

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

THESE

Présentée à la Faculté des sciences
Département de Physique
Pour l'Obtention du Diplôme de

DOCTORAT

Option : Physique théorique

Par

MR. LAKEHAL HALIM

THEME

**Evolution non-adiabatique du champ électromagnétique
dans un milieu linéaire homogène dépendant du temps**

Soutenue le 26/11/2016

Devant le Jury

Président	Pr. A. Haroun	Univ. Setif 1
Directeur	Pr. M. Maamache	Univ. Setif 1
Examineurs	Pr. T. Boudjedaa	Univ. Jijel
	Pr. N. Mebarki	Univ. Constantine
	Pr. M. Merad	Univ. Oum El Bouaghi
	Dr. N. Baadji	Univ. M'sila

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier monsieur le professeur Mustapha **MAAMACHE** pour m'avoir encadré, conseillé et soutenu pendant toute la durée de ce travail.

Je remercie les membres de jury qui ont accepté de juger ce travail et d'y apporter leur caution :

Monsieur Abdelhalim **HAROUN**, professeur à l'université de Sétif, qui me fait le grand honneur d'accepter la présidence du jury.

Messieurs Tahar **BOUDJEDAA**, Noureddine **MEBARKI**, Mahmoud **MERAD** et Nadjib **BAADJI** pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de participer à ce jury.

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près durant mes années d'étude, ma grande famille, mes professeurs, mes collègues et tous mes amis.

Table des matières

Introduction	6
1 Equations de Maxwell	9
1.1 Les équations de Maxwell dans le vide	9
1.2 Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	11
1.2.1 Equation de propagation des champs	11
1.2.2 Le potentiel électromagnétique :	12
1.3 Equation de propagation des potentiels dans le vide :	14
1.4 Les équations de Maxwell dans un milieu matériel	15
1.5 Les équations de Maxwell dans un conducteur	17
1.6 Le champ électromagnétique dans un milieu conducteur, linéaire et homogène dépendant du temps	20
2 Angle géométrique non-adiabatique	23
2.1 Introduction	23
2.2 Recherche d'un invariant	25
2.3 La limite adiabatique	27
2.4 Effet de la phase géométrique sur le rayonnement quantique	28
3 Etats cohérents et limite semi-classique	31
3.1 Définition des états cohérents de l'oscillateur harmonique	31
3.2 Evolution temporelle des états cohérents	36
3.3 Les états cohérents de l'oscillateur harmonique généralisé OHG	36

3.3.1 Les valeurs moyennes et les variances des champs dans les états cohérents	38
Appendice	42
Bibliographie	45
Annexe : Articles	50

Introduction

Du point de vue classique et quantique, la lumière peut occuper une position exceptionnelle dans la tentative de comprendre les phénomènes de la nature. Une discussion des propriétés quantiques de la lumière nécessite la quantification du champ électromagnétique. Cette quantification est traditionnellement réalisée dans des cavités vides ou dans l'espace libre [1, 2, 3], où chaque mode du champ électromagnétique est associé à un oscillateur harmonique quantifié. Il semble naturel d'étendre le schéma de la quantification du champ électromagnétique dans une cavité en un problème plus général, par exemple : dans un milieu conducteur, milieu non-linéaire, milieu linéaire dépendant du temps,...etc.

La quantification du champ électromagnétique dans un milieu linéaire dont les paramètres électromagnétiques (la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique) dépendent du temps est un problème intéressant en optique quantique. Récemment, une grande attention a été accordée à la propagation du champ électromagnétique dans les milieux linéaires dépendants du temps [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] pour décrire les matériaux optiques modernes tels que : les fibres optiques.

Les équations de propagation du champ électromagnétique dans un milieu conducteur pourront être décrites par l'Hamiltonien dépendant du temps de Caldirola-Kanai [17, 18, 19] qui canoniquement est équivalent à l'oscillateur harmonique généralisé indépendant du temps. Il est naturel de généraliser la propagation du champ électromagnétique à des milieux dépendants du temps.

Le passage à la théorie quantique se fait à l'aide de la quantification canonique (ou principe de correspondance) de l'Hamiltonien dépendant du temps. Ainsi, on pourra exprimer le champ électromagnétique en fonction des opérateurs canoniques quantifiés, ce qui permet le passage à l'électrodynamique quantique, où le champ électromagnétique est quantifié.

Le développement de la théorie quantique du champ électromagnétique dont l'Hamiltonien dépend explicitement du temps a été étudié de différentes manières, et en particulier la phase

géométrique associée au champ électromagnétique quantifié dans un milieu conducteur linéaire homogène dont les paramètres varient lentement en fonction du temps. Maamache et al [9, 10] ont montré que cette phase correspond à l'angle géométrique classique.

La phase de Berry (relative à des états quantiques stationnaires) [20] et l'angle de Hannay (relatif à des trajectoires dans l'espace des phases) [21] constituent un complément au théorème adiabatique standard. Ce dernier énonce que si les paramètres d'un Hamiltonien (supposé intégrable dans le cas classique) varient arbitrairement lentement en fonction du temps, le nombre quantique principal d'un état stationnaire ou l'action d'une trajectoire classique sont des invariants. Le point nouveau mis en évidence par Berry et Hannay est que l'évolution des variables conjuguées (la phase et l'angle) n'est pas dynamique ; il s'y ajoute un terme géométrique entièrement déterminé par le chemin suivi dans l'espace des paramètres de l'Hamiltonien. Cette partie géométrique qu'on appelle dans le cas des évolutions cycliques respectivement la phase de Berry et l'angle de Hannay. La phase de Berry a été étendue à des évolutions non-adiabatiques [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28], non-cycliques [29, 30, 31, 32] et non-hermitiennes [33, 34, 35, 36]. L'angle de Hannay a connu quelques généralisations immédiates telles que l'abandon de l'adiabaticité [37, 38].

La phase et l'angle géométriques non-adiabatiques ont été discutés au niveau théorique de différentes manières [39, 40] et calculés pour différents exemples [41, 42, 43], parmi lesquels : le système à deux niveaux et l'oscillateur harmonique généralisé (qui ont donné lieu à beaucoup de variations) [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51].

L'approche la plus utilisée dans le cadre de l'évolution non-adiabatique est celle de la théorie des invariants [52] définie par :

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = i\hbar [I(t), H(t)]$$

dans le cas quantique et par :

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \{I(t), H(t)\}_{qp} = \left(\frac{\partial I}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

dans le cas classique, où $\{\}$ est le crochet de Poisson.

Dans son article consacré à l'étude de l'angle de Hannay, Berry [53] a établi une relation semi classique entre la 1-forme et la phase quantique, en utilisant la méthode de Maslov [54].

Cette méthode relie d'une manière générale la fonction d'onde aux trajectoires dans l'espace des phases. La relation directe entre la phase de Berry et l'angle de Hannay a été introduite par Maamache et al [56] dans le cadre du formalisme des états cohérents action-angle.

Le but de ce travail est d'étudier en jauge de Coulomb la propagation du champ électromagnétique dans milieu conducteur linéaire homogène dépendant du temps. Nous verrons que le problème se réduit à l'étude du système décrit par l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique généralisé dépendant du temps [28, 38, 44, 47, 48, 49, 50, 51, 53] qui a été très souvent étudié (du point de vue adiabatique ou non-adiabatique) comme cela a été mentionné au début, et qui nous permettra d'étudier le caractère géométrique du champ électromagnétique, en généralisant le travail de Maamache et al [9, 10] au cas non-adiabatique.

Le chapitre 1 est consacré à un rappel des équations de Maxwell dans le vide, dans un milieu matériel ainsi qu'à la généralisation au milieu conducteur dépendant du temps.

Le chapitre 2 introduit l'angle de Hannay non-adiabatique, et traite en détail l'exemple de l'oscillateur harmonique généralisé dépendant du temps. La quantification du champ électromagnétique montre qu'au niveau quantique, on met en évidence l'angle de Hannay et non pas la phase de Berry.

Enfin, nous introduisons les états cohérents au chapitre 3 afin d'étudier la limite semi-classique des expressions quantifiées au chapitre 2.

Chapitre 1

Equations de Maxwell

1.1 Les équations de Maxwell dans le vide

Oersted (1820) a découvert qu'un courant électrique est produit un champ magnétique. Par la suite Ampère, Biot et Savart ont étudié quantitativement ce phénomène et ont formulé les lois de ce champ. Faraday et Henry (1831) ont indépendamment établi qu'un champ magnétique variable produit un courant électrique. En 1864, Maxwell parvient à unifier ces diverses relations entre champ magnétique et champ électrique sous la forme d'un ensemble d'équations (vingt équations et vingt inconnues), qui ne sera simplifié qu'à la fin du XIXe siècle par le physicien Heaviside, qui récrivit ces équations sous la forme des 4 équations vectorielles aux dérivées partielles que l'on connaît maintenant sous le nom des équations de Maxwell. Ces équations décrivent de façon mathématique comment sont liées et comment interagissent charges électriques, courants électriques, champs électriques et champs magnétiques.

Les équations de Maxwell peuvent être divisées en deux groupes : celles qui définissent la structure du champ électromagnétique (des équations sans source) :

l'équation du Flux magnétique :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.1)$$

l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

et celles qui relient ce champ aux sources :

l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.3)$$

l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.4)$$

où ρ est la densité de charge et $\vec{J}$ la densité de courant.

Les constantes $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{Fm}^{-1}$ et $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \text{Hm}^{-1}$ (dans le système MKSA) apparaissant dans les équations de Maxwell sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique dans le vide.

Les trois premières équations sont obtenues à partir des observations expérimentales et la quatrième est une généralisation de la loi d'Ampère. Le terme $\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ (le courant de déplacement) a été introduit par Maxwell pour préserver l'équation de conservation de la charge.

En dérivant l'équation (1.3) par rapport au temps et prenant la divergence de l'équation (1.4), on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (1.5)$$

qui exprime la conservation de la quantité de charge électrique.

En l'absence de charge et de courant électrique, ces équations prennent la forme suivante :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.9)$$

1.2 Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

1.2.1 Equation de propagation des champs

Les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre, couplant l'évolution du champ électrique et du champ magnétique. Il est possible d'écrire des équations découplées pour chacun des champs. En effet, la dérivée temporelle de l'équation (1.9) implique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

En utilisant la relation d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \overrightarrow{E} - \Delta \overrightarrow{E} \quad (1.11)$$

comme $\text{div} \overrightarrow{E} = 0$, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{E} = -\Delta \overrightarrow{E} \quad (1.12)$$

En tenant compte de l'équation (1.10) et (1.12), on obtient l'équation de propagation du second ordre pour $\overrightarrow{E}$:

$$\Delta \overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.13)$$

et en procédant de la même manière, on obtient pour $\overrightarrow{B}$ l'équation :

$$\Delta \overrightarrow{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.14)$$

Ces équations sont des équations de propagation d'ondes appelées équation de d'Alembert. Dans le vide les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière : $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Les solutions particulières des équations (1.13) et (1.14) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_m e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (1.15)$$

Il s'agit alors des ondes planes de pulsation ω se propageant dans la direction $\vec{k}$ (avec $k = \frac{\omega}{c}$).

Les champs $\vec{E}_m$ et $\vec{B}_m$ doivent satisfaire certaines conditions dictées par les équations de Maxwell (1.6)-(1.9).

L'équation (1.6) s'écrit dans ce cas :

$$\text{div } \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_m = 0 \quad (1.16)$$

ce qui implique que le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{k}$, donc le champ électrique est transversal.

L'équation (1.7) s'écrit :

$$\text{div } \vec{B} = -i \vec{k} \cdot \vec{B}_m e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_m = 0 \quad (1.17)$$

d'où le champ magnétique $\vec{B}$ est aussi transversal.

Le champ électrique et le champ magnétique ne sont pas indépendants, ils sont liés par les équations (1.8) et (1.9). Par exemple l'équation (1.8) donne :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -i \vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (1.18)$$

donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires.

1.2.2 Le potentiel électromagnétique :

Puisque $\text{div } \vec{B} = 0$, il en résulte que $\vec{B}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \quad (1.19)$$

En substituant cette expression dans l'équation (1.8), nous obtenons :

$$\vec{\text{rot}} \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (1.20)$$

Cette relation est vérifiée si $\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ est le gradient d'une fonction scalaire V :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.21)$$

où V s'appelle le potentiel scalaire (V s'identifie avec le potentiel électrostatique si $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$).

Retenons qu'il existe deux potentiels : le potentiel-vecteur $\vec{A}$ et le potentiel scalaire V tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (1.22)$$

et

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.23)$$

Ces deux équations ne définissent pas $(\vec{A}, V)$ de façon univoque. En effet, le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ ne change pas si on remplace $(\vec{A}, V)$ par un nouveau potentiel $(\vec{A}', V')$ tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}' = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (1.24)$$

et

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad (1.25)$$

La relation (1.24) est vérifiée si :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad (1.26)$$

où $\varphi = \varphi(\vec{r}.t)$ est un champ scalaire quelconque. Ainsi que la relation (1.25) est vérifiée si :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} V' &= \overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}' - \vec{A}) \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} \left(V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

ce qui entraîne la condition :

$$V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.28)$$

Le passage de $(\vec{A}, V)$ à $(\vec{A}', V')$ est appelé transformation de jauge. La liberté de choix sur des potentiels permet de leur imposer une contrainte que nous appelons "la contrainte de Jauge". Afin de lever l'arbitraire sur les potentiels $(\vec{A}, V)$, on fait souvent un choix de jauge en imposant une condition sur $(\vec{A}, V)$. Un choix fréquent que nous adopterons est celui de la jauge de Coulomb ou jauge de rayonnement :

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (1.29)$$

Cette condition est particulièrement commode lorsqu'il n'y a pas de charge (lorsque on s'intéresse au phénomène loin de la source). Alors un choix possible du potentiel scalaire $V = 0$. Dans ce cas la, il suffit de déterminer $\vec{A}$ puis on déduit le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ à partir des équations :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Une autre Jauge intéressante est la jauge dite de Lorentz. Elle est définie par :

$$\text{div} \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (1.30)$$

1.3 Equation de propagation des potentiels dans le vide :

Cherchons à établir les équations auxquelles satisfont le potentiel électromagnétique $(\vec{A}, V)$.

Commençant par l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div} \vec{E} = \text{div} \left(-\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.31)$$

conduit à :

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.32)$$

En notant que :

$$\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \quad (1.33)$$

Compte tenu de l'équation de Maxwell-Ampère et l'équation (1.23), on peut écrire :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J} - \text{grad} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (1.34)$$

ou encore :

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \text{grad} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (1.35)$$

par conséquent :

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left[\text{div} \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right] = -\mu_0 \vec{J} \quad (1.36)$$

ou sous forme plus condensée :

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \overrightarrow{\text{grad}} \left[\text{div } \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right] \quad (1.37)$$

où l'opérateur :

$$\square = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (1.38)$$

est par définition le "d'Alembertien".

Les équations obtenues ne sont pas particulièrement simples. On peut les simplifier si on adopte la condition de jauge de Lorentz $\left(\text{div } \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \right)$. Les équations (1.32) et (1.36) deviennent :

$$\Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.39)$$

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad (1.40)$$

On remarque que la jauge de Lorentz permet de simplifier considérablement les équations des potentiels. On obtient ainsi deux équations séparées, l'une pour V et l'autre pour $\vec{A}$. En l'absence de charge et de courant, il s'agit d'équation de d'Alembert. Tout comme le champ électrique et magnétique, les potentiels sont des champs libres qui se propagent à la célérité de la lumière. Rappelons que les deux potentiels ne sont pas indépendants, car ils sont reliés par la jauge de Lorentz.

Dans le cas des régimes stationnaires, on retrouve bien les équations de Poisson de l'électrostatique et de la magnétostatique :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.41)$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

La condition de jauge de Lorentz se réduit dans ce cas à celle de Coulomb $\text{div } \vec{A} = 0$.

1.4 Les équations de Maxwell dans un milieu matériel

La densité de charge dans un matériau quelconque peut être séparé en deux parties : l'une relative aux charges ponctuelles libres qui donnent une conductivité électrique et l'autre

provenant des charges liées.

$$\rho = \rho_{libre} + \rho_{liée} \quad (1.42)$$

De la même façon, on peut décomposer la densité de courant en une partie provenant des charges libres et une partie provenant des charges liées :

$$\vec{J} = \vec{J}_{libre} + \vec{J}_{liée} \quad (1.43)$$

La densité des charges liées est donnée par :

$$\rho_{liée} = -\operatorname{div} \vec{P} \quad (1.44)$$

et la densité de courant liée est donnée par :

$$\vec{J}_{liée} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M} \quad (1.45)$$

où $\vec{P}$ est la polarisation électrique et $\vec{M}$: est l'aimantation du matériau.

Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère dans un milieu matériel s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.46)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.47)$$

sont indépendantes de ρ et $\vec{J}$, et celles reliant le champ aux sources :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho_{libre} - \operatorname{div} \vec{P} \right) \quad (1.48)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M} \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.49)$$

En introduisant le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.50)$$

et le vecteur induction magnétique $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (1.51)$$

Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère prennent la forme suivante :

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{libre} \quad (1.52)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \left(\vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (1.53)$$

Par contre les deux autres équations sont invariantes :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.54)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.55)$$

1.5 Les équations de Maxwell dans un conducteur

Lorsque une onde électromagnétique se propage dans un milieu conducteur ($\rho_{liée} = 0$ et $\vec{J}_{liée} = \vec{0}$), son champ électrique produit un courant électrique proportionnel à ce champ (loi d'Ohm) qui dégage de la chaleur par effet de Joule, ce qui est traduit par la transformation de l'énergie porté par l'onde.

Dans un milieu conducteur linéaire, homogène (à une certaine échelle ses propriétés sont identiques d'un point à un autre) et isotrope (les propriétés sont identiques quelle que soit la direction d'observation), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.56)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.57)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{libre} \quad (1.58)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.59)$$

Les champs et la densité de courant sont reliés par :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.60)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.61)$$

$$\vec{J}_{libre} = \sigma \vec{E} \quad (1.62)$$

Dans le cas d'un conducteur en équilibre électrostatique, c'est-à-dire le cas où la densité de charge $\rho_{libre} \rightarrow 0$, les équations de Maxwell (1.56) - (1.59) conduisent aux équations de propagations pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ [55] :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad (1.63)$$

et:

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.64)$$

Un fait nouveau apparaît correspondant à la dérivée de premier ordre par rapport au temps. Dans le cas de l'équation de l'oscillateur harmonique, un tel terme représente une force de "friction" qui conduit à la dissipation de l'énergie de l'oscillateur. Le même effet se reproduit dans le cas du champ électrique, pour le voir on suppose que l'équation de $\vec{E}$ admet comme solution :

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)} \quad (1.65)$$

Substituant $\vec{E}$ dans l'équation d'onde (1.63), on obtient la relation de dispersion de l'onde dans un milieu conducteur :

$$-\vec{k}^2 - i\mu\sigma\omega + \mu\varepsilon\omega^2 = 0 \quad (1.66)$$

dans le cas où $\sigma = 0$, l'équation (1.66) se réduit à la relation de dispersion d'un diélectrique.

L'équation (1.66) admet comme solution :

$$\vec{k} = \left(\vec{\alpha} - i\vec{\beta} \right) \quad (1.67)$$

où

$$|\vec{\alpha}| = \frac{\omega}{v\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{1+Q^2} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.68)$$

et

$$|\vec{\beta}| = \frac{\mu\sigma\omega}{2|\vec{\alpha}|} \quad (1.69)$$

$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu, $Q = \frac{\omega_c}{\omega}$ et $\omega_c = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ est la pulsation caractéristique du milieu conducteur.

Pour comprendre la signification physique de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$, nous écrivons la solution de l'équation d'onde sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{-\beta \vec{e} \cdot \vec{r}} e^{i(\omega t - \alpha \vec{e} \cdot \vec{r} + \phi)} \quad (1.70)$$

La forme de cette onde ressemble formellement à celle obtenu dans le cas du vide, mais avec la présence d'une amplitude décroissante.

La longueur d'onde est déterminée par la partie réelle du vecteur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{\alpha}|} \quad (1.71)$$

La partie imaginaire du vecteur d'onde donne la distance δ qui est connue sous le nom d'épaisseur de peau "ou profondeur de pénétration" :

$$\delta = \frac{1}{|\vec{\beta}|} \quad (1.72)$$

A partir de l'équation de Maxwell-Faraday, $\vec{B}$ prend la forme :

$$\vec{B} = \vec{B}_m e^{-\beta \vec{e} \cdot \vec{r}} e^{i(\omega t - \alpha \vec{e} \cdot \vec{r} + \phi - \alpha)} \quad (1.73)$$

où

$$\vec{B}_m = \frac{1}{\nu} (1+Q^2)^{\frac{1}{4}} (\vec{e} \times \vec{E}_m) \quad (1.74)$$

Le retard de phase du champ magnétique sur le champ électrique est donné par :

$$\alpha = \text{Arctan} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} + \frac{1}{Q} \right) \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (1.75)$$

La relation de dispersion (1.66) donne une relation algébrique assez compliquée entre la fréquence et le vecteur d'onde. Cependant, dans de nombreux cas, il est possible d'écrire des expressions plus simple qui donnent de bonnes approximations.

Cas d'un milieu peu conducteur $\omega_c \ll 1$ alors $|\vec{\alpha}| \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$, $|\vec{\beta}| \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

La partie imaginaire n'est nulle que dans le cas où le milieu est diélectrique. Cette partie est responsable de l'absorption de l'onde dans le milieu.

Cas d'un milieu très conducteur $\omega_c \gg 1$ alors $|\vec{\alpha}| \approx \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}}$, $|\vec{\beta}| \approx |\vec{\alpha}|$

Ayant décrit de façon exhaustive les équations de propagation du champ électromagnétique dans un milieu indépendant du temps, nous sommes en mesure d'introduire la dépendance en temps des paramètres σ , ε et μ dans le paragraphe suivant

1.6 Le champ électromagnétique dans un milieu conducteur, linéaire et homogène dépendant du temps

Dans un milieu linéaire conducteur homogène dépendant du temps, c'est-à-dire que la permittivité électrique $\varepsilon(t)$, la perméabilité magnétique $\mu(t)$ et la conductivité électrique $\sigma(t)$ sont des fonctions du temps, les relations entre les champs et les courants sont données par :

$$\vec{D} = \varepsilon(t) \vec{E} \tag{1.76}$$

$$\vec{B} = \mu(t) \vec{H} \tag{1.77}$$

$$\vec{J} = \sigma(t) \vec{E} \tag{1.78}$$

Dans ce cas, la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques varie en fonction du temps, et est donnée par :

$$v(t) = [\mu(t) \varepsilon(t)]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.79}$$

Lorsqu'il n'y a pas de source, les équations de Maxwell sont invariants par une transformation de jauge. En optique quantique, une jauge pratique est la jauge de Coulomb :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \text{ et } V = 0 \quad (1.80)$$

L'état du champ électromagnétique est complètement caractérisé par la donnée de son potentiel vecteur $\vec{A}$ qui est purement transversal :

$$\vec{k} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.81)$$

Le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ sont déterminés à partir du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ par :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (1.82)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (1.83)$$

On peut facilement vérifier à partir des équations de Maxwell que le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ obéit à l'équation d'onde amortie :

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu(\dot{\varepsilon} + \sigma) \partial \vec{A} / \partial t - \varepsilon \mu \partial^2 \vec{A} / \partial t^2 = 0 \quad (1.84)$$

Pour résoudre cette équation, on suppose que le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ peut se mettre en un produit d'une fonction relative au mode $\vec{u}_l(\vec{r})$ et une fonction dépendante du temps $e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} q_l(t)$:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_l \vec{u}_l(\vec{r}) e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} q_l(t) \quad (1.85)$$

où $\Lambda(t) = \sigma(t) / [2\varepsilon(t)]$.

Ainsi l'équation (1.84) se ramène à résoudre le système suivant :

$$\nabla \vec{u}_l(\vec{r}) + (\omega_l^2 / v_0^2) \vec{u}_l(\vec{r}) = 0 \quad (1.86)$$

$$\frac{\partial^2 q_l(t)}{\partial t^2} + \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t)} \frac{\partial q_l(t)}{\partial t} + W_l^2(t) q_l(t) = 0, \quad (1.87)$$

où $W_l^2(t) = \Omega_l^2(t) - \Lambda^2(t) - \dot{\sigma}(t) / [2\varepsilon(t)]$, $\Omega_l(t) = v(t) \omega_l / v_0$ sont les fréquences habituelles dépendantes du temps. $v_0 = v(0)$ et $\omega_l = \Omega_l(0)$.

Les différentes fonctions modales $\vec{\mathbf{u}}_l(\vec{r})$ sont indicées par l'indice l . Ces fonctions dépendent entièrement des conditions aux limites. Dans le cas où les conditions aux limites sont périodiques, les fonctions $\vec{\mathbf{u}}_l(\vec{r})$ sont choisies comme suit :

$$\vec{\mathbf{u}}_l(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \vec{\epsilon}_{\nu} e^{\pm i \vec{\mathbf{k}}_l \cdot \vec{r}} \quad (1.88)$$

où V est le volume d'une cavité, $\vec{\mathbf{k}}_l = \omega_l \widehat{\vec{n}} / v_0$ et $\vec{\epsilon}_{\nu}$ est un vecteur unitaire indiquant la polarisation de l'onde électromagnétique ($\nu = 1, 2$).

Les équations du mouvement des amplitudes $q_l(t)$ (1.87) peuvent être directement déduites de l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique généralisé classique OHG :

$$H_l(q_l, p_l, t) = \frac{p_l^2}{2\varepsilon(t)} + \Lambda(t)p_l q_l + \frac{1}{2}\varepsilon(t)\Omega_l^2(t)q_l^2 \quad (1.89)$$

p_l étant les variables canoniques conjuguées à q_l .

L'Hamiltonien total décrivant le champ électromagnétique est la somme des Hamiltoniens individuels correspondant à chaque mode :

$$H(t) = \sum_l H_l \quad (1.90)$$

La permittivité diélectrique $\varepsilon(t)$ joue le rôle de la masse dépendant du temps pour un oscillateur mécanique. Pour les matériaux diélectriques $\sigma(t) = 0$, l'Hamiltonien (1.89) devient celui de l'oscillateur harmonique de masse et de fréquence dépendant du temps.

Ce problème de l'oscillateur harmonique généralisé a été fréquemment étudié dans le cas adiabatique et non-adiabatique [28, 38, 44, 47, 48, 49, 50, 51, 53]. Nous allons généraliser l'étude de Maamache et al [9, 10] au cas non-adiabatique.

En utilisant les équations (1.83) et (1.85), on déduit l'expression du champ électrique :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) = \sum_l \vec{\mathbf{u}}_l(\vec{r}) \left(\varepsilon(t) e^{\int_0^t \Lambda(t') dt'} \right)^{-1} p_l(t) \quad (1.91)$$

Dans le chapitre suivant, nous traitons le caractère géométrique du champ électromagnétique.

Chapitre 2

Angle géométrique non-adiabatique

2.1 Introduction

Nous rappelons que la méthode générale d'introduction des angles géométriques liés aux invariants est valable quelle que soit la forme de la dépendance temporelle des paramètres.

Reprenons ici l'approche de la théorie des invariants développée dans [38]. Un invariant $I(p, q, t)$ est une constante de mouvement qui vérifie :

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \{I(t), H(t)\}_{qp} \quad (2.1)$$

Les trajectoires d'action (ou d'invariant) $I(q, p, t)$ sont paramétrées par l'angle $\theta(q, p, t)$ à l'instant t . Lors d'une évolution cyclique de période T , nous avons $I(q, p, 0) = I(q, p, T)$. Le déphasage de la variable angulaire $\Delta\theta$ mesuré sur chaque trajectoire à l'instant $t = T$ à partir de sa valeur à l'instant $t = 0$ est calculé à l'aide de la fonction génératrice associée à la transformation canonique invariant-angle (I, θ) .

Soit $S(q, I, t)$ une fonction génératrice de transformation canonique dépendante du temps [53, 57, 58] qui fait passer des variables (q, p) aux variables invariants-angles (I, θ) (voir appendice) :

$$S(q, I, t) = \int dq' p(q', I, t) \quad (2.2)$$

où

$$p = \frac{\partial S(q, I, t)}{\partial q} \quad (2.3)$$

et

$$\theta = \frac{\partial S(q, I, t)}{\partial I} \quad (2.4)$$

La dynamique des variables (I, θ) sera régie par le nouvel Hamiltonien indépendant de l'angle θ :

$$K(I, t) = \mathcal{H}(I, \theta, t) + \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) (\theta, I, t) \quad (2.5)$$

où

$$\mathcal{H}(\theta, I, t) = H(q(\theta, I, t), p(\theta, I, t)) \quad (2.6)$$

Les équations de Hamilton pour les variables I et θ sont :

$$\dot{I} = -\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0 \quad (2.7)$$

et

$$\dot{\theta} = \frac{\partial K}{\partial I} = \frac{\partial \mathcal{H}(\theta, I, t)}{\partial I} + \frac{\partial}{\partial I} \frac{\partial S}{\partial t}(\theta, I, t) \quad (2.8)$$

On remarque que la vitesse angulaire de l'équation (2.8) ne dépend pas de la variable θ , tandis que les termes qui la compose en dépendent séparément. On pourra moyenner chaque terme sur la trajectoire classique, sans pour autant altérer le résultat de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$:

$$\Delta\theta = \int_0^t \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}(I, \theta, t)}{\partial I} \right\rangle dt' + \frac{\partial}{\partial I} \int_0^t \left\langle \frac{\partial S}{\partial t'}(\theta, I, t') \right\rangle dt' \quad (2.9)$$

où

$$\Delta\theta_l^d = \int_0^t \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}(I, \theta, t)}{\partial I} \right\rangle dt' \quad (2.10)$$

est l'angle dynamique, et

$$\Delta\theta_l^g = \frac{\partial}{\partial I} \int_0^t \left\langle \frac{\partial S}{\partial t'}(\theta, I, t') \right\rangle dt' \quad (2.11)$$

est l'angle de Hannay non-adiabatique.

Où $\langle . \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$ est la moyenne sur la variable angulaire θ .

Nous allons illustrer la notion d'angle géométrique non-adiabatique à travers l'exemple de l'oscillateur harmonique généralisé donné par l'équation (1.89) :

2.2 Recherche d'un invariant

Remarquons que l'Hamiltonien (1.89) s'écrit sur la base : $T_1 = \frac{1}{2}p^2$, $T_2 = pq$, $T_3 = \frac{1}{2}q^2$ qui forme une algèbre finie avec les crochets de poisson suivants ; $\{T_1, T_2\} = -2T_1$, $\{T_2, T_3\} = -2T_3$, $\{T_3, T_1\} = T_2$.

Cherchons un invariant de ce système sous la forme :

$$I(t) = \frac{1}{2} \{ \lambda_1(t)p^2 + 2\lambda_2(t)pq + \lambda_3(t)q^2 \} \quad (2.12)$$

la substitution de cet invariant dans l'équation (2.1) donne les équations différentielles pour coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$:

$$\dot{\lambda}_1 = 2 \left(\lambda_1 \Lambda - \frac{1}{\varepsilon} \right) \lambda_2 \quad (2.13)$$

$$\dot{\lambda}_2 = 2 \left(\lambda_1 \varepsilon \Omega_l^2 - \frac{1}{\varepsilon} \lambda_3 \right) \quad (2.14)$$

$$\dot{\lambda}_3 = 2 \left(\lambda_2 \varepsilon \Omega_l^2 - \Lambda \lambda_3 \right) \quad (2.15)$$

Les équations (2.13) – (2.15) conduisent à une équation auxiliaire non-linéaire pour ρ_l :

$$\ddot{\rho}_l + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \dot{\rho}_l + W_l^2 \rho_l = \frac{1}{\varepsilon^2 \rho_l^3} \quad (2.16)$$

où on a posé :

$$\lambda_1 = \rho_l^2 \quad (2.17)$$

De ce fait, les équations (2.14) et (2.15) s'écrivent :

$$\lambda_2 = [(\rho_l^2 \Lambda - \rho_l \dot{\rho}_l) \varepsilon] \quad (2.18)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\rho_l^2} \left\{ 1 + [(\rho_l^2 \Lambda - \rho_l \dot{\rho}_l) \varepsilon]^2 \right\} \quad (2.19)$$

d'où la forme finale de l'invariant :

$$I_l(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_l}{\rho_l} \right)^2 + \rho_l^2 \left[p_l + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} \varepsilon \right) q_l \right]^2 \quad (2.20)$$

La transformation canonique qui permet de passer des coordonnées (q, p) aux variables actions-angles (I, θ) est effectuée par la fonction génératrice [38] :

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} - \Lambda \right] \varepsilon q^2 - \frac{1}{2} \frac{q_l}{\rho_l} \left[2I_l - \frac{q^2}{\rho_l^2} \right]^{\frac{1}{2}} - I_l \sin^{-1} \left[\frac{q_l}{\rho_l \sqrt{2I_l}} \right] + (n + \frac{1}{2}) \pi I_l \quad (2.21)$$

qui donne :

$$p_l = \frac{\partial S}{\partial q} = \left[\frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} - \Lambda \right] \varepsilon q_l - \frac{1}{\rho_l} \left[2I_l - \frac{q_l^2}{\rho^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.22)$$

et

$$\theta_l = \frac{\partial S}{\partial I_l} = -\sin^{-1} \left[\frac{q_l}{\rho_l \sqrt{2I_l}} \right] + (n + \frac{1}{2}) \pi \quad (2.23)$$

n étant un nombre entier qu'on choisira égale à zéro.

A partir des équations (2.22) et (2.23), il en résulte que :

$$p_l = \sqrt{2I_l} \left[\varepsilon \left[\frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} - \Lambda \right] \rho_l \cos \theta - \frac{1}{\rho_l} \sin \theta \right] \quad (2.24)$$

et

$$q_l = \sqrt{2I_l} \rho_l \cos \theta \quad (2.25)$$

Le déphasage dynamique est donné par :

$$\Delta \theta_l^d = \int_0^t \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} \right\rangle dt' = \int_0^t \left\{ \frac{1}{\varepsilon \rho_l^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt'} [(\Lambda \rho_l^2 - \rho_l \dot{\rho}_l) \varepsilon] - 2 (\Lambda \rho_l^2 - \rho_l \dot{\rho}_l) \varepsilon \frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} \right] \right\} dt' \quad (2.26)$$

et le déphasage géométrique :

$$\Delta \theta_l^g = \frac{\partial}{\partial I} \int_0^t \left\langle \frac{\partial S}{\partial t'}(\theta, I, t') \right\rangle dt' = \int_0^t -\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt'} [(\Lambda \rho_l^2 - \rho_l \dot{\rho}_l) \varepsilon] - 2 (\Lambda \rho_l^2 - \rho_l \dot{\rho}_l) \varepsilon \frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} \right] dt' \quad (2.27)$$

Donc l'angle totale $\Delta \theta_l = \Delta \theta_l^d + \Delta \theta_l^g$ s'écrit :

$$\Delta \theta_l = \int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t') \rho_l^2(t')} dt' \quad (2.28)$$

Lors d'une évolutions cyclique le long d'un circuit C pour une période T , l'angle dynamique non-adiabatique devient :

$$\Delta\theta_l^d = \int_0^T \left\{ \frac{1}{\varepsilon\rho_l^2} - (\rho_l^2\Lambda - \rho_l\dot{\rho}_l) \varepsilon \frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} \right\} dt' \quad (2.29)$$

et l'angle géométrique (l'angle de Hannay non-adiabatique) prend la forme :

$$\Delta\theta_l^g = \oint (\rho_l\Lambda - \dot{\rho}_l) \varepsilon d\rho_l \quad (2.30)$$

L'angle total est donné par :

$$\Delta\theta_l = \int_0^T \frac{1}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')} dt' \quad (2.31)$$

2.3 La limite adiabatique

L'approximation adiabatique consiste à introduire un temps "lent" :

$$\tau = \epsilon t \quad \epsilon \ll 1 \quad (2.32)$$

et réécrit l'équation auxiliaire (2.16) en fonction de puissance de ϵ :

$$\varpi_l^2 \rho_l(\tau) - \frac{1}{\varepsilon^2(\tau)\rho_l^3(\tau)} = \epsilon \left(\frac{\dot{\sigma}(\tau)}{2\varepsilon(\tau)} \right) \rho_l(\tau) - \epsilon^2 \left(\ddot{\rho}_l(\tau) + \frac{\dot{\varepsilon}(\tau)}{\varepsilon(\tau)} \dot{\rho}_l(\tau) \right) \quad (2.33)$$

avec :

$$\varpi_l^2 = \Omega_l^2(\tau) - \Lambda^2(\tau) \quad (2.34)$$

On développe ρ_l en puissance de ϵ :

$$\rho_l(\tau) = \rho_{l0}(\tau) + \epsilon\rho_{l1}(\tau) + \epsilon^2\rho_{l2}(\tau) + \dots \quad (2.35)$$

L'identification des termes de l'équation (2.33) à ceux du développement (2.35) permet de déterminer facilement :

$$\rho_{l0}(\tau) = \left[\frac{1}{\varepsilon(\tau)\varpi(\tau)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.36)$$

$$\rho_{l1}(\tau) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{8\varepsilon(\tau)\varpi_l^2(\tau)} \rho_{l0}(\tau) \quad (2.37)$$

Dans l'invariant (2.20), on néglige le terme $\dot{\rho}_l$ et on remplace $\rho_l^2(t)$ par la solution de l'équation (2.16) à l'ordre zéro par rapport à ϵ , c'est-à-dire : $\epsilon\rho_{l0}^2(t) \rightarrow \varpi_l^{-1}$. Donc on obtient l'invariant adiabatique de l'oscillateur harmonique généralisée :

$$I_l(t) \xrightarrow{\text{adiabatique}} \frac{1}{2} \left[\epsilon\varpi_l \hat{q}_l^2 + (\epsilon\varpi_l)^{-1} \left(\hat{p}_l + \frac{\sigma}{2} \hat{q}_l \right)^2 \right] \quad (2.38)$$

Sachant que dans la limite adiabatique on approxime $\frac{1}{\epsilon\rho_{l1}^2(t)}$ par $\varpi_l - \frac{\dot{\sigma}}{4\epsilon\varpi_l}$ qui est la somme d'une vitesse dynamique $\dot{\theta}_l = \varpi_l$ et d'une vitesse angulaire géométrique $\dot{\theta}_l^H = -\dot{\sigma}/4\epsilon\varpi_l$. Ce résultat a été déjà obtenu dans le cas adiabatique par Maamache et al [9, 10].

Remarquons que dans la limite adiabatique, la phase géométrique disparaît pour les matériaux diélectriques ($\sigma(t) = 0$). Par conséquent, on voit que le caractère géométrique des champs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ est modifié selon la nature du milieu.

2.4 Effet de la phase géométrique sur le rayonnement quantique

En mécanique quantique, la position de la particule à l'instant t est remplacée par son état quantique donné par la fonction d'onde $\psi(q, t)$. Les variables dynamiques conjugués classiques q_l et p_l sont remplacées par des opérateurs $\hat{q}_l$ et $\hat{p}_l$ où $\hat{p}_l = -i\hbar\partial/\partial\hat{q}_l$.

L'essence de la théorie quantique de la lumière dans les milieux linéaires est que chaque mode du champ électromagnétique se comporte comme un oscillateur harmonique dépendant du temps dont les caractéristiques quantiques se manifestent par l'introduction des opérateurs d'annihilation et de création associés :

$$\hat{a}_l(t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left(\frac{\hat{q}_l}{\rho_l(t)} + i\{\rho_l(t)\hat{p}_l + [\Lambda(t)\rho_l(t) - \dot{\rho}_l(t)]\epsilon(t)\hat{q}_l\} \right) \quad (2.39)$$

$$\hat{a}_l^+(t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left(\frac{\hat{q}_l}{\rho_l(t)} - i\{\rho_l(t)\hat{p}_l + [\Lambda(t)\rho_l(t) - \dot{\rho}_l(t)]\epsilon(t)\hat{q}_l\} \right) \quad (2.40)$$

On vérifie qu'ils obéissent aux relations de commutation :

$$[\hat{a}_l(t), \hat{a}_l^+(t)] = 1 \quad (2.41)$$

L'invariant (2.20) s'écrit en fonction de $\hat{a}_l(t)$ et $\hat{a}_l^+(t)$ sous la forme :

$$\hat{I}_l(t) = \hbar \left(\hat{a}_l^+(t) \hat{a}_l(t) + \frac{1}{2} \right). \quad (2.42)$$

A l'aide de l'équation de Heisenberg, l'équation d'évolution de $\hat{a}_l(t)$ s'écrit :

$$\frac{d\hat{a}_l(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_l, \hat{a}_l(t)] + \left(\frac{\partial \hat{a}_l(t)}{\partial t} \right) \quad (2.43)$$

ce qui donne :

$$\frac{d\hat{a}_l(t)}{dt} = -\frac{i}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)} \hat{a}_l(t) \quad (2.44)$$

dont la solution est :

$$\hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0) e^{-i \int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')} dt'} \quad (2.45)$$

Sachant que :

$$\hat{q}_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \rho_l (\hat{a}_l(t) + \hat{a}_l^+(t)) \quad (2.46)$$

et :

$$\hat{p}_l = -\sqrt{\frac{\hbar}{2\rho_l^2}} \{ [(\Lambda\rho_l - \dot{\rho}_l)\varepsilon\rho_l + i]\hat{a}_l(t) + [(\Lambda\rho_l - \dot{\rho}_l)\varepsilon\rho_l - i]\hat{a}_l^+(t) \} \quad (2.47)$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ s'écrit aussi comme :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} \sum_l \sum_{\nu=1}^2 \vec{\epsilon}_{l\nu} \rho_l(t) \left(\hat{a}_l(0) e^{i\Theta_l(\vec{r}, t)} + \hat{a}_l^+(0) e^{-i\Theta_l(\vec{r}, t)} \right) \quad (2.48)$$

où

$$\Theta_l(\vec{r}, t) = \vec{k}_l \cdot \vec{r} - \int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')} dt' \quad (2.49)$$

Les opérateurs $\vec{D}(\mathbf{r}, t)$ et $\vec{B}(\mathbf{r}, t)$ s'obtiennent à partir des équations (1.76), (1.82), (1.83) et (2.47) :

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{\hbar \varepsilon^2(t)}{2V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} \sum_l \sum_{\nu=1}^2 \vec{\epsilon}_{l\nu} \rho_l(t) \left[\left(\Lambda(t) - \frac{\dot{\rho}_l(t)}{\rho_l(t)} + \frac{i}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)} \right) \hat{a}_l(0) e^{i\Theta_l(\vec{r}, t)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\Lambda(t) - \frac{\dot{\rho}_l(t)}{\rho_l(t)} - \frac{i}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)} \right) \hat{a}_l^+(0) e^{-i\Theta_l(\vec{r}, t)} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

et

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar}{2V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} \sum_l \sum_{\nu=1}^2 (\vec{k}_l \times \vec{\epsilon}_{l\nu}) \rho_l(t) \left[\hat{a}_l(0) e^{i\Theta_l(\vec{r}, t)} - \hat{a}_l^+(0) e^{-i\Theta_l(\vec{r}, t)} \right] \quad (2.51)$$

La présence du terme exponentiel $e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'}$ dans ces équations montre que les amplitudes des champs électriques et magnétiques diminuent dans le temps selon la valeur de la conductivité du milieu. Cette propriété est identique à la dissipation de l'énergie du champ de rayonnement classique. Un comportement similaire apparaît dans le cas de changement adiabatique de la phase géométrique [9, 10]. Dans la limite où $\sigma(t) \rightarrow 0$ la dissipation disparaît.

Chapitre 3

Etats cohérents et limite semi-classique

En mécanique classique une particule est décrite par sa position $r(t)$, l'évolution de sa position est donnée par l'équation de Newton :

$$F(r, t) = m \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (3.1)$$

En mécanique quantique, la position de la particule est remplacée par son état quantique, qui à l'instant t est représenté par une fonction d'onde qui ne reproduit pas la mécanique classique. Cependant, il est possible de construire des états quantiques qui reproduisent la théorie classique. Ces états sont appelés états cohérents.

Historiquement, les états cohérents ont été introduit par Schrödinger [59], pour reproduire le mouvement classique de l'oscillateur harmonique. Après plusieurs années, ces états ont été redécouvert par Glauber [60, 61], qui a mis en évidence leur rôle fondamental dans la théorie de l'optique quantique.

3.1 Définition des états cohérents de l'oscillateur harmonique

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques résultats fondamentaux relatifs à l'oscillateur harmonique ($m = 1$).

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \quad (3.2)$$

Introduisons les opérateurs d'annihilation $\hat{b}$ et de création $\hat{b}^+$:

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega \hat{q} + i\hat{p}) \quad (3.3)$$

$$\hat{b}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega \hat{q} - i\hat{p}) \quad (3.4)$$

tel que :

$$[\hat{b}, \hat{b}^+] = 1 \quad (3.5)$$

l'Hamiltonien $\hat{H}$ (3.2) s'écrit sous la forme :

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.6)$$

où $N = \hat{b}^+ \hat{b}$ est l'opérateur nombre d'occupation.

Les opérateurs $\hat{b}$ et $\hat{b}^+$ agissent sur les états $|n\rangle$ de l'espace de Fock de la manière suivante :

$$\hat{b} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3.7)$$

$$\hat{b}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (3.8)$$

où

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn} \quad (3.9)$$

Les états cohérents $|\alpha\rangle$ de l'oscillateur harmonique sont définis comme étant états propres de l'opérateur d'annihilation $\hat{b}$:

$$\hat{b} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (3.10)$$

où la valeur propre α est complexe.

En exprimant l'état cohérent $|\alpha\rangle$ sur la base $|n\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (3.11)$$

on montre que les coefficients C_n sont données par :

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \quad (3.12)$$

et par conséquent les états cohérents $|\alpha\rangle$ s'écrivent :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.13)$$

Bien connue également est la propriété de ces états de former une base surcomplète :

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = 1 \quad (3.14)$$

En effet, sachant que :

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta} \text{ et } d^2\alpha = |\alpha| d|\alpha| d\theta \quad (3.15)$$

alors :

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_{n,m} \frac{|n\rangle \langle m|}{\pi \sqrt{n!m!}} \int_0^\infty |\alpha| d|\alpha| e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{n+m} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} \quad (3.16)$$

en faisant un changement de variable $|\alpha|^2 = u$, en utilisant le fait que $\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi \delta_{nm}$ et $\int_0^\infty du e^{-u} u^n = n!$. L'intégrale (3.16) donne le résultat suivant :

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^\infty du e^{-u} u^n \quad (3.17)$$

on obtient la relation de fermeture cherchée à l'aide de celle des états $|n\rangle$

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 \quad (3.18)$$

Dans cette base un état $|\beta\rangle$ à pour "coefficient" :

$$|\langle \beta | \alpha \rangle| = e^{-|\alpha-\beta|^2} \quad (3.19)$$

qui montre que les états cohérents ne sont pas orthogonaux entre eux, mais sont normés :

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 \quad (3.20)$$

Les états cohérents de l'oscillateur harmonique peuvent être définis par l'action de l'opérateur unitaire de déplacement $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{b}^\dagger - \alpha^* \hat{b})$ sur l'état du vide $|0\rangle$:

$$\widehat{D}(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle \quad (3.21)$$

En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\widehat{A}+\widehat{B}} = e^{-[\widehat{A},\widehat{B}]/2} e^{\widehat{A}} e^{\widehat{B}} \quad (3.22)$$

tel que :

$$\left[[\widehat{A}, \widehat{B}], \widehat{A} \right] = \left[[\widehat{A}, \widehat{B}], \widehat{B} \right] = 0 \quad (3.23)$$

L'opérateur unitaire de déplacement s'écrit :

$$\widehat{D}(\alpha) = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \widehat{b}^+} e^{-\alpha^* \widehat{b}} \quad (3.24)$$

et a pour effet de déplacer les opérateurs d'annihilation et de création :

$$\widehat{D}^+(\alpha) \widehat{b} \widehat{D}(\alpha) = \widehat{D}^{-1}(\alpha) \widehat{b} \widehat{D}(\alpha) = \widehat{b} + \alpha \quad (3.25)$$

$$\widehat{D}^+(\alpha) \widehat{b}^+ \widehat{D}(\alpha) = \widehat{D}^{-1}(\alpha) \widehat{b}^+ \widehat{D}(\alpha) = \widehat{b}^+ + \alpha^* \quad (3.26)$$

En effet, en utilisant les propriétés de l'opérateur de déplacement (3.25) et (3.26) et en appliquant $\widehat{D}^+$ sur l'équation (3.10), on obtient :

$$\widehat{D}^+ \widehat{b} |\alpha\rangle = \alpha \widehat{D}^+ |\alpha\rangle \quad (3.27)$$

Sachant que :

$$\widehat{D}^+ \widehat{b} |\alpha\rangle = (\widehat{b} + \alpha) \widehat{D}^+ |\alpha\rangle \quad (3.28)$$

on obtient :

$$\widehat{b} \left(\widehat{D}^+ |\alpha\rangle \right) = 0 \quad (3.29)$$

qui implique que :

$$\widehat{D}^+ |\alpha\rangle = 0 \quad (3.30)$$

et qui montre que :

$$\widehat{D}(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle \quad (3.31)$$

Une autre définition des états cohérents est celle des états qui minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p} = \frac{\hbar}{2} \quad (3.32)$$

Pour s'en convaincre, exprimons les opérateurs $\hat{q}$ et $\hat{p}$ en fonction des opérateurs d'annihilation $\hat{b}$ et de création $\hat{b}^+$:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{b}^+ + \hat{b}) \quad (3.33)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\hat{b}^+ - \hat{b}) \quad (3.34)$$

et calculons les écarts quadratiques moyens :

$$(\Delta \hat{q}) = \sqrt{\langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2} \quad (3.35)$$

$$(\Delta \hat{p}) = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} \quad (3.36)$$

où la valeur moyenne des opérateurs $\hat{q}$ et $\hat{p}$:

$$\langle \hat{q} \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} (\operatorname{Re} \alpha) \quad (3.37)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \sqrt{2\hbar\omega} (\operatorname{Im} \alpha) \quad (3.38)$$

est prise dans les états $|\alpha\rangle$.

Les valeurs moyennes de $\hat{q}^2$ et $\hat{p}^2$ dans ces états sont données par :

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{q}^2 | \alpha \rangle = \frac{2\hbar}{\omega} (\operatorname{Re} \alpha)^2 + \frac{\hbar}{2\omega} \quad (3.39)$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{p}^2 | \alpha \rangle = 2\hbar\omega (\operatorname{Im} \alpha)^2 + \frac{\hbar\omega}{2} \quad (3.40)$$

par conséquent, les écarts quadratiques moyens sont :

$$(\Delta \hat{q}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \quad (3.41)$$

et

$$(\Delta \hat{p}) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \quad (3.42)$$

ce qui montre que ces états minimisent le principe d'incertitude :

$$(\Delta \hat{q}) (\Delta \hat{p}) = \frac{\hbar}{2} \quad (3.43)$$

3.2 Evolution temporelle des états cohérents

L'évolution d'un état initiale est donné par :

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle = U(t) |n\rangle = e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} |n\rangle \quad (3.44)$$

par conséquent, l'évolué d'un état cohérent sera donné par :

$$\begin{aligned} |\alpha, t\rangle &= U(t) |\alpha(0)\rangle = e^{\frac{-|\alpha(0)|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha(0)]^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} |n\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega t} e^{\frac{-|\alpha(0)|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha(0)e^{-i\omega t}]^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{2}\omega t} e^{\frac{-|\alpha(t)|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha(t)]^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega t} |\alpha(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.45)$$

avec $\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}$.

Donc pour passer de l'état cohérent $|\alpha\rangle$ à son évolué $U(t) |\alpha(0)\rangle$, il suffit de multiplier le ket obtenu par $e^{-\frac{i}{2}\omega t}$ et changer α en $\alpha(0)e^{-i\omega t}$ [62]. L'évolution classique est décrite par la variable $\alpha(t)$ dont le module $|\alpha(t)|$ est constant et l'argument change selon la loi classique.

3.3 Les états cohérents de l'oscillateur harmonique généralisé OHG

Ayant défini les états cohérents de l'oscillateur harmonique usuel et leurs propriétés, Nous allons maintenant généraliser cette notion à l'oscillateur harmonique généralisé :

$$H_l(q_l, p_l, t) = \frac{\hat{p}_l^2}{2\varepsilon(t)} + \Lambda(t)\hat{p}_l\hat{q}_l + \frac{1}{2}\varepsilon(t)\Omega_l^2(t)\hat{q}_l^2 \quad (3.46)$$

Vue que cet oscillateur admet un invariant (2.20), et que la solution de l'équation de Schrödinger pour un tel système s'écrit sur la base des états propres de l'invariant, il est naturel de définir les états cohérents associés sur la base $\{|n\rangle_I\}$ des états propres de l'invariant :

$$|\alpha, 0\rangle_I = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_I \quad (3.47)$$

En effet, ses états sont des états propres de l'opérateur d'annihilation $\hat{a}_l(t)$:

$$\hat{a}_l(t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left(\frac{\hat{q}_l}{\rho_l(t)} + i\{\rho_l(t)\hat{p}_l + [\Lambda(t)\rho_l(t) - \dot{\rho}_l(t)]\varepsilon(t)\hat{q}_l\} \right) \quad (3.48)$$

L'évolué d'un état cohérent invariant-angle $|\alpha_l, t\rangle_I$ donne :

$$|\alpha_l, t\rangle_I = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha_l(0)e^{-i(\Delta\theta_l^d + \Delta\theta_l^g)}\right)^n}{\sqrt{n!}} |n_l\rangle_I \quad (3.49)$$

ce qui implique que la variable classique α_l change en $\alpha_l(t) = \alpha_l(0)e^{-i\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')} dt'}$ qui décrit l'évolution classique.

Il est utile d'écrire :

$$\alpha_l(0) = \alpha_{l,0} e^{-i\theta_l(0)} \quad (3.50)$$

où $\alpha_{l,0}$ et $\theta_l(0)$ sont réelles.

Le calcul des valeurs moyennes $\langle \hat{q}_l \rangle_\alpha$, $\langle \hat{p}_l \rangle_\alpha$, $(\Delta \hat{q}_l)_\alpha$ et $(\Delta \hat{p}_l)_\alpha$ dans les états cohérents invariants-angles conduit à :

$$\langle \hat{q}_l \rangle_\alpha = \sqrt{2\hbar}\rho_l\alpha_{l,0} \cos\left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')} dt' + \theta_l(0)\right) \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}_l \rangle_\alpha &= -\alpha_{l,0} \sqrt{\frac{2\hbar}{\rho_l^2}} \left[(\Lambda\rho_l - \dot{\rho}_l)\varepsilon\rho_l \cos\left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')} dt' + \theta_l(0)\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')} dt' + \theta_l(0)\right) \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

Les écarts quadratiques moyens de $\hat{q}_l$ et $\hat{p}_l$ sont :

$$(\Delta \hat{q}_l)_\alpha = \sqrt{\langle \hat{q}_l^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{q}_l \rangle_\alpha^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}\rho_l^2} \quad (3.53)$$

$$(\Delta \hat{p}_l)_\alpha = \sqrt{\langle \hat{p}_l^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{p}_l \rangle_\alpha^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho_l^2} [1 + (\Lambda\rho_l - \dot{\rho}_l)^2 \varepsilon^2 \rho_l^2]} \quad (3.54)$$

ce qui nous donne :

$$(\Delta \hat{q}_l)_\alpha (\Delta \hat{p}_l)_\alpha = \frac{\hbar}{2} \sqrt{[1 + (\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l)^2 \varepsilon^2 \rho_l^2]} \quad (3.55)$$

3.3.1 Les valeurs moyennes et les variances des champs dans les états cohérents

Il est intéressant d'analyser les valeurs moyennes et les variances des opérateurs champs dans les états cohérents. En utilisant les équations (2.48)-(2.51), nous obtenons les valeurs moyennes des opérateurs champs pour le mode l :

$$\langle A_l(\mathbf{r}, t) \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{2\hbar}{V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} \rho_l \alpha_{l,0} \cos[\Theta_l(\mathbf{r}, t) - \theta_l(0)] \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \langle D_l(\mathbf{r}, t) \rangle_\alpha &= \sqrt{\frac{2\hbar}{V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} \rho_l \alpha_{l,0} \left[\left(\Lambda - \frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} \right) \cos[\Theta_l(\mathbf{r}, t) - \theta_l(0)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varepsilon \rho_l^2} \sin[\Theta_l(\mathbf{r}, t) - \theta_l(0)] \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\langle B_l(\mathbf{r}, t) \rangle_\alpha = -\sqrt{\frac{2\hbar}{V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} |\mathbf{k}_l| \rho_l \alpha_{l,0} \sin[\Theta_l(\mathbf{r}, t) - \theta_l(0)] \quad (3.58)$$

On note que ces valeurs moyennes dans les états cohérents oscillent de façon sinusoïdale en fonction de l'angle $\Theta_l(\mathbf{r}, t)$. Les amplitudes de ces oscillations décroissent avec le temps, en raison de la présence du facteur dépendant du temps $e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'}$, ceci étant dû à la conduction du milieu.

Les variances des opérateurs champs dans ces états cohérents sont données par :

$$(\Delta A_l(\mathbf{r}, t))_\alpha^2 = \frac{\hbar}{2V} e^{-2\int_0^t \Lambda(t') dt'} \rho_l^2(t) \quad (3.59)$$

$$(\Delta D_l(\mathbf{r}, t))_\alpha^2 = \frac{\hbar}{2V} e^{-2\int_0^t \Lambda(t') dt'} \frac{1}{\rho_l^2(t)} \{1 + [\Lambda(t) \rho_l(t) - \dot{\rho}_l(t)]^2 \varepsilon^2(t) \rho_l^2(t)\} \quad (3.60)$$

$$(\Delta B_l(\mathbf{r}, t))_\alpha^2 = \frac{\hbar}{2V} e^{-2\int_0^t \Lambda(t') dt'} |\mathbf{k}_l|^2 \rho_l^2(t) \quad (3.61)$$

Le terme exponentiel $e^{-2\int_0^t \Lambda(t') dt'}$ qui apparaît, montre que ces variances décroissent avec le temps.

Pour une bonne compréhension des caractéristiques des champs développées dans cette thèse, considérons un cas particulier :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 + b_1 e^{-b_2 t}) \quad (3.62)$$

où b_1 et b_2 sont des constantes réelles tel que : $b_1 \ll 1$. μ et σ sont des constantes réelles, $\mu(t) = \mu_0$ et $\sigma(t) = \sigma_0$. Alors, on peut approximer les variables $v(t)$, $v^2(t)$ et $\frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t)}$ par :

$$v(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \left(1 - \frac{b_1}{2} e^{-b_2 t} \right) \quad (3.63)$$

$$v^2(t) \simeq \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (1 - b_1 e^{-b_2 t}) \quad (3.64)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t)} \simeq -b_1 b_2 e^{-b_2 t} \quad (3.65)$$

Donc, l'équation (1.87) pour $q_l(t)$ se réduit à :

$$\frac{\partial^2 q_l(t)}{\partial t^2} - b_1 b_2 e^{-b_2 t} \frac{\partial q_l(t)}{\partial t} + [b_1 F_l e^{-b_2 t} - G_l] q_l(t) = 0 \quad (3.66)$$

où

$$F_l = \frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0^2} - \frac{\omega_l^2}{v_0^2 \mu_0 \varepsilon_0}, \quad G_l = \frac{\sigma_0^2}{4\varepsilon_0^2} - \frac{\omega_l^2}{v_0^2 \mu_0 \varepsilon_0} \quad (3.67)$$

Nous considérons que le cas où F_l et G_l sont positives, ce qui correspond à $\sigma_0^2 > 4\omega_l^2 \varepsilon_0 / (v_0^2 \mu_0)$.

En effectuant la transformation $\tau = b_1 e^{-b_2 t}$, l'équation (3.66) prend la forme :

$$\frac{\partial^2 q_l(\tau)}{\partial \tau^2} + \frac{1 + \tau}{\tau} \frac{\partial q_l(\tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{b_2^2} \left(\frac{F_l}{\tau} - \frac{G_l}{\tau^2} \right) q_l(\tau) = 0 \quad (3.68)$$

Pour un temps long ($t \gg 1$, $\tau \ll 1$), nous pouvons approximer $(1 + \tau)/\tau \simeq 1/\tau$. Donc, la solution de l'équation (3.66) dans cette approximation devient :

$$q_l(\tau) = C_1 J_\nu \left(\frac{2\sqrt{F_l \tau}}{b_2} \right) + C_2 N_\nu \left(\frac{2\sqrt{F_l \tau}}{b_2} \right) \quad (3.69)$$

où J_ν et N_ν sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèces respectivement ($\nu = 2\sqrt{G_l}/b_2$). Cette dernière équation peut être réécrite en fonction du t comme :

$$q_l(t) = C_1 J_\nu \left(\frac{2\sqrt{F_l b_1}}{b_2} e^{-b_2 t/2} \right) + C_2 N_\nu \left(\frac{2\sqrt{F_l b_1}}{b_2} e^{-b_2 t/2} \right) \quad (3.70)$$

La solution de l'équations différentielle (2.16) pour ρ_l peut être exprimée en fonction de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.87), c'est-à-dire en fonction de J_ν et N_ν comme suit :

$$\rho_l(t) = \rho_l^0 \left[J_\nu^2 \left(\frac{2\sqrt{F_l b_1}}{b_2} e^{-b_2 t/2} \right) + N_\nu^2 \left(\frac{2\sqrt{F_l b_1}}{b_2} e^{-b_2 t/2} \right) \right]^{1/2} \quad (3.71)$$

où ρ_l^0 est une constante.

Les évolutions temporelles de $(\Delta D_l(\mathbf{r}, t))_\alpha$ équation (3.60) et $(\Delta B_l(\mathbf{r}, t))_\alpha$ équation (3.61) sont représentées dans les figures 1 et 2 respectivement. Nous avons utilisé l'intégrale suivante pour évaluer les résultats numériques :

$$\int_0^t \Lambda(t') dt' = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left[t - \frac{b_1}{b_2} (1 - e^{-b_2 t}) \right] \quad (3.72)$$

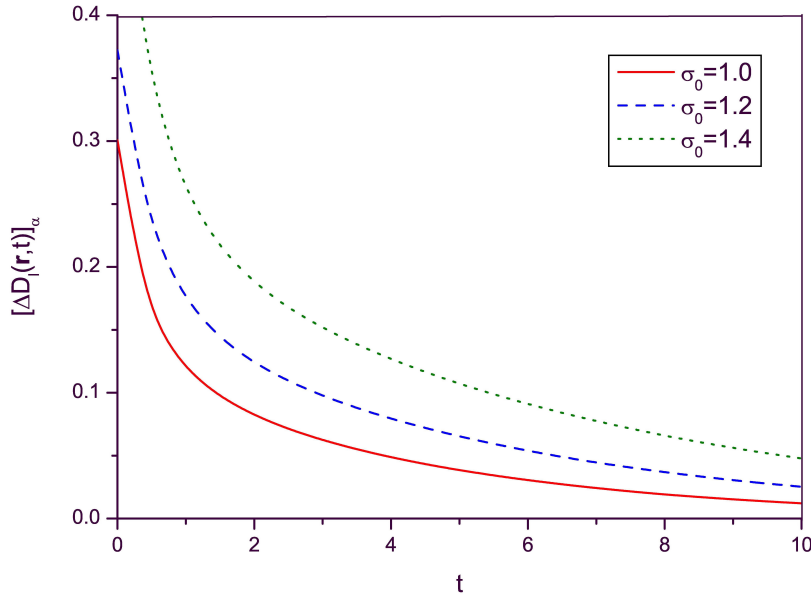


Figure 1

Figure 1 : Evolution temporelle de $(\Delta D_l(\mathbf{r}, t))_\alpha$: où $\varepsilon(t)$ est donnée par l'équation (3.62). μ et σ sont prises constantes [$\mu(t) = \mu_0$ et $\sigma(t) = \sigma_0$]. La valeur de $\sigma_0 = 1.0$ pour la ligne continue rouge, 1.2 pour la ligne pointillée bleue et 1.4 pour la ligne pointillée verte. Les autres valeurs sont données par : $\hbar = 1$, $\omega_l = 1$, $\varepsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 1$, $V = 1$ et $\rho_l^0 = 1$. Toutes les valeurs sont considérées comme sans dimensions, cette convention sera également utilisée pour la **figure 2**.

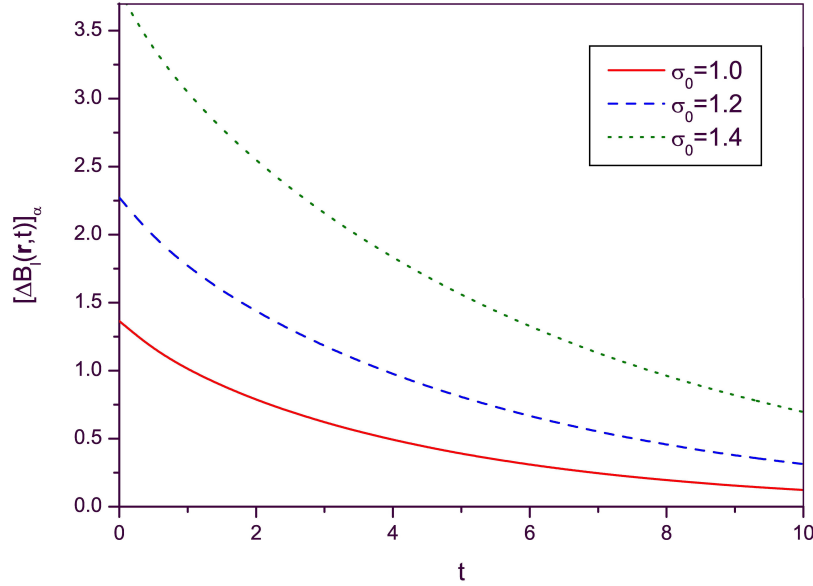


Figure 2

Figure 2 : Evolution temporelle de $(\Delta B_l(\mathbf{r}, t))_\alpha$ avec le même choix des fonctions $\varepsilon(t)$, $\mu(t)$ et $\sigma(t)$ pour la figure 1. Toutes les autres valeurs et les conventions sont identiques à celles de la figure 1.

En conclusion : nous voyons que $(\Delta D_l(\mathbf{r}, t))_\alpha$ et $(\Delta B_l(\mathbf{r}, t))_\alpha$ diminuent avec le temps comme prévu par les calculs. L'amplitude des champs électriques et magnétiques, ainsi que leurs variances progressivement disparaissent, car la conductivité joue le rôle d'un facteur de dissipation.

Appendice

Cet appendice est largement inspiré du cours : " éléments de mécanique analytique, opé 2016" [63].

En mécanique classique, un système lagrangien peut être décrit par différents systèmes de coordonnées : $q_i = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ ou bien $Q_i = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$. Le choix des coordonnées est très important puisque la forme finale des équations en dépend, et peut être simplifié par un choix raisonnable de ces coordonnées.

Dans le formalisme hamiltonien, aucune coordonnée ne joue un rôle privilégié, les impulsions généralisées p_i sont considérées au même titre que les coordonnées généralisées. Il faut donc élargir le concept de transformation de coordonnées de manière à inclure les transformations simultanées des coordonnées et des impulsions représentées par l'ensemble (Q_i, P_i) tels que :

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q, p, t) \\ P_i = P_i(q, p, t) \end{cases} \quad i = 1, n \quad (\text{A-1})$$

Mais toute transformation de cette forme ne conserve pas toujours la forme des équations de Hamilton. On dira que la transformation est canonique, s'il existe une fonction $K(Q, P, t)$ telle que :

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

Soit q et p des variables canoniques et H l'Hamiltonien du système correspondant. Pour trouver la forme des transformations canoniques, nous utilisons le principe variationnel :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1, n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0 \quad (\text{A-3})$$

Le nouvel Hamiltonien $K(P, Q, t)$ décrit le même système physique que $H(q, p, t)$, et donc obéit au même principe variationnel :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1, n} P_i \dot{Q}_i - K \right) dt = 0 \quad (\text{A-4})$$

à savoir :

$$\sum_{i=1, n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1, n} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \quad (\text{A-5})$$

donc :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1,n} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1,n} P_i \dot{Q}_i + K - H \quad (\text{A-6})$$

La constante additive $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)$ ne contribue à la variation de l'intégrale qu'aux extrémités de l'intervalle temporel, c'est-à-dire en t_1 et t_2 :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial t} dt = \delta [F(2) - F(1)] = 0 \quad (\text{A-7})$$

La fonction génératrice F caractérisant la transformation canonique (A-1) doit être fonction des nouvelles et des anciennes variables canoniques. Il existe, quatre manières de choisir la fonction F : $F_1(q, Q, t)$, $F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$ et $F_4(p, P, t)$. Le choix de l'une des formes dépend des circonstances.

Si on choisit la première forme $F_1(q, Q, t)$:

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_{i=1,n} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1,n} \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (\text{A-8})$$

en comparant (A-6) avec (A-8), on déduit :

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad (\text{A-9})$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad (\text{A-10})$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (\text{A-11})$$

Etudiant maintenant la deuxième forme $F_2(q, P, t)$. En considérons F_2 comme étant la transformé de Legendre de F_1 , ça nous permet de passer de (q, Q, t) à (q, P, t) :

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_{i=1,n} P_i Q_i \quad (\text{A-12})$$

Nous avons :

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_{i=1,n} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1,n} \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_{i=1,n} \dot{P}_i Q_i + \sum_{i=1,n} P_i \dot{Q}_i \quad (\text{A-13})$$

Considérant les équations (A-11)-(A-12) on peut réécrire l'égalité (A-13) sous la forme :

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_{i=1,n} p_i \dot{q}_i + \sum_{i=1,n} Q_i \dot{P}_i + K - H \quad (\text{A-14})$$

or :

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_{i=1,n} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1,n} \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (\text{A-15})$$

ce qui conduit aux relations suivantes :

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad (\text{A-16})$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad (\text{A-17})$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (\text{A-18})$$

Le troisième choix $F_3(p, Q, t)$ peut également s'obtenir à partir de la transformation de Legendre :

$$F_3(p, Q, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_{i=1,n} p_i q_i \quad (\text{A-19})$$

En suivant le même processus dans le cas précédent, on obtient :

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad (\text{A-20})$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \quad (\text{A-21})$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (\text{A-22})$$

Enfin, le choix $F = F_4(p, P, t)$ tel que :

$$F_4(p, P, t) = F_3(p, Q, t) + \sum_{i=1,n} P_i Q_i \quad (\text{A-23})$$

donne :

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad (\text{A-24})$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \tag{A-25}$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{A-26}$$

Un choix possible est de considérer le couple des coordonnées de départ (q, p) et le couple de coordonnées d'arrivée les variables invariants-angles (I, θ) .

Bibliographie

- [1] Meystre, P., & Sargent, M. (2013). Elements of quantum optics. Springer Science & Business Media.
- [2] Mandel, L., & Wolf, E. (1995). Optical coherence and quantum optics. Cambridge university press.
- [3] Walls, D. F., & Milburn, G. J. (1995). Quantum optics. Springer Science & Business Media.
- [4] Choi, J. R. (2003). The decay properties of a single-photon in linear media. Chinese Journal of Physics, 41(3), 257-266.
- [5] Choi, J. R., & Yeon, K. H. (2005). Quantum properties of light in linear media with time-dependent parameters by Lewis–Riesenfeld invariant operator method. International Journal of Modern Physics B, 19(14), 2213-2224.
- [6] Choi, J. R. (2006). Coherent and squeezed states of light in linear media with time-dependent parameters by Lewis–Riesenfeld invariant operator method. Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics, 39(3), 669–684.
- [7] Pedrosa, I. A., & Rosas, A. (2009). Electromagnetic field quantization in time-dependent linear media. Physical review letters, 103(1), 010402.
- [8] Choi, J. R., & Maamache, M. (2010). Generalized coherent states for quantized electromagnetic fields in time-varying linear media. Piers online, 6, 113-120.
- [9] Maamache, M., Chaabi, N., & Choi, J. R. (2010). Geometric phase of quantized electromagnetic field in time-dependent linear media. Europhysics Letters, 89(4), 40009.
- [10] Maamache, M., Chaabi, N., & Choi, J. R. (2010). Geometric phase of quantized electromagnetic field in time-dependent linear media (Erratum). Europhysics Letters, (90), 59901.

- [11] Choi, J. R. (2010). Invariant operator theory for the single-photon energy in time-varying media. *Chinese Physics B*, 19(1), 010306.
- [12] Choi, J. R., Kim, D., Chaabi, N., Maamache, M., & Menouar, S. (2010). Zero-point fluctuations of quantized electromagnetic fields in time-varying linear media. *Journal of the Korean Physical Society*, 56(3), 775-781.
- [13] Choi, J. R. (2010). Interpreting quantum states of electromagnetic field in time-dependent linear media. *Physical Review A*, 82(5), 055803.
- [14] Pedrosa, I. A. (2011). Quantum description of electromagnetic waves in time-dependent linear media. In *Journal of Physics : Conference Series* 306(1), 012074.
- [15] Pedrosa, I. A. (2011). Quantum electromagnetic waves in nonstationary linear media. *Physical Review A*, 83(3), 032108.
- [16] Pedrosa, I. A., Petrov, A. Y., & Rosas, A. (2012). On the electrodynamics in time-dependent linear media. *The European Physical Journal D*, 66(11), 1-5.
- [17] Caldirola, P. (1941). Forze non conservative nella meccanica quantistica. *Il Nuovo Cimento* (1924-1942), 18(9), 393-400.
- [18] Kanai, E. (1948). On the quantization of the dissipative systems. *Progress of Theoretical Physics*, 3(4), 440-442.
- [19] Usatenko, O. V., & Provost, J. P. (1996). A comparative study of the Hannay's angles associated with a damped harmonic oscillator and a generalized harmonic oscillator. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 29(10), 2607.
- [20] Berry, M. V. (1984). Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 392(1802), 45-57.
- [21] Hannay, J. H. (1985). Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 18(2), 221.
- [22] Aharonov, Y., & Anandan, J. (1987). Phase change during a cyclic quantum evolution. *Physical Review Letters*, 58(16), 1593.
- [23] Anandan, J. (1988). Non-adiabatic non-abelian geometric phase. *Physics Letters A*, 133(4-5), 171-175.

- [24] Wang, S. J. (1990). Nonadiabatic Berry's phase for a quantum system with a dynamical semisimple Lie group. *Physical Review A*, 42(9), 5103.
- [25] Wang, S. J. (1990). Nonadiabatic Berry's phase for a spin particle in a rotating magnetic field. *Physical Review A*, 42(9), 5107.
- [26] Moore, D. J., & Stedman, G. E. (1990). Non-adiabatic Berry phase for periodic Hamiltonians. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 23(11), 2049.
- [27] Mostafazadeh, A., & Bohm, A. (1993). Topological aspects of the non-adiabatic Berry phase. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 26(20), 5473.
- [28] Ge, Y. C., & Child, M. S. (1997). Nonadiabatic geometrical phase during cyclic evolution of a Gaussian wave packet. *Physical review letters*, 78(13), 2507.
- [29] Wu, Y. S., & Li, H. Z. (1988). Observable effects of the quantum adiabatic phase for noncyclic evolution. *Physical Review B*, 38(16), 11907.
- [30] Zak, J. (1989). Berry's geometrical phase for noncyclic Hamiltonians. *Europhysics Letters*, 9(7), 615.
- [31] Weinfurter, H., & Badurek, G. (1990). Measurement of Berry's phase for noncyclic evolution. *Physical review letters*, 64(12), 1318.
- [32] Christian, J., & Shimony, A. (1993). Non-cyclic geometric phases in a proposed two-photon interferometric experiment. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 26(20), 5551.
- [33] Dattoli, G., Mignani, R., & Torre, A. (1990). Geometrical phase in the cyclic evolution of non-Hermitian systems. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 23(24), 5795.
- [34] Choutri, H., Maamache, M., & Menouar, S. (2002). Geometric phase for a periodic non-Hermitian Hamiltonian. *Journal of the Korean Physical Society*, 40, 358-360.
- [35] Mehri-Dehnavi, H., & Mostafazadeh, A. (2008). Geometric phase for non-Hermitian Hamiltonians and its holonomy interpretation. *Journal of Mathematical Physics*, 49(8), 2105.
- [36] Maamache, M. (2015). Periodic pseudo-Hermitian Hamiltonian : Nonadiabatic geometric phase. *Physical Review A*, 92(3), 032106..
- [37] Berry, M. V., & Hannay, J. H. (1988). Classical non-adiabatic angles. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 21(6), L325.

- [38] Bhattacharjee, A., & Sen, T. (1988). Geometric angles in cyclic evolutions of a classical system. *Physical Review A*, 38(9), 4389.
- [39] Page, D. N. (1987). Geometrical description of Berry's phase. *Physical Review A*, 36(7), 3479.
- [40] Cheng, C. M., & Fung, P. C. W. (1989). Analysis of Berry's phase by the evolution operator method. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 22(17), 3493.
- [41] Bouchiat, C., & Gibbons, G. W. (1988). Non-integrable quantum phase in the evolution of a spin-1 system : a physical consequence of the non-trivial topology of the quantum state-space. *Journal de Physique*, 49(2), 187-199.
- [42] Bouchiat, C. (1989). Berry phases for quadratic spin Hamiltonians taken from atomic and solid state physics : examples of Abelian gauge fields not connected to physical particles. *Journal de Physique*, 50(9), 1041-1055.
- [43] Layton, E., Huang, Y., & Chu, S. I. (1990). Cyclic quantum evolution and Aharonov-Anandan geometric phases in SU (2) spin-coherent states. *Physical Review A*, 41(1), 42.
- [44] Engineer, M. H., & Ghosh, G. A. U. T. A. M. (1988). Berry's phase as the asymptotic limit of an exact evolution : an example. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 21(2), L95.
- [45] Datta, N., Ghosh, G., & Engineer, M. H. (1989). Exact integrability of the two-level system : Berry's phase and nonadiabatic corrections. *Physical Review A*, 40(2), 526.
- [46] Mizrahi, S. S. (1989). The geometrical phase : An approach through the use of invariants. *Physics Letters A*, 138(9), 465-468.
- [47] Cervero, J. M., & Lejarreta, J. D. (1989). SO (2, 1)-invariant systems and the Berry phase. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 22(14), L663.
- [48] Gao, X. C., Xu, J. B., & Qian, T. Z. (1990). The exact solution for the generalized time-dependent harmonic oscillator and its adiabatic limit. *Annals of Physics*, 204(1), 235-243.
- [49] Hirayama, M. (1991). SO (2, 1) structure of the generalized harmonic oscillator. *Progress of theoretical physics*, 86(2), 343-354.
- [50] Dittrich, W., & Reuter, M. (1991). Berry phase contribution to the vacuum persistence amplitude; effective action approach. *Physics Letters A*, 155(2), 94-98.

- [51] Li, F. L., Wang, S. J., Weiguny, A., & Lin, D. L. (1994). Gauge transformation approach to the exact solution of a generalized harmonic oscillator. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 27(3), 985.
- [52] Lewis , H. R., & Riesenfeld, W. B. (1969). An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *Journal of Mathematical Physics*, 10(8), 1458-1473.
- [53] Berry, M. V. (1985). Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 18(1), 15.
- [54] Maslov, V. P., & Fedoriuk, M. V. (1981). *Semi-classical approximation in quantum mechanics* : Reidel. Dordrecht, Holland.
- [55] Bécherrawy, T. (2012). *Électromagnétisme : équations de Maxwell, propagation et émission*. Lavoisier.
- [56] Maamache, M., Provost, J. P., & Vallée, G. (1990). Berry's phase, Hannay's angle and coherent states. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 23(24), 5765.
- [57] Maamache, M. (1994). *Phase de Berry, angle de Hannay et états cohérents action-angle*, thèse de doctorat d'état présentée à l'université de Sétif, Algérie.
- [58] Goldstein, H. (1980). *Classical Mechanics*, Addison & Wesley Publ. Co. Reading, Massachusetts.
- [59] Schrödinger, E. (1926). Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14(28), 664-666.
- [60] Glauber, R. J. (1963). Photon correlations. *Physical Review Letters*, 10(3), 84.
- [61] Glauber, R. J. (1963). Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6), 2766.
- [62] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., & Laloë, F. (1977). *Mécanique quantique (Vol. 1)*. Hermann Editeurs, Paris.
- [63] Sahraoui, S. (1996). *éléments de mécanique analytique*. Opu.

ANNEXE

SCIENTIFIC REPORTS

OPEN

Novel quantum description for nonadiabatic evolution of light wave propagation in time-dependent linear media

Halim Lakehal¹, Mustapha Maamache¹ & Jeong Ryeol Choi²

Received: 05 October 2015

Accepted: 17 December 2015

Published: 05 February 2016

A simple elegant expression of nonadiabatic light wave evolution is necessary in order to have a deeper insight for complicated optical phenomena in light science as well as in everyday life. Light wave propagation in linear media which have time-dependent electromagnetic parameters is investigated by utilizing a quadratic invariant of the system. The time behavior of the nonadiabatic geometric phase of the waves that yield a cyclic nonadiabatic evolution is analyzed in detail. Various quantum properties of light waves in this situation, such as variances of electric and magnetic fields, uncertainty product, coherent and squeezed states, and their classical limits, are developed. For better understanding of our research, we applied our analysis in a particular case. The variances of the fields D and B are illustrated and their time behaviors are addressed. Equivalent results for the corresponding classical systems are deduced from the study of the time evolution of the appropriate coherent and squeezed states.

If electromagnetic parameters of the media, such as permittivity, magnetic permeability, and conductivity, change as time goes by, the media are classified as time-dependent media. Recently, great attention has been paid to achieving the accurate and efficient description for light wave propagation in time-dependent linear and random media; this is partly due to the concern to quantum optics processes in modern optical materials such as optical fibers^{1–9}. The light waves in such media are described by a time-dependent Hamiltonian on account of the time-dependence of parameters. It is interesting to note that, even if the time-dependence of parameters disappears, the Hamiltonian of an electromagnetic field is time-dependent as long as the conductivity exists^{7,10}.

There exist generally accepted approaches for developing the quantum theory of light waves of which the corresponding Hamiltonian is explicitly time-dependent. Some of us^{8,9}, studied the geometric phase of quantized light waves in time-dependent linear media, where the parameters of the system undergo adiabatic change. They considered the eigenstates of a time-dependent Hamiltonian in order to derive the adiabatic geometric phase change under the assumption that the parameters of the system vary sufficiently slowly with time. Their research is principally based on Berry's report appearing in his classic paper¹¹, which states that the wave function acquires a geometric phase (now known as Berry's phase) in addition to the usual dynamical phase when a physical system evolves in a cyclic and adiabatic fashion.

In contrast to the adiabatic process of phase change treated in the previous works^{8,9}, we, in this paper, investigate the dynamical properties of nonadiabatic geometric phase accumulated by a somewhat fast change of control parameters of the medium for a light wave propagating in time-dependent linear media. For this reason, we introduce a quadratic invariant of Lewis and Riesenfeld¹² and consider the eigenstates of this invariant (instead of those of the Hamiltonian) in order to study the features of the geometric phase. Then the quantum description of electromagnetic field whose Hamiltonian is time-dependent can be achieved on a fundamental level by taking advantage of the invariant formulation of quantum electrodynamics.

The importance of Berry's finding of the geometric phase and its impact on various areas of physics have naturally led to arousing the interest in the generalizations of geometric phases. One of the most significant contributions in this direction is the nonadiabatic generalization of Berry's phase firstly fulfilled by Aharonov and Anandan¹³. This generalization employs a geometric picture of quantum dynamics and shows that

¹Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria. ²Department of Radiologic Technology, Daegu Health College, Buk-gu, Daegu 41453, Republic of Korea. Correspondence and requests for materials should be addressed to J.R.C. (email: choiardor@hanmail.net)

the nonadiabatic geometric phase can be defined for any closed curve in the space of (pure) quantum states. Perhaps one of the most important research studies connected to these is the classic seminal paper of Lewis and Riesenfeld¹² on dynamical invariants. The correspondence of Berry's phase and Lewis's phase has been pointed out by Morales¹⁴. The classical counterpart of Aharonov-Anandan quantum geometric phase is the nonadiabatic Hannay angle^{15,16}. Since the invariant action proposed by Lewis¹² exists independently of whether the Hamiltonian is changed slowly or not, the geometric angle can be defined on constant-action tori for a cyclic evolution, independently of whether the evolution is adiabatic or not. The appropriate interpretation of the angle obtained in this way is the classical counterpart (Hannay angle) of the geometric phase of the Aharonov and Anandan¹³. For light waves described by the generalized harmonic oscillator, the adiabatic-approximation-results can be obtained from an asymptotic theory of nonadiabatic process.

To investigate the problem of the nonadiabatic geometric phase for quantized light waves propagating through homogeneous conducting linear media, we use Coulomb's gauge and assume that the medium has no free charge for simplicity. We reduce the problem to that of a generalized time-dependent harmonic oscillator Hamiltonian and we examine the geometric character of light waves with the help of the dynamical invariant. From Maxwell's equations, we obtain the classical Hamiltonian for the light waves propagating through homogeneous conducting linear media without charge density and we survey the basic results of the dynamical invariants and their relationship with geometric angles. In particular, the expression of electromagnetic fields in terms of the nonadiabatic geometric angle will be derived. We will address the characteristics of the geometrically equivalent quantum systems and, through a construction of annihilation and creation operators, we will investigate the quantum properties of light in time-dependent linear media. The coherent and squeezed states of the generally described light wave will be investigated and the adiabatic limit of our results will be compared to the previously known ones.

Materials and Methods

In this section, we investigate the nonadiabatic geometric phase of light waves in time-dependent linear media using invariant theory developed for time-dependent Hamiltonian systems. Since the Hamiltonian is nonconservative in this situation, the invariant related approach for the geometric phase is useful now.

In time-dependent linear media, the relations between fields and current are given by

$$\mathbf{D} = \varepsilon(t)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(t)\mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma(t)\mathbf{E}, \quad (1)$$

where $\varepsilon(t)$, $\mu(t)$, and $\sigma(t)$ are time-dependent electric permittivity, magnetic permeability, and conductivity, respectively. Due to the time-dependence of the parameters, the speed of a light wave varies with time and is given by $c(t) = [\mu(t)\varepsilon(t)]^{-1/2}$. In the Coulomb gauge, Maxwell's equations in time-dependent linear media give a damped wave equation for the vector potential such that^{4,8} $\nabla^2 \mathbf{A} - \mu(\dot{\varepsilon} + \sigma)\partial\mathbf{A}/\partial t - \varepsilon\mu\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 = 0$. To separate $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ into mode function $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$ and time function $T_l(t)$, we put

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) T_l(t). \quad (2)$$

Then, $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$ satisfies $\nabla^2 \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) + (\omega_l^2/c_0^2)\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = 0$, while $T_l(t)$ can be written as⁸ $T_l(t) = e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} q_l(t)$ with $\Lambda(t) = \sigma(t)/[2\varepsilon(t)]$, and $q_l(t)$ yields

$$\frac{\partial^2 q_l(t)}{\partial t^2} + \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t)} \frac{\partial q_l(t)}{\partial t} + W_l^2(t) q_l(t) = 0, \quad (3)$$

where $W_l^2(t) = \Omega_l^2(t) - \Lambda^2(t) - \dot{\Lambda}(t)/[2\varepsilon(t)]$, $\Omega_l(t)$ is a time-dependent natural frequency, $c_0 = c(0)$, and $\omega_l = \Omega_l(0)$. From the fact that the wave number $k_l = |\mathbf{k}_l| = \omega_l/c_0$ does not vary with time, we have $\Omega_l(t) = c(t)\omega_l/c_0$.

The mode function is determined by geometry and boundary conditions. For instance, the mode function for a light wave traveling under periodic boundary condition is given by $\mathbf{u}_{l\nu}(\mathbf{r}) = \hat{\varepsilon}_{l\nu} e^{\pm i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} / \sqrt{V}$ where V is the volume of a sector and $\hat{\varepsilon}_{l\nu}$ ($\nu = 1, 2$) are unit vectors that indicate the direction of the polarization for the electromagnetic field.

Considering Eq. (3), we can easily show from Hamilton's equations that $q_l(t)$ is described by a classical generalized harmonic oscillator (GHO) Hamiltonian of the form⁸

$$H_l(q_l, p_l, t) = \frac{p_l^2}{2\varepsilon(t)} + \Lambda(t)p_l q_l + \frac{1}{2}\varepsilon(t)\Omega_l^2(t)q_l^2, \quad (4)$$

where p_l is the canonical conjugate variable of q_l . By summing all of the Hamiltonian associated to each mode function, we have the total Hamiltonian $H = \sum_l H_l$. Because the scalar potential disappears in charge free space, the electric and the magnetic fields are represented only in terms of the vector potential such that

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5)$$

Using the first relation in the above equation along with Eqs. (2) and (4), we see that the electric field can be represented in the form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left(\varepsilon(t) e^{\int_0^t \Lambda(t') dt'} \right)^{-1} \sum_l \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) p_l(t). \quad (6)$$

Let us recall that the general method to introduce geometric angles related to invariants is valid regardless of whatever form of the time dependence for the parameters¹⁶. For a system specified by a time-dependent Hamiltonian $H_l(t)$, a nontrivial invariant $I_l(t)$ obeys the equation $\partial I_l / \partial t + \{I_l, H_l\}_{\text{PB}} = 0$. A remarkable property of this Hamiltonian system is that any initial tori in phase space, which are surfaces of constant action $I_l(q_l, p_l, 0)$ parameterized by the angle $\theta_l(q_l, p_l, 0)$ at initial time t_0 , evolve into the tori identified with constant- $I_l(q_l, p_l, t)$ surfaces, according to a flow produced by the Hamiltonian $H_l(q_l, p_l, t)$. $\Delta\theta_l$ is the angle by which any phase point on the torus is shifted at time t from its value at $t = 0$.

It follows from the Hamilton's equations that the rate of change of the angle of a phase point is determined from the sum of contributions produced by its motion in phase space and by the changing coordinates (I_l, θ_l) :

$$\dot{\theta}_l = \frac{\partial H_l(I_l, \theta_l, t)}{\partial I_l} + \frac{\partial \theta_l}{\partial t}, \quad (7)$$

where $H_l(I_l, \theta_l, t) = H_l(q_l(I_l, \theta_l, t), p_l(I_l, \theta_l, t), t)$. By integrating Eq. (7), we obtain $\Delta\theta_l$, which does not depend on θ_l ; however, the sum in each term does depend on θ_l . These dependences can be eliminated by averaging over each contour of constant action, thus $\Delta\theta_l = \int_0^t \left\langle \frac{\partial H_l(I_l, \theta_l, t')}{\partial I_l} \right\rangle dt' + \frac{\partial}{\partial I_l} \int_0^t \left\langle \frac{\partial \theta_l}{\partial t'} \right\rangle dt'$, where $\langle \rangle$ denotes the average over θ_l at a fixed time. The first term is the dynamical angle $\Delta\theta_l^d$ and the second is the classical geometric angle $\Delta\theta_l^g$.

For the GH0, exact calculations of a Hamiltonian-like quadratic invariant can be made and the explicit form of the resultant invariant and of the associated angle are found, for example, in refs 16–20. Such invariant is read as

$$I_l(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{q_l}{\rho_l} \right)^2 + \rho_l^2 \left[p_l + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} \varepsilon \right) q_l \right]^2 \right\}, \quad (8)$$

where $\rho_l(t)$ is a c-number solution of the auxiliary equation

$$\ddot{\rho}_l + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \dot{\rho}_l + W_l^2 \rho_l = \frac{1}{\varepsilon^2 \rho_l^3}, \quad (9)$$

and performing some algebra for the angle with Eq. (7) leads to

$$\Delta\theta_l = \int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t') \rho_l^2(t')} dt'. \quad (10)$$

Then, the exact solution for q_l is given by

$$q_l(t) = \sqrt{\frac{2I_l}{\varepsilon}} \rho_l \cos \left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t') \rho_l^2(t')} dt' + \theta_l(0) \right). \quad (11)$$

This oscillates in time with a time-dependent phase increment.

Results

Effects of Geometric Phase on Radiation Fields. Now let us see the effects of the nonadiabatic geometric phase for the light wave propagating under a periodic boundary condition. If we replace the classical variables (q_l, p_l) with operators $(\hat{q}_l, \hat{p}_l)$ where $\hat{p}_l = -i\hbar \partial / \partial q_l$, it is possible to investigate this problem in view of quantum mechanics. Each mode of the electromagnetic field behaves like a time-dependent harmonic oscillator whose quantum features are clearly understood through the introduction of annihilation and creation operators associated with the invariant presented in the previous section. If we consider an annihilation operator and a creation operator that are given by

$$\hat{a}_l(t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left(\frac{\hat{q}_l}{\rho_l(t)} + i \{ \rho_l(t) \hat{p}_l + [\Lambda(t) \rho_l(t) - \dot{\rho}_l(t)] \varepsilon(t) \hat{q}_l \} \right), \quad (12)$$

$$\hat{a}_l^\dagger(t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} \left(\frac{\hat{q}_l}{\rho_l(t)} - i \{ \rho_l(t) \hat{p}_l + [\Lambda(t) \rho_l(t) - \dot{\rho}_l(t)] \varepsilon(t) \hat{q}_l \} \right), \quad (13)$$

the invariant, Eq. (8), reduces to a simple form:

$$\hat{I}_l(t) = \hbar \left(\hat{a}_l^\dagger(t) \hat{a}_l(t) + \frac{1}{2} \right). \quad (14)$$

One can easily verify that $\hat{a}_l(t)$ and $\hat{a}_l^\dagger(t)$ satisfy the boson commutation relation $[\hat{a}_l(t), \hat{a}_l^\dagger(t)] = 1$. From the result of the direct differentiation of $\hat{a}_l(t)$ with respect to time:

$$\frac{d\hat{a}_l(t)}{dt} = -\frac{i}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)}\hat{a}_l(t), \quad (15)$$

we see that the time evolution of the annihilation operator is given by

$$\hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0)e^{-i\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')} dt'}. \quad (16)$$

In terms of the canonical variable

$$\hat{q}_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\rho_l(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger), \quad (17)$$

obtained from the inverse representation of $\hat{a}_l$ and $\hat{a}_l^\dagger$ (given in Eqs. (12) and (13)), the vector potential given in Eq. (2) can be completely described as

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} \sum_l \sum_{\nu=1}^2 \hat{\epsilon}_{l\nu} \rho_l(t) [\hat{a}_{l\nu}(0) e^{i\Theta_l(\mathbf{r}, t)} + \hat{a}_{l\nu}^\dagger(0) e^{-i\Theta_l(\mathbf{r}, t)}], \quad (18)$$

for the traveling light waves, where

$$\Theta_l(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t')\rho_l^2(t')} dt'. \quad (19)$$

Then, from the basic relations given in Eq. (5) and the first term of Eq. (1), we see that the electric displacement and the magnetic field operators are represented in the form

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = & \sqrt{\frac{\hbar\varepsilon^2(t)}{2V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} \sum_l \sum_{\nu=1}^2 \hat{\epsilon}_{l\nu} \rho_l(t) \\ & \times \left[\left(\Lambda(t) - \frac{\dot{\rho}_l(t)}{\rho_l(t)} + \frac{i}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)} \right) \hat{a}_{l\nu}(0) e^{i\Theta_l(\mathbf{r}, t)} \right. \\ & \left. + \left(\Lambda(t) - \frac{\dot{\rho}_l(t)}{\rho_l(t)} - \frac{i}{\varepsilon(t)\rho_l^2(t)} \right) \hat{a}_{l\nu}^\dagger(0) e^{-i\Theta_l(\mathbf{r}, t)} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} \sum_l \sum_{\nu=1}^2 (\mathbf{k}_l \times \hat{\epsilon}_{l\nu}) \rho_l(t) [\hat{a}_{l\nu}(0) e^{i\Theta_l(\mathbf{r}, t)} - \hat{a}_{l\nu}^\dagger(0) e^{-i\Theta_l(\mathbf{r}, t)}]. \quad (21)$$

Due to the existence of the exponential factor $e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'}$ in these equations, both the electric and the magnetic fields decrease with time according to the electromagnetic energy dissipation produced by the conductivity $\sigma(t)$ in media. We can confirm from this that the time behavior of the amplitude of the fields are the same as that of the classical fields. Of course, similar behavior appears in the case of adiabatic change of geometric phase^{8,9}. In the limit $\sigma(t) \rightarrow 0$, the fields no longer dissipate with time as expected.

We are able to understand the geometric character of the light wave from the phase factor $e^{-i(\Delta\theta_l^d + \Delta\theta_l^g)}$. As you can see, the light waves undergo geometric phase change $\Delta\theta_l^g$ as well as familiar change of dynamical phase, $\Delta\theta_l^d$. The interference fringe, produced when two or more light waves with different modes meet from different paths, would be altered more or less by the existence of the geometric phase. This concept is important for accurate prediction of interference pattern in interferometers.

Adiabatic Limit: Phase Splitting into Dynamical and Geometrical Parts. One can find the adiabatic limit of the expressions presented up to now by using the following argument. In the adiabatic regime, the differentiation of ρ_l with respect to time induces a multiplication by a small adiabatic parameter ϵ , i.e., $\dot{\rho}_l \sim \epsilon$. Thus, concerning the expression of the invariant given in Eq. (8), one can neglect the term involving $\dot{\rho}_l$ and replace $\rho_l^2(t)$ in the remaining ones by the zeroth-order solution of Eq. (9) with respect to ϵ ; that is, $\varepsilon\rho_{l0}^2(t) = \varpi_l^{-1}$ where $\varpi_l = \sqrt{\Omega_l^2(t) - \Lambda^2}$. One finds the adiabatic invariant of the generalized harmonic oscillator (GHO):

$$I_l(t) \xrightarrow{\text{adiabatic}} \frac{1}{2} \left[\varepsilon \varpi_l q_l^2 + (\varepsilon \varpi_l)^{-1} \left(p_l + \frac{\sigma}{2} q_l \right)^2 \right]. \quad (22)$$

In the same way, for the phase, one can replace $[\varepsilon \rho_l^2(t)]^{-1}$ on the rhs of Eq. (10) by the approximate solution of Eq. (9), $[\varepsilon \rho_l^2(t)]^{-1} = \varpi_l - \dot{\sigma}/(4\varepsilon \varpi_l)$, which is valid up to the first order in ε ; one then recovers the well known relation⁸

$$\dot{\theta}_l \xrightarrow{\text{adiabatic}} \varpi_l - \frac{\dot{\sigma}}{4\varepsilon \varpi_l}. \quad (23)$$

The time derivative of the angle, $\dot{\theta}_l(t)$, consists of two parts. The first one, $\dot{\theta}_l = \varpi_l$, which exists even for a system with fixed parameters, corresponds to the so-called dynamical component of the angle, while the second one, $\dot{\theta}_l^H = -\dot{\sigma}/(4\varepsilon \varpi_l)$ is the (time derivative of the) geometrical Hannay's phase.

For dielectric materials ($\sigma(t) = 0$), the geometric phase vanishes. Therefore, we see that the geometric properties of **E** and **B** fields vary depending on the characteristics of the medium. Moreover, the geometric phase appears when the medium becomes a conducting one with a slowly time-dependent conductivity while the electric permittivity is finite.

Classical Limit: Coherent and Squeezed States for the Generalized GHO Model. The classical counterparts of the results developed up to now, i.e., the identity of the phase properties for the classical GHO and the expression of the classical GHO invariant (which is a generalized one of the results of refs 8,9 established under the restrictive adiabatic hypothesis), can be derived from classical limit of the quantum analysis. Indeed, the classical invariant and angle variables can be obtained by utilizing the quantum evolution of coherent states and squeezed states^{21,22}. These states play the same role as the ordinary coherent states in the harmonic oscillator when considering the quantum-classical correspondence^{23,24}.

The coherent state is an eigenstate of the annihilation operator $\hat{a}_l$:

$$\hat{a}_l |\alpha_l\rangle = \alpha_l |\alpha_l\rangle. \quad (24)$$

We can confirm from Eq. (16) that the eigenvalue is given by

$$\alpha_l(t) = \alpha_l(0) e^{-i \int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t') \rho_l^2(t')} dt'}. \quad (25)$$

In some cases, it may be useful to recast the initial eigenstate in the form $\alpha_l(0) = \alpha_{l,0} e^{-i\theta_l(0)}$ where $\alpha_{l,0}$ and $\theta_l(0)$ are real. To study these states for the GHO, recall Eq. (17) and consider the expression

$$\hat{p}_l = -\sqrt{\frac{\hbar}{2\rho_l^2}} \{ [(\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l) \varepsilon \rho_l + i] \hat{a}_l + [(\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l) \varepsilon \rho_l - i] \hat{a}_l^\dagger \}. \quad (26)$$

Then, by taking into account Eqs. (17) and (24–26), the expectation values of the canonical variables in the coherent state are given by

$$\langle q_l \rangle_\alpha = \sqrt{2\hbar} \rho_l \alpha_{l,0} \cos \left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t') \rho_l^2(t')} dt' + \theta_l(0) \right), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \langle p_l \rangle_\alpha = & -\alpha_{l,0} \sqrt{\frac{2\hbar}{\rho_l^2}} \left[(\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l) \varepsilon \rho_l \cos \left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t') \rho_l^2(t')} dt' + \theta_l(0) \right) \right. \\ & \left. + \sin \left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon(t') \rho_l^2(t')} dt' + \theta_l(0) \right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

These quantities oscillate like those in the classical states. Indeed, coherent state is very much the same as classical state so far as the quantum mechanics allows. Like the quantum case, the phase of oscillation is governed by the time-dependent factor $\int_0^t 1/[\varepsilon(t') \rho_l^2(t')] dt'$ that apparently involves the nonadiabatic part of the geometric phase.

The variances of $\hat{q}_l$ and $\hat{p}_l$ are

$$(\Delta q_l)_\alpha^2 = \langle q_l^2 \rangle_\alpha - \langle q_l \rangle_\alpha^2 = \frac{\hbar}{2} \rho_l^2, \quad (29)$$

$$(\Delta p_l)_\alpha^2 = \langle p_l^2 \rangle_\alpha - \langle p_l \rangle_\alpha^2 = \frac{\hbar}{2\rho_l^2} [1 + (\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l)^2 \varepsilon^2 \rho_l^2]. \quad (30)$$

By multiplying the above two equations, we have the corresponding uncertainty product as

$$(\Delta q_l)_\alpha (\Delta p_l)_\alpha = \frac{\hbar^2}{4} [1 + (\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l)^2 \varepsilon^2 \rho_l^2]. \quad (31)$$

Now let us see the squeezed state. For this purpose, it is necessary to introduce an operator $\hat{b}_l$ which is

$$\hat{b}_l = \mu \hat{a}_l + \nu \hat{a}_l^\dagger, \quad (32)$$

where μ and ν are complex parameters that follow $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$. We can easily check that $\hat{b}_l$ and its hermitian adjoint $\hat{b}_l^\dagger$ satisfy $[\hat{b}_l, \hat{b}_l^\dagger] = 1$. If we represent the eigenvalue equation for $\hat{b}_l$ in the form

$$\hat{b}_l |\beta_l\rangle = \beta_l |\beta_l\rangle, \quad (33)$$

then $|\beta_l\rangle$ is the squeezed state. In general, the squeezed state is obtained by first squeezing the vacuum state and then displacing it²⁵. The expectation value of canonical variables in the squeezed state, $\langle q_l \rangle_\beta$ and $\langle p_l \rangle_\beta$, are identical to those in the coherent state given in Eqs. (27) and (28). Hence, the corresponding characteristics of the geometric phase for the canonical variables are very much the same as those of the coherent state.

However, the variances are different and their straightforward evaluations yield

$$(\Delta q_l)_\beta^2 = \frac{\hbar}{2} \rho_l^2 (1 + 2|\nu|^2 - \mu\nu - \mu^*\nu^*), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} (\Delta p_l)_\beta^2 = & \frac{\hbar}{2\rho_l^2} \{ [(\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l)^2 \varepsilon^2 \rho_l^2 + 1] (2|\nu|^2 + 1) - \mu\nu [(\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l) \varepsilon \rho_l + i]^2 \\ & - \mu^*\nu^* [(\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l) \varepsilon \rho_l - i]^2 \}. \end{aligned} \quad (35)$$

It is well known that one can make the size of $(\Delta q_l)_\beta^2$ sufficiently small at the expense of a relative increase of the value $(\Delta p_l)_\beta^2$ or vice versa. Consequently, the uncertainty product is

$$\begin{aligned} (\Delta q_l)_\beta^2 (\Delta p_l)_\beta^2 = & \frac{\hbar^2}{4} (1 + 2|\nu|^2 - \mu\nu - \mu^*\nu^*) \\ & \times \{ [(\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l)^2 \varepsilon^2 \rho_l^2 + 1] (2|\nu|^2 + 1) \\ & - \mu\nu [(\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l) \varepsilon \rho_l + i]^2 - \mu^*\nu^* [(\Lambda \rho_l - \dot{\rho}_l) \varepsilon \rho_l - i]^2 \}. \end{aligned} \quad (36)$$

For $\mu = 1$ and $\nu = 0$, the above equation reduces to that of the coherent state presented in Eq. (31).

Behavior of Fields in the Coherent State. It is very interesting to analyze the expectation values and variances of the field operators in the coherent state. Using Eqs. (18)–(21), we derive the expectation values of l th-mode field operators:

$$\langle A_l(\mathbf{r}, t) \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{2\hbar}{V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} \rho_l \alpha_{l,0} \cos[\Theta_l(\mathbf{r}, t) - \theta_l(0)], \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \langle D_l(\mathbf{r}, t) \rangle_\alpha = & \sqrt{\frac{2\hbar}{V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} \rho_l \alpha_{l,0} \left[\left(\Lambda - \frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} \right) \cos[\Theta_l(\mathbf{r}, t) - \theta_l(0)] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\varepsilon \rho_l^2} \sin[\Theta_l(\mathbf{r}, t) - \theta_l(0)] \right], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\langle B_l(\mathbf{r}, t) \rangle_\alpha = -\sqrt{\frac{2\hbar}{V}} e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'} |\mathbf{k}_l| \rho_l \alpha_{l,0} \sin[\Theta_l(\mathbf{r}, t) - \theta_l(0)], \quad (39)$$

Notice that these expectation values in the coherent state oscillate sinusoidally according to the increment of phase angle $\Theta_l(\mathbf{r}, t)$. The amplitudes of such oscillations decrease with time on account of the presence of the time-dependent phase $e^{-\int_0^t \Lambda(t') dt'}$.

Further, we can derive the variances of the field operators by means of methods similar to those of the previous evaluations for canonical variables:

$$[\Delta A_l(\mathbf{r}, t)]_\alpha^2 = \frac{\hbar}{2V} e^{-2\int_0^t \Lambda(t') dt'} \rho_l^2(t), \quad (40)$$

$$[\Delta D_l(\mathbf{r}, t)]_\alpha^2 = \frac{\hbar}{2V} e^{-2 \int_0^t \Lambda(t') dt'} \frac{1}{\rho_l^2(t)} \{1 + [\Lambda(t) \rho_l(t) - \dot{\rho}_l(t)]^2 \varepsilon^2(t) \rho_l^2(t)\}, \quad (41)$$

$$[\Delta B_l(\mathbf{r}, t)]_\alpha^2 = \frac{\hbar}{2V} e^{-2 \int_0^t \Lambda(t') dt'} |\mathbf{k}_l|^2 \rho_l^2(t). \quad (42)$$

Considering the exponential term $e^{-2 \int_0^t \Lambda(t') dt'}$, we can see that these variances also decrease with time.

For better understanding of the characteristics of light wave propagations developed here, let us consider for a particular case that $\varepsilon(t)$ is given by

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 + b_1 e^{-b_2 t}), \quad (43)$$

where b_1 and b_2 are real constants with the condition that $b_1 \ll 1$. We further assume that μ and σ are real constants: $\mu(t) = \mu_0$ and $\sigma(t) = \sigma_0$. Then, it is possible to approximate

$$c(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \left(1 - \frac{b_1}{2} e^{-b_2 t}\right), \quad (44)$$

$$c^2(t) \simeq \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (1 - b_1 e^{-b_2 t}), \quad (45)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t)} \simeq -b_1 b_2 e^{-b_2 t}. \quad (46)$$

In this case, the equation for $q(t)$ given in Eq. (3) becomes

$$\frac{\partial^2 q_l(t)}{\partial t^2} - b_1 b_2 e^{-b_2 t} \frac{\partial q_l(t)}{\partial t} + [b_1 F_l e^{-b_2 t} - G_l] q_l(t) = 0, \quad (47)$$

where

$$F_l = \frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0^2} - \frac{\omega_l^2}{c_0^2 \mu_0 \varepsilon_0}, \quad G_l = \frac{\sigma_0^2}{4\varepsilon_0^2} - \frac{\omega_l^2}{c_0^2 \mu_0 \varepsilon_0}. \quad (48)$$

For convenience we consider only the case where F_l and G_l are positive which corresponds to the case $\sigma_0^2 > 4\omega_l^2 \varepsilon_0 / (c_0^2 \mu_0)$. Then, through the transformation $\tau = b_1 e^{-b_2 t}$, Eq. (47) becomes

$$\frac{\partial^2 q_l(\tau)}{\partial \tau^2} + \frac{1 + \tau}{\tau} \frac{\partial q_l(\tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{b_2^2} \left(\frac{F_l}{\tau} - \frac{G_l}{\tau^2} \right) q_l(\tau) = 0. \quad (49)$$

If we consider long time behavior ($t \gg 1$, $\tau \ll 1$), we easily have $(1 + \tau)/\tau \simeq 1/\tau$. Then, the solution of Eq. (49) in this approximation is given by

$$q_l(\tau) = C_1 J_\nu \left(\frac{2\sqrt{F_l \tau}}{b_2} \right) + C_2 N_\nu \left(\frac{2\sqrt{F_l \tau}}{b_2} \right), \quad (50)$$

where J_ν and N_ν are Bessel functions of the first and the second kinds, respectively, while $\nu = 2\sqrt{G_l}/b_2$. This equation can be rewritten in terms of t as

$$q_l(t) = C_1 J_\nu \left(\frac{2\sqrt{F_l b_1}}{b_2} e^{-b_2 t/2} \right) + C_2 N_\nu \left(\frac{2\sqrt{F_l b_1}}{b_2} e^{-b_2 t/2} \right). \quad (51)$$

Although we have considered the long time behavior of the system in this approximated evaluation, the solution Eq. (51) can also be a good result for any initial time because of the obvious relation $\tau \approx b \ll 1$ which is generally valid for small t .

The solution of Eq. (9) can be represented in terms of the two linearly independent solutions of Eq. (3), i.e., in terms of J_ν and N_ν given in Eq. (51)²⁶, such that

$$\rho_l(t) = \rho_l^0 \left[J_\nu^2 \left(\frac{2\sqrt{F_l b_1}}{b_2} e^{-b_2 t/2} \right) + N_\nu^2 \left(\frac{2\sqrt{F_l b_1}}{b_2} e^{-b_2 t/2} \right) \right]^{1/2}, \quad (52)$$

where ρ_l^0 is a constant.

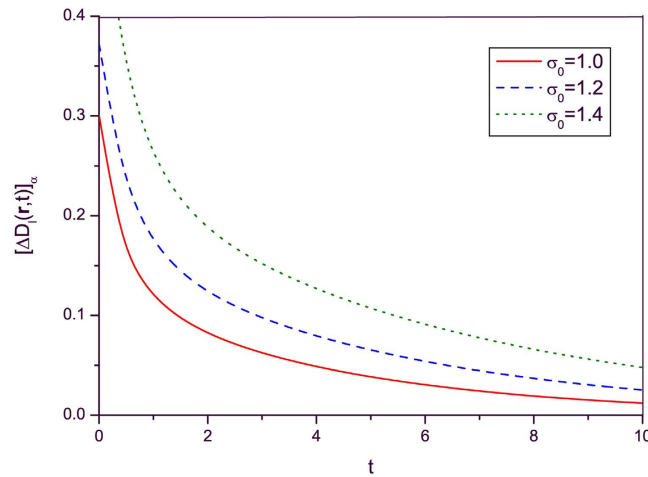


Figure 1. Time evolution of $[\Delta D(\mathbf{r}, t)]_\alpha$ given in Eq. (41) where $\varepsilon(t)$ is given by Eq. (43) and μ and σ are constants $[\mu(t) = \mu_0, \sigma(t) = \sigma_0]$. Several values of σ_0 are taken as indicated in the figure. All other values are common and given by $\hbar = 1, \omega_l = 1, \varepsilon_0 = 0.2, \mu_0 = 1, b_1 = 0.1, b_2 = 1, V = 1$, and $\rho_l^0 = 1$. All values are taken to be dimensionless for the sake of convenience. This convention will also be used in the subsequent figure.

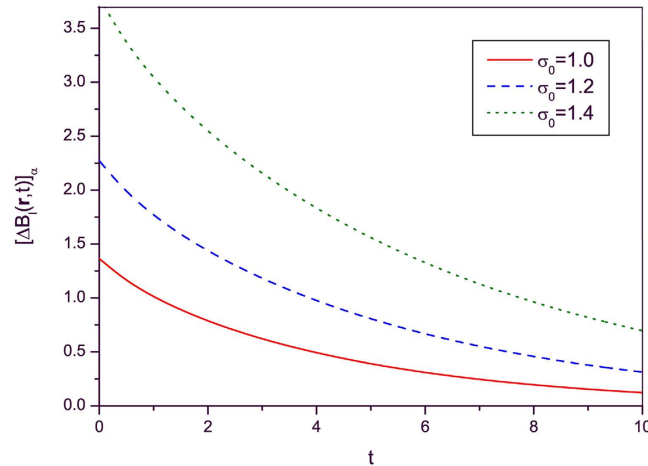


Figure 2. Time evolution of $[\Delta B(\mathbf{r}, t)]_\alpha$ given in Eq. (42) with the same choice of time functions $\varepsilon(t)$, $\mu(t)$ and $\sigma(t)$ as those of Fig. 1 for several different values of σ_0 . The values of σ_0 for each graph are the same as those of Fig. 1. All other values and conventions are also identical to those of Fig. 1.

The time evolutions of $[\Delta D(\mathbf{r}, t)]_\alpha$ and $[\Delta B(\mathbf{r}, t)]_\alpha$ given in Eqs. (41) and (42) are plotted in Figs. 1 and 2 respectively for this particular case. When we drew these figures, the following integral relation is used for evaluating detailed numerical results:

$$\int_0^t \Lambda(t') dt' = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left[t - \frac{b_1}{b_2} (1 - e^{-b_2 t}) \right]. \quad (53)$$

From these figures, we see that both $[\Delta D(\mathbf{r}, t)]_\alpha$ and $[\Delta B(\mathbf{r}, t)]_\alpha$ decrease with time as previously predicted. The amplitude of electric and magnetic fields and their variances gradually disappear because the conductivity plays the role of a dissipation factor.

Discussion

Starting from the basic Maxwell's equations, the GHO model of quantized light wave in time-dependent linear media was investigated with emphasis on its nonadiabatic evolution and accompanying properties of geometric phase. For convenience, we have considered charge free space and took advantage of the Coulomb gauge. Various quantum properties associated with light wave propagation in such situations and their adiabatic and classical limits were analyzed.

The vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ was separated into position function $\mathbf{u}_l(\mathbf{r})$ and time function $q_l(t)$ as shown in Eq. (2). In terms of $q_l(t)$ and its conjugate variable $p_l(t)$, the time-dependent Hamiltonian of the system was con-

structed. To derive quantum solutions of the system, a Hamiltonian-like quadratic invariant was introduced. We can see from Eq. (14) that this invariant is represented as a simple form in terms of the annihilation and the creation operators. If we consider Eq. (16), the absolute value of the annihilation operator does not vary with time even if $\hat{a}_l(t)$ is an explicit function of time. With the use of the annihilation and the creation operators, full expressions of the field operators $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ and $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ are derived and presented in Eqs. (20) and (21), respectively.

The expectation values of $\hat{q}_l$ and $\hat{p}_l$ and their variances in the coherent and the squeezed states have been investigated. In the limit $\mu = 1$ and $\nu = 0$, the corresponding uncertainty product in the squeezed state reduces to that of the coherent state. The expectation values of the field operators $D_l(\mathbf{r}, t)$ and $B_l(\mathbf{r}, t)$ have also been derived. We have confirmed that such expectation values in the coherent state oscillate sinusoidally according to the increment of phase angle $\Theta_l(\mathbf{r}, t)$. This time behavior is exactly the same as that of the classical fields. Not only the field operators but also their variances decrease with time due to the existence of the conductivity. This analysis agrees with the characteristics of classical fields.

We have studied the effects of time-varying parameters of the medium in nonadiabatic evolution of the geometric phase of a light wave. The geometric phase exhibits gauge structure relevant to a phase shift in nonadiabatic processes. There appears a classical analogue of this phase, which is the Hannay angle that can be formulated using the theory of action variable in the canonical structure of light wave phenomena. The adiabatic limit of the phase factor was investigated and it is shown in this limit that the angle θ_l exactly recovers Eq. (23), where the first term is an ordinary dynamical component of the angle and the second one is the geometrical Hannay angle. We can see from the second term that the geometric phase change takes place when the conductivity varies slowly with time.

Finally, we note that there are several potential scientific applications of the results of this work, relevant to nonadiabatic geometric phase. One is a technique for quantum computation that can be carried out by using superconducting nanocircuits²⁷ or nuclear magnetic resonance (NMR)²⁸. For instance, a method to implement the Deutsch-Jozsa algorithm and Grover's search algorithm using the nonadiabatic geometric phase in a two-qubit system has been suggested²⁸. Our results can also be applied to the problem of shortcuts to adiabaticity²⁹ that are introduced for speeding up quantum adiabatic processes. If we consider the fact that adiabatic processes are ubiquitous, the theory of shortcuts to adiabaticity can be employed to various fields in physics relevant to dynamical systems, ranging from the population inversion in two-level quantum systems³⁰ to the trapping and control of Bose gases³¹. Another branch applicable to this work is to investigate the characteristics of quantized light waves in oscillating turbulent plasma, which is important for diagnosing and controlling the plasma state in a tokamak where nuclear fusion takes place³².

References

- Choi, J. R. & Yeon, K. H. Quantum properties of light in linear media with time-dependent parameters by Lewis-Riesenfeld invariant operator method. *Int. J. Mod. Phys. B* **19**, 2213–2224 (2005).
- Choi, J. R. Coherent and squeezed states of light in linear media with time-dependent parameters by Lewis-Riesenfeld invariant operator method. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39**, 669–684 (2006).
- Cirone, M., Rzażewski, K. & Mostowski, J. Photon generation by time-dependent dielectric A soluble model. *Phys. Rev. A* **55**, 62–66 (1997).
- Pedrosa, I. A. & Rosas, A. Electromagnetic field quantization in time-dependent linear media. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 010402 (2009).
- Choi, J. R., Kim, D., Chaabi, N., Maamache, M. & Menouar, S. Zero-point fluctuations of quantized electromagnetic fields in time-varying linear media. *J. Korean Phys. Soc.* **56**, 775–781 (2010).
- Cirone, M. A. & Rzażewski, K. Electromagnetic radiation in a cavity with a time-dependent mirror. *Phys. Rev. A* **60**, 886–892 (1999).
- Choi, J. R. Invariant operator theory for the single-photon energy in time-varying media. *Chinese Phys. B* **19**, 010306 (2010).
- Maamache, M., Chaabi, N. & Choi, J. R. Geometric phase of quantized electromagnetic field in time-dependent linear media. *Europhys. Lett.* **89**, 40009 (2010).
- Maamache, M., Chaabi, N. & Choi, J. R. Geometric phase of quantized electromagnetic field in time-dependent linear media (Erratum). *Europhys. Lett.* **90**, 59901 (2010).
- Choi, J. R. The decay properties of a single-photon in linear media. *Chinese J. Phys.* **41**, 257–266 (2003).
- Berry, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc. London A* **392**, 45–57 (1984).
- Lewis, H. R. Jr. & Reisenfeld, W. B. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *J. Math. Phys.* **10**, 1458–1473 (1969).
- Aharonov, Y. & Anandan, J. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1593–1596 (1987).
- Morales, D. A. Correspondence between Berry's and Lewis's phase for quadratic Hamiltonians. *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, L889–L892 (1988).
- Berry, M. V. & Hannay, J. H. Classical non-adiabatic angles. *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, L325–L331 (1988).
- Bhattacharjee, A. & Sen, T. Geometric angles in cyclic evolutions of a classical system. *Phys. Rev. A* **38**, 4389–4394 (1988).
- Gao, X., Xu, J. B. & Qian, T. Z. The exact solution for the generalized time-dependent harmonic oscillator and its adiabatic limit. *Ann. Phys. (N.Y.)* **204**, 235–243 (1990).
- Maamache, M., Provost, J. P. & Vallée, G. Unitary equivalence and phase properties of the quantum parametric and generalized harmonic oscillators. *Phys. Rev. A* **59**, 1777–1780 (1999).
- Maamache, M. & Saadi, Y. Adiabatic theorem and generalized geometrical phase in the case of continuous spectra. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 150407 (2008).
- Maamache, M. & Saadi, Y. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes in the case of continuous spectra. *Phys. Rev. A* **78**, 052109 (2008).
- Pedrosa, I. A. Comment on “Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator”. *Phys. Rev. D* **36**, 1279–1280 (1987).
- Yuen, H. P. Two-photon coherent states of the radiation field. *Phys. Rev. A* **13**, 2226–2243 (1976).
- Maamache, M., Provost, J. P. & Vallée, G. Berry's phase, Hannay's angle and coherent states. *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 5765–5776 (1990).
- Maamache, M., Provost, J. P. & Vallée, G. A unified approach to the classical and quantum adiabatic theorems. *Eur. J. Phys.* **15**, 121–125 (1994).
- Vogel, W. & Welsch, D.-G. *Lectures on Quantum Optics* pp. 74–78 (Berlin, Akademie Verlag, 1994).
- Song, D. Y. Geometric phase, Hannay's angle, and an exact action variable. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1141–1145 (2000).

27. Zhu, S.-L. & Wang, Z. D. Geometric phase shift in quantum computation using superconducting nanocircuits: Nonadiabatic effects. *Phys. Rev. A* **66**, 042322 (2002).
28. Das, R., Kumar, S. K. K. & Kumar, A. Use of non-adiabatic geometric phase for quantum computing by NMR. *J. Magn. Reson.* **177**, 318–328 (2005).
29. Torrontegui, E. *et al.* Shortcuts to adiabaticity. *Adv. Atom. Mol. Opt. Phys.* **62**, 117–169 (2013).
30. Ruschhaupt, A., Chen, X., Alonso, D. & Muga, J. G. Optimally robust shortcuts to population inversion in two-level quantum systems. *New J. Phys.* **14**, 093040 (2012).
31. Rohringer, W. *et al.* Non-equilibrium scale invariance and shortcuts to adiabaticity in a one-dimensional Bose gas. *Sci. Rep.* **5**, 9820 (2015).
32. Choi, J. R. A novel method for analyzing complicated quantum behaviors of light waves in oscillating turbulent plasma. *Sci. Rep.* **4**, 6880 (2014).

Acknowledgements

This research was supported by the Basic Science Research Program of the year 2015 through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (Grant No.: NRF-2013R1A1A2062907).

Author Contributions

The study was conceived and schemed by M.M. The mathematical evaluations in the text were performed by H.L., M.M. and J.R.C. The paper was written by H.L. and M.M. and the final correction of the paper was done by J.R.C. The figures were plotted by J.R.C.

Additional Information

Competing financial interests: The authors declare no competing financial interests.

How to cite this article: Lakehal, H. *et al.* Novel quantum description for nonadiabatic evolution of light wave propagation in time-dependent linear media. *Sci. Rep.* **6**, 19860; doi: 10.1038/srep19860 (2016).



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons license, unless indicated otherwise in the credit line; if the material is not included under the Creative Commons license, users will need to obtain permission from the license holder to reproduce the material. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

SCIENTIFIC REPORTS

OPEN

Analyzing generalized coherent states for a free particle

Mustapha Maamache¹, Abderrezak Khatir^{1,2}, Halim Lakehal¹ & Jeong Ryeol Choi³

Received: 30 January 2016

Accepted: 06 July 2016

Published: 11 August 2016

Despite the didactic importance of a free particle in quantum mechanics, its coherent state analysis has long been untouched. It is only recently that it has been noticed and studied in the semiclassical domain. While the previously known solutions, reported by Bagrov *et al.* for a free particle, are described using the linear non-Hermitian invariant operator, we show in this work that the general solution of the Schrödinger equation can also be naturally derived using a simpler method based on an Hermitian linear invariant operator. According to this, an exact Gaussian wave function that corresponds to a coherent state solution is obtained. An interpretation for such general quantum solution designated within the Lewis-Riesenfeld framework is provided and, further, quantum-classical correspondence principle for the system is reexamined.

The derivation of the Schrödinger solutions is the most central task when we investigate quantum properties of a specific system. The usual method for obtaining Schrödinger solutions is the separation of variables method that is based on mathematical techniques separating out the time function from the Schrödinger equation. Solving the time-independent Schrödinger problem leads to derive analytically the wave functions representing the energy eigenstates (and the corresponding eigenvalues) of a given problem. Although this simple method is valid for a free particle, the eigenstates of the corresponding Hamiltonian cannot be normalizable. These states correspond to plane waves which are fully delocalized. In this work, we will study Gaussian-like states describing the semiclassical time behavior of a localized free-particle. For the sake of brevity, we will call them “coherent state of a free particle” since the Gaussian structure of the state is preserved during the time evolution.

However, such unnormalizable solutions can be customarily superimposed to be localized solutions by means of a Fourier transformation. Notice that the localized solutions derived in this way are no longer eigenstates of the Hamiltonian although they satisfy the Schrödinger equation. One of the simplest examples for this procedure is to construct the Gaussian wave packets that correspond to the coherent states which describe the semiclassical motion of a localized particle.

A class of the well known coherent states is those of the simple harmonic oscillator^{1–4}; they were originally obtained by Schrödinger¹ as specific quantum states, where the expectation values of the position and momentum operators in these states were the same as the corresponding classical solutions. These states have a number of other interesting properties including the followings: (a) They are eigenstates of the destruction operator; (b) They are created from the ground state by a unitary operator; (c) They minimize the uncertainty relations and do not spread over time; (d) They are (over)complete and normalized, but not orthogonal. These properties have been fully demonstrated in the literature^{5–11}. Thus, the definition and properties of the coherent states for the simple harmonic oscillator are well understood in the context of theoretical physics.

However, despite the didactic importance of analyzing quantum characteristics of a free particle as well as that of the harmonic oscillator, coherent states of a free particle have not been extensively investigated because of the difficulties in deriving their explicit analytical forms. It has been shown that the group-theoretic approach to the time evolution of quantum states is equivalent to the corresponding Lewis-Riesenfeld approach and the free-particle dynamics can be reproduced from the dynamics of the time-dependent harmonic oscillator by letting $\omega(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ ¹². It is only recently that quantum dynamics of a free particle has been noticed and the time behavior of its semiclassical wave packets has been studied^{13–16}.

In ref. 13, Bagrov *et al.* constructed coherent states for a free particle as Gaussian wave packets that allow one to establish a natural relation between the classical and quantum descriptions of a free particle. They used essentially an invariant operator method by introducing a non-Hermitian time-dependent linear invariant described in

¹Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1 Sétif 19000, Algeria. ²Faculté des Sciences Exactes, Université des Frères Mentouri, Constantine, Route d'Ain El Bey, Constantine, Algeria. ³Department of Radiologic Technology, Daegu Health College, Yeongsong-ro 15, Buk-gu, Daegu 41453, Republic of Korea. Correspondence and requests for materials should be addressed to J.R.C. (email: choiardor@hanmail.net)

terms of momentum p and position operators x^{17} . In the approach based on such a non-Hermiticity assumption (NHA) for the invariant operator, a time-dependent generalized coherent state can be derived by solving the eigenvalue equation of the non-Hermitian linear invariant (or of the non-Hermitian linear integrals of motion) under some constraints on the parameters and constants¹³. For other papers exploiting similar techniques for deriving Schrödinger solutions of specific systems, you can refer to refs 18–20.

Recall that, according to the theory of Lewis and Riesenfeld²¹, an invariant is an operator that must necessarily satisfy three requirements: (a) It is Hermitian; (b) It satisfies the von Neumann equation; (c) Its eigenvalues are real and time-independent. Furthermore, any invariant satisfying these three requirements leads to a complete set of solutions of the corresponding Schrödinger equation. So, a conventional solution is constructed as a linear combination of these solutions. In general, any two different Lewis-Riesenfeld Hermitian invariants lead to two different sets of solutions. However, each solution of one of the invariants can be written as a linear combination of the solutions of the second one. Considering the above properties of the Hermitian linear invariant operator, we will show that the Gaussian wave packet and all the results for the coherent states of a free particle can be obtained by using the Hermitian invariant operator which is linear in p and x . It should be noted that this linear invariant operator can be applied not only for the free particle, but also for other systems that are quadratic in p and x such as the harmonic oscillator^{18,19,22}.

In the present paper, we propose an alternative and simpler method for deriving Schrödinger solutions for the motion of a free particle on the basis of a Hermiticity assumption (HA) for the linear invariant operator. The merit of the research using HA is that we can derive complete quantum solutions of the system without imposing any conditions on the parameters necessary for defining the invariant; we will show that this method leads to obtaining the Gaussian wave packet (the solutions of the Schrödinger equation) for the system.

Materials and Methods

From the Hamiltonian of a free particle, the Hermitian linear invariant operator of the system will be constructed. Plane wave solution $\varphi_\lambda(x, t)$ of the eigenvalue equation of the invariant operator will be derived from a straightforward evaluation. From the theory of the Lewis-Riesenfeld²¹, one can confirm that the wave function $\psi_\lambda(x, t)$ of the system can be represented in terms of this plane wave solution, i.e., $\psi_\lambda(x, t) = N_0 \varphi_\lambda(x, t) \exp[i\alpha_\lambda(t)]$, where N_0 is a normalization constant and $\alpha_\lambda(t)$ is a time-dependent phase. With the aid of the Schrödinger equation, we will determine the analytical form of $\alpha_\lambda(t)$. We then have the complete wave function $\psi_\lambda(x, t)$ which corresponds to the plane wave.

To obtain the Gaussian-type wave function $\Psi(x, t)$, we will introduce a suitable weight function $g(\lambda)$. Then, through the integration $\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \psi_\lambda(x, t) d\lambda$, the Gaussian wave function $\Psi(x, t)$ which satisfies the Schrödinger equation will be derived. Finally, quantum characteristics of the free particle will be analyzed by making use of $\Psi(x, t)$.

Results

Invariant and the generalized coherent state. Let us consider a free particle that travels with a momentum p . To study the quantum properties of this system, it is necessary to find the solutions of the Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H(x, p, t) \psi(x, t), \quad (1)$$

with Hamiltonian $H(x, p, t)$ of the form

$$H(x, p, t) = \frac{1}{2m} p^2. \quad (2)$$

As mentioned in the introductory section, the customarily obtained solutions of Eq. (1) with Eq. (2) are delocalized ones. This delocalization leads to a continuous energy spectrum for the system; in this case, the construction of the coherent state is not an easy task. To overcome this difficulty, we introduce an invariant operator and derive its eigenstate which is localized at a position. The eigenstate $\varphi_\lambda(x, t)$ obtained in this way is almost the same as a certain Schrödinger solution $\psi_\lambda(x, t)$. In fact, the difference between them is just a multiplication by a phase factor $\exp[i\alpha_\lambda(t)]$ (see Materials and Methods section). This leads to a localized Schrödinger solution (a generalized quantum solution) that corresponds to the coherent state.

We shall utilize the Lewis-Riesenfeld method²¹ in order to obtain the generalized quantum solutions for the time behavior of the system in the configuration space. To proceed our theory, it is necessary to find an invariant operator $I(t)$ satisfying the identity

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0. \quad (3)$$

Clearly, the meaning of this equation is equivalent to saying that, if $\varphi_\lambda(x, t)$ is an eigenfunction of $I(t)$ with a time-independent eigenvalue λ , we can find a solution of the Schrödinger equation in the form $\psi_\lambda(x, t) = \exp[i\alpha_\lambda(t)] \varphi_\lambda(x, t)$, where $\alpha_\lambda(t)$ satisfies the eigenvalue equation for the Schrödinger operator:

$$\hbar \dot{\alpha}_\lambda(t) \varphi_\lambda = \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right] \varphi_\lambda. \quad (4)$$

Following ref. 13, we suppose that the solution of Eq. (3) takes the form

$$I(t) = A(t)p + B(t)x + C(t), \quad (5)$$

where $A(t)$, $B(t)$, and $C(t)$ are time-dependent coefficients that will be determined. From the substitution of Eqs. (2) and (5) in Eq. (3), we have the time-dependent coefficients such that

$$A(t) = A_0 - \frac{B_0}{m}t, \quad B(t) = B_0, \quad \text{and } C(t) = C_0, \quad (6)$$

where A_0 , B_0 , and C_0 are arbitrary real constants.

The eigenstates $\varphi_\lambda(x, t)$ of $I(t)$ are the solutions of the equation

$$I(t)\varphi_\lambda(x, t) = \lambda\varphi_\lambda(x, t), \quad (7)$$

where the corresponding eigenvalues λ are time-independent. We can show that the solutions $\varphi_\lambda(x, t)$ of Eq. (7) are of the form

$$\varphi_\lambda(x, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{2(\lambda - C_0)x - B_0x^2}{2A(t)}\right)\right]. \quad (8)$$

Substituting Eq. (8) into Eq. (4) and executing the integration, we obtain

$$\alpha_\lambda(t) = \alpha_\lambda(0) - \int_0^t \frac{(\lambda - C_0)^2}{2m\hbar A^2(t')}dt' + i \ln\left[\sqrt{\frac{A(t)}{A_0}}\right]. \quad (9)$$

Here, the first relation in Eq. (6) is used. Notice that the logarithmic term in the above equation decreases as the time increases. We now confirm that the time-dependent normalized wave functions $\psi_\lambda(x, t)$ can be written as

$$\psi_\lambda(x, t) = N_0 \exp[i\alpha_\lambda(t)]\varphi_\lambda(x, t). \quad (10)$$

From the normalization condition for the Dirac delta function, $\langle\psi_\lambda|\psi_{\lambda'}\rangle = \delta(\lambda - \lambda')$, we have the normalization factor as $N_0 = \sqrt{(2\pi\hbar A_0)^{-1}}$. Therefore the physical orthogonal wave functions $\psi_\lambda(x, t)$, which are solutions of the Schrödinger equation (1), are given by

$$\psi_\lambda(x, t) = N(t) \exp\left[-i \int_0^t \frac{(\lambda - C_0)^2}{2m\hbar A^2(t')}dt'\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{2(\lambda - C_0)x - B_0x^2}{2A(t)}\right)\right], \quad (11)$$

where we have taken $\alpha_\lambda(0) = 0$ and the new normalization factor is given by $N(t) = \sqrt{[2\pi\hbar A(t)]^{-1}}$.

Furthermore, the general wave function $\Psi(x, t)$ is then written as

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\psi_\lambda(x, t)d\lambda, \quad (12)$$

where $g(\lambda)$ is a weight function which determines the state of the system in a way that $\Psi(x, t)$ becomes square integrable, i.e., that the integration $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx$ becomes a time-independent finite constant. Any suitable choice of $g(\lambda)$ yields a conventional solution as the Gaussian wave-packet function. Let us now choose the weight function as a Gaussian form too:

$$g(\lambda) = \frac{\sqrt{a}}{\hbar A_0 \pi \sqrt{2\pi}} \exp(-a(\lambda - I_0)^2) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{a_0}{A_0} \left(\lambda - \frac{I_0}{2}\right)\right], \quad (13)$$

where a , a_0 , and I_0 are positive real constants.

Substituting Eqs. (11) and (13) into Eq. (12) and accomplishing the integration by changing the integration variable without loss of generality as $\lambda \rightarrow \lambda + I_0$, we obtain the normalized Gaussian wave function in the form

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & N_\Psi(t) \exp\left[-i \int_0^t \frac{(C_0 - I_0)^2}{2m\hbar A^2(t')}dt'\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{I_0}{2} \frac{a_0}{A_0}\right] \\ & \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{-2(C_0 - I_0)x - B_0x^2}{2A(t)}\right)\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{\left[x - A(t)\left(-\int_0^t \frac{(C_0 - I_0)}{mA^2(t')}dt' + \frac{a_0}{A_0}\right)\right]^2}{4\hbar^2 A^2(t)\left(a + i \int_0^t \frac{1}{2\hbar mA^2(t')}dt'\right)}\right], \end{aligned} \quad (14)$$

where $N_\Psi(t) = \sqrt{a[\hbar A(t)\sqrt{2\pi}(a + i \int_0^t \frac{1}{2\hbar mA^2(t')}dt')]^{-1}}$. We can establish a natural relation between the classical and quantum descriptions of free particles by taking advantages of the characteristics of this wave function.

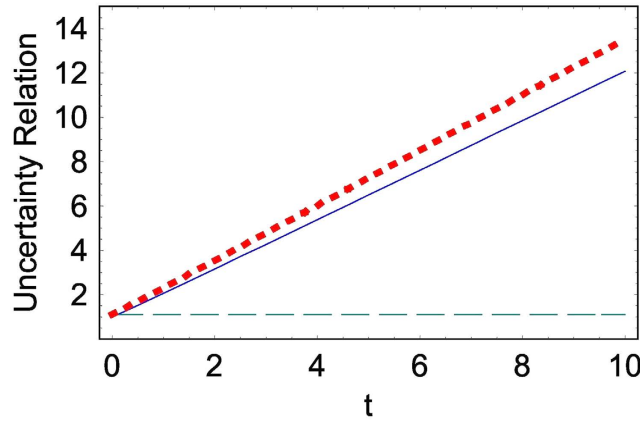


Figure 1. Time evolution of the uncertainty relation, $\Delta x \Delta p$ (thick dotted line). We also represented Δx (solid line) and Δp (dashed line). We have used $a = 1$, $A_0 = 1$, $B_0 = -1$, $m = 1$, and $\hbar = 1$.

For the case $B_0 = 0$ as a particular example, the time-dependent invariant reduces to a simple one that is linear only in p while it has nothing to do with x . If we further impose $I_0 = 0$, our wave function given in Eq. (14) reduces to those of the well-known “localized states” that describe a free particle as the product of a plane wave and a Gaussian state that has been derived in the most textbooks of quantum mechanics (see for example ref. 23).

Quantum analysis of the free particle system. We now evaluate the mean value of x and p in the state $\Psi(x, t)$. To do this, we put $I_0 = a_0 B_0$ for convenience. By executing a minor mathematical procedure using the relation $\int_0^t [2\hbar m A^2(t')]^{-1} dt' = t/[2\hbar m A_0 A(t)]$, we find that

$$\langle x \rangle = \langle \Psi(t) | x | \Psi(t) \rangle = a_0 - \frac{C_0}{mA_0} t = a_0 + \frac{\langle p \rangle}{m} t, \quad (15)$$

which is nothing but the classical position $x_c(t)$. By a similar method, we also have

$$\langle p \rangle = \langle \Psi(t) | p | \Psi(t) \rangle = -\frac{C_0}{A_0}, \quad (16)$$

which is a classical momentum $p_c(t)$. The quantum mechanical expectation values for position and momentum, determined with the Gaussian wave function, satisfy the classical equations of motion for a free particle.

Further, we can derive the position uncertainty from $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$. A basic evaluation for this results in

$$\Delta x = \hbar \frac{A(t)}{\sqrt{a}} \sqrt{a^2 + \left(\int_0^t \frac{1}{2\hbar m A^2(t')} dt' \right)^2}. \quad (17)$$

Meanwhile, the momentum uncertainty yields

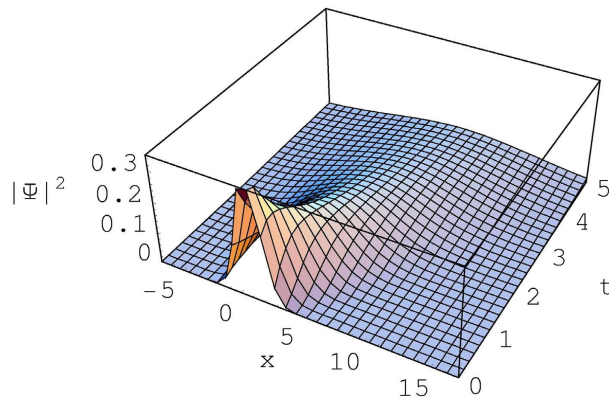
$$\begin{aligned} \Delta p &= \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} + \left(\frac{t}{4a mA_0 A(t)} - \frac{B_0}{A(t)} (\Delta x)^2 \right)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

The multiplication of Eq. (17) with Eq. (18) leads to the uncertainty relation:

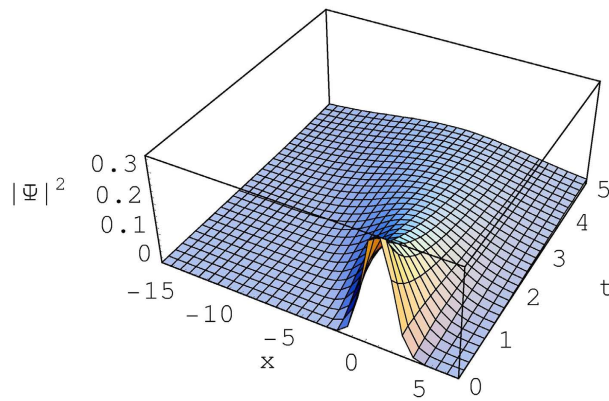
$$\Delta p \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} + \left(\frac{t}{4a mA_0 A(t)} - \frac{B_0}{A(t)} (\Delta x)^2 \right)^2} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (19)$$

which is always larger than $\hbar/2$ that is the minimally acceptable uncertainty in quantum mechanics. From Fig. 1, we see that Δx increases with time while Δp almost does not vary. Hence, the corresponding uncertainty relation increases with time. Such an increasing property of the uncertainty relation for the free particle coincides with the analysis of the uncertainty relation associated with the wave packet developed in ref. 24 (see Eq. (2.20) in that reference). This consequence has been originated from the spreading of the wave packet and is interesting if we think that the uncertainty relation for the simple harmonic oscillator does not vary with time and is always kept $\hbar/2$ in the coherent state.

Now we can rewrite Eq. (14) in terms of $\langle x \rangle$ and $\langle p \rangle$ as



(a)



(b)

Figure 2. Time evolution of the wave packet, $|\Psi(x, t)|^2$. We have used $a = 1$, $A_0 = 1$, $B_0 = -1$, $m = 1$, $\hbar = 1$, and $a_0 = 1$. The value of C_0 is -1 for (a) and 1 for (b).

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & \mathcal{N}_\Psi(t) \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{I_0 C_0}{A_0 B_0} + \langle p \rangle \langle x \rangle \right) \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \langle p \rangle x \right] \\ & \times \exp \left[-\left[\frac{i}{\hbar} \frac{B_0}{2A(t)} + \frac{1}{4a(\Delta x)^2} \left(a - i \int_0^t \frac{1}{2\hbar m A^2(t')} dt' \right) \right] [x - \langle x \rangle]^2 \right], \end{aligned} \quad (20)$$

where $\mathcal{N}_\Psi(t) = \sqrt{\hbar A(t) \left(a - i \int_0^t \frac{1}{2\hbar m A^2(t')} dt' \right) (\sqrt{2\pi a} (\Delta x)^2)^{-1}}$. Moreover, the time-dependent probability density associated with this wave packet is Gaussian for all times and is given by

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta x} \exp \left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2(\Delta x)^2} \right]. \quad (21)$$

We see from this equation that the width of the wave packet at any time t is identical to Δx . This wave packet is illustrated in Fig. 2. Figure 2(a) corresponds to the wave packet for a particle moving along the positive x direction, while 2(b) for a particle moving along the negative x direction. The curve is peaked at $\langle x \rangle$ and has a sharp-fall on either side. It is also readily verified that the time-dependent probability density is conserved: $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$.

From Eq. (21), we can confirm that the wave described by Eq. (20) is a Gaussian wave packet centered at $x_c(t) = \langle x \rangle$. The width $\Delta x(t)$ of this Gaussian wave varies with time. So, during time t , the center of the packet travels from $x_c = 0$ to $x_c(t) = a_0 + \frac{\langle p \rangle}{m}t$ while its width expands from $\Delta x(0) \equiv \Delta x_0 = \hbar A_0 \sqrt{a}$ to $\Delta x(t) = \Delta x_0 \frac{A(t)}{A_0} \sqrt{1 + \left(\int_0^t \frac{1}{2\hbar m a A^2(t')} dt' \right)^2}$. Although the shape of the wave packet is always kept to be Gaussian, the packet undergoes a distortion through its spreading. As a consequence, the width of the packet gradually becomes broader over time whereas its height, $1/[\sqrt{2\pi} \Delta x(t)]$, decreases.

For further analysis of the packet, let us define a displacement unitary operator $D(\alpha, t)$ as

$$D(\alpha, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\langle p \rangle x - \langle x \rangle p)\right). \quad (22)$$

It is interesting that the displaced Gaussian wave function $\Psi(x, t)$ given in Eq. (20) can be regarded as a refined version of the standard coherent state obtainable by applying the displacement operator, $D(\alpha, t)$, to the ground state $\Psi_0(x, t)$, i.e.,

$$\Psi(x, t) = D(\alpha, t) \Psi_0(x, t), \quad (23)$$

where $\Psi_0(x, t)$ corresponds to a particle at rest $\langle p \rangle = 0$ at the origin $\langle x \rangle = 0$:

$$\Psi_0(x, t) = \Psi(x, t) \big|_{\langle x \rangle=0, \langle p \rangle=0}. \quad (24)$$

It is easy to notice that, $\Psi_0(x, t)$ is obtained by replacing $\langle x \rangle$ and $\langle p \rangle$ with $\langle x \rangle = 0$, and $\langle p \rangle = 0$ in the wave function given in Eq. (20).

If we think the fact that the mean values of the canonical variables correspond to their classical counterpart ones in coherent state, i.e., $\langle x \rangle = x_c$ and $\langle p \rangle = p_c$, the action of $D(\alpha, t)$ on a wave function in the x -representation, gives $D(\alpha, t) \phi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} x_c p_c} e^{\frac{i}{\hbar} p_c x} \phi(x - x_c)$. In addition, the coordinate and momentum operators can be changed by the displacement operator to be

$$D^\dagger(\alpha, t) x D(\alpha, t) = x + x_c, \quad D^\dagger(\alpha, t) p D(\alpha, t) = p + p_c, \quad (25)$$

as expected. Indeed, the coherent state developed here plays an exquisite role for connecting quantum descriptions of the free particle with the counterpart classical descriptions.

Discussion

In this work, we have reconsidered the linear invariant proposed by Bagrov *et al.*¹³ in order to derive quantum solution of the motion of the free particle. We have shown that, if we take this linear invariant operator to be an Hermitian one, then a coherent state solution can be naturally derived based on the Lewis-Riesenfeld approach²¹.

We see from Eq. (23) that $D(\alpha, t)$ given in Eq. (22) transforms a wave function $\Psi_0(x, t)$ corresponding to a particle at rest, $\langle p \rangle = 0$, at the origin, $\langle x \rangle = 0$, into a wave function Eq. (20) associated with the particle passing a position $\langle x \rangle$ with a momentum $\langle p \rangle$. We therefore see that the Gaussian state $\Psi(x, t)$ [Eq. (20)] is created from the ground state $\Psi_0(x, t)$ by a unitary operator $D(\alpha, t)$. This state, constructed in the Glauber manner by acting the displacement operator on the vacuum state $\Psi_0(x, t)$ (defined by $\langle p \rangle = 0$ and $\langle x \rangle = 0$), is the coherent state of a free particle. The quantum expectation values for position and momentum, determined in the coherent state, satisfy the classical equations of motion for a free particle. Furthermore, as we have already seen, the coherent state remains a coherent one during its evolution with time. That is why the coherent states are used to study the classical limit of quantum mechanics. This coherent state has a “center of mass” moving along the trajectory of the corresponding classical particle. The trajectory is determined by the classical initial position and initial momentum. From these analyses, we can confirm that there is a complete quantum-classical correspondence for the free particle.

References

1. Schrödinger, E. Übergang von der Mikro- zur Makromechanik. *Naturwissenschaften* **14**, 664–666 (1926).
2. Glauber, R. J. The Quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.* **130**, 2529–2539 (1963).
3. Glauber, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.* **131**, 2766–2788 (1963).
4. Carruthers, P. & Nieto, M. M. Phase and angle variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411–440 (1968).
5. Nieto, M. M. & Simmons, Jr. L. M. Coherent states for general potentials. *Phys. Rev. Lett.* **41**, 207–210 (1968).
6. Nieto, M. M. & Simmons, Jr. L. M. Eigenstates, coherent states, and uncertainty products for the Morse oscillator. *Phys. Rev. A* **19**, 438–444 (1979).
7. Nieto, M. M. & Simmons, Jr. L. M. Coherent states for general potentials. III. nonconfining one-dimensional examples. *Phys. Rev. D* **20**, 1342–1350 (1979).
8. Nieto, M. M. & Simmons, Jr. L. M. Coherent states for general potentials. IV. Three-dimensional systems. *Phys. Rev. D* **22**, 391–402 (1980).
9. Hartley, J. G. & Ray, J. R. Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator. *Phys. Rev. D* **25**, 382–386 (1982).
10. Ray, J. R. Minimum-uncertainty coherent states for certain time-dependent systems. *Phys. Rev. D* **25**, 3417–3419 (1982).
11. Pedrosa, I. A. Comment on “Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator”. *Phys. Rev. D* **36**, 1279–1280 (1987).
12. Penna, V. Compact versus noncompact quantum dynamics of time-dependent $su(1,1)$ -valued Hamiltonians. *Ann. Phys.* **245**, 389–407 (1996).
13. Bagrov, V. G., Gitman, D. M. & Pereira, A. S. Coherent and semiclassical states of a free particle. *Phys.-Usp.* **57**, 891–896 (2014).
14. de la Torre, A. C. & Goyeneche, D. M. Coherent states for free particles. arXiv:1004.2620 (2010).
15. Guerrero, J., Lopez-Ruiz, F. F., Aldaya, V. & Cossio, F. Harmonic states for the free particle. *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 445307 (2011).

16. Geloun, J. B., Hnybida, J. & Klauder, J. R. Coherent states for continuous spectrum operators with non-normalizable fiducial states. *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 085301 (2012).
17. Dodonov, V. V. & Man'ko, V. I. Coherent states and the resonance of a quantum damped oscillator. *Phys. Rev. A* **20**, 550–560 (1979).
18. Bagrov, V. G., Gitman, D. M., Macedo, E. S. & Pereira, A. S. Coherent states of inverse oscillators and related problems. *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 325305 (2013).
19. Bagrov, V. G., Gitman, D. M. & Pereira, A. S. Coherent states of systems with quadratic Hamiltonians. *Braz. J. Phys.* **45**, 369–375 (2015).
20. Bagrov, V.G., Gazeau, J.-P., Gitman, D. & Levine, A. Coherent states and related quantizations for unbounded motions. *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 125306 (2012).
21. Lewis, H. R. & Riesenfeld, W. B. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *J. Math. Phys.* **10**, 1458–1473 (1969).
22. de Lima, A. L., Rosas, A. & Pedrosa, I. A. On the quantum motion of a generalized time-dependent forced harmonic oscillator. *Ann. Phys.* **323**, 2253–2264 (2008).
23. Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Lalo, F. *Quantum Mechanics* Vol. 1 (New York, Wiley-VCH, 1977).
24. Littlejohn, R. G. The semiclassical evolution of wave packets. *Phys. Rep.* **138**, 193–291 (1986).

Acknowledgements

This research was supported by the Basic Science Research Program of the year 2015 through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (Grant No.: 2013R1A1A2062907).

Author Contributions

The study was conceived and schemed by M.M. Mathematical evaluations in the text were performed by M.M., A.K. and H.L. The paper was written by M.M., A.K., H.L. and J.R.C. The final correction of the paper was done by J.R.C. The figures were plotted by J.R.C.

Additional Information

Competing financial interests: The authors declare no competing financial interests.

How to cite this article: Maamache, M. *et al.* Analyzing generalized coherent states for a free particle. *Sci. Rep.* **6**, 30538; doi: 10.1038/srep30538 (2016).



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons license, unless indicated otherwise in the credit line; if the material is not included under the Creative Commons license, users will need to obtain permission from the license holder to reproduce the material. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

© The Author(s) 2016

الملخص:

في هذا العمل قمنا بدراسة التطور الغير ادياباتيكى للحقل الكهرو مغناطيسي في وسط خطي ناقل و متجانس غير مشتت , في غياب الشحنة الكهربائية. قمنا بتحويل المسألة إلى عبارة المهتر التوافقي العام المتعلق بالزمن.

تكميم الحقل الكهربائي , اثبت انه على المستوى الكمي نسلط الضوء على زاوية هاني وليس طور بيرري. قمنا باستعمال الحالات المتناسقة من اجل دراسة النهايات الشبه الكلاسيكية للعبارات المكمنة.

الكلمات المفتاحية: التطور الغير ادياباتيكى , الطور الهندسي , زاوية هاني, طور بيرري, وسط خطي متعلق بالزمن, نظرية اللامتغيرات, النهاية الأدياباتيكية, الحالات المتناسقة.

Résumé :

Dans ce travail, nous étudions l'évolution non-adiabatique du champ électromagnétique dans un milieu conducteur linéaire homogène non dispersif en absence de la densité de charge électrique. Nous ramenons ce problème à celui d'un oscillateur harmonique généralisé dépendant du temps.

La quantification du champ électromagnétique, montre qu'au niveau quantique, on met en évidence l'angle de Hannay et non pas la phase de Berry.

Nous introduisons les états cohérents afin de calculer la limite semi-classique des expressions quantifiées.

Mots-clés: évolution non-adiabatique, phase géométrique, angle de Hannay, phase de Berry, milieu linéaire dépendant du temps, la théorie des invariants, la limite adiabatique, les états cohérents.

Abstract:

In our work, we study the non-adiabatic evolution of the electromagnetic field in a homogeneous linear conducting and nondispersive medium in the absence of the source of electric charge.

We reduce this problem to that of a generalized time-dependent harmonic oscillator. The quantification of the electromagnetic field shows that at the quantum level, the angle of Hannay is highlighted and not the Berry phase. We introduce the coherent states in order to compute the semi classical limit of the quantized expressions.

Keywords: nonadiabatic evolution, geometrical phases, Hannay's angle, Berry's phase, time-dependent linear media, the invariants theory, adiabatic Limit, coherent states.