

$$A^+[D, F] = \frac{F}{\exp(F/D) - 1} = D \max\left(0, (1 - 0.1|F|/D)^5\right) + \max(0, -F) \quad (\text{II.47})$$

Bilan :

Si on pose $Pe = \frac{F}{D}$ qui désigne le nombre de Péclet de maille, l'équation de conservation une fois discrétisée implicitement en temps, est de la forme :

$$a_P^{n+1} \phi_P^{n+1} = a_E^{n+1} \phi_E^{n+1} + a_W^{n+1} \phi_W^{n+1} + a_N^{n+1} \phi_N^{n+1} + a_S^{n+1} \phi_S^{n+1} + b \quad (\text{II.48})$$

Où les coefficients de l'équation (II.48) sont exprimés sous la forme générale suivante :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad (\text{II.49})$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w, 0] \quad (\text{II.50})$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0] \quad (\text{II.51})$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [F_s, 0] \quad (\text{II.52})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \quad (\text{II.53})$$

$$a_P^0 = \rho_P^0 \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{II.54})$$

$$b = S_C \Delta \Omega + a_P^0 \phi_P^0 \quad (\text{II.55})$$

L'expression entre crochets représente le maximum entre les quantités et $A(|P|)$ est une fonction caractéristique du schéma choisi (Tableau II.5) [10].

Tableau II.5 : Expressions de la fonction $A(|P|)$ pour les différents schémas.

Schéma	$A(P)$
CDS	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Exponentiel	$ P / (\exp(P) - 1)$
Hybride	$[0, 1 - 0.5 P]$
Power Law	$[0, (1 - 0.1 P)^5]$

ANNEXE III : ALGORITHMES SIMPLE ET SIMPLER

III.1 Algorithme SIMPLE

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement sur le volume de contrôle (maillage décalé) de centre e et de limites P et E donne :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_u \quad (\text{III.1})$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_v \quad (\text{III.2})$$

Soit un champ de pression initial p^* . La solution provisoire de l'équation précédente sera notée u^* (notons que u^* ne vérifie pas l'équation de continuité).

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_P^* - p_E^*) A_e + b_u \quad (\text{III.3})$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_P^* - p_N^*) A_n + b_v \quad (\text{III.4})$$

A ce stade, aucune des deux variables n'est correcte. Toutes les deux nécessitent une correction :

$$u = u^* + u' \quad (\text{III.5})$$

$$v = v^* + v' \quad (\text{III.6})$$

$$p = p^* + p' \quad (\text{III.7})$$

où u' et p' sont les corrections qu'il faut estimer.

La relation entre u' , v' et p' est obtenue par la soustraction de (III.3 et III.4) de (III.2 et III.1). L'introduction des équations (III.5, III.6 et III.7) dans (III.3 et III.4) et en tenant compte de (III.1 et III.2), il s'en suit:

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E) \quad (\text{III.8})$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N) \quad (\text{III.9})$$

Où :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad \text{et} \quad d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad (\text{III.10})$$

Notons ici que pour linéariser l'équation, le terme $\sum a_{nb} u'_{nb}$ a été tout simplement négligé. Normalement, ce terme doit s'annuler lors de la convergence de la procédure. C'est-à-dire que cette omission n'influe pas sur le résultat final, mais elle fausse un peu le résultat temporaire.

C'est d'ailleurs la seule simplification faite dans l'algorithme SIMPLE. Elle a été corrigée dans les variantes plus évoluées (SIMPLER et SIMPLEC).

L'introduction de l'expression corrigée (III.8 et III.9) dans l'équation de continuité (III.2), donne l'équation de correction de la pression, qu'on écrit sous la forme suivante:

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (\text{III.11})$$

où :

$$a_E = (\rho A d)_e ; \quad a_W = (\rho A d)_w \quad (\text{III.12})$$

$$a_N = (\rho A d)_n ; \quad a_S = (\rho A d)_s \quad (\text{III.13})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.14})$$

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.15})$$

Enfin, l'algorithme SIMPLE est résumé comme suit:

1. Choisir un champ de pression initial p^* .
2. Résoudre les équations de quantité de mouvement (III.3 et III.4) :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_P^* - p_E^*) A_e + b_u$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_P^* - p_N^*) A_n + b_v$$

pour déduire un champ de vitesse u^* et v^* .

3. Calculer le terme source de la masse b de l'équation (III.15) :

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

et résoudre l'équation (III.11) de correction de la pression :

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b$$

4. Corriger les champs de pression et de vitesse via les équations (III.5, III. 6 et III.7) et (III.8 et III.9) :

$$p = p^* + p'$$

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E)$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_p - P'_N)$$

5. Résoudre les autres équations de transports ϕ et mettre à jour les propriétés, les coefficients,.....
6. Remplacer l'ancien champ de pression p trouvée à l'étape 4 par le nouveau p^* et revenir à l'étape 2. Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

III.2 Algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure Linked Revised) de Patankar a été utilisé dans ce travail pour la résolution des équations régissant l'écoulement. Il présente une extension de l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked). Le choix de développer SIMPLER provient des difficultés que présente SIMPLE. Ce dernier est basé sur l'approximation de l'omission des termes qui présentent l'influence des vitesses des voisins, ce qui risque d'exagérer la pression, et ensuite il y aura tendance vers la divergence sans l'utilisation des relaxations appropriées. À partir de cette difficulté l'algorithme SIMPLER est basé sur le fait que l'équation de correction de pression est employée seule pour corriger la vitesse et une autre procédure est utilisée pour obtenir le champ de pression.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées (III.50) et (III.53) sont écrites sous la forme suivante, en considérant une estimation du champ de vitesse :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_p - p_E) A_e + b_u \quad (\text{III.16})$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_p - p_N) A_n + b_v \quad (\text{III.17})$$

Les équations (III.16, III.17) peuvent s'écrire :

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} + d_e (P_p - P_E) \quad (\text{III.18})$$

$$v_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_n} + d_n (P_p - P_N) \quad (\text{III.19})$$

Avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}, d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad (\text{III.20})$$

Lorsqu'on initialise le champ de vitesse, le champ de pression est inconnu. On annule donc le terme qui représente la pression et on introduit les pseudo-vitesses définies comme suit :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} \quad (\text{III.21})$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_n} \quad (\text{III.22})$$

Ainsi les équations de quantité de mouvement s'écrivent :

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.23})$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (P_P - P_N) \quad (\text{III.24})$$

En reportant les expressions précédentes (III.23 et III.24) dans l'équation discrète de conservation de la masse (III.2) on obtient directement une équation en pression :

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (\text{III.25})$$

Avec :

$$a_E = (\rho A d)_e ; \quad a_W = (\rho A d)_w \quad (\text{III.26})$$

$$a_N = (\rho A d)_n ; \quad a_S = (\rho A d)_s \quad (\text{III.27})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.28})$$

$$b = (\rho \hat{u} A)_w - (\rho \hat{u} A)_e + (\rho \hat{v} A)_s - (\rho \hat{v} A)_n - (\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.29})$$

Considérons maintenant une estimation du champ de pression : $P^* = P$.

À partir du champ de pression obtenu P^* , on résout les équations de quantité de mouvement pour obtenir u^* et v^* :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*) A_e + b_u \quad (\text{III.30})$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*) A_n + b_v \quad (\text{III.31})$$

Où :

$$u_e^* = \hat{u}_e + d_e (P_P^* - P_E^*) \quad (\text{III.32})$$

$$v_n^* = \hat{v}_n + d_n (P_P^* - P_N^*) \quad (\text{III.33})$$

On utilise ce champ de vitesse dans la résolution de l'équation de continuité pour obtenir les équations de correction de pression P' (comme dans SIMPLE). L'équation de cette dernière s'écrit sous la même forme que l'équation de la pression.

En conservant l'équation de correction de vitesse de SIMPLE, on écrit :

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_p - P'_E) \quad (\text{III.34})$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_p - P'_N) \quad (\text{III.35})$$

Ce qui donne l'équation de correction de pression :

$$a_p P'_p = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (\text{III.36})$$

$$a_E = (\rho A d)_e ; a_W = (\rho A d)_w \quad (\text{III.37})$$

$$a_N = (\rho A d)_n ; a_S = (\rho A d)_s \quad (\text{III.38})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.39})$$

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.40})$$

On en déduit la vitesse mais on ne corrige pas la pression. Cette démarche représente l'algorithme SIMPLE Révisé (SIMPLER).

Lorsque la convergence est atteinte, les valeurs de b s'annulent dans tous les volumes de contrôle.

Le fait que le terme source b soit nul partout est une preuve que nous avons obtenu le champ de pression correct, et que la solution actuelle de p' n'est pas demandée durant l'itération finale. Ainsi le terme source b est employé comme un indicateur utile pour la convergence de la solution du problème.

Les étapes à suivre dans l'algorithme de SIMPLER sont résumées comme suit:

- 1- Choisir un champ de vitesse (initialisé par des valeurs : u^*, v^*)
- 2- Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement et déduire les « pseudo vitesse » (Eq. III.21, III.22)

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb}^* + b_u}{a_e}$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb}^* + b_v}{a_n}$$

- 3- évaluer le terme source de la masse de l'équation (III.29)

$$b = (\rho \hat{u} A)_w - (\rho \hat{u} A)_e + (\rho \hat{v} A)_s - (\rho \hat{v} A)_n - (\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

et résoudre l'équation de pression (III.25)

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b$$

- 4- Utiliser le champ de pression ($P^* = P$) pour résoudre les équations de quantité de mouvement u^*, v^* (III.30,31), (ne pas corriger la pression).

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*) A_e + b_u$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*) A_n + b_v$$

- 5- Calculer le terme source de la masse b , (III.40)

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

de l'équation (III.40) et résoudre les équations (III.36) de correction de pression (comme dans SIMPLE).

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b$$

- 6- Corriger le champ de vitesse via l'équation (III.34 et 35), mais ne pas corriger la pression.

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E)$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N)$$

- 7- Résoudre les autres équations de transport ϕ (énergie, masse,...).

- 8- Retourner à l'étape -2-, avec les nouveaux champs de (vitesse, température, pression). Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

ANNEXE IV : CALCUL DE RADIOSITE ET FACTEURS DE FORME

IV.1 LA RADIOSITE :

Les échanges radiatifs entre surfaces grises sont plus complexes, car les surfaces réfléchissent du rayonnement et il apparaît alors dans une enceinte fermée des multi-réflexions. La radiosité J d'un élément est égale à la quantité totale d'énergie par unité de surface quittant cet élément, (Fig. IV.1). Elle s'exprime donc en fonction de l'énergie propre émise par l'élément et de l'énergie provenant des autres éléments qui est réfléchi par l'élément lui même.

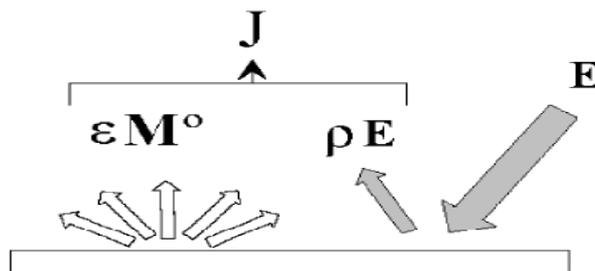


Figure IV.1 : Bilan de rayonnement sur une surface

$$J = \varepsilon M^0 + \rho E \quad (\text{IV.1})$$

J est la radiosité de la surface grise, εM^0 est l'émittance de la surface grise et E l'éclairement de la surface.

Le flux de la surface est alors :

$$\phi_{net} = \varepsilon M^0 S - \alpha E S \quad (\text{IV.2})$$

Selon les hypothèses définies précédemment, on a :

$$\alpha + \tau + \rho = 1 \quad (\text{IV.3})$$

Il vient que :

$$\alpha + \rho = 1 \text{ et } \varepsilon = \alpha \quad (\text{IV.4})$$

Si l'enceinte se compose de N parois, la radiosité de la paroi i vaut alors :

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) E_i \quad (\text{IV.5})$$

Considérons maintenant la surface S_i choisie parmi N surfaces isothermes et homogènes qui délimitent un volume, (Fig. IV.2) :

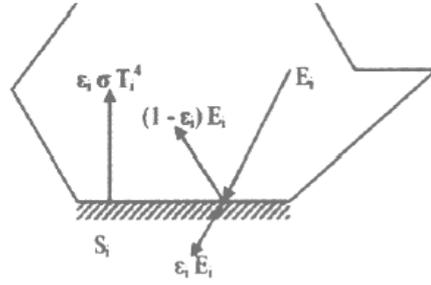


Figure IV.2 : Rayonnement dans une enceinte.

La densité d'énergie nette perdue par rayonnement par S_i s'écrit :

$$\phi_{i_{net}} = \varepsilon_i \sigma T_i^4 - \varepsilon_i E_i \quad (\text{IV.6})$$

Le flux $\phi_{\rightarrow i}$ reçu par la surface S_i s'écrit :

$$\phi_{\rightarrow i} = E_i S_i = \phi_{net\ ij} = \sum_{j=1}^N \phi_{j \rightarrow i} \quad (\text{IV.7})$$

or

$$\phi_{j \rightarrow i} = J_j S_j F_{ji} \quad (\text{IV.8})$$

La valeur F_{ji} correspond à la fraction d'énergie quittant l'élément de surface S_j qui arrive sur l'élément de surface S_i . Cette quantité est appelée : facteur de forme entre S_j et S_i . Le facteur de forme dépend uniquement de la géométrie relative entre les éléments, d'où la relation de réciprocité :

$$F_{ij} S_i = F_{ji} S_j \Rightarrow F_{ij} = F_{ji} \frac{S_j}{S_i} \quad (\text{IV.9})$$

D'où :

$$E_i S_i = \sum_{j=1}^N J_j S_j F_{ji} = \sum_{j=1}^N J_j S_i F_{ij} \quad (\text{IV.10})$$

En reportant cette expression dans (IV.5), nous obtenons :

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^N J_j F_{ij} \quad (\text{IV.11})$$

Soit encore :

$$\sigma T_i^4 = \frac{J_j}{\varepsilon_i} - \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^N (1 - \varepsilon_i) J_j F_{ij} \quad (\text{IV.12})$$

En utilisant le symbole de Kronecker, nous pouvons écrire :

$$J_i = \sum_{j=1}^N \delta_{ij} J_j \quad (\text{IV.13})$$

D'où :

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{\varepsilon_i} [\delta_{ij} - (1 - \varepsilon_i) F_{ij}] J_j = \sigma T_i^4 \quad (\text{IV.14})$$

Ou bien :

$$\sum_{j=1}^N [\delta_{ij} - (1 - \varepsilon_i) F_{ij}] J_j = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \quad (\text{IV.15})$$

Nous écrivons cette relation pour toutes les surfaces S_i dont on connaît les températures. Pour celles dont on connaît plutôt la densité de flux net perdue $\phi_{i_{net}}$ nous utiliserons la relation :

$$\phi_{i_{net}} = J_i - E_i = J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \quad (\text{IV.16})$$

Qui peut encore s'écrire :

$$\phi_{i_{net}} = \sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - F_{ij}) J_j \quad (\text{IV.17})$$

IV.2 FACTEURS DE FORME :

Le facteur de forme caractérise l'échange d'énergie entre deux surfaces. Le facteur de forme F_{ij} entre deux surfaces A_i et A_j correspond à la fraction de l'énergie issue de la surface A_i qui arrive sur la surface A_j :

$$F_{ij} = \frac{\text{Energie provenant de } A_i \text{ qui atteint } A_j}{\text{Energie totale quittant } A_i \text{ (dans toutes les directions)}} \quad (\text{IV.18})$$

Le facteur de forme F_{ij} représente la proportion de flux arrivant sur l'objet i lorsque l'objet j émet, (Fig. IV.3). Il quantifie donc l'interaction entre les deux objets. Analytiquement, le facteur de forme de F_{ij} peut s'écrire :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \iint_{A_i A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi r^2} H_{ij} dA_i dA_j \quad (\text{IV.19})$$

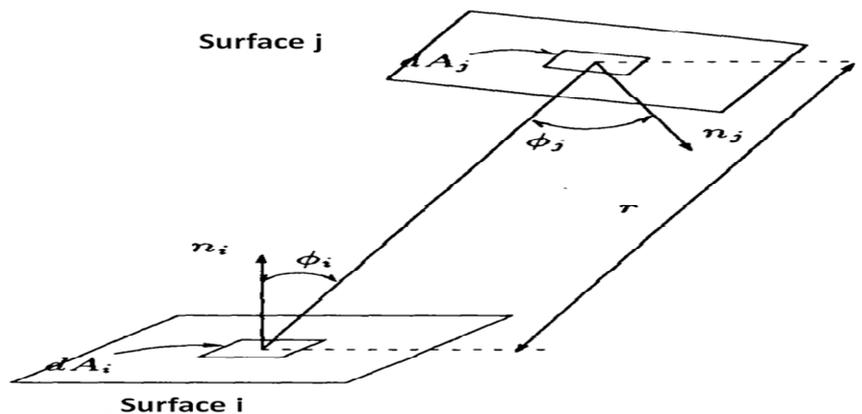


Figure IV.3 : échange d'énergie entre deux surfaces.

où H_{ij} caractérise la visibilité entre les deux portions de courbes considérées (Effet ombre), (1 si dA_j est visible depuis dA_i et 0 sinon), r est la distance entre les deux éléments de longueur dA_i et dA_j , θ_i l'angle par rapport à la normale en dA_i , et θ_j l'angle par rapport à la normale en dA_j .

IV.2.1 Propriétés du facteur de forme

Le facteur de forme est en fait une quantité purement géométrique : il dépend uniquement de la forme et de la position relative des surfaces dans la scène. Compte tenu de sa définition, il possède différentes propriétés :

1. Réciprocité : c'est-à-dire

$$\forall(i, j) \quad A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (IV.20)$$

2. Le facteur de forme est défini comme une fraction d'énergie ce qui implique que, dans le cas d'un environnement clos, la somme de tous les facteurs de forme pour une surface donnée est égale à l'unité.

Soit un environnement clos constitué de N surfaces A_1, A_2, \dots, A_n . On a donc pour toute surface A_i de cet environnement (i allant de 1 à N) :

$$\sum_{k=1}^N F_{ik} = 1 \quad (IV.21)$$

3. Dans le cas d'une surface A_i plane ou convexe, aucun rayon lumineux réfléchi par cette surface ne va frapper directement cette même surface. Donc :

$$F_{ii} = 0 \quad (IV.22)$$

Dans le cas d'une surface A_i concave, on a bien sur : $F_{ii} \neq 0$:

4. Additivité : Soient trois surfaces disjointes A_i, A_j et A_k . La fraction d'énergie issue de A_i et reçue par l'union des deux surfaces A_j et A_k est égale à la somme des fractions d'énergie issues de A_i et reçues par chacune de ces deux surfaces.

Le facteur de forme entre A_i et l'union de A_j et A_k est donc égal à la somme du facteur de forme entre A_i et A_j et du facteur de forme entre A_i et A_k :

$$F_{i(j \cup k)} = F_{ij} + F_{ik} \quad (IV.23)$$

L'inverse n'est pas valable : $F_{(j \cup k)i} = \frac{A_j F_{ji} + A_k F_{ki}}{A_j + A_k} \neq F_{ji} + F_{ki}$

Si les deux surfaces A_j et A_k ont une partie commune, on a alors :

$$F_{i(j \cup k)} = F_{ij} + F_{ik} - F_{i(j \cap k)} \quad (IV.24)$$

IV.2.2 Détermination des facteurs de forme

Le calcul peut être toujours ramené à celui d'un double intégral de surface à partir de la définition:

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \iint_{A_i A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (IV.25)$$

Mais c'est une opération longue et fastidieuse, il existe alors des idées pratiques pour déterminer les facteurs de forme :

- Heureusement très grand nombre de configurations usuelles a été déjà calculé. Les résultats sont présentés dans les documents spécialisés.
- On peut également faire appel à des abaques donnant des valeurs pour certaines géométries
- Il est aussi possible de les déterminer par des considérations géométriques simples
- Dans le cas de surfaces A_i et A_j très longues suivant la même direction on peut utiliser la formule de Hottel
- En pratique, on cherche à déterminer quelques facteurs et puis on profite de l'additivité et réciprocity.

Notre étude, pour le calcul des facteurs de formes en 2D, reposera sur ces théories, on utilise des expressions analytiques des facteurs de formes (configurations usuelles déjà calculées) et puis on profite de l'additivité et de la réciprocity.

IV.2.3 Algorithme de calcul des facteurs de forme

Utilisons les expressions du facteur de forme données dans [11], et les propriétés de réciprocity et d'additivité du facteur de forme (Réciprocity, Additivité) pour trouver les facteurs de forme F_{i-j} et F_{i-k} de la cavité représentée dans la figure IV.4.

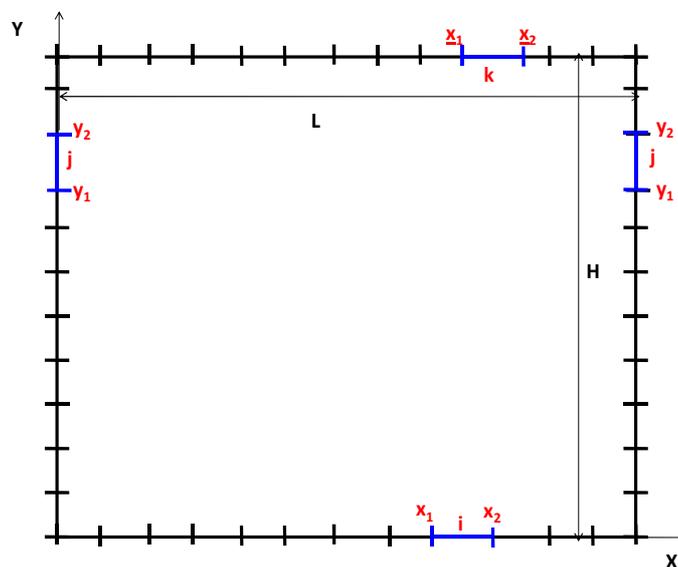


Figure IV. 4 : Cavité carré divisée en N segments

- a) **Calcul de F_{ij}** : Considérons les surfaces A_1, A_2, A_3 et A_4 comme indiqué sur la figure IV.5

On a :

$$F_{ij} = F_{3-4} = F_{3-(2+4)} - F_{3-2} \quad (IV.26)$$

$$F_{(2+4)-3} = F_{(2+4)-(1+3)} - F_{(2+4)-1} \quad (IV.27)$$

avec

$$(A_2 + A_4)F_{(2+4)-3} = A_3F_{3-(2+4)} \quad (IV.28)$$

On obtient :

$$F_{3-(2+4)} = \frac{(A_2 + A_4)}{A_3} F_{(2+4)-3} = \frac{(A_2 + A_4)}{A_3} [F_{(2+4)-(1+3)} - F_{(2+4)-1}] \quad (IV.29)$$

$$F_{2-3} = F_{2-(1+3)} - F_{2-1} \quad \text{avec} \quad A_2F_{2-3} = A_3F_{3-2}$$

$$\Rightarrow F_{3-2} = \frac{A_2}{A_3} F_{2-3} = \frac{A_2}{A_3} [F_{2-(1+3)} - F_{2-1}] \quad (IV.30)$$

De l'équation (IV.29) et l'équation (IV.30) on arrive à :

$$F_{ij} = \frac{(A_2 + A_4)}{A_3} [F_{(2+4)-(1+3)} - F_{(2+4)-1}] - \frac{A_2}{A_3} [F_{2-(1+3)} - F_{2-1}] \quad (IV.31)$$

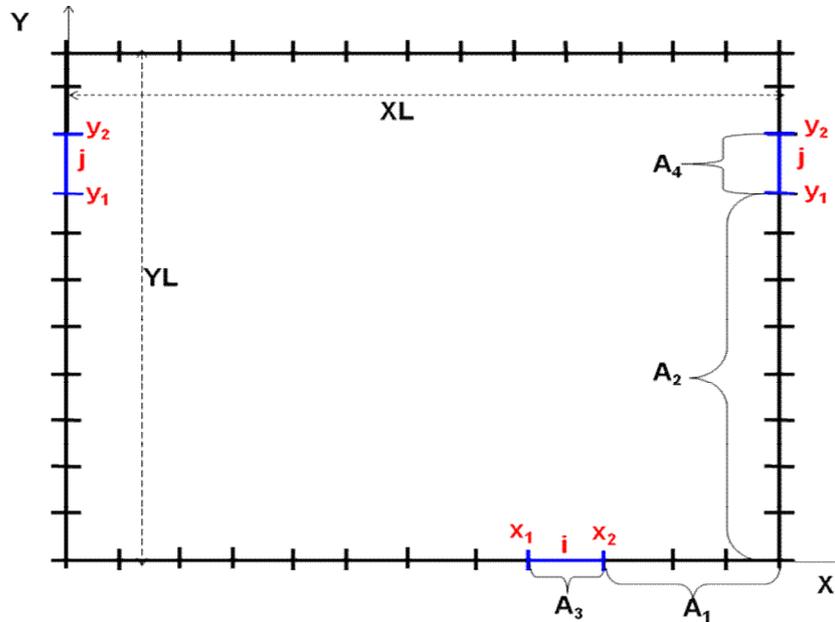


Figure IV.5

$$F_{ij} = \frac{(A_2 + A_4)}{A_3} [F_{(A_2+A_4)-(A_1+A_3)} - F_{(A_2+A_4)-A_1}] - \frac{A_2}{A_3} [F_{A_2-(A_1+A_3)} - F_{A_2-A_1}] \quad (IV.32)$$

On a :

$$(A_2 + A_4)F_{(A_2+A_4)-(A_1+A_3)} = (A_1 + A_3)F_{(A_1+A_3)-(A_2+A_4)} \quad (IV.33)$$

$$\Rightarrow F_{(A_2+A_4)-(A_1+A_3)} = \frac{(A_1 + A_3)}{(A_2 + A_4)} F_{(A_1+A_3)-(A_2+A_4)} \quad (IV.34)$$

$$(A_2 + A_4)F_{(A_2+A_4)-A_1} = A_1 F_{A_1-(A_2+A_4)} \Rightarrow F_{(A_2+A_4)-A_1} = \frac{A_1}{(A_2 + A_4)} F_{A_1-(A_2+A_4)} \quad (IV.35)$$

$$A_2 F_{A_2-(A_1+A_3)} = (A_1 + A_3) F_{(A_1+A_3)-A_2} \Rightarrow F_{A_2-(A_1+A_3)} = \frac{(A_1 + A_3)}{A_2} F_{(A_1+A_3)-A_2} \quad (IV.36)$$

$$A_2 F_{A_2-A_1} = A_1 F_{A_1-A_2} \Rightarrow F_{A_2-A_1} = \frac{A_1}{A_2} F_{A_1-A_2} \quad (IV.37)$$

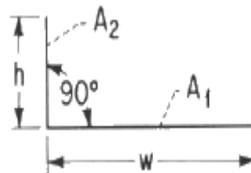
Il vient :

$$F_{ij} = \frac{(A_2 + A_4)}{A_3} \left[\frac{(A_1 + A_3)}{(A_2 + A_4)} F_{(A_1+A_3)-(A_2+A_4)} - \frac{A_1}{(A_2 + A_4)} F_{A_1-(A_2+A_4)} \right] - \frac{A_2}{A_3} \left[\frac{(A_1 + A_3)}{A_2} F_{(A_1+A_3)-A_2} - \frac{A_1}{A_2} F_{A_1-A_2} \right] \quad (IV.38)$$

$$F_{ij} = \left[\frac{(A_1 + A_3)}{A_3} F_{(A_1+A_3)-(A_2+A_4)} - \frac{A_1}{A_3} F_{A_1-(A_2+A_4)} \right] - \left[\frac{(A_1 + A_3)}{A_3} F_{(A_1+A_3)-A_2} - \frac{A_1}{A_3} F_{A_1-A_2} \right] \quad (IV.39)$$

$$F_{ij} = \frac{A_1}{A_3} \left[F_{A_1-A_2} - F_{A_1-(A_2+A_4)} \right] + \frac{(A_1 + A_3)}{A_3} \left[F_{(A_1+A_3)-(A_2+A_4)} - F_{(A_1+A_3)-A_2} \right] \quad (IV.40)$$

Puisque on a : $A_1 = x_2$, $A_3 = x_2 - x_1$, $A_2 = y_1$, $A_2 + A_4 = y_2$ et $A_1 + A_3 = x_1$, et d'après la formule (A) de la configuration de la figure IV.6



$$F_{1-2} = \frac{1}{2} \left(1 + H - \sqrt{1 + H^2} \right) ; H = h/w \quad (A)$$

Figure IV.6 : [11]

Les facteurs de forme : $F_{A_1-A_2}$, $F_{A_1-(A_2+A_4)}$, $F_{(A_1+A_3)-(A_2+A_4)}$ et $F_{(A_1+A_3)-A_2}$ sont connues, tel que :

$$F_{A_1-A_2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_1}{x_1} - \sqrt{1 + \left(\frac{y_1}{x_1} \right)^2} \right) \quad (\text{IV.41})$$

$$F_{A_1-(A_2+A_4)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_2}{x_1} - \sqrt{1 + \left(\frac{y_2}{x_1} \right)^2} \right) \quad (\text{IV.42})$$

$$F_{(A_1+A_3)-(A_2+A_4)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_2}{x_2} - \sqrt{1 + \left(\frac{y_2}{x_2} \right)^2} \right) \quad (\text{IV.43})$$

$$F_{(A_1+A_3)-A_2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_1}{x_2} - \sqrt{1 + \left(\frac{y_1}{x_2} \right)^2} \right) \quad (\text{IV.44})$$

On obtient :

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{A_1}{A_3} [F_{A_1-A_2} - F_{A_1-(A_2+A_4)}] + \frac{(A_1+A_3)}{A_3} [F_{(A_1+A_3)-(A_2+A_4)} - F_{(A_1+A_3)-A_2}] \\ &= \frac{x_1}{x_2-x_1} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_1}{x_1} - \sqrt{1 + \left(\frac{y_1}{x_1} \right)^2} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_2}{x_1} - \sqrt{1 + \left(\frac{y_2}{x_1} \right)^2} \right) \right] + \\ &\quad \frac{x_2}{x_2-x_1} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_2}{x_2} - \sqrt{1 + \left(\frac{y_2}{x_2} \right)^2} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_1}{x_2} - \sqrt{1 + \left(\frac{y_1}{x_2} \right)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.45})$$

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{1}{2(x_2-x_1)} \left[(x_1+y_1-\sqrt{x_1^2+y_1^2}) - (x_1+y_2-\sqrt{x_1^2+y_2^2}) \right] + \\ &\quad \frac{1}{2(x_2-x_1)} \left[(x_2+y_2-\sqrt{x_2^2+y_2^2}) - (x_2+y_1-\sqrt{x_2^2+y_1^2}) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.46})$$

$$F_{ij} = \frac{1}{2(x_2-x_1)} \left[x_1+y_1-\sqrt{x_1^2+y_1^2} - x_1-y_2+\sqrt{x_1^2+y_2^2} + x_2+y_2-\sqrt{x_2^2+y_2^2} - x_2-y_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2} \right]$$

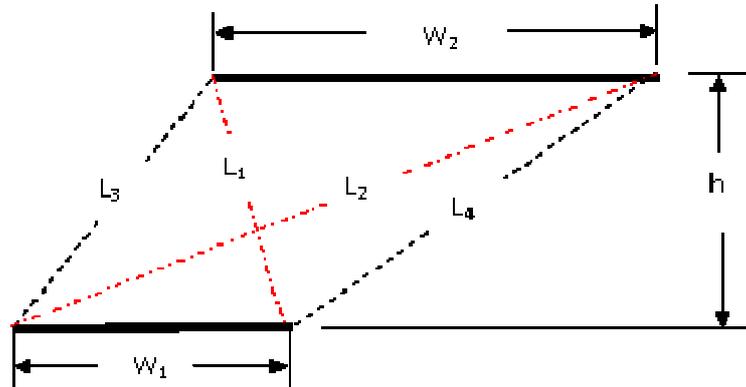
Finalement :

$$F_{ij} = \frac{1}{2(x_2-x_1)} \left[-\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_1^2+y_2^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2} + \sqrt{x_2^2+y_1^2} \right] \quad (\text{IV.47})$$

$$F_{ij} = \frac{-1}{2(x_2-x_1)} \left[\sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_1^2+y_2^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2} - \sqrt{x_2^2+y_1^2} \right] \quad (\text{IV.48})$$

$$F_{ij} = \frac{-1}{2(x_2-x_1)} \left[\sqrt{x_2^2+y_2^2} \Big|_{y_1}^{y_2} - \sqrt{x_2^2+y_1^2} \Big|_{y_1}^{y_2} \right] \quad (\text{IV.49})$$

b) Calcul de F_{ik} : Considérons les surfaces L_1, L_2, L_3 et L_4 comme l'indique la figure IV.7



$$F_{1-2} = \frac{L_1 + L_2 - L_3 - L_4}{2w_1}$$

Figure IV.7 : [11]

Comparons la figure IV.7 avec la figure IV.8, et calculons les expressions de L_1, L_2, L_3, L_4, W_1 et W_2 , on obtient l'expression analytique des facteurs de formes correspondants :

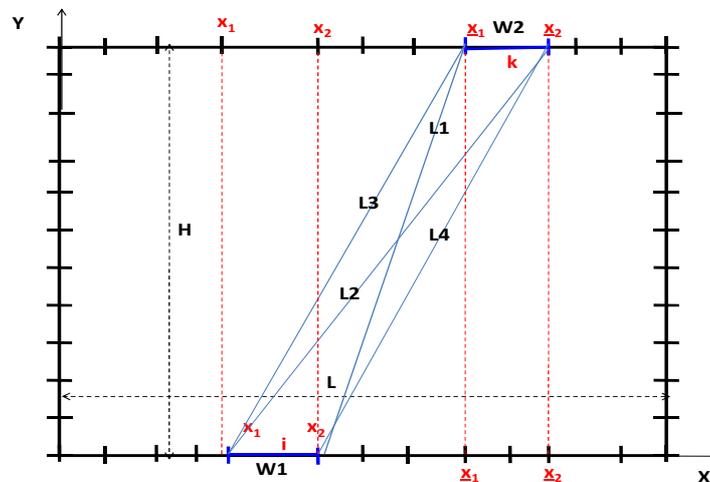


Figure IV.8

On a de la figure IV.8 :

$$\begin{aligned} L_1^2 &= H^2 + (x_1 - x_2)^2 \rightarrow L_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + H^2} \\ L_2^2 &= H^2 + (x_2 - x_1)^2 \rightarrow L_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + H^2} \\ L_3^2 &= H^2 + (x_1 - x_1)^2 \rightarrow L_3 = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + H^2} \\ L_4^2 &= H^2 + (x_2 - x_2)^2 \rightarrow L_4 = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + H^2} \\ w_1 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{IV.50}$$

$$F_{1-2} = F_{i-k} = \frac{L_1 + L_2 - L_3 - L_4}{2w_1} \quad (\text{IV.51})$$

En remplaçant L_1, L_2, L_3, L_4 et w_1 par leurs expressions données dans l'équation IV.50, on obtient :

$$F_{i-k} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + H^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + H^2} - \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + H^2} - \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + H^2}}{2(x_2 - x_1)} \quad (\text{IV.52})$$

On arrive à :

$$F_{ik} = -\frac{1}{2(x_2 - x_1)} \left[\sqrt{(x_2 - x)^2 + H^2} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \sqrt{(x_1 - x)^2 + H^2} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \right] \quad (\text{IV.53})$$

References

- [1] **L. Euler**, Principes généraux de l'état d'équilibre d'un fluide, *MASB*, 11 [printed in 1957], 217-273, Also in *Opera omnia*, ser. 2, 12, 2-53, E225. 1755.
- [2] **C. L. M. H. Navier**, Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluides. *Mem. de l' Acad. des Sciences*, Vol. 6, pp. 389-440, 1822.
- [3] **G.H. Stokes**, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, pp. 287-305, 1845.
- [4] **J. Ferziger, M. G. Kaper**. Mathematical theory of transport processes in gases. *North Holland*, 1972.
- [5] **J. Hirschfelder, C. Curtis, R. Bird**, Molecular theory of gases and liquids. *N. Y., John Wiley*, 1964.
- [6] **H. Schlichting**, Boundary-layer theory, 7th edn, *McGraw-Hill*, *New York*. 1979.
- [7] **Bird, R.B., W. E. Stewart, E. N. Lightfoot**, Transport Phenomena, *John Wiley & Sons*, 1960.
- [8] **S.V. Patankar**, Numerical heat transfer and fluid flow, *Hemisphere*, *Washington, D.C., U.S.A*, 1980.
- [9] **D. B. Spalding**, A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 4(4), 551-559, 1972.
- [10] **S. V. Patankar**, A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations. *Numer. Heat Transfer. Part A*, Vol. 14(25), pp. 409, 1981.
- [11] **J.R. Howell**, A Catalog of Radiation Configuration Factors, *McGraw-Hill*, *New York*, 1982.

PRODUCTIONS SCIENTIFIQUES

Publications Internationales

- 1- S. Hamimid, M. Guellal, A. Amroune et N. Zeraibi, 'Effect of a Porous Layer on the Flow Structure and Heat Transfer in a Square Cavity', *Fluid Dynamics & Materials Processing (FDMP)*, vol.8, no.1, pp.69-90, 2011
- 2- S. Hamimid, M. Guellal, 'Maragani-Natural convection in liquid metals in the presence of titled magnetic field ', Chapitre d'ouvrage 'Navier Stokes equations properties description and applications', 2012 *Nova Science Publishers*, ISBN: 978-1613245903
- 3- S. Hamimid, M. Guellal, 'Numerical analysis of combined natural convection-surface radiation in a square cavity', *Fluid Dynamics & Materials Processing (FDMP)*, (2014), Volume 10, N°3, pp. 377-393
- 4- S. Hamimid, M. Guellal, M. Bouafia, 'Numerical study of natural convection in a square cavity under non-Boussinesq conditions', (2015), *Thermal Science Journal*, Online first, doi: 10.2298/TSCII130810084H
- 5- S. Hamimid, M. Guellal, 'Numerical analysis of combined natural convection-internal heat generation source-surface radiation', (2015), *Thermal Science Journal*, Online first, doi: 10.2298/TSCII140315115H
- 6- S. Hamimid, M. Guellal, M. Bouafia, 'Numerical simulation of combined natural convection surface radiation for large temperature gradients', *Journal of Thermophysics and Heat Transfer JTHT*, (2015), Vol. 29, No. 3, pp. 636-645
- 7- M. Bouafia, S. Hamimid, M. Guellal, 'Non-Boussinesq convection in a square cavity with surface thermal radiation', *International Journal of Thermal Sciences*, (2015), Volume 96, pp. 236-247

Communications Internationales

- 1- S. Hamimid, M. Guellal, 'Study of combined natural convection-surface radiation with internal heat generation', *1st International Symposium on Innovative Technologies in Engineering and Science (ISITES2013)*, Sakarya (Turkey), 7-9 June 2013
- 2- S. Hamimid, M. Guellal, M. Bouafia, 'Effet du rayonnement de surfaces sur la convection naturelle pour de larges gradients thermiques', *16èmes Journées Internationales de Thermique (JITH 2013)*, Marrakech (Maroc), du 13 au 15 Novembre, 2013
- 3- S. Hamimid, M. Guellal, M. Bouafia, ' Sur la similarité entre la convection thermogravitaire et la convection thermomagnétique en zéro gravité dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée remplie d'un fluide paramagnétique', *Congrès Français de Thermique SFT2014*, 03-06 Juin 2014, Lyon, France
- 4- S. Hamimid, M. Guellal, Madiha Bouafia, 'Effect of thermophysical properties variation on non-Boussinesq natural convection', *12ème Séminaire International sur la Physique Energétique (SIPE 12)*, Béchar, 23-25 février 2015

Résumé: Le travail consiste à étudier numériquement le couplage convection naturelle-rayonnement surfacique/champ magnétique dans une cavité différentiellement chauffée dans le cas hors Boussinesq. L'objectif ici est de prendre en compte des grands écarts de température par le choix de modèles dits faible Mach qui permettent de s'affranchir de l'hypothèse de Boussinesq, tout en conservant le découplage entre les fluctuations de pression et de masse volumique, caractéristique des écoulements incompressibles. La résolution numérique de ce problème passe essentiellement par l'approximation en volumes finis des équations généralisées de Navier-Stokes. Les résultats obtenus montrent que pour des larges gradients thermiques l'approximation de Boussinesq n'est plus applicable, que la variation des propriétés physiques du fluide en fonction de la température modifie l'échange thermique et le régime dynamique de l'écoulement, et que le rayonnement de surface modifie considérablement les propriétés thermique et dynamique de l'écoulement. En outre l'étude numérique réalisée sur un fluide paramagnétique a permis d'observer de mouvement convectif créé en apesanteur est semblable à celui créé par les effets thermogravitaires.

Mots-clés: Convection naturelle; Approximation de faible nombre Mach; Rayonnement de surface; Simulation numérique, Champ magnétique

Abstract: A Numerical investigation of combined natural convection-surface radiation/magnetic field in a differentially heated cavity is presented for large temperature differences. The study has been performed by direct simulations using a two-dimensional finite volume numerical code solving the time-dependent Navier–Stokes equations under the Low Mach Number approximation. The LMN model constitutes an important numerical problem for low speed flows. It is based on the filtering of acoustic waves from the complete Navier-Stokes equations. Various simulations were conducted including constant or variable transport coefficients and both small and large temperature differences. The results show that the incompressible model is not sufficient to simulate natural convective flow for large temperature differences, the variation of thermophysical properties may have a significant influence on the fluid flow and heat transfer and the presence of radiation increases the temperatures of the fluid and modifies considerably the fluid flow and temperature distribution. Moreover, thermal convection of a fluid can take place even in zero-gravity environments as a direct consequence of temperature differences occurring within the fluid placed within a magnetic field gradient. Furthermore the numerical study of paramagnetic fluid allows to observe that convective movement created in zero gravity is similar to one created by gravity effects.

Keywords: Natural convection; Low Mach number approximation; Surface radiation; Numerical simulation, Magnetic field

ملخص : العمل هو عبارة عن دراسة عددية لاقتتران الحمل الحراري بالإشعاع الطبيعي السطحي و بحقل مغناطيسي في تجويف مسخن تفاضلياً خارج إطار فرضية بوسيناسك (Boussinesq). والهدف هنا هو الأخذ في الاعتبار تغيرات درجات الحرارة الكبيرة في اختيار ما يسمى بنماذج ماك المنخفضة LMN التي تمكن من الاستغناء عن فرضية (Boussinesq)، مع الحفاظ على فصل تغيرات الضغط والكثافة، و هي سمة للتدفقات غير القابلة للانضغاط. الحل العددي لهذه الإشكالية يكون من خلال تقريب الحجم المحدود لمعادلات نافير ستوكس (Navier-Stokes) المعقدة. وأظهرت النتائج أنه تحت التغيرات الكبيرة لدرجة الحرارة لا يمكن تطبيق تقريب بوسيناسك (Boussinesq)، و أن التغير في الخواص الفيزيائية للسائل حسب درجة الحرارة له أثر كبير على التبادل الحراري و تدفق السائل، وأن الإشعاع السطحي يغير بشكل ملحوظ الخواص الديناميكية و الحرارية للتدفق. وعلاوة على ذلك فإن الدراسة العددية المنجزة على سائل ممغطس مكنت من مقارنة آثار الحمل الحراري الجاذبي (thermogravitaire) بآثار الحمل الحراري المغناطيسي ذو جاذبية معدومة. فإن حركة الحمل الحراري التي تم إنشاؤها تحت انعدام الوزن مماثلة لتلك التي تم إنشاؤها بفعل الحمل الحراري الجاذبي.

الكلمات الدالة: الحمل الحراري الطبيعي، تقريب عدد ماك المنخفض، الإشعاع السطحي، المحاكاة العددية، الحقل المغناطيسي.