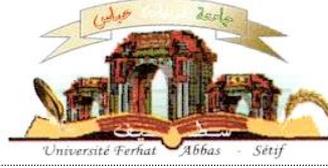


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Ferhat Abbas Sétif 1
Faculté des Sciences



جامعة فرحات عباس، سطيف 1
كلية العلوم

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N°..... / /2017

THÈSE

Présentée par

BERBACHE Aziza

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Filière: MATHEMATIQUES

Spécialité: EDO

THÈME

**Etude qualitative de quelques classes de systèmes
différentiels planaires**

Soutenue publiquement le **07/12/2017**

DEVANT LE JURY

Président	DRABLA Saleh	Pr. UFA Sétif 1
Directeur	BENDJEDDOU Ahmed	Pr. UFA Sétif 1
Examineurs	BERBOUCHA Ahmed	Pr. UAM Béjaia
	REBIAI Salah-Eddine	Pr. U de Batna

Année universitaire 2016/2017

Remerciements

*Je remercie tout d'abord mon encadreur **Ahmed Bendjeddou**, professeur à l'université Ferhat Abbas de Sétif de m'avoir guidé avec autant d'écoute vers un sujet de recherche qui correspond à mes attentes. La confiance qu'il m'a accordée ainsi que sa bienveillance m'ont permis d'initier et mener mes travaux de recherche plus sereinement.*

*Je remercie vivement le Monsieur **Salah Drabla** professeur à l'université Ferhat Abbas de Sétif pour avoir accepté de présider le jury.*

*J'exprime ici toute ma considération à mes examinateurs Messieurs les professeurs **Ahmed Berboucha** professeur à l'université Abderrahmane MIRA Bejaia et **Salah-Eddine Rebiai** professeur à l'université de Batna pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury.*

Enfin, merci à mes parents qui m'ont toujours encouragé et soutenu sous toutes formes et ont toujours cru en ma volonté de réussir.

Merci à tous...

Table des figures

1-1	Champ de vecteurs	11
1-2	Stabilité d'un point d'équilibre	16
1-3	Stabilité asymptotique.	16
1-4	L'application de premier retour de Poincaré.	27
2-1	Portrait de phase du système (2.6)	43
2-2	Portrait de phase du système (2.30)	60

Table des matières

Introduction	4
1 Notions préliminaires et généralités	8
1.1 Introduction	9
1.2 Systèmes différentiels polynômiaux	9
1.3 Champ de vecteurs	10
1.4 Solutions et solutions périodiques	11
1.5 Portrait de phase	12
1.6 Points d'équilibres	12
1.6.1 Linéarisation et matrice jacobienne	13
1.6.2 Le théorème de Hartman-Grobman	14
1.6.3 Stabilité de l'équilibre	15
1.6.4 Nature des points critiques	16
1.7 Courbes invariantes	17
1.8 Cycles limites	18
1.9 Intégrabilité des systèmes différentiels	21
1.9.1 Facteur exponentiel	23
1.9.2 L'intégrabilité de Darboux	23
1.9.3 Facteur intégrant inverse	25
1.10 La fonction de premier retour de Poincaré	26
1.11 Le 16 ^{ième} problème de Hilbert : Problème du centre	28
1.11.1 Perturbation des systèmes différentiels	28
1.11.2 Théorème de moyennisation du premier et deuxième ordre	29

2	Sur les cycles limites de certaines classes de systèmes différentiels	31
2.1	Introduction	32
2.2	Sur l'existence de cycles limites algébriques pour une classe de systèmes quartiques de type Kolmogorov	34
2.2.1	Exemples d'applications	39
2.2.2	Sur la non-existence de cycle limite pour une classe cubique de systèmes de Kolmogorov	40
2.3	Sur l'existence de cycles limites non algébriques pour une classe de systèmes différentiels de degré $2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$	43
2.3.1	Existence de cycles limites	44
2.3.2	Unicité du cycle limite	49
2.3.3	Application	50
2.4	Sur la coexistence de cycles limites algébriques et non algébriques	53
2.5	Conclusion	60
3	Le nombre maximum de cycles limites d'une famille de systèmes différentiels	61
3.1	Introduction	62
3.2	Perturbation et cycles limites pour un système différentiel à centre linéaire	64
3.2.1	Preuve de la proposition (a) du Théorème 3.1	65
3.2.2	Preuve de la proposition (b) du Théorème 3.1	68
3.2.3	Exemples d'application	78
3.3	Perturbation et cycles limites pour un système différentiel à centre non linéaire	81
3.4	Preuve du théorème 3.11	82
3.5	Annexe	85
3.6	Conclusion	86

Introduction

L'étude des équations différentielles est un domaine mathématique qui historiquement a fait l'objet de nombreuses recherches, et continu cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la physique et plus récemment la biologie, l'électronique, spécialité où de nombreux "modèles" conduisent à des équations du même type. Il convient de souligner que la plupart de ces équations sont globalement de nature non-linéaire. Du fait que la description d'un système, à partir des lois régissant son fonctionnement, conduit souvent à un modèle non linéaire, la manipulation peut se révéler complexe. De ce fait il n'existe pas, en l'état actuel des choses, une théorie d'ensemble des équations non-linéaires. Pour ce faire, des calculs approchés basés sur la méthode des petites perturbations, des méthodes de linéarisation...etc, sont effectués concernant ces phénomènes, sur lesquels on dispose de très peu d'informations. A partir de tels calculs, il a été déduit des conjectures que les chercheurs s'efforceront par la suite de démontrer. Cette démarche s'est révélée particulièrement féconde.

La théorie qualitative des équations différentielles, plus connue aujourd'hui par la théorie des équations différentielles, est la branche des mathématiques qui se développe le plus activement et qui possède les plus importantes applications scientifiques. L'étude qualitative, surtout pour les systèmes non-linéaires, reste donc un préalable nécessaire à l'étude complète de leurs solutions.

Un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude de leurs orbites périodiques, leur existence, leur nombre et leur stabilité. Un cycle limite d'une équation différentielle est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques de l'équation différentielle. Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par H. Poincaré en 1881 dans son "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle" [68]. Poincaré s'est intéressé à l'étude qualitative des solutions des équations différentielles, c'est à dire des points d'équilibre, des cycles limites et de leur stabilité. Ce qui permet d'avoir une idée globale des autres orbites du système étudié. A la fin des années 1920, Van Der Pol, Liénard et Andronov ont prouvé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation arrivant dans un circuit de tube vide était un cycle limite.

Un des théorèmes les plus importants de la dynamique non linéaire est le théorème de

Poincaré-Bendixson qui affirme que dans une région compacte du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un point d'équilibre ou un cycle limite. Le critère de Dulac donne une méthode de non existence des solutions périodiques.

Le mathématicien David Hilbert présenta, lors du deuxième congrès international des mathématiques ([42], 1900), 23 problèmes "dont l'avenir attend la résolution grâce aux nouvelles méthodes qui seront découvertes dans le siècle qui commence". Le problème numéro 16 est de savoir le nombre maximal et la position relative des cycles limites d'un système différentiel polynômial planaire de degré n :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

voir par exemple ([5],[19],[26],[54]) et le livre de Ye Yanqian et al [75] consacré seulement pour étudier les cycles limites, principalement des systèmes différentiels polynômiaux quadratiques. On note H_n ce nombre maximal. Dulac [27] (1923), proposa une démonstration prouvant que H_n est fini pour tout n . Mais sa démonstration comportait une erreur. La résolution de ce problème de Dulac a été faite de façon indépendante par Ilyashenko (1991) et Ecalle, Martinet & Moussu (1987) puis Ecalle (1992). Cette résolution permet de montrer que $H_n < \infty$. Petrovsky & Landis (1957) crurent trouver la valeur de H_2 mais ils s'aperçurent d'une erreur dans leur propre démonstration (Landis & Petrovski, 1967) avant que celui-ci ne soit infirmée par un contre exemple de Shi (1982) dans lequel un système quadratique a 4 cycles limites. Ainsi, si H_n est un nombre fini pour tout n , la seule chose que l'on sache est que $H_2 \geq 4$ et $H_3 \geq 11$ (Jibin & Chunfu, 1985, Zoladek, 1995). Christopher & lloyd (1995) ont donné une borne inférieure au nombre H_n ; $H_n \geq n^2 \log(n)$.

Dans ce travail nous allons utiliser la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe de systèmes différentiels planaires autonomes de la forme (1) tels que $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynômes. Plus précisément on s'intéresse à la recherche des cycles limites de certaines classes de systèmes d'équations différentielles ordinaires.

La suite du travail est organisée comme suit :

Le chapitre 1, comporte un rappel des notions préliminaires sur les systèmes différen-

tiels. On commence par définir les systèmes dynamiques, la notion de point d'équilibre, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibres, le portrait de phase, les cycles limites, les courbes invariantes.

Le deuxième chapitre, vise la recherche de cycles limites pour trois classes de systèmes différentiels du type (1). Plus précisément dans la première section on va construire une classe de systèmes de Kolmogorov de degré 4 avec un cycle limite algébrique. De plus nous prouvons que ce cycle limite est, analytique donnée et hyperbolique. A notre connaissance, c'est pour la première fois qu'on exhibe une classe de systèmes de Kolmogorov avec un cycle limite algébrique explicitement donné. Dans la deuxième section de ce chapitre on considère un système différentiel planaire de degré impair très général. On détermine les conditions sous lesquelles ce système possède un seul cycle limite non algébrique. Ce cycle limite est trouvé explicitement.

Dans la troisième partie, on a exhibé une classe de systèmes planaires de degré 5, qui possède deux cycles limites explicites, un cycle limite algébrique et le deuxième non algébrique.

Le troisième chapitre a comme premier but de présenter notre contribution qui consiste à offrir des bornes supérieures pour le nombre de cycles limites qui peuvent être obtenus en perturbant le système de centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, en utilisant la théorie de moyennisation du premier et deuxième ordres.

Notre deuxième travail est de donner les bornes supérieures optimales pour le nombre de cycles limites, qui peut être obtenu en perturbant le centre non linéaire $\dot{x} = -y^{2p-1}, \dot{y} = x^{2q-1}$ à l'aide de la théorie de la moyennisation du premier ordre.

Notons que le travail de cette thèse a fait l'objet des 5 publications suivantes

- (1). [7] A. Bendjeddou, A. Berbache and R. Cheurfa. *A class of Kolmogorov system with exact algebraic limit cycle*, Int. J. Diff. Equa. Appli, Volume 14 No.3 2015, 159-165.
- (2). [6] A. Bendjeddou, A. Berbache. *A class of differential system of odd degree with explicit non algebraic limit cycle*, Int Electr J of Pure and Appl Math. No 4 2015, 243-253.
- (3). [8] A. Bendjeddou, A. Berbache and R. Cheurfa. *Exact algebraic and non-algebraic limit cycles for a class of integrable quintic and planar polynomial differential systems*, is accepted for publication in journal "Scientific Annals of the Alexandru Ioan Cuza University of Iași (NS). Mathematics".
- (4). A. Bendjeddou, A. Berbache. *On the number of limit cycles of a class of polynomial*

differential systems, soumis pour publication

(5) . A. Bendjeddou, A. Berbache. *Upper bounds for the number of limit cycles of polynomial differential systems via averaging theory*, soumis pour publication.

Chapitre 1

Notions préliminaires et généralités

Notions préliminaires et généralités

1.1 Introduction

Ce chapitre contient quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. On commence par définir les systèmes différentiels, on examinera les notions de : point singulier, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibres, le portrait de phase, orbite périodique, cycle limite, nature des points critiques. On introduira aussi un rappel sur les théorèmes fondamentaux : théorème de Grobman-Hartman et quelques théorèmes d'existence et non existence des cycles limites.

Nous décrivons également la méthode de moyennisation, qui consiste en la recherche du nombre de cycles limites qui apparaissent après la perturbation d'un système différentiel polynômial.

Nous nous intéressons ici, et dans à peu près tout ce qui suit, aux systèmes continus, déterministes.

1.2 Systèmes différentiels polynômiaux

Définition 1.1 *On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (1.1)$$

• *Si P et Q sont des polynômes à coefficients réels, on dit que (1.1) est un système différentiel polynômial.*

Si les fonctions P et Q sont des polynômes, on appelle alors degré du système (1.1), le nombre $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Nous supposons que les fonctions P et Q de classe C^1 (donc les conditions de Cauchy-Lipchitz sont satisfaites en tout point ordinaire du système (1.1)).

Remarque 1.2 Si les polynômes P et Q s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} P(x, y) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i+j=0}} a_{ij} x^i y^{n-j}, \\ Q(x, y) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i+j=0}} b_{ij} x^i y^{n-j}, \end{cases}$$

on dit que P et Q sont homogènes, dans ce cas le système (1.1) s'appelle système différentiel polynômial homogène.

1.3 Champ de vecteurs

Avant de commencer l'étude détaillée d'un système différentiel il est très pratique de dessiner le champ de vecteurs qui peut nous fournir des renseignements précieux sur les différentes formes de solutions possibles. Il s'agit de la représentation graphique, en chaque point de l'espace du vecteurs qui lui est associé.

En effet, ce vecteur sera tangent à la trajectoire du système différentiel passant par ce point. Le champ de vecteurs nous donne donc une idée assez précise des solutions possibles et de leur comportement asymptotique.

Définition 1.3 On appelle champ de vecteurs, une région du plan dans laquelle existe en tout point un vecteur $\vec{V}(M, t)$.

On suppose donné un champ de vecteurs de classe C^1 dans un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une application :

$$M = (x, y) \mapsto \vec{V}(M) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix},$$

où P et Q sont de classe C^1 sur Ω . On peut écrire aussi

$$\mathcal{X} = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$$

Considérons le cas général d'un système d'équations différentielles autonomes (1.1). Sur la courbe $P(x, y) = 0$, dite isocline verticale, le champ de vecteurs est parallèle à l'axe des y et sur la courbe $Q(x, y) = 0$, dite isocline horizontale, le champ de vecteurs est parallèle à l'axe des x .

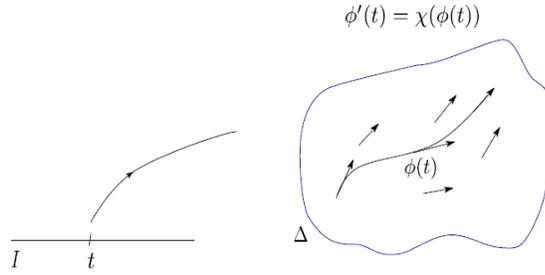


FIG. 1-1 – Champ de vecteurs

1.4 Solutions et solutions périodiques

Définition 1.4 .

- Une solution du système (1.1) consiste en un couple de fonctions $(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}$, qui satisfait ce système.
- Une solution maximale est une solution qui ne peut être prolongée en une solution sur un intervalle plus grand.
- Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.1) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites.
- Le plan (x, y) est appelé plan de phase.
- Une trajectoire du point $(x(t), y(t))$ est l'ensemble des positions de ce point quand t parcourt tout l'intervalle des temps.

Remarque 1.5 Si $(x(t), y(t))$ est une solution du système (1.1), alors sa trajectoire est, en chacun de ses points, tangente au champ de vecteurs associé, autrement dit,

$$\forall t \in I : P(x(t), y(t))\dot{x} + Q(x(t), y(t))\dot{y} = 0.$$

Définition 1.6 On appelle solution périodique du système (1.1), toute solution $(x(t), y(t))$ pour laquelle il existe un réel $T > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t + T) = x(t) \text{ et } y(t + T) = y(t).$$

- Le plus petit nombre $T > 0$ qui convient s'appelle alors période de cette solution.

- A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

Exemple 1.7 L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ qui équivaut au système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement puisque $\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$ ce qui donne pour ensemble de solutions

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C.$$

Autrement dit, ce système possède une famille continue à un paramètre de solutions périodiques représentées dans le plan de phase par des ellipses.

1.5 Portrait de phase

Le plan \mathbb{R}^2 est dit plan de phase et les solutions d'un champ de vecteurs \mathcal{X} représentent dans le plan de phase des orbites ou des trajectoires. Le portrait de phase d'un champ de vecteurs \mathcal{X} est l'ensemble des solutions dans le plan de phase.

Définition 1.8 Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'un système dynamique dans l'espace des phases, à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point.

1.6 Points d'équilibres

Les points fixes (points d'équilibres) jouent un rôle capital dans l'étude des systèmes dynamiques. Henri Poincaré (1854-1912) montra que pour caractériser un système dynamique à plusieurs variables il n'est pas nécessaire de calculer les solutions détaillées, il suffit en effet de connaître les points d'équilibres et leurs stabilités. Ce résultat de grande importance simplifie considérablement l'étude des systèmes non-linéaires au voisinage de ces points.

Définition 1.9 On dit que le point (x^*, y^*) est un point d'équilibre du système (1.1), s'il

est solution du système

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases}$$

Remarque 1.10 .

- La notion de point d'équilibre est la même que celle de point singulier pour le champ de vecteurs.
- Les points d'intersections de ces deux isoclines sont les équilibres (x^*, y^*) du système c'est-à-dire les points tels que la trajectoire issue d'un tel point reste en ce point pour tout t .

Théorème 1.11 [31] Soit le champ de vecteurs \mathcal{X} sur \mathbb{R}^2 . Si Γ est une orbite périodique de \mathcal{X} , alors il existe un point singulier de \mathcal{X} contenu dans $\text{Int}(\Gamma)$.

1.6.1 Linéarisation et matrice jacobienne

La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire, au voisinage d'un point singulier, consiste à se ramener au système linéaire associé, puis à faire le lien entre les trajectoires des deux systèmes.

Considérons le système non linéaire (1.1). Au voisinage d'un point d'équilibre (x^*, y^*) , le linéarisé du système (1.1) est donné sous forme matricielle par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dP}{dx}(x^*, y^*) & \frac{dP}{dy}(x^*, y^*) \\ \frac{dQ}{dx}(x^*, y^*) & \frac{dQ}{dy}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Définition 1.12 On appelle matrice jacobienne associée au système (1.1) au point d'équilibre (x^*, y^*) , la matrice :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{dP}{dx}(x^*, y^*) & \frac{dP}{dy}(x^*, y^*) \\ \frac{dQ}{dx}(x^*, y^*) & \frac{dQ}{dy}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

Définition 1.13 *Deux systèmes autonomes dans le plan*

$$(S_1) \begin{cases} \dot{x} = P(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = Q(x(t), y(t)), \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} \dot{x} = P'(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = Q'(x(t), y(t)), \end{cases}$$

définis sur deux ouverts V et W respectivement, sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : V \rightarrow W$ tel que h transforme les orbites de (S_1) en celles de (S_2) et préserve le sens du mouvement.

Remarque 1.14 .

- L'équivalence par homéomorphisme permet d'effectuer une classification basée principalement sur la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre.
- Deux systèmes linéaires sont topologiquement équivalents s'ils ont le même nombre de valeurs propres, avec des parties réelles de mêmes signes.

Définition 1.15 *Un point singulier (x^*, y^*) du système différentiel (1.1) est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice $J(x^*, y^*)$ ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, le point singulier est dit non-hyperbolique.*

Définition 1.16 *Soit le système différentiel (1.1) et soit $J(x^*, y^*)$ la matrice jacobienne associée au système (1.1) au point d'équilibre (x^*, y^*) et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice.*

1. *Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, alors (x^*, y^*) est appelé point d'équilibre dégénéré.*

Si de plus $J(x^, y^*) \neq 0$ on dit que (x^*, y^*) est un point nilpotent.*

2. *Si $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ mais $(\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 \neq 0$ alors (x^*, y^*) est dit point dégénéré élémentaire.*

3. *Un point singulier (x^*, y^*) de (1.1) est un centre s'il existe un voisinage V de ce point tel que $\forall p \in V \setminus \{(x^*, y^*)\}$, p vérifie $P^2(p) + Q^2(p) \neq 0$, les orbites passant par p sont fermées et entourent (x^*, y^*) .*

1.6.2 Le théorème de Hartman-Grobman

Ce théorème nous permet de réduire l'étude d'un système dynamique (1.1) au voisinage d'un point singulier hyperbolique, à l'étude d'un système linéaire (1.2) topologiquement équivalent à (1.1), au voisinage de l'origine. Il est très utile en pratique et facilite

en général l'étude des systèmes dynamiques définis sur un ouvert Ω du plan. On l'énonce ci-dessous (voir [66] pour la démonstration).

Théorème 1.17 *Supposons que la matrice jacobienne au point d'équilibre (x^*, y^*) ait deux valeurs propres telles que $Re(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors les solutions du système (1.1) sont données approximativement par les solutions du système linéarisé (1.2) au voisinage du point d'équilibre.*

Autrement dit, le portrait de phase du système linéarisé (1.2) constitue, au voisinage de ce point d'équilibre, une bonne approximation de celui du système (1.1).

Remarque 1.18 *Dans le cas où $Re(\lambda_{1,2}) = 0$, ce procédé de linéarisation ne marche pas, c'est à dire si le point d'équilibre (x^*, y^*) est un centre pour le système linéarisé (1.2), la détermination de sa nature dans le cas du système (1.1) nécessite d'autres investigations, c'est le problème du centre.*

1.6.3 Stabilité de l'équilibre

Un système non linéaire quelconque peut avoir plusieurs positions d'équilibre qui peuvent être stables ou instables. Dans certaines situations, on exige la stabilité de l'équilibre qui est définie comme suit :

Soit (x^*, y^*) un point d'équilibre du système (1.1). Notons par

$$\begin{aligned} X(t) &= (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) \\ X^* &= (P(x^*, y^*), Q(x^*, y^*)). \end{aligned}$$

Définition 1.19 . *On dit que :*

- (x^*, y^*) est stable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|(x, y) - (x^*, y^*)\| < \delta \implies (\forall t > 0 : \|X(t) - X^*\| < \varepsilon).$$

- (x^*, y^*) est asymptotiquement stable si et seulement si (x^*, y^*) est stable et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X^*\| = 0.$$

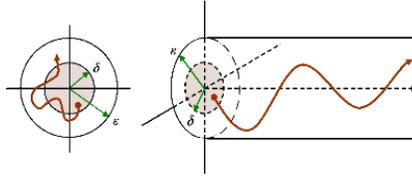


FIG. 1-2 – *Stabilité d'un point d'équilibre*

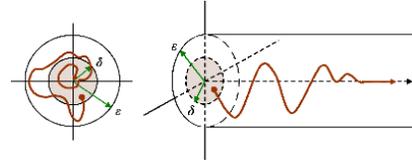


Fig. 1-3 – *Stabilité asymptotique.*

Remarque 1.20 .

-Un point d'équilibre (x^*, y^*) d'un système différentiel est dit *asymptotiquement stable* s'il est stable et s'il existe un voisinage V de (x^*, y^*) tel que toute trajectoire traversant V convergent vers (x^*, y^*) lorsque t tend vers l'infini.

-La notion de *stabilité asymptotique* est plus forte que la notion de *stabilité*.

-La *stabilité asymptotique* impose que la limite des trajectoires lorsque $t \rightarrow +\infty$ soit le point d'équilibre, tandis que la *stabilité neutre* (stable mais pas asymptotiquement stable) impose seulement que les trajectoires restent dans un voisinage du point d'équilibre sans nécessairement tendre vers ce point.

1.6.4 Nature des points critiques

Soit le système différentiel (1.1) et soit $J(x^*, y^*)$ la matrice jacobienne associée au système (1.1) au point d'équilibre (x^*, y^*) et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice.

On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice $J(x^*, y^*)$.

(i) λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signes différents, le point critique (x^*, y^*) est une selle. Il est toujours instable.

(ii) λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique (x^*, y^*) est un nœud stable.
- Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique (x^*, y^*) est un nœud instable.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique (x^*, y^*) est un nœud propre, il est stable si $\lambda < 0$

et instable si $\lambda > 0$.

(iii) λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées c'est à dire $\forall j = 1, 2, \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ et $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$, alors le point critique (x^*, y^*) est un foyer, il est stable si $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ et instable si $\text{Re}(\lambda_j) > 0$.

(iv) λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures c'est-à-dire $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) = 0, \forall j = 1, 2$, alors le point critique (x^*, y^*) est un centre, il est stable.

Proposition 1.21 .

- *Le point singulier (x^*, y^*) du système (1.1) est un nœud stable (resp nœud instable), si l'origine du système linéaire associé est un nœud stable (resp nœud instable).*
- *Le point singulier (x^*, y^*) du système (1.1) est un foyer stable (resp instable), col, si l'origine du système linéaire associé est un foyer stable (resp instable), col.*

Remarque 1.22 .

- *Les foyers et les nœuds stables sont asymptotiquement stables et les centres sont stables, mais pas asymptotiquement stables.*
- *Si au moins une valeur propre est à partie réelle strictement supérieure à 0, le système non linéaire est instable.*

1.7 Courbes invariantes

Les courbes algébriques invariantes jouent un rôle important dans l'intégrabilité des systèmes différentiels planaires polynômiaux, voir par exemple ([31], [18], [17]) et aussi sont utilisées dans l'étude de l'existence et non-existence de solutions périodiques et par conséquent l'existence et non-existence de cycles limites.

Définition 1.23 *On appelle courbe invariante du système (1.1), toute courbe d'équation $U(x, y) = 0$ du plan de phase pour laquelle il existe une fonction $K = K(x, y)$ appelée cofacteur associé à la courbe invariante, telle que*

$$P(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = K(x, y)U(x, y). \tag{1.3}$$

Cette égalité montre que sur la courbe invariante le gradient $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$ de U est orthogonal au champ de vecteurs $\mathcal{X} = (P, Q)$, donc en tout point de la courbe invariante le champ de vecteurs est tangent à cette courbe, donc elle est formée de solutions (ou trajectoires) du champ de vecteurs \mathcal{X} , ce qui justifie son appellation.

Définition 1.24 *Une courbe invariante $U(x, y) = 0$ est dite algébrique de degré m si $U(x, y)$ est un polynôme de degré m . Si non on dit qu'elle est non algébrique.*

Remarque 1.25 *Dans le cas où le système (1.1) est polynômial et possède une courbe invariante algébrique $U(x, y) = 0$ de degré m , le cofacteur est aussi algébrique et son degré vérifie $\deg(K) \leq m - 1$.*

Nous rappelons que la notation div est la divergence du système (1.1), c'est-à-dire

$$\text{div}(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}.$$

Théorème 1.26 [36] *On considère le système (1.1) et $\Gamma(t)$ une orbite périodique de période $T > 0$. On suppose que $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une courbe invariante avec*

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \Omega / U(x, y) = 0\}$$

et $K(x, y) \in C^1$ est le cofacteur donné dans l'équation (1.3), de la courbe invariante $U(x, y) = 0$. On suppose que $p \in \Omega$ tel que $U(p) = 0$ et $\nabla U(p) \neq 0$, alors p est un point singulier du système (1.1), et

$$\int_0^T \text{div}(\Gamma(t)) dt = \int_0^T K(\Gamma(t)) dt.$$

1.8 Cycles limites

Poincaré a introduit la notion de cycle limite dans son second mémoire de 1882, à partir de ses travaux sur le problème des trois corps notamment. La représentation de l'évolution d'un système (pendule par exemple) au moyen d'une équation différentielle dans le plan de phase défini par Poincaré, c'est-à-dire, dans un espace de coordonnées tel que l'ordonnée soit la dérivée par rapport au temps de l'abscisse (par exemple $(x, y) = (\text{position},$

vitesse) conduit Poincaré à une classification des points fixes ou points d'équilibres du système.

Il démontre alors, qu'il en existe trois types différents qu'il appelle : cols, fonds et sommets ou cols, noeud et foyer. Puis, il ajoute qu'en dehors de ces points d'équilibre il existe également des courbes qu'il nomme cycles limites et qui correspondent à des solutions périodiques pour le système considéré, dont les autres courbes définies par la même équation différentielle se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre.

Définition 1.27 *On appelle cycle limite $\Gamma = \{(x(t), y(t)), t \in [0, T]\}$ du système (1.1), toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solution périodiques de ce système, c'est à dire qu'il existe un voisinage de Γ dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.*

Définition 1.28 *Un cycle limite algébrique est un cycle limite qui est contenu dans les zéros fixés d'une courbe algébrique invariante (ovale de la courbe algébrique invariante $U(x, y) = 0$).*

Définition 1.29 *On dit que le système différentiel (1.1) admet un cycle limite non algébrique Γ si Γ n'est pas inclus dans une courbe algébrique invariante pour ce système.*

Théorème 1.30 *Γ étant le cycle limite du système (1.1), toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de Γ sont telles que elles s'enroulent toutes en spirales autour de Γ pour $t \rightarrow +\infty$ ou bien $t \rightarrow -\infty$.*

1. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de Γ , pour $t \rightarrow +\infty$, le cycle limite est stable.

2. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, en spirale autour de Γ pour $t \rightarrow -\infty$, le cycle limite est instable.

Remarque 1.31 *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non-linéaires.*

Donnons maintenant quelques résultats qui permettent de prouver l'existence ou la non existence de cycles limites pour un système dynamique.

Théorème 1.32 [36] Soit $\mathcal{X} = (P, Q)$ un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur un ouvert non vide D de \mathbb{R}^2 , $(x(t), y(t))$ une solution périodique de période T du système $\dot{X} = \mathcal{X}$ et $K : D \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que

$$\int_0^T K(x(t), y(t)) dt \neq 0$$

et $U = U(x, y)$ une solution de classe C^1 de l'équation aux dérivées partielles

$$P(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = K(x, y) U(x, y). \quad (1.4)$$

Alors la trajectoire fermée $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in D : t \in [0, T]\}$ est contenue dans l'ensemble $\Sigma = \{(x, y) \in D : U(x, y) = 0\}$, et n'appartient pas à un ensemble continu de solutions périodiques de \mathcal{X} . De plus, si le champ de vecteurs \mathcal{X} et les fonctions K et U sont analytiques, alors Γ est un cycle limite.

Théorème 1.33 [67] Soit $\Gamma(t)$ une orbite périodique du système (1.1) de période T . Alors

- Γ est un cycle limite stable si $\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt < 0$.
- Γ est un cycle limite instable si $\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt > 0$.

Dans le cas où la quantité $\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt = 0$ une étude avancée est nécessaire pour déterminer si l'orbite Γ est un cycle limite stable, ou un cycle limite instable ou semi-stable ou il n'est qu'une orbite périodique appartenant à une bande continue d'orbites fermées.

Définition 1.34 On dit que le cycle limite est hyperbolique si la quantité

$$\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt \neq 0.$$

Exemple 1.35 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mu x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + \mu y(1 - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (1.5)$$

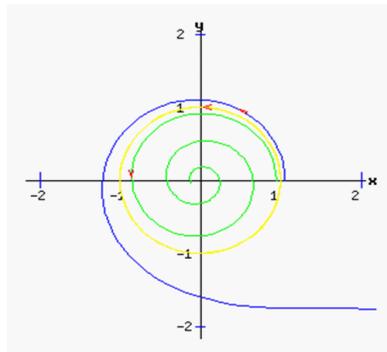
où μ est un paramètre. En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

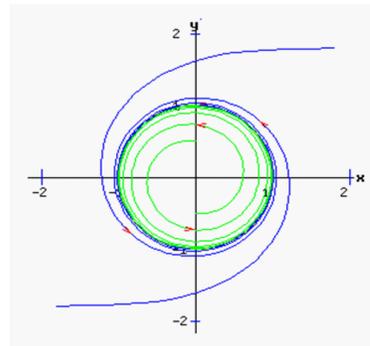
d'où $\dot{r} = 0$ si et seulement si $r = 0$ ou $r = 1$. Pour $r = 1$, on a l'orbite périodique $\Gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ dans le plan de phase, c'est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, c'est un cycle limite unique, alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\cos \theta, \sin \theta) d\theta &= \mu \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= -\mu \int_0^{2\pi} 2 d\theta. \end{aligned}$$

Donc, le système (1.5) a un cycle limite hyperbolique $\Gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ qui est stable si $\mu > 0$ et instable si $\mu < 0$. Si $\mu = 0$, le système a une infinité d'orbites périodiques et il n'y a pas de cycles limites. Voici une esquisse de son portrait de phases si $|\mu| = 0.2$



Cycle limite pour $\mu = -0.2$



Cycle limite pour $\mu = 0.2$

1.9 Intégrabilité des systèmes différentiels

Dans cette section nous présentons les résultats concernant l'existence d'intégrales premières pour un système différentiel planaire polynômial par la théorie d'intégrabilité de Darboux. Ce genre d'intégrabilité fournit un lien entre l'intégrabilité des systèmes différentiels planaires polynômiaux et le nombre de courbes algébriques invariantes.

Soient Ω un ouvert du plan et $(x(t), y(t))$ une solution du système (1.1).

On note $\Delta_{\Omega(x,y)} = \{t \in \mathbb{R} / (x(t), y(t)) \in \Omega\}$.

Définition 1.36 *L'application $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée intégrale première du système sur Ω si elle est constante sur les courbes solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.1) contenue dans Ω , c'est-à-dire si*

$$H(x(t), y(t)) = cste, \quad \forall t \in \Delta_{\Omega(x,y)}.$$

Définition 1.37 *On dit que le système différentiel (1.1) est intégrable sur un ouvert Ω s'il admet une intégrale première sur Ω .*

Définition 1.38 *On appelle facteur intégrant du système (1.1) sur Ω , associé à une intégrale première H , une C^1 -fonction $R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que*

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y}.$$

Lorsque le système (1.1) possède un facteur intégrant R , il est intégrable et l'intégrale première H s'exprime en fonction du facteur intégrant par :

$$H(x, y) = \int R(x, y)P(x, y)dy + h(x),$$

la fonction h est choisie de telle sorte que :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -RQ.$$

Remarque 1.39 .

- *L'équation $H(x, y) = c$ pour $c \in \mathbb{R}$ donne l'ensemble des trajectoires du système.*
- *Pour un champ de vecteurs planaire l'existence d'une intégrale première détermine complètement son portrait de phase.*
- *Si on a une intégrale première H du système (1.1) on peut toujours trouver un facteur intégrant R .*

Pour une démonstration détaillé voir [31].

1.9.1 Facteur exponentiel

Il y a un autre objet, qui s'appelle facteur exponentiel, qui joue le même rôle que les courbes algébriques invariantes pour obtenir une intégrale première d'un champ de vecteurs polynômial (1.1).

Définition 1.40 Soient h et g deux fonctions polynômiales, la fonction $f = \exp\left(\frac{g}{h}\right)$ s'appelle facteur exponentiel du champ de vecteurs (1.1) s'il existe un polynôme $K(x, y)$ de degré au plus $m - 1$ satisfaisant l'équation (1.4).

Remarque 1.41 Les facteurs exponentiels ne définissent pas des courbes invariantes pour le fot du système (1.1), parce qu'ils ne sont jamais identiquement nuls.

Proposition 1.42 Si $f = \exp\left(\frac{g}{h}\right)$ est un facteur exponentiel pour le système polynômial (1.1), alors $h = 0$ est une courbe algébrique invariante, et g satisfait l'équation

$$\mathcal{X}(g) = gK_h + hK_f$$

où K_h et K_f sont les cofacteurs de h et f , respectivement.

Pour une démonstration détaillé voir [31].

1.9.2 L'intégrabilité de Darboux

Avant d'énoncer les résultats principaux de la théorie de Darboux nous avons besoin de quelques définitions. Si $S(x; y) = \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij}x^i y^j$ est un polynôme de degré inférieur ou égale $m - 1$ avec $\frac{m(m+1)}{2}$ coefficients dans \mathbb{C} , alors on écrit $S \in \mathbb{C}_{m-1}[x, y]$. Nous identifions l'espace linéaire de vecteur $S \in \mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ avec $\mathbb{C}^{\frac{m(m+1)}{2}}$ par l'isomorphisme

$$S \longmapsto (a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{m-1,0}, a_{m-2,1}, \dots, a_{0,m-1}).$$

Nous disons que les points $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, r$, sont indépendant par rapport

$\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ si l'intersection des r hyperplans

$$\sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij} x_k^i y_k^j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r$$

dans $\mathbb{C}^{\frac{m(m+1)}{2}}$ c'est un sous espace linéaire de dimension $\frac{m(m+1)}{2} - r$.

Nous remarquons que le nombre maximum des points singuliers isolés de système polynômial (1.1) est m^2 (Le théorème de Bézout's), et que le nombre maximum des points singuliers isolés indépendants du système est $\frac{m(m+1)}{2}$ et que $\frac{m(m+1)}{2} < m^2$ pour $m \geq 2$.

On dit que le point singulier (x^*, y^*) de système (1.1) est faible si la divergence $\text{div}(P, Q)$, du système (1.1) en (x^*, y^*) est nulle.

Le théorème suivant résume la théorie de Darboux sur l'intégrabilité des systèmes différentiels planaires polynômiaux tel qu'il est présenté dans [53], [23]. Pour les applications de ce théorème voir par exemple [16].

Théorème 1.43 *Soit le champ de vecteurs complexe planaire polynômial $\mathcal{X} = (P, Q)$ de degré n qui admet p courbes algébriques invariantes irréductibles $f_i = 0$ avec cofacteurs K_i pour $i = 1, \dots, p$ et q facteurs exponentiels $\exp\left(\frac{g_j}{h_j}\right)$ avec les cofacteurs L_j pour $j = 1, \dots, q$ et r points singuliers indépendants $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$ tels que $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ pour $i = 1, \dots, p$ et $k = 1, \dots, r$.*

(i) *Il existe $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$ si et seulement si la fonction*

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right) \right)^{\mu_1} \dots \left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right) \right)^{\mu_q} \quad (1.6)$$

est une intégrale première du champ de vecteurs \mathcal{X} .

(ii) *Si $p + q + r \geq \left\lceil \frac{n(n+1)}{2} \right\rceil + 1$, alors il existe $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$.*

(iii) *Si $p + q + r \geq \left\lceil \frac{n(n+1)}{2} \right\rceil + 2$, alors le champ de vecteurs \mathcal{X} a une intégrale première*

rationnelle, et par conséquent toutes les trajectoires du système sont contenues dans des courbes algébriques invariantes.

(iv) Il existe $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -\operatorname{div}(P, Q)$ si et seulement si la fonction (1.6) est un facteur intégrant du champ de vecteurs \mathcal{X} .

(v) Si $p + q + r = \frac{n(n+1)}{2}$ et les points singuliers indépendants sont faibles, alors la fonction (1.6) est une intégrale première si $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$, ou est un facteur intégrant si $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -\operatorname{div}(P, Q)$, sous la condition que $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ ne sont pas tous nuls.

(vi) S'il existe $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -s$, pour $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors la fonction

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \left(\exp \left(\frac{g_1}{h_1} \right) \right)^{\mu_1} \dots \left(\exp \left(\frac{g_q}{h_q} \right) \right)^{\mu_q} \exp(st)$$

est une courbe invariante du champ de vecteurs \mathcal{X} .

Ce théorème sera le socle du deuxième chapitre. Pour une preuve facile de ce théorème voir [31].

1.9.3 Facteur intégrant inverse

La fonction $V(x, y)$ est un facteur intégrant inverse du système (1.1) sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^2$ si $V \in C^1(\Omega)$, $V \neq 0$ sur Ω et si

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

C'est facile de vérifier que la fonction $R = \frac{1}{V}$ définit un facteur intégrant dans $\Omega \setminus \{V = 0\}$ du système (1.1).

Le facteur intégrant inverse est parmi les outils qui sont utilisés dans l'étude de l'existence et de la non existence des cycles limites, on peut même déterminer leurs formules en

utilisant le facteur intégrant inverse. Cette méthode est introduite par Giacomini, Llibre et Viano en 1996 [36] et est basée sur le théorème suivant :

Théorème 1.44 [36] *Soient le système (1.1) et $V = V(x, y)$ une fonction de classe C^1 solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V = 0,$$

définie sur l'ensemble ouvert Ω .

Si Γ est un cycle limite du système différentiel (1.1), alors Γ est contenu dans

$$\Sigma = \{(x, y) \in \Omega : V(x, y) = 0\}.$$

1.10 La fonction de premier retour de Poincaré

Pour étudier la stabilité des orbites périodiques, l'outil (ou le moyen) le plus fondamental est la fonction de premier retour de Poincaré, définie par Henri Poincaré en 1881 [68].

L'idée de la fonction de premier retour de Poincaré est très simple : Si Γ est une orbite périodique du système

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.7}$$

passant par le point x_0 et Σ un hyperplan perpendiculaire à Γ en x_0 , alors pour tout point $x \in \Sigma$, suffisamment proche de x_0 , la solution de (1.7) passant par x en $t = 0$, va retraverser Σ en un point $P(x)$ proche de x_0 . La fonction $x \mapsto P(x)$ s'appelle la fonction de premier retour de Poincaré.

La fonction de premier retour de Poincaré peut également être définie lorsque Σ est une surface lisse, passant par un point x_0 de Γ , ce qui n'est pas tangente à Γ en x_0 . Dans ce cas, on dit que la surface se coupe transversalement avec la courbe Γ en x_0 . Voir la figure (Fig. 1-4)

Le théorème suivant établit l'existence et la continuité de l'application de premier retour de Poincaré $P(x)$ et de sa dérivée première $P'(x)$.

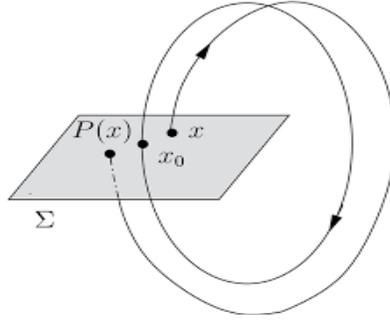


FIG. 1-4 – L'application de premier retour de Poincaré.

Théorème 1.45 [67] Soit E un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $f \in C^1(E)$, supposons que, $\phi_t(x_0)$ soit une solution périodique de (1.1) de période T et que le cycle

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \phi_t(x_0), 0 \leq t \leq T\}$$

est contenu dans E . Soit Σ l'hyperplan orthogonal à Γ en x_0 , c'est-à-dire

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Alors il existe un voisinage de x_0 , $N_\delta(x_0) \subset E$ et une fonction unique $\tau(x)$, définie et continûment différentiable pour tout $x \in N_\delta(x_0)$, tels que $\tau(x_0) = T$ et $\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$, pour tout $x \in N_\delta(x_0)$.

Définition 1.46 Soient Γ , Σ , δ et $\tau(x)$ définis dans le théorème 1.45, alors pour $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$, la fonction $P(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$ est appelée l'application de premier retour de Poincaré de Γ en x_0 .

Le théorème suivant donne la formule de $P'(0)$:

Théorème 1.47 [67]. Soit $\gamma(t)$ une solution périodique de (1.1) de période T . Alors la dérivée de la fonction de Poincaré $P(s)$ le long d'une ligne droite Σ qui est normale à $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \gamma(t) - \gamma(0), 0 \leq t \leq T\}$ en $x = 0$ est donnée par

$$P'(0) = \exp \int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt.$$

Corollaire 1.48 [67] *Sous les hypothèses du théorème 1.47, la solution périodique $\gamma(t)$ est un cycle limite stable si*

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt < 0,$$

et il s'agit d'un cycle limite instable si

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt > 0.$$

Il peut s'agir d'un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou appartenir à une bande continue de cycles si cette quantité est égale à zéro.

1.11 Le 16^{ième} problème de Hilbert : Problème du centre

Le 16^{ième} problème de Hilbert consiste en la recherche d'une borne uniforme $H(n)$ au nombre de cycles limites apparaissant dans la classe des systèmes (1.1).

1.11.1 Perturbation des systèmes différentiels

Une technique usuelle pour obtenir un système différentiel avec cycles limites est de considérer un système différentiel polynômial de type (1.1), possédant une singularité de type centre, et de ce fait intégrable. On perturbe ce système par des polynômes f et g de degrés n .

Le système différentiel obtenu s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon g(x, y), \end{cases}$$

où ε est un petit paramètre.

L'objectif est de rompre le continuum d'orbites périodiques en espérant toutefois qu'il reste des orbites fermées, qui seront isolées.

1.11.2 Théorème de moyennisation du premier et deuxième ordre

La méthode de la moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 [44] et Bogoliubov et Mitropolskii (1961) [12]. Elle a été ensuite développée par Verhulst [78], Sanders and Verhulst [79], Malkin (1956) [65], Roseau (1966) [70], Llibre et Buica (2004) [14]. Dans le cas périodique l'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad (1.8)$$

où $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$ est un petit paramètre et f est T -périodique en t , l'équation moyennée associée à (1.8) s'écrit

$$\dot{x} = \varepsilon f^0(x),$$

où

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt \quad (1.9)$$

La recherche des racines positives de (1.9) réduit le problème de la détermination des solutions T -périodique de (1.8) qui est en général un problème difficile.

On va présenter maintenant les résultats de base du théorème de moyennisation que nous aurons besoin pour prouver les principaux résultats du chapitre 3. Le théorème de moyennisation jusqu'au deuxième ordre qu'on utilise pour étudier spécifiquement les orbites périodiques, a été développé dans [15]. Il se résume comme suit.

Théorème 1.49 [15] *On considère le système différentiel*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (1.10)$$

où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}, R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport a leurs premières variables et D est un ouvert de \mathbb{R} .

Supposons que les hypothèses suivantes se tiennent $F_1(t, \cdot) \in C^2(D), F_2(t, \cdot) \in C^1(D)$, Pour tout $t \in \mathbb{R}, F_1, F_2, R, D_x F_1$ sont localement lipschitziennes par rapport à x et R est deux

fois différentiable par rapport à ε . On définit $F_{k0} : D \rightarrow \mathbb{R}$ pour $k = 1, 2$ comme suit :

$$F_{10}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, x) ds,$$

$$F_{20}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}(s, x) \cdot y_1(s, x) + F_2(s, x) \right] ds,$$

où

$$y_1(s, x) = \int_0^s F_1(t, x) dt,$$

Pour un ensemble ouvert borné $V \subset D$ et pour chaque $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$, il existe $a \in V$ tel que $(F_{10} + \varepsilon F_{20})(a) = 0$ et

$$\frac{d(F_{10} + \varepsilon F_{20})}{dx}(a) \neq 0.$$

Donc pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ du système de telle sorte que $x(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Si F_{10} n'est pas identiquement nulle, alors les zéros de $F_{10} + \varepsilon F_{20}$ sont principalement les zéros de F_{10} pour ε suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit le théorème de moyennisation du premier ordre.

Si F_{10} est identiquement nulle et F_{20} n'est pas identiquement nulle, alors les zéros de $F_{10} + \varepsilon F_{20}$ sont principalement les zéros de F_{20} pour ε suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit le théorème de moyennisation de deuxième ordre.

Chapitre 2

Sur les cycles limites de certaines classes de systèmes différentiels

Sur les cycles limites de certaines classes de systèmes différentiels

2.1 Introduction

Il y a un peu plus d'un siècle, H. Poincaré donnait dans son célèbre mémoire [68], la définition d'un cycle limite pour un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

de \mathbb{R}^2 . Un cycle est une trajectoire périodique de (2.1), c'est un cycle limite si son application de retour n'est pas l'identité. Un cycle limite est alors un cycle isolé dans l'ensemble des cycles. Cette propriété caractéristique fut certainement une des motivations de la question du 16^{ième} problème de Hilbert lorsque P et Q sont des polynômes de degré $n \geq 2$. Si un cycle limite est contenu dans une courbe algébrique du plan, alors il est dit algébrique, sinon on dit qu'il est non-algébrique. En d'autres termes, un cycle limite est algébrique s'il existe un polynôme réel $U(x, y)$ de telle sorte que la courbe algébrique $U(x, y) = 0$ contient une partie fermée qui représente le cycle limite. En général, les orbites d'un système différentiel polynômial (2.1) sont contenues dans des courbes analytiques qui ne sont pas algébriques. On sait que les systèmes différentiels polynômiaux de degré 1, n'admettent pas de cycles limites. Pour les systèmes différentiels quadratiques le problème de l'existence d'un cycle limite non algébrique explicitement donné reste un problème ouvert.

Dans la plupart des articles et des livres sur les équations différentielles ordinaires où apparaissent des exemples de systèmes différentiels planaires polynômiaux ayant des cycles limites explicitement donnés, il s'agit de cycles algébriques. Un des exemples les plus simples est celui d'un système cubique qui s'écrit en coordonnées polaires sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

voir par exemple [67]. D'autre part, il semble intuitivement évident que «la plupart» des cycles limites des systèmes différentiels planaires polynômiaux doivent être non algébrique. Il fallait attendre l'année 1996 pour que K. Odani [64] montre que le cycle limite de l'oscillateur de Van Der Pol est non algébrique. En 1998 Mustapha Abdel Kader [1] a montré que l'oscillateur de degré trois de Van Der Pol, admet un cycle limite algébrique explicitement donné. D'autre part, et à notre connaissance le premier résultat qui donne un système différentiel polynômial avec un cycle limite non algébrique explicitement donné est le travail de A. Gasull, H. Giacomini and J. Torregrosa [35]. Juste après que ce premier article soit apparu, Al-Dosary [4] donne une famille de systèmes différentiels polynômiaux, avec un cycle limite non algébrique explicite, qui généralise le système de l'article de Gasull, Giacomini et Torregrosa. En 2012 Benterki [9] a donné un exemple du système cubique avec un cycle limite non algébrique.

D'autre part, Giné et Grau [37] donnent un système différentiel polynômial de degré 9, qui présente simultanément deux cycles limites explicites, un cycle limite algébrique et un autre non algébrique.

Dans ce chapitre on va présenter trois résultats, il s'agit de trois travaux qui ont fait l'objet de trois publications. La première est intitulée " A class of Kolmogorov system with exact algebraic limit cycle [7], où nous déterminons les conditions d'existence d'un cycle limite de la classe de systèmes différentiels planaires de type Kolmogorov de la forme générale :

$$\begin{cases} \dot{x} = x (F + Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + a_1x^3 + b_1x^2y + a_1xy^2 + b_1y^3), \\ \dot{y} = y (L + Gx + Hy + Mx^2 + Nxy + Sy^2 + a_2x^3 + b_2x^2y + a_2xy^2 + b_2y^3), \end{cases}$$

où $A, B, C, D, E, F, G, H, N, M, L, S$ et $a_i, b_i, i = 1, 2$ sont des constantes réelles. De plus, nous prouvons que ce cycle limite est algébrique, et quand il existe, il peut être donné explicitement. La deuxième intitulée "A class of differential system of odd degree with explicit non algebraic limit cycle [6], où nous considérons la classe de systèmes différentiels

$$\begin{cases} \dot{x} = (x + hx^3 - 2x^2y + hxy^2 - 2y^3) (x^2 + y^2)^{k-1} + xP_{2k}(x, y), \\ \dot{y} = (y + 2x^3 + hx^2y + 2xy^2 + hy^3) (x^2 + y^2)^{k-1} + yP_{2k}(x, y), \end{cases}$$

où h est une constante réelle et $P_{2k}(x, y)$ est un polynôme homogène de degré $2k, k \in \mathbb{N}^*$

tel que

$$P_{2k}(x, y) = 2bk \sum_{0 \leq 2s \leq 2k} (-1)^s C_{2k}^{2s} x^{2k-2s} y^{2s} - 2ak \sum_{0 \leq 2s+1 \leq 2k} (-1)^s C_{2k}^{2s+1} x^{2k-2s-1} y^{2s+1}$$

$$\text{avec } C_{2k}^p = \frac{2k!}{p!(2k-p)!}$$

où a et b sont des constantes réelles et nous déterminons les conditions d'existence d'un cycle limite ainsi que son expression exacte. De plus, nous montrons que ce cycle limite est non algébrique. La troisième intitulée "Exact algebraic and non-algebraic limit cycles for a class of integrable quintic and planar polynomial differential systems [8], où nous déterminons les conditions d'existence de deux cycles limites explicites, un cycle limite algébrique et un autre non algébrique pour une classe de systèmes différentiels de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + y^2 - 1)^2 + (-x + 2y + xy^2 + x^3)((a+b)x^2 + (a-b)y^2), \\ \dot{y} = y(x^2 + y^2 - 1)^2 + (-2x - y + x^2y + y^3)((a+b)x^2 + (a-b)y^2) \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

2.2 Sur l'existence de cycles limites algébriques pour une classe de systèmes quartiques de type Kolmogorov

Considérons dans le quadrant positif $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$ la classe de systèmes polynômiaux quartiques de type Kolmogorov de la forme générale

$$\begin{cases} \dot{x} = x(F + Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + a_1x^3 + b_1x^2y + a_1xy^2 + b_1y^3), \\ \dot{y} = y(L + Gx + Hy + Mx^2 + Nxy + Sy^2 + a_2x^3 + b_2x^2y + a_2xy^2 + b_2y^3), \end{cases} \quad (2.2)$$

où $A, B, C, D, E, F, G, H, N, M, L, S$ et $a_i, b_i, i = 1, 2$ sont des constantes réelles telles que :

$$A = (a_1(\alpha^2 - r^2 + \beta^2) - 2a\alpha), \quad E = (a + 2p - 2\beta b_1),$$

$$\begin{aligned}
B &= (b_1 (\alpha^2 - r^2 + \beta^2) - 2p\beta - 2a\beta), & C &= a - 2\alpha a_1 \\
H &= (b_2 (\alpha^2 - r^2 + \beta^2) - 2b\beta), & M &= (b - 2p - 2\alpha a_2), \\
D &= -2(\beta a_1 + \alpha b_1), & N &= -2(\beta a_2 + \alpha b_2), \\
F &= a (\alpha^2 - r^2 + \beta^2), & S &= (b - 2\beta b_2), \\
G &= (2p\alpha - 2b\alpha + a_2 (\alpha^2 - r^2 + \beta^2)), & L &= b (\alpha^2 - r^2 + \beta^2).
\end{aligned}$$

où a, b, α, β, p et r sont des constantes réelles telles que

$$\alpha > 0, \beta > 0 \text{ et } r^2 < \min \{ \alpha^2, \beta^2 \}$$

Pour ce système, nous prouvons l'existence d'un cycle limite algébrique, de plus nous montrons que ce cycle limite est hyperbolique représenté par le cercle Γ définie par l'équation :

$$U(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0, \quad (2.3)$$

Remarque 2.1 *Les conditions $\alpha > 0, \beta > 0$ et $r^2 < \min \{ \alpha^2, \beta^2 \}$ assure que Γ est un cercle contenue dans le premier quadrant du plan*

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0 \}.$$

Pour notre classe de systèmes différentiels de degré 4, (2.2), on montre le résultat suivant :

Lemme 2.2 *Le cercle Γ définit une solution périodique du système (2.2).*

Preuve : Nous remarquons que le système (2.2) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = x (\varphi(x, y) U(x, y) + ypU_y(x, y)), \\ \dot{y} = y (\psi(x, y) U(x, y) - xpU_x(x, y)), \end{cases} \quad (2.4)$$

où p est une constante réelle et $\varphi(x, y) = a_1x + b_1y + a, \psi(x, y) = a_2x + b_2y + b$ et $U(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2$.

Nous devons montrer que $U = 0$ est une courbe algébrique invariante du système différentiel (2.4). En effet, un calcul direct montre que

$$x(\varphi U + pyU_y)U_x + y(\psi U - pxU_x)U_y = (x\varphi U_x + y\psi U_y)U.$$

Donc, le cercle Γ est une courbe invariante du système (2.4) avec le cofacteur

$$\begin{aligned} K(x, y) &= x\varphi(x, y)U_x(x, y) + y\psi(x, y)U_y(x, y) \\ &= 2(x(x - \alpha)(a_1x + b_1y + a) + y((y - \beta)(a_2x + b_2y + b))). \end{aligned}$$

Maintenant on va montrer que la courbe (2.4) est non singulière. Supposons que Γ contient un point d'équilibre (x^*, y^*) du système, donc (x^*, y^*) est une solution du système :

$$\begin{cases} (a_1x + b_1y + a)((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2) + 2py(y - \beta) = 0, \\ (a_2x + b_2y + b)((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2) - 2px(x - \alpha) = 0. \end{cases}$$

Dans le premier quadrant positif du plan Ω , il se réduit à $y^* = \beta$ et $x^* = \alpha$, qui est absurde, donc Γ est une orbite périodique. Ce qui termine la preuve. ■

Dans ce paragraphe, nous discutons les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (2.2) admette aux moins un cycle limite algébrique Γ donné par l'équation (2.4). Plus précisément, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 2.3 *Le système (2.2) admet le cercle Γ comme cycle limite hyperbolique si*

$$a_1 \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - r^2} \right) + b_2 \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - r^2} \right) \neq 0.$$

Preuve : Si l'on considère $\Gamma : \{(x(t), (y(t))), t \in [0, T]\}$ une orbite périodique du système (2.2) de période T , on montre que Γ est un cycle limite hyperbolique.

Afin de montrer cela, nous utilisons le résultat du théorème 1.33, qui signifie que $\Gamma(t)$ est un cycle limite lorsque $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt \neq 0$, stable si $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt < 0$ et instable si $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt > 0$.

Nous allons calculer intégrale $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt$ explicitement, en utilisant également le

théorème 1.26, qui affirme que :

$$\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt = \int_0^T K(\Gamma(t)) dt.$$

Cela nous permet de traiter une intégrale plus simple. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ une constante arbitraire, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt &= \int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt + \lambda \left(\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt - \int_0^T K(\Gamma(t)) dt \right) \\ &= \int_0^T ((1 + \lambda) \operatorname{div}(\Gamma(t)) - \lambda K(\Gamma(t))) dt. \end{aligned}$$

Nous notons que la divergence du système (2.4) est

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x, y) &= \frac{d}{dx} (x(\varphi U + pyU_y)) + \frac{d}{dy} (y(\psi U - pxU_x)) \\ &= (\varphi + \psi + x\varphi_x + y\psi_y) U + (\varphi - p) xU_x + (\psi + p) yU_y, \end{aligned}$$

où φ_x est la dérivée partielle par rapport à la variable x de la fonction $\varphi = \varphi(x, y)$, et de même pour ψ_y , alors

$$\int_0^T \operatorname{div}(x, y) dt = \int_0^T x(\varphi - p - p\lambda) U_x + y(\psi + p + p\lambda) U_y dt.$$

D'un autre côté, il découle du système (2.2), que $dt = \frac{dx}{x(\varphi U + ypU_y)}$, donc

$$\int_0^T \operatorname{div}(x, y) dt = \oint_{\Gamma} \frac{\psi + p + p\lambda}{px} dx + \oint_{\Gamma} \frac{(\varphi - p - p\lambda) U_x}{pyU_y} dx.$$

Comme $U(x, y) = 0$ est une courbe algébrique, nous avons $U_x(x, y) dx + U_y(x, y) dy = 0$, c'est-à-dire $U_x(x, y) dx = -U_y(x, y) dy$, donc

$$\int_0^T \operatorname{div}(x, y) dt = \oint_{\Gamma} \frac{\psi + p + p\lambda}{px} dx - \oint_{\Gamma} \frac{\varphi - p - p\lambda}{py} dy.$$

Maintenant, nous appliquons la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(x, y) dt &= \int \int_{\operatorname{int}(\Gamma)} -\frac{d}{dy} \left(\frac{\psi + p + p\lambda}{px} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi - p - p\lambda}{py} \right) dy dx \\ &= - \int \int_{\operatorname{int}(\Gamma)} \frac{b_2 y + a_1 x}{pxy} dx dy \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^T \operatorname{div}(x, y) dt = -\frac{b_2}{p} \int \int_{\operatorname{int}(\Gamma)} \frac{1}{x} dx dy - \frac{a_1}{p} \int \int_{\operatorname{int}(\Gamma)} \frac{1}{y} dx dy, \quad (2.5)$$

où $\operatorname{int}(\Gamma)$ désigne l'intérieur de Γ où Γ est le cercle donné par l'équation $U(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$.

Comme Γ est la réunion des deux arcs :

$$y_1 = \beta - \sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2}, \quad y_2 = \beta + \sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \int_{\operatorname{int}(\Gamma)} \frac{1}{x} dy dx \\ &= \int_{\alpha-r}^{\alpha+r} \left(\int_{\beta - \sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2}}^{\beta + \sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2}} \frac{1}{x} dy \right) dx \\ &= 2 \int_{\alpha-r}^{\alpha+r} \frac{\sqrt{r^2 - (x - \alpha)^2}}{x} dx \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $x = \alpha + r \sin \theta$, on obtient

$$I_1 = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - (\sin \theta)^2}}{\alpha + r \sin \theta} \cos \theta d\theta.$$

Par conséquent

$$I_1 = -\frac{\pi}{r^2} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - r^2} \right). \quad (2.6)$$

Maintenant, nous considérons la seconde intégrale $I_2 = \int \int_{\text{int}(\Gamma)} \frac{1}{y} dx dy$. Par symétrie, nous avons juste à remplacer α par β dans l'expression de I_1 , on obtient

$$I_2 = -\frac{\pi}{r^2} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - r^2} \right). \quad (2.7)$$

En tenant compte de (2.6) et (2.7), la formule (2.5) devient

$$\int_0^T \text{div}(\Gamma(t)) dt = -\frac{\pi}{r^2} \left(a_1 \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - r^2} \right) + b_2 \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - r^2} \right) \right).$$

Par conséquent, l'orbite périodique Γ est un cycle limite hyperbolique si et seulement si

$$a_1 \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - r^2} \right) + b_2 \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - r^2} \right) \neq 0,$$

ceci termine la preuve du théorème. ■

2.2.1 Exemples d'applications

Les exemples suivants sont donnés pour illustration.

Exemple 2.4 Pour $\alpha = 3, \beta = b_1 = 2, r = \sqrt{2}, a = b = 0, p = b_2 = 1$ et $a_1 = a_2 = -1$, le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-11x + 20y + 6x^2 - 8xy - 7y^2 - x^3 + 2x^2y - xy^2 + 2y^3), \\ \dot{y} = y(-8x + 11y + 5x^2 - 2xy - 4y^2 - x^3 + x^2y - xy^2 + y^3), \end{cases} \quad (2.8)$$

admet le cercle $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 2 = 0$, comme cycle limite instable, car

$$\int_0^T \text{div}(\Gamma(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \left(-(2 - \sqrt{4 - 2}) + (3 - \sqrt{9 - 2}) \right) = 0.36370.$$

Ce cycle limite entoure un point selle (3.742, 1.658) et deux foyers instables (3.448, 0.908) et (3, 3).

Considérons maintenant un autre exemple.

Exemple 2.5 Pour $\alpha = 3, \beta = 4, r = 1, a = b = b_1 = 0, p = \frac{1}{2}, a_1 = 1, a_2 = \frac{-4}{3}$ et $b_2 = \frac{3}{4}$, le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^3 - 6x^2 + xy^2 - 8xy + 24x + y^2 - 4y), \\ \dot{y} = y\left(\frac{3}{4}x^2y - \frac{4}{3}x^3 + 7x^2 - \frac{4}{3}xy^2 + \frac{37}{6}xy - 29x + \frac{3}{4}y^3 - 6y^2 + 18y\right), \end{cases} \quad (2.9)$$

admet le cercle

$$U(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 - 1 = 0,$$

comme cycle limite stable, puisque

$$\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt = -\pi \left((4 - \sqrt{16 - 1}) + \frac{3}{4} (3 - \sqrt{9 - 1}) \right) = -0.80329.$$

Ce cycle limite entoure un foyer stable (3.196, 4.5029).

2.2.2 Sur la non-existence de cycle limite pour une classe cubique de systèmes de Kolmogorov

Pour la classe des systèmes différentiels polynômiaux (2.2) avec $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, on a le résultat suivant

Théorème 2.6 *Le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2) + 2py(y - \beta)), \\ \dot{y} = y(b((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2) - 2px(x - \alpha)). \end{cases} \quad (2.10)$$

a une intégrale première de la forme

$$H(x, y) = \frac{x^b}{y^a((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2)^p}.$$

De plus, le système (2.10) n'a pas de cycles limites algébriques.

Preuve : Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{dU(x, y)}{dt} &= \dot{x}U_x(x, y) + \dot{y}U_y(x, y), \\ &= (axU_x(x, y) + byU_y(x, y))U(x, y),\end{aligned}$$

par conséquent, $U(x, y) = 0$ est une courbe algébrique invariante pour le système (2.10) avec le cofacteur

$$K(x, y) = axU_x(x, y) + byU_y(x, y).$$

Supposons que $U = 0$ contient un point d'équilibre (x^*, y^*) du système, donc (x^*, y^*) est une solution du système :

$$\begin{cases} x(aU(x, y) + byU_y(x, y)) = 0, \\ y(bU(x, y) - axU_x(x, y)) = 0. \end{cases}$$

Cela implique que (x^*, y^*) est une solution du système :

$$\begin{cases} U_y(x, y) = 0, \\ U_x(x, y) = 0. \end{cases}$$

ce qui est impossible car la courbe $U = 0$ est non singulière, donc $U = 0$ est une solution périodique.

D'autre part, le système (2.10) admet trois courbes algébriques invariantes :

1) L'axe des ordonnées positives $x = 0$ et $y > 0$ avec cofacteur :

$$K_1(x, y) = aU(x, y) + byU_y(x, y).$$

2) L'axe des abscisses positives $y = 0$ et $x > 0$ avec le cofacteur :

$$K_2(x, y) = bU(x, y) - axU_x(x, y).$$

3) La courbe $U(x, y) = 0$ avec le cofacteur :

$$K(x, y) = axU_x(x, y) + byU_y(x, y).$$

Il est facile de voir que

$$bK_1(x, y) - aK_2(x, y) - pK(x, y) \equiv 0,$$

il résulte du théorème de Darboux (voir chapitre I théorème 1.43 proposition (i)) que le système (2.10) possède une intégrale première de la forme :

$$H(x, y) = \frac{x^b}{y^a (U(x, y))^p}.$$

Il est bien connu, que si un système planaire polynômial admet une intégrale première rationnelle, il ne peut pas avoir de cycles limites. Ainsi le système (2.10) n'a pas de cycles limites. ■

Maintenant, nous donnons un exemple pour montrer que le système (2.2) pour $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ ne peut pas avoir de cycle limite, bien que ce système admette une famille de solutions périodiques.

Exemple 2.7 On pose $U(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1$ $a = p = 1, b = -1$, le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(7 - 4x - 8y + x^2 + 3y^2), \\ \dot{y} = y(-7 + 8x + 4y - 3x^2 - y^2), \end{cases} \quad (2.11)$$

possède la courbe algébrique $U(x, y) = 0$ comme solution périodique.

D'autre part, on a

$$H(x, y) = \frac{1}{xy(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7)}$$

est une intégrale première du système (2.11) car

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \dot{x} \frac{dH}{dx} + \dot{y} \frac{dH}{dy}, \\ &= x(7 - 4x - 8y + x^2 + 3y^2) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{xy(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7)} \right), \\ &\quad + y(-7 + 8x + 4y - 3x^2 - y^2) \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{xy(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7)} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, le système (2.11) n'a pas de cycles limites et le système admet une famille

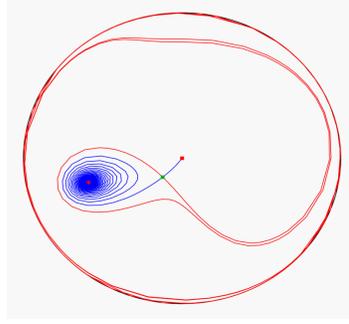


FIG. 2-1 – Portrait de phase du système (2.6)

de solutions périodiques.

2.3 Sur l'existence de cycles limites non algébriques pour une classe de systèmes différentiels de degré $2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$.

Le but de cette section est de donner une classe de systèmes différentiels planaires polynômiaux pour laquelle nous pouvons obtenir un cycle limite non algébrique explicitement déterminé.

De notre part on va s'intéresser à la classe de systèmes

$$\begin{cases} \dot{x} = (x + hx^3 - 2x^2y + hxy^2 - 2y^3)(x^2 + y^2)^{k-1} + xP_{2k}(x, y), \\ \dot{y} = (y + 2x^3 + hx^2y + 2xy^2 + hy^3)(x^2 + y^2)^{k-1} + yP_{2k}(x, y), \end{cases} \quad (2.12)$$

où h une constante réelle et $P_{2k}(x, y)$ est un polynôme homogène de degré $2k, k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$P_{2k}(x, y) = 2bk \sum_{0 \leq 2s \leq 2k} (-1)^s C_{2k}^{2s} x^{2k-2s} y^{2s} - 2ak \sum_{0 \leq 2s+1 \leq 2k} (-1)^s C_{2k}^{2s+1} x^{2k-2s-1} y^{2s+1}$$

avec $C_{2k}^p = \frac{2k!}{p!(2k-p)!}$,

où a et b sont des constantes réelles, on montre l'existence d'un cycle limite non algébrique, de plus on donne l'expression exacte de ce cycle limite.

2.3.1 Existence de cycles limites

Dans cette section, on va donner des conditions d'existence d'un cycle limite non algébrique ainsi que son expression exacte pour le système différentiel polynômial (2.12).

Le premier théorème principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.8 *Le système différentiel polynômial (2.12) admet un cycle limite non algébrique dont l'expression en coordonnées polaires (r, θ) est*

$$r(\theta) = \sqrt{e^{f(\theta)} \left(\rho_* + \int_0^\theta e^{-f(s)} ds \right)},$$

où $f(\theta) = h\theta + a \cos 2k\theta + b \sin 2k\theta$ et a, b, h, ρ_* sont des paramètres réels, tels que

$$h < 0, \quad a + 2h\pi < 0 \quad \text{et} \quad \rho_* = \frac{-e^{2h\pi}}{e^{2h\pi} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds.$$

De plus, ce cycle limite est hyperbolique et stable.

Preuve : En coordonnées polaires (r, θ) , définies par $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le polynôme $P_{2k}(x, y)$ s'écrit

$$\begin{aligned} P_{2k}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= 2bkr^{2k} \sum_{0 \leq 2s \leq 2k} (-1)^s C_{2k}^{2s} (\cos \theta)^{2k-2s} (\sin \theta)^{2s} \\ &\quad - 2akr^{2k} \sum_{0 \leq 2s+1 \leq 2k} (-1)^s C_{2k}^{2s+1} (\cos \theta)^{2k-2s-1} (\sin \theta)^{2s+1}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\sum_{0 \leq 2s \leq 2k} C_{2k}^{2s} (-1)^s (\cos \theta)^{2k-2s} (\sin \theta)^{2s} = \cos(2k\theta),$$

et

$$\sum_{0 \leq 2s+1 \leq 2k} C_{2k}^{2s+1} (-1)^s (\cos \theta)^{2k-2s-1} (\sin \theta)^{2s+1} = \sin(2k\theta).$$

Donc le système différentiel polynômial (2.12) en coordonnées polaires s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = (h + 2bk (\cos 2k\theta) - 2ak (\sin 2k\theta)) r^{2k+1} + r^{2k-1}, \\ \dot{\theta} = 2r^{2k}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Comme $\dot{\theta}$ est strictement positive pour tout $r \neq 0$, ce système différentiel est équivalent à l'équation différentielle en θ suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2r} ((h + 2bk \cos 2k\theta - 2ak \sin 2k\theta) r^2 + 1). \quad (2.14)$$

C'est une équation différentielle de Bernoulli.

En introduisant le changement de variables $\rho = r^2$, nous obtenons l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (h + 2bk \cos 2k\theta - 2ak \sin 2k\theta) \rho + 1, \quad (2.15)$$

la solution générale de cette équation différentielle est :

$$\rho(\theta, \rho_0) = e^{f(\theta)} \left(\rho_0 + \int_0^\theta e^{-f(s)} ds \right), \quad (2.16)$$

où $f(\theta) = h\theta + a \cos 2k\theta + b \sin 2k\theta$.

Notons que le système (2.12) a une solution périodique si et seulement si l'équation (2.14) a une solution de 2π -périodique strictement positif. La solution satisfaisant à la condition initiale $\rho(0, \rho_0) > 0$ est donnée par $\rho(0, \rho_0) = \rho_0 e^a > 0$.

La condition $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho(0, \rho_0)$, telle que $\rho(0, \rho_0) > 0$ assure que la solution périodique est de période 2π . Ceci implique que

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho(0, \rho_0) = e^{a+2h\pi} \left(\rho_0 + \int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds \right) - \rho_0 e^a = 0.$$

L'unique solution de cette équation est $\rho_0 = \rho_*$ où

$$\rho_* = \frac{e^{2h\pi}}{1 - e^{2h\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds. \quad (2.17)$$

Puisque $h < 0$, nous avons $\rho_* > 0$ et $\rho(2\pi, \rho_*) = \rho(0, \rho_*) > 0$. On remplace ρ_0 par cette

valeur de ρ_* dans (2.16), nous obtenons

$$\rho(\theta) = e^{f(\theta)} \left(\frac{e^{2h\pi}}{1 - e^{2h\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds + \int_0^\theta e^{-f(s)} ds \right).$$

Donc, la solution générale de l'équation de Bernoulli (2.14) est

$$r(\theta, \rho_*) = \sqrt{e^{f(\theta)} \left(\rho_* + \int_0^\theta e^{-f(s)} ds \right)}, \quad (2.18)$$

où $\rho_* = \frac{e^{2h\pi}}{1 - e^{2h\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds$.

Dans ce qui suit on va montrer que cette solution n'est pas algébrique. Considérons la courbe

$$r(\theta, \rho_*) = \sqrt{e^{f(\theta)} \left(\rho_* + \int_0^\theta e^{-f(s)} ds \right)},$$

on a $r^2(\theta, \rho_*) = e^{f(\theta)} \left(\rho_* + \int_0^\theta e^{-f(s)} ds \right)$ elle n'est pas algébrique, car elle contient l'expression $\rho_* e^{f(\theta)}$.

Périodicité : Soit $g(\theta) = \sqrt{e^{f(\theta)} \left(\frac{e^{2h\pi}}{1 - e^{2h\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds + \int_0^\theta e^{-f(s)} ds \right)}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ alors

$$g(\theta + 2\pi) = \sqrt{e^{f(\theta+2\pi)} \left(\frac{e^{2h\pi}}{1 - e^{2h\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds + \int_0^{\theta+2\pi} e^{-f(s)} ds \right)}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta+2\pi} e^{-f(s)} ds &= \int_0^{\theta+2\pi} e^{-hs - a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-hs - a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} e^{-hs - a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds, \end{aligned}$$

nous faisons le changement de variable $u = s - 2\pi$ dans l'intégrale $\int_{2\pi}^{\theta+2\pi} e^{-hs - a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds$, on obtient

$$\int_{2\pi}^{\theta+2\pi} e^{-hs - a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds = \int_0^\theta e^{-h(s+2\pi) - a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds.$$

alors,

$$g(\theta + 2\pi) = \sqrt{e^{2h\pi} e^{f(\theta)} \left(\left(\frac{e^{2h\pi}}{1 - e^{2h\pi}} + 1 \right) \int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds + e^{-2h\pi} \int_0^\theta e^{-f(s)} ds \right)} = g(\theta).$$

Donc $r(\theta, \rho_*)$ est périodique de période 2π .

Dans ce qui suit on montre que $r(\theta, \rho_*) > 0$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$. En effet, puisque $\rho_* = \frac{e^{2h\pi}}{1 - e^{2h\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds > 0$, alors

$$r(\theta, \rho_*) = \sqrt{e^{f(\theta)} \left(\rho_* + \int_0^\theta e^{-f(s)} ds \right)} > 0,$$

pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, donc l'équation (2.14) admet une solution périodique strictement positive.

En vue de prouver que cette solution représente une orbite périodique isolée, c'est à dire un cycle limite, il suffit que l'application de premier retour de Poincaré $\lambda \mapsto P(\lambda) = r(2\pi, \lambda)$ vérifie la condition

$$\left. \frac{dr(2\pi, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\rho_*} \neq 1$$

On a

$$\left. \frac{dr(2\pi, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\rho_*} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(1 - e^{2h\pi}) e^{a+2h\pi}}}{\sqrt{\int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds}},$$

puisque $h < 0$ et $a + 2h\pi < 0$, on conclut que $(1 - e^{2h\pi}) e^{a+2h\pi} < 1$ et

$$\left. \frac{dr(2\pi, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\rho_*} < \frac{1}{\sqrt{\int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds}}.$$

De plus, on a

$$\int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds = \int_0^{2\pi} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks - hs} ds > \int_0^{2\pi} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds \quad (2.19) \\ &+ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds, \end{aligned}$$

par le changement de variable $u = s - \frac{\pi}{2}$, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds$, devient

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{a \cos 2ks + b \sin 2ks} ds,$$

On fait le changement de variable $u = s - \frac{3\pi}{2}$ dans l'intégrale $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds$, on obtient

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{a \cos 2ks + b \sin 2ks} ds.$$

par le changement de variable $u = s - \pi$, on obtient

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds$$

Donc l'intégrale (2.19) s'écrit sous la forme

$$\int_0^{2\pi} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} ds + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{a \cos 2ks + b \sin 2ks} ds.$$

Il est bien connu que la fonction

$$x \mapsto e^{-x} + e^x \geq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds &> 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-a \cos 2ks - b \sin 2ks} + e^{a \cos 2ks + b \sin 2ks}) ds \\ &\geq 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = 2\pi. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dr(2\pi, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\rho_*} &< \frac{1}{\sqrt{\int_0^{2\pi} e^{-f(s)} ds}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, $r(\theta, \rho_*)$ est un cycle limite stable et hyperbolique de l'équation différentielle (2.14). Donc il s'agit d'un cycle limite hyperbolique stable pour le système différentiel (2.12). ■

2.3.2 Unicité du cycle limite

Maintenant, nous allons montrer que le cycle limite $r(\theta, \rho_*)$ est l'unique orbite périodique du système différentiel (2.13), et par conséquent l'unique cycle limite de ce système, à cet effet on a besoin de rappeler le théorème de Dulac généralisé.

Théorème 2.9 [31] *Soit Ω un région n -multiplement connexes de \mathbb{R}^2 . Supposons que la divergence $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$ du système différentiel $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$ de classe C^1 a un signe constant dans Ω , et n'est identiquement nulle sur aucune sous-région de Ω . Alors, ce système différentiel a au plus $(n - 1)$ orbites périodiques qui se situent entièrement dans Ω .*

Pour notre classe de systèmes différentiels de degré $2k + 1$, (2.12) on montre le résultat suivant :

Théorème 2.10 *Le cycle limite du système (2.12) est unique.*

Preuve : Nous prenons comme nouvelle variable indépendante la variable τ défini par

$$d\tau = -2(x^2 + y^2)^{k+1} dt.$$

Comme $(x^2 + y^2)$ s'annule uniquement à l'origine. Le système différentiel (2.12) et le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{(h(x^2 + y^2)x - 2y(x^2 + y^2) + x)(x^2 + y^2)^{k-1} + xP_{2k}(x, y)}{-2(x^2 + y^2)^{k+1}}, \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{(h(x^2 + y^2)y + 2x(x^2 + y^2) + y)(x^2 + y^2)^{k-1} + yP_{2k}(x, y)}{-2(x^2 + y^2)^{k+1}} \end{cases} \quad (2.20)$$

ont le même portrait de phase dans $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Un calcul simple montre que la divergence du système différentiel (2.20) est donnée par :

$$\operatorname{div}(P, Q) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} > 0 \text{ dans } \Omega.$$

Ainsi, d'après le théorème de Dulac, et puisque Ω est un région doublement connexes de \mathbb{R}^2 , il s'ensuit que le système différentiel (2.20) et par suite le système (2.12) a au plus une solution périodique. Et par conséquent $r(\theta, \rho_*)$ est la seule solution périodique de l'équation (2.14). Ceci achève la démonstration du théorème. ■

2.3.3 Application

Dans ce paragraphe on va construire deux classes de systèmes différentiels planaires, possédant des cycles limites non algébriques, dont on peut déterminer l'expression explicite.

Système différentiel cubique avec cycle limite non algébrique.

Un cas particulier très important de la classe (2.12) est lorsque $k = 1$, c'est à dire la classe de systèmes différentiels cubiques, qui admet un cycle limite non algébrique, explicitement donné. A notre connaissance, ce résultat représente la première classe traitée dans la littérature.

Théorème 2.11 *Considérons le système différentiel polynômial cubique suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + (2b + h)x^3 - (4a + 2)x^2y + (h - 2b)xy^2 - 2y^3, \\ \dot{y} = y + 2x^3 + (2b + h)x^2y + (2 - 4a)xy^2 + (h - 2b)y^3, \end{cases} \quad (2.21)$$

Le système (2.21) admet un cycle limite non algébrique, donné explicitement en coordonnées polaires (r, θ) , par

$$r(\theta) = \sqrt{e^{h\theta + a \cos 2\theta + b \sin 2\theta} \left(\rho_* + \int_0^\theta e^{-hs - a \cos 2s - b \sin 2s} ds \right)},$$

où a, b, h et ρ_* sont des constantes réelles telles que

$$h < 0, \quad a + 2h\pi < 0 \quad \text{et} \quad \rho_* = \frac{-e^{2h\pi}}{e^{2h\pi} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-a \cos 2s - b \sin 2s - hs} ds.$$

De plus, ce cycle limite est hyperbolique et stable.

Preuve : Pour $k = 1$, on a

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= 2b \sum_{0 \leq 2s \leq 2} (-1)^s C_2^{2s} x^{2-2s} y^{2s} - 2a \sum_{0 \leq 2s+1 \leq 2} (-1)^s C_2^{2s+1} x^{2-2s-1} y^{2s+1}, \\ &= 2b(x^2 - y^2) - 4axy. \end{aligned}$$

On pose $k = 1$ et $P_2(x, y) = 2bx^2 - 4axy - 2by^2$ dans le théorème 2.8, on trouve le système (2.21). Ceci achève la démonstration du théorème 2.11. ■

On prend l'exemple suivant

Exemple 2.12 Pour $h = -1$ et $a = b = 2$, le système (2.21) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3x^3 - 10x^2y - 5xy^2 - 2y^3, \\ \dot{y} = y + 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - 5y^3. \end{cases}$$

Ce système admet un cycle limite non algébrique, donné explicitement en coordonnées polaires (r, θ) , par

$$r(\theta) = \sqrt{e^{-\theta + 2 \cos 2\theta + 2 \sin 2\theta} \left(\rho_* + \int_0^\theta e^{s - 2 \cos 2s - 2 \sin 2s} ds \right)},$$

$$\text{où } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \rho_* = \frac{e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-2 \cos 2s - 2 \sin 2s + s} ds = 4.5258.$$

Système différentiel de degré 5, avec cycle limite non algébrique

Dans cette section, on va construire une classe de systèmes différentiels de degré 5, qui possède un cycle limite non algébrique, de plus on peut donner son expression exacte.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 2.13 *Considérons le système différentiel polynômial suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + xy^2 + (h + 4b)x^5 - 2y^5 - 2(8a + 1)x^4y \\ \quad + 2(h - 12b)x^3y^2 + 4(4a - 1)x^2y^3 + (h + 4b)xy^4, \\ \dot{y} = y^3 + x^2y + 2x^5 + (h + 4b)x^4y + 4(1 - 4a)x^3y^2 \\ \quad + 2(h - 12b)x^2y^3 + 2(8a + 1)xy^4 + (h + 4b)y^5, \end{cases} \quad (2.22)$$

Le système (2.22) admet un cycle limite non algébrique, donné explicitement en coordonnées polaires (r, θ) , par

$$r(\theta) = \sqrt{e^{h\theta + a \cos 4\theta + b \sin 4\theta} \left(\rho_* + \int_0^\theta e^{-hs - a \cos 4s - b \sin 4s} ds \right)},$$

où a, b, h et ρ_* sont des constantes réelles telles que

$$h < 0, \quad a + 2h\pi < 0 \quad \text{et} \quad \rho_* = \frac{-e^{2h\pi}}{e^{2h\pi} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-a \cos 4s - b \sin 4s - hs} ds.$$

De plus, ce cycle limite est hyperbolique et stable.

Preuve : Pour $k = 2$, on a

$$\begin{aligned} P_4(x, y) &= 4b \sum_{0 \leq 2s \leq 4} (-1)^s C_4^{2s} x^{4-2s} y^{2s} - 4a \sum_{0 \leq 2s+1 \leq 4} (-1)^s C_4^{2s+1} x^{4-2s-1} y^{2s+1} \\ &= 4bx^4 - 16ax^3y - 24bx^2y^2 + 16axy^3 + 4by^4. \end{aligned}$$

On pose $k = 2$ et $P_4(x, y) = 4bx^4 - 16ax^3y - 24bx^2y^2 + 16axy^3 + 4by^4$ dans le théorème 2.8, on trouve le système (2.22). Ceci achève la démonstration du théorème 2.13. ■

On prend l'exemple suivant

Exemple 2.14 Pour $h = -1$ et $a = b = 2$, le système (2.22) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + xy^2 + 7x^5 - 34x^4y - 50x^3y^2 + 28x^2y^3 + 7xy^4 - 2y^5 \\ \dot{y} = y^3 + x^2y + 2x^5 + 7x^4y - 28x^3y^2 - 50x^2y^3 + 34xy^4 + 7y^5 \end{cases}$$

Ce système admet un cycle limite non algébrique, donné explicitement en coordonnées polaires (r, θ) , par

$$r(\theta) = \sqrt{e^{-\theta+2\cos 4\theta+2\sin 4\theta} \left(\rho_* + \int_0^\theta e^{s-2\cos 4s-2\sin 4s} ds \right)}.$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho_* = \frac{e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-2\cos 4s-2\sin 4s+s} ds = 4.7315$.

2.4 Sur la coexistence de cycles limites algébriques et non algébriques

Dans cette partie, on va étudier la classe de systèmes différentiels de degré 5 :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + y^2 - 1)^2 + (-x + 2y + xy^2 + x^3)((a + b)x^2 + (a - b)y^2) = P_5(x, y), \\ \dot{y} = y(x^2 + y^2 - 1)^2 + (-2x - y + x^2y + y^3)((a + b)x^2 + (a - b)y^2) = Q_5(x, y), \end{cases} \quad (2.23)$$

où a et b sont des paramètres réels. On va donner des conditions d'existence simultanément de deux cycles limites explicites, un cycle limite algébrique et un autre non algébrique.

Pour notre classe de systèmes différentiels (2.23), on montre le résultat principal suivant :

Théorème 2.15 Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+$ et $b^2 - a^2 < 0$, le système (2.23) admet exactement deux cycles limites; le cercle

$$(\gamma_1) : x^2 + y^2 - 1 = 0$$

entourant un cycle limite non algébrique (γ_*) donné explicitement en coordonnées polaires

(r, θ) par

$$r(\theta, r_*) = \sqrt{1 + \frac{e^{-\theta}}{1 + \frac{1}{r_*^2 - 1} - e^{-\theta} + f(\theta)}},$$

$$\text{où } f(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \cos 2s} ds \text{ et } r_* = \sqrt{\frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)}}.$$

Preuve : Premièrement, nous avons immédiatement

$$xQ_5(x, y) - yP_5(x, y) = -2(x^2 + y^2) \left((a + b)x^2 + (a - b)y^2 \right).$$

Donc et comme $b^2 - a^2 < 0$, alors l'origine est l'unique point d'équilibre du système différentiel (2.23). De plus, il est facile de voir que le cercle

$$(\gamma_1) : x^2 + y^2 - 1 = 0$$

est une solution invariante avec le cofacteur

$$K(x, y) = 2(x^2 + y^2) \left((a + b + 1)x^2 + (a - b + 1)y^2 - 1 \right),$$

Il est clair que, la courbe (γ_1) est une solution périodique du système (2.23) puisqu'elle ne passe pas par l'origine.

Soit T la période de la solution périodique, il est bien connu que l'orbite périodique (γ_1) est un cycle limite hyperbolique si et seulement si

$$I(\gamma_1) = \int_0^T \operatorname{div}(x, y) dt \neq 0.$$

Afin de montrer cela, nous utilisons le résultat du théorème 1.26. Cette intégrale peut être calculée via

$$I(\gamma_1) = \int_0^T K(x, y) dt,$$

Notons que si une courbe périodique $\gamma_1(t)$ est invariante pour un système différentiel avec un cofacteur $K(x, y)$ de signe constant pour $(x, y) \in \operatorname{Int}(\gamma_1(t))$ ($\operatorname{Int}(\gamma_1(t))$ désigne l'intérieur de $\gamma_1(t)$), alors $\int_0^T K(x, y) dt$, est automatiquement différente de zéro.

Puisque $b^2 - a^2 < 0$, la courbe $K(x, y) = 0$ ne coupe pas (γ_1) , avec $K(x, y) > 0$ à l'intérieur de $(\gamma_1) \setminus \{(0, 0)\}$, donc

$$I(\gamma_1) > 0.$$

Par conséquent (γ_1) est un cycle limite algébrique instable pour le système (2.23).

Le système (2.23) peut s'écrire en coordonnées polaires (r, θ) définies par $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = (a + b \cos 2\theta + 1)r^5 - (a + b \cos 2\theta + 2)r^3 + r, \\ \dot{\theta} = -2(a + b \cos 2\theta)r^2. \end{cases} \quad (2.24)$$

En prenant θ comme une variable indépendante, on obtient l'équation

$$(a + b \cos 2\theta) \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2} \left((a + b \cos 2\theta + 1)r^3 - (a + b \cos 2\theta + 2)r + \frac{1}{r} \right). \quad (2.25)$$

Puisque $b^2 - a^2 < 0$, alors $\dot{\theta}$ est négatif pour tout t , les orbites $r(\theta)$ de l'équation différentielle (2.25) ont renversé leur orientation dans $(r(t), \theta(t))$ ou $(x(t), y(t))$ des systèmes différentiels (2.24) et (2.23), respectivement.

On fait le changement de variable $\rho = r^2$, l'équation (2.25) devient l'équation différentielle de Riccati suivante :

$$(a + b \cos 2\theta) \frac{d\rho}{d\theta} = -(a + b \cos 2\theta + 1)\rho^2 + (a + b \cos 2\theta + 2)\rho - 1. \quad (2.26)$$

Il est bien connu qu'une équation de Riccati a un continuum d'orbites périodiques, ou elle a au plus deux orbites périodiques voir par exemple [[49], [58]].

On note que notre équation de Riccati (2.26) a déjà une orbite périodique $\rho(\theta) = 1$, qui est un cycle limite du système (2.23).

La solution générale $\rho(\theta, k)$ de l'équation (2.26) est

$$\rho(\theta, k) = 1 + \frac{e^{-\theta}}{k - e^{-\theta} + f(\theta)},$$

où $f(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \cos 2s} ds.$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (2.25) est

$$r(\theta, k) = \sqrt{1 + \frac{e^{-\theta}}{k - e^{-\theta} + f(\theta)}}.$$

En coordonnées cartésiennes $r^2 = x^2 + y^2$ et $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, l'intégrale première du système (2.23) est

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - 1} e^{-\arctan \frac{y}{x}} - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{e^{-s}}{a + b \cos 2s} ds.$$

Les courbes $f(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$ dans le plan (x, y) sont non algébrique (si l'on exclut bien sûr la courbe (γ_1) correspondant à $k \rightarrow +\infty$), puisque si la courbe est algébrique, cette courbe doit être donnée par un polynôme, mais si $f(x, y)$ est un polynôme en x et y , il doit satisfaire $\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = 0$ ou n est un entier positif, or

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\left(y(x^2 + y^2 - 1)^2 + (x^2 y + y^3 - 2x - y)(ax^2 + ay^2 + bx^2 - by^2) \right) e^{-\arctan \frac{1}{x} y}}{(x^2 + y^2 - 1)^2 (ax^2 + ay^2 + bx^2 - by^2)}$$

Si on dérive une deuxième fois, il apparaît de nouveau l'expression $e^{-\arctan \frac{1}{x} y}$, ainsi cette expression apparaît dans la dérivée partielle de n'importe quel ordre. Ce qui assure que la courbe $f(x, y)$ n'est pas polynômiale.

Il est très important de noter que le système (2.23) a une solution périodique si et seulement si l'équation (2.25) possède une solution 2π -périodique strictement positive. La solution de l'équation (2.25) satisfaisant à la condition initiale $r(0, r_0) = r_0 > 0$ est

$$k = \frac{r_0^2}{r_0^2 - 1}.$$

Donc la solution $r(\theta, r_0)$ de l'équation (2.25) telle que $k = \frac{r_0^2}{r_0^2 - 1}$ est

$$r(\theta, r_0) = \sqrt{1 + \frac{e^{-\theta}}{1 + \frac{1}{r_0^2 - 1} - e^{-\theta} + f(\theta)}}. \quad (2.27)$$

Une telle solution périodique du système (2.24) doit satisfaire à la condition $r(2\pi, r_0) =$

$r(0, r_0)$, ce qui conduit à deux valeurs distinctes positives de r_0 :

$$r_1 = 1$$

correspondant évidemment au cycle limite algébrique (γ_1) . Une deuxième valeur r_* donnée par

$$r_* = \sqrt{\frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)}}. \quad (2.28)$$

On remplace r_0 par cette valeur de r_* dans (2.27), nous obtenons

$$r(\theta, r_*) = \sqrt{1 + \frac{e^{-\theta}}{1 + \frac{1}{r_*^2 - 1} - e^{-\theta} + f(\theta)}}.$$

Pour montrer que c'est une solution périodique, nous devons montrer que :

i) La fonction $\theta \mapsto g(\theta)$ définie par

$$g(\theta) = 1 + \frac{e^{-\theta}}{1 + \frac{1}{r_*^2 - 1} - e^{-\theta} + f(\theta)}, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

est 2π -périodique

ii) $g(\theta) > 0, \forall \theta \in [0, 2\pi[$.

La dernière condition assure que $r(\theta, r_*)$ est bien défini pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ et la solution périodique ne passe pas par le point d'équilibre unique $(0, 0)$ du système (2.23).

Périodicité de $g(\theta)$:

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, alors on a

$$g(\theta + 2\pi) = 1 + \frac{e^{-\theta - 2\pi}}{1 + \frac{1}{r_*^2 - 1} - e^{-\theta - 2\pi} + f(\theta + 2\pi)}, \quad (2.29)$$

mais

$$\begin{aligned} f(\theta + 2\pi) &= \int_0^{\theta + 2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \cos 2s} ds \\ &= f(2\pi) + \int_{2\pi}^{\theta + 2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \cos 2s} ds, \end{aligned}$$

nous faisons le changement de variable $u = s - 2\pi$ dans l'intégrale $\int_{2\pi}^{\theta+2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \cos 2s} ds$, on obtient

$$\begin{aligned} f(\theta + 2\pi) &= f(2\pi) + \int_0^\theta \frac{e^{-(u+2\pi)}}{a + b \cos 2(u + 2\pi)} du \\ &= f(2\pi) + e^{-2\pi} f(\theta), \end{aligned}$$

On remplace $f(\theta + 2\pi)$ par $f(2\pi) + e^{-2\pi} f(\theta)$ dans (2.29), nous obtenons

$$g(\theta + 2\pi) = g(\theta).$$

Donc g est 2π -périodique.

Positivité stricte de $g(\theta)$:

Comme $b^2 - a^2 < 0$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+$, alors $b < a$, par conséquent, $0 < a - b < a + b \cos 2\theta < a + b$, donc $f(\theta) > 0$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, de plus on a

$$\begin{aligned} f(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \cos 2s} ds \\ &= f(\theta) + \int_\theta^{2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \cos 2s} ds, \end{aligned}$$

et comme $\frac{e^{-s}}{a + b \cos 2s} > 0$ alors, on a $\int_\theta^{2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \cos 2s} ds > 0$, donc

$$f(2\pi) \geq f(\theta) > 0 \text{ pour tout } \theta \in [0, 2\pi[$$

et

$$\begin{aligned} g(\theta) &\geq 1 + \frac{e^{-\theta}}{\frac{e^{2\pi}}{1 - e^{2\pi}} f(2\pi) - e^{-\theta} + f(2\pi)} \\ &= \frac{f(2\pi)}{f(2\pi) + e^{-\theta} (e^{2\pi} - 1)} > 0, \end{aligned}$$

d'où la solution 2π -périodique strictement positive de l'équation (2.25) existe, c'est-à-dire que le système (2.23) admet une solution périodique.

En vue de prouver que cette solution représente une orbite périodique isolée, c'est à dire

un cycle limite, il suffit (voir par exemple [31]) que l'application de premier retour de Poincaré donnée par $r_* \mapsto P(r_*) = r(2\pi, r_*)$ vérifie la condition

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_*)}{dr_*} \right|_{r_* = \sqrt{\frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)}}} \neq 1,$$

ce qui est déjà le cas puisque on a

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dr(2\pi, r_*)}{dr_*} \right|_{r_* = \sqrt{\frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)}}} \\ = & \left. r_* e^{-2\pi} \frac{((f(2\pi) + 1 - e^{-2\pi})r_*^2 + e^{-2\pi} - f(2\pi))^{-2}}{\sqrt{\frac{(f(2\pi) + 1)r_*^2 - f(2\pi)}{(f(2\pi) + 1 - e^{-2\pi})r_*^2 + e^{-2\pi} - f(2\pi)}}}} \right|_{r_* = \sqrt{\frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)}}} \\ = & e^{2\pi} > 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation différentielle (2.25) admet un cycle limite hyperbolique instable, donc il s'agit d'un cycle limite hyperbolique stable pour le système (2.23), donc le système (2.23) admet exactement deux cycles limites. ■

Exemple d'application

Exemple 2.16 Prenons $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, le système (2.23) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + y^2 - 1)^2 + (-x + 2y + xy^2 + x^3)(2x^2 + y^2) \\ \dot{y} = y(x^2 + y^2 - 1)^2 + (-2x - y + x^2y + y^3)(2x^2 + y^2) \end{cases} \quad (2.30)$$

Alors nous avons $r_* = 0.63079$.

Il est facile de vérifier que toutes les conditions du théorème 2.15 sont satisfaites. Nous concluons que le système (2.30) possède deux cycles limites.

Par le programme P4, le Portrait de phase qui contient les cycles limites du système (2.30) est donné dans la figure suivante :

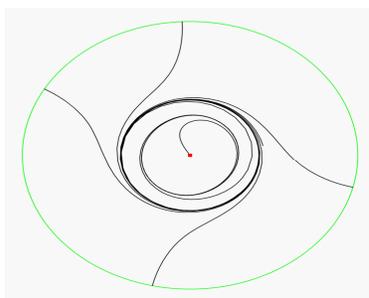


FIG. 2-2 – *Portrait de phase du système (2.30)*

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné les expressions analytiques des cycles limites pour trois classes assez larges de systèmes différentiels autonomes du plan. Dans la première section de ce chapitre, on a déterminé une classe de systèmes différentiels planaires polynômiaux de Kolmogorov de degré 4 pour laquelle nous pouvons obtenir un cycle limite non algébrique explicitement donné et on a démontré la non-existence de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels planaires cubique de type Kolmogorov. Dans la deuxième section de ce chapitre, on a déterminé les conditions d'existence d'un cycle limite pour une classe de systèmes différentiels planaires de degré $2k + 1$ pour laquelle nous pouvons obtenir un cycle limite non algébrique explicitement donné qui entoure le point singulier situé à l'origine. Dans la troisième section de ce chapitre, on a donné un système différentiel polynômial de degré 5, qui présente simultanément deux cycles limites explicites, un cycle limite algébrique et un autre non algébrique.

Finalement, nous soulevons les questions suivantes qui se dégagent à travers ce chapitre de façon naturelle :

- 1) -Quelle est le nombre maximal de cycles limites algébriques pour un système de type Kolmogorov de degré n .
- 2) - Existe-il des systèmes quintiques possédant deux cycles limites non algébriques explicites ?
- 3) - Existe-il des systèmes cubiques qui présentent simultanément deux cycles limites explicites, un cycle limite algébrique et un autre non algébrique. ?
- 4) - Existe-il des systèmes quadratiques possédant un cycle limite non algébriques ?

Chapitre 3

Le nombre maximum de cycles limites d'une famille de systèmes différentiels

Le nombre maximum de cycles limites d'une famille de systèmes différentiels

3.1 Introduction

La deuxième partie du 16^{ième} problème de Hilbert, est complètement ouverte. Elle consiste en la recherche du nombre maximum et les dispositions relatives des cycles limites du champ de vecteurs :

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y), \\ \dot{y} = Q_n(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

où P_n et Q_n sont des polynômes de degré n [[41], [12],[73] et [80]]. Même si le problème a été posé en 1900, c'est en 1987 que Ecalle et Ilyashenko ont prouvé que le champ de vecteurs polynômial possède un nombre fini de cycles limites. Les deux preuves sont un véritable «tour de force» et chacune nécessite un volume de 300 pages. Bien que le résultat de Ecalle et Ilyashenko montre que chaque champ de vecteurs polynômial individuel a un nombre fini de cycles limites, il est impossible d'en tirer une estimation uniforme sur le nombre de cycles limites. Ainsi, on sait qu'il y a un nombre fini de cycles limites, mais on n'a pas de majoration.

Ces dernières années, plusieurs articles ont été publiés sur les cycles limites de systèmes différentiels polynômiaux planaires. La raison principale de cette étude est le seizième problème, non résolu, de Hilbert. En particulier, un grand nombre d'articles sont consacrés aux cycles limites qui bifurquent en orbites périodiques à partir d'un centre.

La notion d'un centre consiste : en un point singulier d'un système différentiel (3.1) pour lequel il existe un voisinage tels que toutes les orbites dans ce voisinage sont périodiques, excepté le point singulier. L'importance du cas d'un centre vient du fait que, la naissance de cycles limites par la méthode de perturbation est faisable dans le cas d'un centre.

Les techniques utilisées pour étudier les cycles limites qui peuvent être bifurqués à partir des orbites périodiques d'un centre, sont principalement trois : La technique des intégrales Abéliennes (voir [21]), la technique des fonctions de Melnikov (voir [74]), et la théorie de moyennisation [15] . Dans le plan toutes ces techniques sont équivalentes (voir [38]), elles produisent les mêmes résultats, mais les calculs peuvent être changés avec les

différentes techniques.

Il existe une littérature nombreux qui s'intéresse à l'étude des cycles limites qui peuvent bifurquer à partir des orbites périodiques de centres de systèmes différentiels de type Liénard, voir par exemple [[11], [20]–[25], [28]–[34], [39]–[43], [60]–[72], [76], [3], [56], [57],...].

En 2012 [55], les auteurs ont amélioré certains résultats et ont obtenu le nombre maximal de cycles limites pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - g_1(x) - f_1(x)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x)y \end{cases}$$

où g_1 , g_2 , f_1 et f_2 sont des polynômes de degré n , m , l et k respectivement.

En 2014 [32] les auteurs ont étudié, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre, le nombre maximal de cycles limites du système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x)y - f_2(x)y^2, \end{cases}$$

où g_2 et f_2 sont des polynômes de degré n .

Dans [51] J. Llibre et A. Makhlouf ont étudié, en utilisant la méthode de la moyennisation, le nombre maximal de cycles limites du système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^{2p-1} \\ \dot{y} = x^{2q-1} - \varepsilon f(x)y^{2\alpha-1}, \end{cases}$$

où f est un polynôme de degré n et p, α et q sont des entiers positifs.

Dans [69], les auteurs ont étudié, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre, le nombre maximal de cycles limites du système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^{2p-1} \\ \dot{y} = x^{2mp-1} + \varepsilon(px^{2mp} + mpy^{2p})(g(x, y) - A), \end{cases}$$

où $g(x, y)$ avec $g(0, 0) = 0$ est un polynôme de degré $n \geq 1$, p et m sont des entiers positifs et $A > 0$.

Dans ce chapitre, on considère le problème de la recherche du nombre maximal de

cycles limites d'une classe de systèmes différentiels polynômiaux de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sum_{\kappa=1}^2 \varepsilon^\kappa (g_{1\kappa}(x) y^{2\alpha+1} + f_{1\kappa}(x) y^{2\alpha}), \\ \dot{y} = -x - \sum_{\kappa=1}^2 \varepsilon^\kappa (g_{2\kappa}(x) y^{2\alpha+1} + f_{2\kappa}(x) y^{2\alpha}), \end{cases} \quad (3.2)$$

où g_1, g_2, f_1 et f_2 sont des polynômes de degré n, m, l et k respectivement et p, α et q sont des entiers positifs, pour cela en utilisant la méthode de la moyennisation. Plus précisément on va présenter deux résultats, il s'agit de deux travaux qui ont fait l'objet de deux publications

La première est intitulée "*Upper bounds for the number of limit cycles of polynomial differential systems via averaging theory*", où nous déterminons les bornes supérieures pour le nombre de cycles limites qui peuvent être obtenus en perturbant le centre du système différentiel linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, c'est-à-dire lorsque $p = q = 1$, en utilisant la théorie de la moyennisation du premier et deuxième ordre, respectivement. Les réponses à cette question seront données dans le théorème 3.1.

La deuxième intitulée "*On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems*" où nous donnons les bornes supérieures optimales pour le nombre de cycles limites, qui peut être obtenu en perturbant le centre non linéaire $\dot{x} = -y^{2p-1}, \dot{y} = x^{2q-1}$, à l'aide de la théorie de la moyennisation du premier ordre. La réponse à cette question est apportée dans le théorème 3.11.

3.2 Perturbation et cycles limites pour un système différentiel à centre linéaire

Dans cette section, On va appliquer la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre afin d'étudier le nombre maximal de cycles limites du système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sum_{\kappa=1}^2 \varepsilon^\kappa (g_{1\kappa}(x) y^{2\alpha+1} + f_{1\kappa}(x) y^{2\alpha}), \\ \dot{y} = -x - \sum_{\kappa=1}^2 \varepsilon^\kappa (g_{2\kappa}(x) y^{2\alpha+1} + f_{2\kappa}(x) y^{2\alpha}), \end{cases} \quad (3.3)$$

où $g_{1\kappa}$, $g_{2\kappa}$, $f_{1\kappa}$ et $f_{2\kappa}$ pour tout $\kappa = 1, 2$ sont des polynômes de degré n , m , l et k respectivement et ε est un petit paramètre.

Soit $[x]$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 3.1 *Pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, le nombre maximal de cycles limites du système (3.3) qui peut être bifurqué à partir des orbites périodiques du système différentiel linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la méthode de la moyennisation :*

(a) *Du premier ordre est*

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left[\frac{l-1}{2} \right], \left[\frac{m}{2} \right] \right\}.$$

(b) *Du deuxième ordre est*

$$\lambda = \max \left\{ \left[\frac{l}{2} \right] + \left[\frac{n-1}{2} \right] + \alpha, \left[\frac{k}{2} \right] + \left[\frac{m-1}{2} \right] + \alpha, \left[\frac{n-1}{2} \right] + \left[\frac{m-1}{2} \right] + 1 + \alpha, \right. \\ \left. \left[\frac{l}{2} \right] + \left[\frac{k}{2} \right] - 1 + \alpha, \left[\frac{n}{2} \right] + \mu + \alpha, \left[\frac{k-1}{2} \right] + \mu + \alpha, \left[\frac{l-1}{2} \right], \left[\frac{m}{2} \right] \right\}$$

avec $\mu = \min \left\{ \left[\frac{l-1}{2} \right], \left[\frac{m}{2} \right] \right\}$.

Ce résultat généralise un travail récent présenté par Jaume Llibre [55]

3.2.1 Preuve de la proposition (a) du Théorème 3.1

Nous allons appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre. Pour cela nous écrivons le système (3.3) en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. On pose

$$g_{11}(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g_{21}(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i, f_{11}(x) = \sum_{i=0}^l b_i x^i, f_{21}(x) = \sum_{i=0}^k d_i x^i.$$

Le système (3.3) s'écrit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = -\varepsilon \left(\sum_{i=0}^l b_i \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha} \theta r^{2\alpha+i} + \sum_{i=0}^n a_i \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha+1} \theta r^{i+2\alpha+1} \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^k d_i \cos^i \theta \sin^{2\alpha+1} \theta r^{2\alpha+i} + \sum_{i=0}^m c_i \cos^i \theta \sin^{2\alpha+2} \theta r^{i+2\alpha+1} \right), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{1}{r} \varepsilon \left(\sum_{i=0}^k d_i \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha} \theta r^{2\alpha+i} + \sum_{i=0}^m c_i x^i \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha+1} \theta r^{i+2\alpha+1} \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^l b_i \cos^i \theta \sin^{2\alpha+1} \theta r^{2\alpha+i} - \sum_{i=0}^n a_i \cos^i \theta \sin^{2\alpha+2} \theta r^{i+2\alpha+1} \right). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Considérons θ comme une nouvelle variable indépendante, alors le système (3.4) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$F_1(r, \theta) = \left(\sum_{i=0}^l b_i \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha} \theta r^{2\alpha+i} + \sum_{i=0}^n a_i \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha+1} \theta r^{i+2\alpha+1} \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^k d_i \cos^i \theta \sin^{2\alpha+1} \theta r^{2\alpha+i} + \sum_{i=0}^m c_i \cos^i \theta \sin^{2\alpha+2} \theta r^{i+2\alpha+1} \right).$$

En utilisant la notation introduite dans le théorème 1.49 du chapitre 1, nous avons $x = r, t = \theta$ et

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^l b_i \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha} \theta r^{2\alpha+i} + \sum_{i=0}^n a_i \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha+1} \theta r^{i+2\alpha+1} \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^k d_i \cos^i \theta \sin^{2\alpha+1} \theta r^{2\alpha+i} + \sum_{i=0}^m c_i \cos^i \theta \sin^{2\alpha+2} \theta r^{i+2\alpha+1} \right) d\theta.$$

Pour obtenir $F_{10}(r)$ il est nécessaire d'évaluer les intégrales $\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^\alpha \theta d\theta$.

Dans le lemme suivant, nous calculons ces intégrales.

Lemme 3.2 Soit $B_{i,\alpha}(\theta) = \cos^i \theta \sin^\alpha \theta$ et $A_{i,\alpha}(\theta) = \int_0^\theta B_{i,\alpha}(s) ds$. Alors

$$A_{i,\alpha}(2\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est impair ou } \alpha \text{ est impair,} \\ \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\dots 1}{(\alpha+i)(\alpha+i-2)\dots(i+2)} \frac{1}{2^{i-1}} C_i^{\frac{i}{2}} \pi & \text{si } i \text{ et } \alpha \text{ sont pairs,} \end{cases}$$

$$\text{où } C_i^{\frac{i}{2}} = \frac{i!}{\left(\frac{i}{2}!\right)^2}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} A_{2i+2,2\alpha}(2\pi) &= \frac{2i+1}{2(i+\alpha+1)} A_{2i,2\alpha}(2\pi), \\ A_{2i,2\alpha+2}(2\pi) &= \frac{2\alpha+1}{2(i+\alpha+1)} A_{2i,2\alpha}(2\pi) \end{aligned}$$

et

$$A_{2i+2,2\alpha}(2\pi) = \frac{2i+1}{2\alpha+1} A_{2i,2\alpha+2}(2\pi).$$

Preuve : L'intégrale $A_{i,\alpha}(2\pi)$ peut être calculée en utilisant les intégrales (3.15), (3.13), (3.16) et (3.14) de l'annexe. ■

En utilisant ce lemme, nous obtiendrons dans la proposition suivante la fonction $F_{10}(r)$

Proposition 3.3 *Nous avons*

$$F_{10}(r) = \frac{r^{2\alpha+1}}{4} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \frac{2i+1}{i+\alpha+1} b_{2i+1} r^{2i} \xi_{2i,2\alpha} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{2\alpha+1}{i+\alpha+1} c_{2i} r^{2i} \xi_{2i,2\alpha} \right) \quad (3.5a)$$

$$\text{où } \xi_{2i,2\alpha} = \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots 1}{(2\alpha+2i)(2\alpha+2i-2)\dots(2i+2)} \frac{1}{2^{2i-1}} C_{2i}^i.$$

Preuve : D'après le lemme 3.2, la fonction $F_{10}(r)$ est donnée par

$$\begin{aligned} 2\pi F_{10}(r) &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ odd}}}^l b_i r^{i+2\alpha} B_{i+1,2\alpha}(\theta) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ even}}}^m c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+2}(\theta) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2\alpha+2i+1} B_{2i+2,2\alpha}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} c_{2i} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i,2\alpha+2}(\theta) \right) d\theta \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2\alpha+2i+1} A_{2i+2,2\alpha}(2\pi) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} c_{2i} r^{2i+2\alpha+1} A_{2i,2\alpha+2}(2\pi) \\ &= \frac{r^{2\alpha+1}}{2} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \frac{2i+1}{i+\alpha+1} b_{2i+1} r^{2i} A_{2i,2\alpha}(2\pi) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{2\alpha+1}{i+\alpha+1} c_{2i} r^{2i} A_{2i,2\alpha}(2\pi) \right) \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du proposition 3.3. ■

Compte tenu de l'expression du polynôme $F_{10}(r)$ il en résulte immédiatement que $F_{10}(r)$ peut avoir $\lambda_1 = \max \left\{ \left[\frac{l-1}{2} \right], \left[\frac{m}{2} \right] \right\}$ racines réelles positives, et il y a des systèmes différentiels polynômiaux (3.3) pour lesquels il y a λ_1 racines réelles positives. Donc, à partir du théorème 1.49 la preuve du théorème 3.1 suit pour $k = 1$.

3.2.2 Preuve de la proposition (b) du Théorème 3.1

Posons

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i, & g_{21}(x) &= \sum_{i=0}^m c_i x^i, & g_{12}(x) &= \sum_{i=0}^n A_i x^i, & g_{22}(x) &= \sum_{i=0}^m C_i x^i, \\ f_{11}(x) &= \sum_{i=0}^l b_i x^i, & f_{21}(x) &= \sum_{i=0}^k d_i x^i, & f_{12}(x) &= \sum_{i=0}^l B_i x^i, & f_{22}(x) &= \sum_{i=0}^k D_i x^i. \end{aligned}$$

Maintenant, on va appliquer la méthode de moyennisation du seconde ordre pour le système (3.3).

Le système (3.3) s'écrit en coordonnées polaires (r, θ) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon G_1(r, \theta) - \varepsilon^2 H_1(r, \theta), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} G_2(r, \theta) - \frac{\varepsilon^2}{r} H_2(r, \theta), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} G_1(r, \theta) &= \left(\sum_{i=0}^l b_i r^{i+2\alpha} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha} \theta + \sum_{i=0}^n a_i r^{i+2\alpha+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha+1} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^m c_i r^{i+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{2\alpha+2} \theta + \sum_{i=0}^k d_i r^{i+2\alpha} \cos^i \theta \sin^{2\alpha+1} \theta \right), \\ H_1(r, \theta) &= \left(\sum_{i+\alpha=0}^l B_i r^{i+2\alpha} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha} \theta + \sum_{i+\alpha=0}^n A_i r^{i+2\alpha+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha+1} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+\alpha=0}^m C_i r^{i+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{2\alpha+2} \theta + \sum_{i+\alpha=0}^k D_i r^{i+2\alpha} \cos^i \theta \sin^{2\alpha+1} \theta \right), \\ G_2(r, \theta) &= \left(\sum_{i=0}^m c_i r^{i+2\alpha+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha+1} \theta - \sum_{i=0}^l b_i r^{i+2\alpha} \cos^i \theta \sin^{2\alpha+1} \theta \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^n a_i r^{i+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{2\alpha+2} \theta + \sum_{i=0}^k d_i r^{i+2\alpha} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha} \theta \right), \end{aligned}$$

et

$$H_2(r, \theta) = \left(\sum_{i+\alpha=0}^m C_i r^{i+2\alpha+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha+1} \theta - \sum_{i+\alpha=0}^l B_i r^{i+2\alpha} \cos^i \theta \sin^{2\alpha+1} \theta \right. \\ \left. - \sum_{i+\alpha=0}^n A_i r^{i+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{2\alpha+2} \theta + \sum_{i+\alpha=0}^k D_i r^{i+2\alpha} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\alpha} \theta \right).$$

Le système (3.3) est équivalent à l'équation suivante :

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= G_1(r, \theta), \\ F_2(r, \theta) &= H_1(r, \theta) - \frac{1}{r} G_1(r, \theta) G_2(r, \theta). \end{aligned} \tag{3.6}$$

En utilisant la notation introduite dans théorème 1.49, pour l'application du théorème de moyennisation du deuxième ordre, nous avons besoin d'avoir $F_{10}(r) \equiv 0$. De (3.5a), F_{10} est identiquement nulle si et seulement si

$$\begin{cases} c_{2i} = -\frac{2i+1}{2\alpha+1} b_{2i+1}, & i = 0, 1, 2, \dots, \mu \\ b_{2i+1} = c_{2i} = 0, & i = \mu + 1, \dots, \lambda_1 \end{cases} \tag{3.7}$$

avec $\mu = \min \left\{ \left[\frac{l-1}{2} \right], \left[\frac{m}{2} \right] \right\}$.

Maintenant nous déterminons la fonction correspondante

$$F_{20}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d}{dr} F_1(r, \theta) \left(\int_0^\theta F_1(r, s) ds \right) + F_2(r, \theta) \right) d\theta.$$

Nous divisons le calcul de la fonction $F_{20}(r)$ en deux parties, c'est-à-dire on définit $2\pi F_{20}(r) = L(r) + J(r)$, où

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) \left(\int_0^\theta F_1(r, s) ds \right) d\theta, \quad J(r) = \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta.$$

Notre résultat est le suivant :

Lemme 3.4 *L'intégrale $J(r)$ peut être exprimée par*

$$J(r) = r^{2\alpha+1} (P_1(r^2) + r^{2\alpha} P_2(r^2))$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes de degré

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left[\frac{l-1}{2} \right], \left[\frac{m}{2} \right] \right\}$$

et

$$\lambda_2 = \max \left\{ \left[\frac{k}{2} \right] + \left[\frac{m-1}{2} \right], \left[\frac{n-1}{2} \right] + \left[\frac{m-1}{2} \right] + 1, \left[\frac{l}{2} \right] + \left[\frac{n-1}{2} \right], \right. \\ \left. \left[\frac{k-1}{2} \right] + \mu, \left[\frac{n}{2} \right] + \mu, \left[\frac{l}{2} \right] + \left[\frac{k}{2} \right] - 1, \right\}$$

respectivement.

Preuve : Par définition on a

$$J(r) = \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} H_1(r, \theta) - \frac{1}{r} G_1(r, \theta) G_2(r, \theta) d\theta.$$

D'abord, nous calculons $\int_0^{2\pi} H_1(r, \theta) d\theta$

$$\int_0^{2\pi} H_1(r, \theta) d\theta = \sum_{i=0}^l B_i r^{i+2\alpha} \int_0^{2\pi} B_{i+1, 2\alpha}(\theta) d\theta + \sum_{i=0}^k D_i r^{i+2\alpha} \int_0^{2\pi} B_{i, 2\alpha+1}(\theta) d\theta \\ + \sum_{i=0}^m C_i r^{i+2\alpha+1} \int_0^{2\pi} B_{i, 2\alpha+2}(\theta) d\theta + \sum_{i=0}^n A_i r^{i+2\alpha+1} \int_0^{2\pi} B_{i+1, 2\alpha+1}(\theta) d\theta \\ = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^l B_i r^{i+2\alpha} \int_0^{2\pi} B_{i+1, 2\alpha}(\theta) d\theta + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^m C_i r^{i+2\alpha+1} \int_0^{2\pi} B_{i, 2\alpha+2}(\theta) d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} B_{2i+1} A_{2i+2,2i} (2\pi) r^{2i+2\alpha+1} + \pi \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2i} A_{2i,2i+2} (2\pi) r^{2i+2\alpha+1} \\
&= r^{2\alpha+1} P_1 (r^2),
\end{aligned}$$

Compte tenu de l'expression du polynôme $\int_0^{2\pi} H_1 (r, \theta) d\theta$, il résulte facilement que $P_1 (r^2)$ est un polynôme de degré λ_1

Enfin, nous étudierons la contribution de la deuxième partie $\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} G_1 (r, \theta) G_2 (r, \theta) d\theta$ de $F_2(\theta, r)$ à $F_{20}(r)$

Compte tenu de la relation (3.7), il résulte facilement que

$$\begin{aligned}
G_1 (r, \theta) &= \sum_{i=0}^{\mu} (B_{2i+2,2\alpha} (\theta) - \frac{2i+1}{2\alpha+1} B_{2i,2\alpha+2} (\theta)) b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+2\alpha+2} B_{2i+1,2\alpha+2} (\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i+2\alpha} B_{2i+1,2\alpha} (\theta) \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1,2\alpha+1} (\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+2\alpha+2} B_{2i+2,2\alpha+1} (\theta) \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{2i} r^{2i+2\alpha} B_{2i,2\alpha+1} (\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1,2\alpha+1} (\theta)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G_2 (r, \theta) &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{2p} r^{2p+2\alpha} B_{2p+1,2\alpha} (\theta) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} c_{2p+1} r^{2p+1+2\alpha+1} B_{2p+2,2\alpha+1} (\theta) \\
&- \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} b_{2p} r^{2p+2\alpha} B_{2p,2\alpha+1} (\theta) - 2 \sum_{p=0}^{\mu} \frac{\alpha+1+i}{2\alpha+1} b_{2p+1} r^{2(p+\alpha)+1} B_{2i+1,2\alpha+1} (\theta) \\
&- \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2p} r^{p+2\alpha+1} B_{2p,2\alpha+2} (\theta) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} d_{2p+1} r^{2p+2\alpha+1} B_{2p+2,2\alpha} (\theta) \\
&- \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2p+1} r^{2p+2\alpha+2} B_{2p+1,2\alpha+2} (\theta)
\end{aligned}$$

Sur les 49 produits entre les différentes sommes, seulement 12 ne seront pas identiquement nuls après l'intégration par rapport à θ entre 0 et 2π (En utilisant les intégrales du

lemme 3.2, et en tenant compte de $B_{i,\alpha}(\theta) B_{p,q}(\theta) = B_{i+p,\alpha+q}(\theta)$. Ainsi, les termes de

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} G_1(r, \theta) G_2(r, \theta) d\theta \text{ qui contribueront à } F_{20}(r) \text{ sont}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} G_1(r, \theta) G_2(r, \theta) d\theta &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{2p} b_{2i} A_{2i+2p+2, 4\alpha} (2\pi) r^{2p+2i+4\alpha-1} \\ &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{2p} c_{2i+1} A_{2i+2p+2, 4\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2i+4\alpha+1} \\ &- \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} b_{2p} A_{2i+2p+2, 4\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2i+4\alpha+1} \\ &- \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{2i} b_{2p} A_{2i+2p, 4\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2i+4\alpha-1} \\ &- \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\mu} b_{2i+1} a_{2p} \left(A_{2i+2p+2, 4\alpha+2} (2\pi) - \frac{2i+1}{2\alpha+1} A_{2i+2p, 4\alpha+4} (2\pi) \right) r^{2p+2i+4\alpha+1} \\ &- \sum_{p=0}^{\mu} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} 2^{\frac{\alpha+1+i}{2\alpha+1}} d_{2i+1} b_{2i+1} A_{2i+2p+2, 4\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2i+4\alpha+1} \\ &- \sum_{p=0}^{\mu} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{\frac{\alpha+1+i}{2\alpha+1}} a_{2i} b_{2i+1} A_{2i+2p+2, 4\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2i+4\alpha+1} \\ &+ \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} d_{2p+1} b_{2i+1} \left(A_{2i+2p+4, 4\alpha} (2\pi) - \frac{2i+1}{2\alpha+1} A_{2i+2p+2, 4\alpha+2} (2\pi) \right) r^{2p+2i+4\alpha+1} \\ &- \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} b_{2i} a_{2p+1} A_{2i+2p+2, 4\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2i+4\alpha+1} \\ &- \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} a_{2p+1} A_{2i+2p+2, 4\alpha+4} (2\pi) r^{2p+2i+4\alpha+3} \\ &+ \sum_{2p+1=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} c_{2p+1} A_{2i+2p+4, 4\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2i+4\alpha+3} \\ &+ \sum_{2p+1=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{2i} c_{2p+1} A_{2i+2p+2, 4\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2i+4\alpha+1} \\ &= r^{4\alpha+1} P_2(r^2), \end{aligned}$$

Compte tenu de l'expression du polynôme $\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} G_1(r, \theta) G_2(r, \theta) d\theta$ il résulte facilement que $P_2(r^2)$ est un polynôme de degré

$$\lambda_2 = \max \left\{ \left[\frac{k}{2} \right] + \left[\frac{m-1}{2} \right], \left[\frac{n-1}{2} \right] + \left[\frac{m-1}{2} \right] + 1, \left[\frac{l}{2} \right] + \left[\frac{n-1}{2} \right], \right. \\ \left. \left[\frac{k-1}{2} \right] + \mu, \left[\frac{n}{2} \right] + \mu, \left[\frac{l}{2} \right] + \left[\frac{k}{2} \right] - 1, \right\}$$

Enfin, nous obtenons

$$J(r) = r^{2\alpha+1} (P_1(r^2) + r^{2\alpha} P_2(r^2))$$

Ceci termine la démonstration du lemme 3.4. ■

Pour compléter le calcul de $F_{20}(r)$, nous devons déterminer la fonction $L(r)$, d'abord, nous calculons les intégrales $\int_0^{2\pi} A_{i,\alpha}(\theta) B_{p,q}(\theta) d\theta$.

Dans les lemmes suivants, nous calculons ces intégrales.

Lemme 3.5 Soit $S_i(\theta) = A_{2i+2,2\alpha}(\theta) - \frac{2i+1}{2\alpha+1} A_{2i,2\alpha+2}(\theta)$. Alors

$$S_i(\theta) = -\frac{1}{2(\alpha+i+1)} \left(B_{2i+3,2\alpha+1}(\theta) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \gamma_{2i+2,2\alpha} B_{2i+3,2\alpha-2l-1}(\theta) \right) \\ + \frac{1}{2(i+1)} \eta_{2i+2,2\alpha} \left(B_{2i+1,1}(\theta) + \sum_{l=1}^i \delta_{2i+2,0} B_{2i-2l+1,1}(\theta) \right) \\ - \frac{2i+1}{2(\alpha+i+1)(2\alpha+1)} \left(B_{2i+1,2\alpha+3}(\theta) + \sum_{l=1}^{\alpha} \gamma_{2i,2\alpha+2} B_{2i+1,2\alpha-2l+1}(\theta) \right) \\ - \frac{2i+1}{2i(2\alpha+1)} \eta_{2i,2\alpha+2} \left(B_{2i-1,1}(\theta) + \sum_{l=1}^{i-1} \delta_{2i,0} B_{2i-2l-1,1}(\theta) \right)$$

$$\text{où } \gamma_{i,2\alpha} = \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots(2\alpha-2l+1)}{(2\alpha+i-2)(2\alpha+i-4)\dots(2\alpha+i-2l)},$$

$$\eta_{i,2\alpha} = \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots 1}{(2\alpha+i)(2\alpha+i-2)\dots(i+2)},$$

$$\delta_{2i,0} = \frac{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l+1)}{2^l(i-1)(i-2)\dots(i-l)}.$$

De plus, on a

$$S_i(2\pi) = 0.$$

Preuve : En utilisant (3.15) et (3.13) de l'annexe et, en tenant compte de

$$\frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots 1}{(2\alpha+2i+2)(2\alpha+2i)\dots(2i+4)} \frac{1}{2^{2(i+1)}} \binom{2i+2}{i+1} \theta - \frac{2i+1}{2\alpha+1} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha-1)\dots 1}{(2\alpha+2i2)(2\alpha+2i)\dots(2i+2)} \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \theta = 0$$

on obtient l'expression de $S_i(\theta)$. ■

Lemme 3.6 Soit $\varphi_{i,\alpha}^{p,q}(2\pi) = \int_0^{2\pi} A_{i,\alpha}(\theta) B_{p,q}(\theta) d\theta$.

Alors

(a) L'intégrale $\varphi_{2i+1,0}^{p,q}(2\pi)$ est nulle si p est impair ou q est pair et égale à

$$\frac{1}{2i+1} A_{2i+p,q+1}(2\pi) + \frac{1}{2i+1} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{2^{l+1} i(i-1)\dots(i-l)}{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l-1)} A_{2i+p+2l-2,q+1}(2\pi)$$

si p est pair et q est impair.

(b) L'intégrale $\varphi_{2i+1,2\alpha+1}^{p,q}(2\pi)$ est nulle si p est impair ou q est impair et égale à

$$-\frac{1}{2(\alpha+i+1)} \sum_{l=1}^{\alpha-1} \frac{2^l \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-l+1)}{(2\alpha+2i)(2\alpha+2i-2)\dots(2\alpha+2i-2l+2)} A_{2i+p+2,2\alpha-2l+q}(2\pi) - \frac{1}{2(\alpha+i+1)} A_{2i+p+2,2\alpha+q}(2\pi)$$

si p est pair et q est pair.

(c) L'intégrale $\varphi_{2i,2\alpha+1}^{p,q}(2\pi)$ est nulle si p est pair ou q est impair et égale à

$$-\frac{1}{2\alpha+2i+1} \sum_{l=1}^{\alpha-1} \frac{2^l \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-l+1)}{(2\alpha+2i-1)(2\alpha+2i-3)\dots(2\alpha+2i-2l+1)} A_{2i+p+1,2\alpha-2l+q}(2\pi) - \frac{1}{2\alpha+2i+1} A_{2i+p+1,2\alpha+q}(2\pi)$$

si p est impair et q est pair.

(d) L'intégrale $\varphi_{2i+1,2\alpha}^{p,q}(2\pi)$ est nulle si p est impair ou q est pair et égale à

$$\frac{1}{2\alpha+2i+1} \sum_{l=1}^{\alpha-1} \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots(2\alpha-2l+1)}{(2\alpha+2i-1)(2\alpha+2i-3)\dots(2\alpha+2i-2l+1)} A_{2i+2+p,2\alpha-2l+q-1}(2\pi) - \frac{1}{2\alpha+2i+1} A_{2i+p+2,2\alpha+q+1}(2\pi) + \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots 1}{(2\alpha+2i+1)(2\alpha+2i-1)\dots(2i+3)} \varphi_{2i+1,0}^{p,q}(2\pi)$$

si p est pair et q est impair.

(e) Soit $T_{i,\alpha}^{p,q}(2\pi) = \int_0^{2\pi} S_i(\theta) B_{p,q}(\theta) d\theta = \varphi_{2i+2,2\alpha}^{p,q}(2\pi) - \frac{2i+1}{2\alpha+1} \varphi_{2i,2\alpha+2}^{p,q}(2\pi)$, alors l'intégrale

$T_{i,\alpha}^{p,q}(2\pi)$ est nulle si p est pair ou q est pair et égale à

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2(\alpha+i+1)} \left(A_{2i+p+3,2\alpha+q+1}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \gamma_{2i+2,2\alpha} A_{2i+p+3,2\alpha+q-2l-1}(2\pi) \right) \\ & + \frac{1}{2(i+1)} \eta_{2i+2,2\alpha} \left(A_{2i+p+1,q+1}(2\pi) + \sum_{l=1}^i \delta_{2i+2,0} A_{p+1-2l+2i,q+1}(2\pi) \right) \\ & - \frac{2i+1}{2(\alpha+i+1)(2\alpha+1)} \left(A_{p+2i+1,q+2\alpha+3}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha} \gamma_{2i,2\alpha+2} A_{p+2i+1,q+2\alpha-2l+1}(2\pi) \right) \\ & - \frac{2i+1}{2i(2\alpha+1)} \eta_{2i,2\alpha+2} \left(A_{p+2i-1,q+1}(2\pi) + \sum_{l=1}^{i-1} \delta_{2i,0} A_{p+2i-2l-1,q+1}(2\pi) \right) \end{aligned}$$

où $\gamma_{i,2\alpha} = \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots(2\alpha-2l+1)}{(2\alpha+i-2)(2\alpha+i-4)\dots(2\alpha+i-2l)}$,

$$\eta_{i,2\alpha} = \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots 1}{(2\alpha+i)(2\alpha+i-2)\dots(i+2)},$$

$$\delta_{2i,0} = \frac{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l+1)}{2^l(i-1)(i-2)\dots(i-l)}$$

si p est impair et q est impair.

(f) Soit $\tilde{T}_{i,\alpha}^{p,q}(2\pi) = \varphi_{2i+1,2\alpha+1}^{2p+2,2\alpha}(2\pi) - \frac{2p+1}{2\alpha+1} \varphi_{2i+1,2\alpha+1}^{2p,2\alpha+2}(2\pi)$, alors

$$\tilde{T}_{i,\alpha}^{p,q}(2\pi) = 2 \frac{(2p+5\alpha+2i\alpha+6p\alpha+2+i)}{(2\alpha+1)(p+2+i)} \pi.$$

Preuve : En utilisant les intégrales de l'annexe, les six égalités se déduisent facilement par calcul direct. ■

Lemme 3.7 *L'intégrale $L(r)$ peut être exprimée par*

$$L(r) = r^{1+4\alpha} P_3(r^2),$$

où P_3 est un polynôme de degré

$$\begin{aligned} \lambda_3 = \max \{ & \mu + \left[\frac{k-1}{2} \right], \left[\frac{l}{2} \right] + \left[\frac{n-1}{2} \right], \left[\frac{m-1}{2} \right] + \left[\frac{n-1}{2} \right] + 1, \\ & \left[\frac{l}{2} \right] + \left[\frac{k}{2} \right] - 1, \left[\frac{m-1}{2} \right] + \left[\frac{k}{2} \right], \mu + \left[\frac{n}{2} \right] \}. \end{aligned}$$

Preuve : D'après la relation (3.7), on a

$$\begin{aligned}
F_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^{\mu} b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} \left(B_{2i+2, 2\alpha}(\theta) - \frac{2i+1}{2\alpha+1} B_{2i, 2\alpha+2}(\theta) \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i+2\alpha} B_{2i+1, 2\alpha}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+2\alpha+2} B_{2i+1, 2\alpha+2}(\theta) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1, 2\alpha+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1, 2\alpha+1}(\theta) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{2i} r^{2i+2\alpha} B_{2i, 2\alpha+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+2\alpha+2} B_{2i+2, 2\alpha+1}(\theta)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\frac{dF_1(r, \theta)}{dr} &= \sum_{i=0}^{\mu} (2i+2\alpha+1) b_{2i+1} r^{2i+2\alpha} \left(B_{2i+2, 2\alpha}(\theta) - \frac{2i+1}{2\alpha+1} B_{2i, 2\alpha+2}(\theta) \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} 2(i+\alpha) b_{2i} r^{2i+2\alpha-1} B_{2i+1, 2\alpha}(\theta) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+\alpha+1) c_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1, 2\alpha+2}(\theta) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (2i+2\alpha+1) d_{2i+1} r^{2i+2\alpha} B_{2i+1, 2\alpha+1}(\theta) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2i+2\alpha+1) a_{2i} r^{2i+2\alpha} B_{2i+1, 2\alpha+1}(\theta) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2(i+\alpha) d_{2i} r^{2i+2\alpha-1} B_{2i, 2\alpha+1}(\theta) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} 2(i+\alpha+1) a_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+2, 2\alpha+1}(\theta)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta} F_1(r, s) ds &= \sum_{i=0}^{\mu} b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} S_i(\theta) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i+2\alpha} A_{2i+1, 2\alpha}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+2\alpha+2} A_{2i+1, 2\alpha+2}(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} A_{2i+1, 2\alpha+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i+2\alpha+1} A_{2i+1, 2\alpha+1}(\theta) \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{2i} r^{2i+2\alpha} A_{2i, 2\alpha+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+2\alpha+2} A_{2i+2, 2\alpha+1}(\theta).
\end{aligned}$$

Sur les 49 produits entre les différentes sommes, seulement 12 ne seront pas identiquement nuls après l'intégration par rapport à θ entre 0 et 2π (En utilisant les intégrales des lemmes 3.6 et 3.5. Ainsi, les termes de $L(r)$ qui contribueront à $F_{20}(r)$ sont

$$\begin{aligned}
L(r) &= \sum_{p=0}^{\mu} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (2p+2\alpha+1) d_{2i+1} b_{2p+1} \tilde{T}_{i,\alpha}^{p,q}(2\pi) r^{2i+2p+4\alpha+1} \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{p=0}^{\mu} (2p+2\alpha+1) a_{2i} b_{2p+1} \tilde{T}_{i,\alpha}^{p,q}(2\pi) r^{2i+2p+4\alpha+1} \\
&+ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} 2(p+\alpha) b_{2p} a_{2i+1} \varphi_{2i+2, 2\alpha+1}^{2p+1, 2\alpha}(2\pi) r^{2i+4\alpha+2p+1} \\
&+ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2(p+\alpha) b_{2p} d_{2i} \varphi_{2i, 2\alpha+1}^{2p+1, 2\alpha}(2\pi) r^{2i+2p+4\alpha-1} \\
&+ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} 2(p+\alpha+1) c_{2p+1} a_{2i+1} \varphi_{2i+2, 2\alpha+1}^{2p+1, 2\alpha+2}(2\pi) r^{2i+2p+4\alpha+3} \\
&+ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2(p+\alpha+1) c_{2p+1} d_{2i} \varphi_{2i, 2\alpha+1}^{2p+1, 2\alpha+2}(2\pi) r^{2i+2p+4\alpha+1} \\
&+ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\mu} (2p+2\alpha+1) d_{2p+1} b_{2i+1} T_{i,\alpha}^{2p+1, 2\alpha+1}(2\pi) r^{2i+2p+4\alpha+1} \\
&+ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\mu} (2p+2\alpha+1) a_{2p} b_{2i+1} T_{i,\alpha}^{2p+1, 2\alpha+1}(2\pi) r^{2i+2p+4\alpha+1} \\
&+ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (2p+2\alpha) d_{2p} c_{2i+1} \varphi_{2i+1, 2\alpha+2}^{2p, 2\alpha+1}(2\pi) r^{2i+2p+4\alpha+1} \\
&+ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} 2(p+\alpha) d_{2p} b_{2i} \varphi_{2i+1, 2\alpha}^{2p, 2\alpha+1}(2\pi) r^{2i+2p+4\alpha-1} \\
&+ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(p+\alpha+1) a_{2p+1} c_{2i+1} \varphi_{2i+1, 2\alpha+2}^{2p+2, 2\alpha+1}(2\pi) r^{2i+2p+4\alpha+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} 2(p + \alpha + 1) a_{2p+1} b_{2i} \varphi_{2i+1, 2\alpha}^{2p+2, 2\alpha+1} (2\pi) r^{2i+2p+4\alpha+1} \\
& = r^{1+4\alpha} P_3(r^2).
\end{aligned}$$

Compte tenu de l'expression du polynôme $L(r)$, il résulte facilement que $P_3(r^2)$ est un polynôme de degré

$$\begin{aligned}
\lambda_3 = \max \{ & \mu + \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1, \\
& \lfloor \frac{l}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \mu + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \}.
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du lemme 3.7. ■

D'après les lemmes 3.4 et 3.7, il résulte que

$$2\pi F_{20}(r) = \frac{1}{2} r^{2\alpha+1} (r^{2\alpha} (P_2(r^2) + P_3(r^2)) + P_1(r^2)).$$

Pour chercher les racines positives de F_{20} , nous devons chercher les racines du polynôme en r^2 .

Compte tenu de l'expression du polynôme $r^{2\alpha} (P_2(r^2) + P_3(r^2)) + P_1(r^2)$ il résulte facilement que F_{20} peut avoir

$$\lambda = \max \{ \lambda_1, \lambda_2 + \alpha, \lambda_3 + \alpha \}$$

racines réelles positives et qu'il existe des systèmes pour lesquels il y a λ racines réelles positives. Ceci achève la démonstration du théorème lorsque $k = 2$.

3.2.3 Exemples d'application

Les exemples suivants sont donnés pour illustration.

Exemple 3.8 *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \left((1 + x^3) y^3 + \frac{49}{80} x y^2 \right) - \varepsilon^2 \left((1 + x^3) y^3 + \left(1 - \frac{3}{20} x \right) y^2 \right), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon \left(\left(-\frac{49}{240} + \frac{1}{9} x \right) y^3 + \left(x - \frac{16}{21} x^3 \right) y^2 \right) - \varepsilon^2 (x y^3 + x^3 y^2). \end{cases} \quad (3.8)$$

En coordonnées polaires, le système (3.8), s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = - \left(r^6 \cos^4 \theta \sin^3 \theta + r^5 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + r^4 \cos \theta \sin^4 \theta \right. \\ \quad \left. - \frac{3}{20} r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r^3 \cos \theta \sin^3 \theta + r^2 \cos \theta \sin^2 \theta \right) \varepsilon^2 \\ \quad - \left(r^6 \cos^4 \theta \sin^3 \theta - \frac{16}{21} r^5 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + \frac{1}{9} r^4 \cos \theta \sin^4 \theta \right. \\ \quad \left. + \frac{49}{80} r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2r^3 \cos \theta \sin^3 \theta - \frac{49}{240} r^3 \sin^4 \theta \right) \varepsilon, \\ \dot{\theta} = -1 - \left(r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - r^5 \cos^3 \theta \sin^4 \theta + r^3 \cos^2 \theta \sin^3 \theta \right. \\ \quad \left. + \frac{3}{20} r^2 \cos \theta \sin^3 \theta - r^2 \sin^4 \theta - r \sin^3 \theta \right) \varepsilon^2 \\ \quad - \left(\frac{1}{9} r^3 \cos^2 \theta \sin^3 \theta - \frac{16}{21} r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - r^5 \cos^3 \theta \sin^4 \theta \right. \\ \quad \left. + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \frac{49}{60} r^2 \cos \theta \sin^3 \theta - r^2 \sin^4 \theta \right) \varepsilon. \end{array} \right.$$

Ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$F_1(r, \theta) = \left(r^6 \cos^4 \theta \sin^3 \theta - \frac{16}{21} r^5 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + \frac{1}{9} r^4 \cos \theta \sin^4 \theta \right. \\ \left. + \frac{49}{80} r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2r^3 \cos \theta \sin^3 \theta - \frac{49}{240} r^3 \sin^4 \theta \right)$$

$$F_2(r, \theta) = \left(r^6 \cos^4 \theta \sin^3 \theta + r^5 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + r^4 \cos \theta \sin^4 \theta \right. \\ \left. - \frac{3}{20} r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r^3 \cos \theta \sin^3 \theta + r^2 \cos \theta \sin^2 \theta \right) \\ - \left(\frac{1}{9} r^3 \cos^2 \theta \sin^3 \theta - \frac{16}{21} r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - r^5 \cos^3 \theta \sin^4 \theta \right. \\ \left. + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \frac{49}{60} r^2 \cos \theta \sin^3 \theta - r^2 \sin^4 \theta \right) \\ \times \left(r^6 \cos^4 \theta \sin^3 \theta - \frac{16}{21} r^5 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + \frac{1}{9} r^4 \cos \theta \sin^4 \theta \right. \\ \left. + \frac{49}{80} r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2r^3 \cos \theta \sin^3 \theta - \frac{49}{240} r^3 \sin^4 \theta \right).$$

Après des simplifications sur $F_{10}(r)$ on obtient le résultat $F_{10}(r) \equiv 0$. Finalement pour $F_{20}(r)$ on ne donne pas les calculs détaillés à cause de ses expressions trop longues, mais on trouve

$$2\pi F_{02}(r) = \frac{1}{960} \pi r^9 - \frac{7}{480} \pi r^7 + \frac{49}{960} \pi r^5 - \frac{3}{80} \pi r^3,$$

Donc, ce système a trois racines réelles positives $r_1 = 1, r_2 = 2$, et $r_3 = 3$. Par conséquent ce système admet trois cycles limites qui bifurquent à partir des orbites périodiques du centre $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.

Considérons maintenant un autre exemple.

Exemple 3.9 On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \left((1 + x^3) y^5 + \left(\frac{41}{2548} - 5x \right) y^4 \right) \\ \quad - \varepsilon^2 \left((1 + x^3) y^5 + \left(1 + \frac{9}{35}x \right) y^4 \right), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon \left(\left(1 + \frac{1}{90}x \right) y^5 + \left(\frac{1929}{50960}x^3 - \frac{13}{2} \right) y^4 \right) \\ \quad - \varepsilon^2 (xy^5 + x^3y^4). \end{cases} \quad (3.9)$$

En coordonnées polaires, le système (3.9) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = (\sin^4 \theta) \left(-r^8 \cos^4 \theta \sin \theta + \frac{1929}{50960} r^7 \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{1}{90} r^6 \cos \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad + (\cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta - 5 \cos^2 \theta) r^5 + \left(\frac{41}{2548} \cos \theta - \frac{13}{2} \sin \theta \right) r^4 \Big) \varepsilon \\ \quad - (r^8 \cos^4 \theta \sin^5 \theta + r^7 \cos^3 \theta \sin^5 \theta + r^6 \cos \theta \sin^6 \theta \\ \quad + \left(\frac{9}{35} \cos \theta + \sin \theta \right) r^5 \cos \theta \sin^4 \theta + r^4 \cos \theta \sin^4 \theta) \varepsilon^2, \\ \dot{\theta} = \left(r^7 \cos^3 \theta \sin^6 \theta - \frac{1929}{50960} r^6 \cos^4 \theta \sin^4 \theta - \frac{1}{90} r^5 \cos^2 \theta \sin^5 \theta \right. \\ \quad + (\sin \theta - 6 \cos \theta) r^4 \sin^5 \theta + \frac{13}{2} r^3 \cos \theta \sin^4 \theta + \frac{41}{2548} r^3 \sin^5 \theta \Big) \varepsilon \\ \quad + (r^7 \cos^3 \theta \sin^6 \theta - r^6 \cos^4 \theta \sin^4 \theta - r^5 \cos^2 \theta \sin^5 \theta \\ \quad + \left(\frac{9}{35} \cos \theta + \sin \theta \right) r^4 \sin^5 \theta + r^3 \sin^5 \theta) \varepsilon^2 - 1. \end{cases}$$

Ce système différentiel est équivalent à l'équation différentielle suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$F_1(r, \theta) = (\sin^4 \theta) \left(r^8 \cos^4 \theta \sin \theta + \frac{1929}{50960} r^7 \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{1}{90} r^6 \cos \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad \left. + (\cos \theta \sin \theta - 5 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r^5 + \left(\frac{41}{2548} \cos \theta - \frac{13}{2} \sin \theta \right) r^4 \right)$$

et

$$F_2(r, \theta) = (r^8 \cos^4 \theta \sin^5 \theta + r^7 \cos^3 \theta \sin^5 \theta + r^6 \cos \theta \sin^6 \theta \\ \quad + r^5 \cos \theta \sin^5 \theta + r^4 \cos \theta \sin^4 \theta + \frac{9}{35} r^5 \cos^2 \theta \sin^4 \theta) \\ \quad + (r^7 \cos^3 \theta \sin^6 \theta - \frac{1929}{50960} r^6 \cos^4 \theta \sin^4 \theta - \frac{1}{90} r^5 \cos^2 \theta \sin^5 \theta \\ \quad + r^4 \sin^6 \theta + \frac{13}{2} r^3 \cos \theta \sin^4 \theta + \frac{41}{2548} r^3 \sin^5 \theta - 6r^4 \cos \theta \sin^5 \theta)$$

$$\begin{aligned} & \times (\sin^4 \theta) \left(r^8 \cos^4 \theta \sin \theta + \frac{1929}{50960} r^7 \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{1}{90} r^6 \cos \theta \sin^2 \theta \right. \\ & \left. + (\cos \theta \sin \theta + r^5 \sin^2 \theta - 5 \cos^2 \theta) r^5 + \left(\frac{41}{2548} \cos \theta - \frac{13}{2} \sin \theta \right) r^4 \right) \end{aligned}$$

Après des simplifications sur $F_{10}(r)$ on obtient le résultat $F_{10}(r) \equiv 0$.

Finalement pour $F_{20}(r)$ on ne donne pas les calculs détaillés à cause de ses expressions trop longues, mais on trouve

$$2\pi F_{02}(r) = \frac{1}{17920} \pi r^{13} - \frac{3}{1792} \pi r^{11} + \frac{39}{2560} \pi r^9 - \frac{41}{896} \pi r^7 + \frac{9}{280} \pi r^5.$$

Donc ce système admet quatre cycles limites qui bifurquent à partir des orbites périodiques du centr $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.

Remarque 3.10 Si $g_{1\kappa}, g_{2\kappa}, f_{1\kappa}$ et $f_{2\kappa}$ pour tout $\kappa = 1, 2$ sont des polynômes de degré n , alors pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, le nombre maximal de cycles limites du système (3.3) qui peut être bifurqué à partir des orbites périodiques du système différentiel linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la méthode de la moyennisation :

(a) Du premier ordre est

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left[\frac{n}{2} \right] \right\}.$$

(b) Du deuxième ordre est

$$\lambda = \max \left\{ 2 \left[\frac{n-1}{2} \right] + 1 + \alpha, 2 \left[\frac{n}{2} \right] + \alpha \right\}.$$

3.3 Perturbation et cycles limites pour un système différentiel à centre non linéaire

L'objectif de cette section est de donner le nombre maximal de cycles limites qui peut être obtenu en perturbant le centre $\dot{x} = -y^{2p-1}, \dot{y} = x^{2q-1}$. Plus précisément, on va utiliser le théorème 1.49 du chapitre 1 afin d'étudier le nombre maximal de cycles limites du système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^{2p-1} - \varepsilon (g_1(x) y^{2\alpha} + f_1(x) y^{2\alpha+1}), \\ \dot{y} = x^{2q-1} - \varepsilon (g_2(x) y^{2\alpha} + f_2(x) y^{2\alpha+1}), \end{cases} \quad (3.10)$$

où g_1, f_1, f_2 et g_2 sont des polynômes de degré m, n, l et k , respectivement, et α, p et q sont des entiers positifs, et ε est un petit paramètre.

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 3.11 *Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, en utilisant la méthode de la moyennisation du premier d'ordre, le nombre maximal de cycles limites du système (3.10) qui peut être bifurqué à partir des orbites périodiques du système différentiel non linéaire $\dot{x} = -y^{2p-1}, \dot{y} = x^{2q-1}$ est*

$$\lambda = \max \left\{ \left[\frac{l}{2} \right], \left[\frac{m-1}{2} \right] \right\}.$$

3.4 Preuve du théorème 3.11

Nous allons appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre. Notons que le système (3.10) avec $\varepsilon = 0$ a un centre global avec un hamiltonien

$$H(x, y) = \frac{1}{2q}x^{2q} + \frac{1}{2p}y^{2p}.$$

Nous étudierons le nombre de solutions périodiques de ce centre qui persistent pour le système perturbé (3.10) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit.

Nous rappelons les fonctions (p, q) -trigonométriques introduites par Lyapunov

$$x = r^p C s \theta, y = r^q S n \theta, \tag{3.11}$$

où $z(\theta) = C s \theta$ et $w(\theta) = S n \theta$ sont des solutions du problème de Cauchy :

$$z' = -w^{2p-1}, w' = z^{2q-1}, z(0) = p^{-2q}, w(0) = 0,$$

(Voir [48],[24] et [13], par exemple). Pour $p = q = 1$ on a $C s \theta = \cos \theta$ et $S n \theta = \sin \theta$, c'est-à-dire les fonctions (p, q) -trigonométriques sont les fonctions trigonométriques classiques. Il est bien connu que

$$p C s^{2q} \theta + q S n^{2p} \theta = 1.$$

et que $C s \theta$ et $S n \theta$ sont des fonctions T -périodiques avec

$$T = 2p^{\frac{-1}{2q}} q^{\frac{-1}{2p}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right)},$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma.

En écrivant le système (3.10) en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r^p C s \theta$ et $y = r^q S n \theta$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = -\varepsilon \left(C s^{2q-1} \theta S n^{2\alpha} \theta g_1 (r^p C s \theta) r^{q(2\alpha+1)-q-p+1} \right. \\ \quad + S n^{2\alpha-1} \theta C s^{2q-1} \theta r^{q(2\alpha+1)-p+1} f_1 (r^p C s \theta) \\ \quad + S n^{2p+2\alpha-1} \theta r^{q(2\alpha+1)-2q+1} g_2 (r^p C s \theta) \\ \quad \left. + S n^{2p+(2\alpha+1)-1} \theta r^{q(2\alpha+1)-q+1} f_2 (r^p C s \theta) \right), \\ \dot{\theta} = r^{2pq-q-p} + \varepsilon \left(q f_1 (r^p C s \theta) S n^{2(\alpha+1)} \theta r^{q(2\alpha+1)-p} \right. \\ \quad - p C s \theta g_2 (r^p C s \theta) S n^{2\alpha} \theta r^{q(2\alpha-1)} \\ \quad + q g_1 (r^p C s \theta) S n^{2\alpha+1} \theta r^{q(2\alpha+1)-q-p} \\ \quad \left. - p C s \theta S n^{2\alpha+1} \theta r^{q(2\alpha+1)-q} f_2 (r^p C s \theta) \right). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Considérons θ comme nouvelle variable indépendante, alors le système (3.12) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) = & -C s^{2q-1} \theta S n^{2\alpha} \theta g_1 (r^p C s \theta) r^{q(2\alpha+1)-2pq+1} \\ & -S n^{2\alpha+1} \theta C s^{2q-1} \theta f_1 (r^p C s \theta) r^{2q+2q\alpha-2pq+1} \\ & -S n^{2p+2\alpha-1} \theta g_2 (r^p C s \theta) r^{p+2q\alpha-2pq+1} \\ & -S n^{p+2\alpha} \theta f_2 (r^p C s \theta) r^{p-2pq+q(2\alpha+1)+1} \end{aligned}$$

On pose

$$g_1(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad f_1(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i, \quad g_2(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i, \quad f_2(x) = \sum_{i=0}^l d_i x^i,$$

alors

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) = & -\sum_{i=0}^m a_i C s^{2q+i-1} \theta S n^{2\alpha} \theta r^{ip+q+2q\alpha-2pq+1} \\ & -\sum_{i=0}^n b_i S n^{2\alpha+1} \theta C s^{2q+i-1} \theta r^{ip+q-2pq+q(2\alpha+1)+1} \\ & -\sum_{i=0}^k c_i C s^i \theta S n^{2p+2\alpha-1} \theta r^{ip+p-q-2pq+q(2\alpha+1)+1} \end{aligned}$$

$$-\sum_{i=0}^l d_i C s^i \theta S n^{2p+2\alpha} \theta r^{ip+p-2pq+q(2\alpha+1)+1}$$

Calculons maintenant $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= -\frac{1}{T} \sum_{i=0}^m a_i r^{ip+q(2\alpha+1)-2pq+1} \int_0^T C s^{2q+i-1} \theta S n^{2\alpha} \theta d\theta \\ &\quad -\frac{1}{T} \sum_{i=0}^n b_i r^{ip+q-2pq+q(2\alpha+1)+1} \int_0^T S n^{2\alpha+1} \theta C s^{2q+i-1} \theta d\theta \\ &\quad -\frac{1}{T} \sum_{i=0}^k c_i r^{ip+p-q-2pq+q(2\alpha+1)+1} \int_0^T C s^i \theta S n^{2p+2\alpha-1} \theta d\theta \\ &\quad -\frac{1}{T} \sum_{i=0}^l d_i r^{ip+p-2pq+q(2\alpha+1)+1} \int_0^T C s^i \theta S n^{2p+2\alpha} \theta d\theta. \end{aligned}$$

On sait que (voir (Lemme 2) de [24], par exemple)

$$\int_0^T C s^i \theta S n^\alpha \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ ou } \alpha \text{ est impair,} \\ \beta_{i,\alpha} & \text{si } i \text{ et } \alpha \text{ sont pairs,} \end{cases}$$

où $\beta_{i,\alpha}$ est une constante non nulle, ce qui donne

$$\int_0^T S n^{2\alpha+1} \theta C s^{2q+i-1} \theta d\theta = \int_0^T C s^i \theta S n^{2p+2\alpha-1} \theta d\theta = 0, \quad \forall p, i \in \mathbb{N}$$

et

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= -\frac{1}{T} \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^m a_i r^{ip+q(2\alpha+1)-2pq+1} \int_0^T C s^{2q+i-1} \theta S n^{2\alpha} \theta d\theta \\ &\quad -\frac{1}{T} \sum_{\substack{i+\alpha=0 \\ i \text{ pair}}}^l d_i r^{ip+p-2pq+q(2\alpha+1)+1} \int_0^T C s^i \theta S n^{2p+2\alpha} \theta d\theta, \end{aligned}$$

où encore

$$F_{10}(r) = -\frac{1}{T} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2ip+p+q(2\alpha-2p+1)+1} \int_0^T C s^{2q+2i} \theta S n^{2\alpha} \theta d\theta$$

$$-\frac{1}{T} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} r^{2ip+p+q(2\alpha-2p+1)+1} \int_0^T C s^{2i} \theta S n^{2p+2\alpha} \theta d\theta$$

Donc le polynôme F_{10} s'écrit

$$F_{10}(r) = -\frac{1}{T} r^{q(2\alpha-2p+1)+p+1} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2ip} \beta_{2(q+i), 2\alpha} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} r^{2ip} \beta_{2i, 2(p+\alpha)} \right).$$

Pour chercher les racines positives de F_{10} , nous devons chercher les racines du polynôme en r^2 . Notons que le degré du polynôme F_{10} est égal à λ , avec

$$\lambda = \max \left\{ \lfloor \frac{l}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \right\}.$$

Ceci termine la démonstration du théorème 3.11.

3.5 Annexe

Voici quelques formules importantes utilisées dans ce chapitre, pour plus de détails voir [2].

Pour $i \geq 0$ et $\alpha \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^i s \sin^\alpha s ds &= \frac{\cos^{i-1} \theta \sin^{\alpha+1} \theta}{i+\alpha} + \frac{i-1}{i+\alpha} \int_0^\theta \cos^{i-2} s \sin^\alpha s ds \\ &= -\frac{\cos^{i+1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta}{i+\alpha} + \frac{\alpha-1}{i+\alpha} \int_0^\theta \cos^i s \sin^{\alpha-2} s ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^{2i} s ds &= \frac{\sin \theta}{2i} \left(\cos^{2i-1} \theta + \sum_{l=1}^{i-1} \frac{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l+1)}{2^l (i-1)(i-2)\dots(i-l)} \cos^{2i-2l-1} \theta \right) \quad (3.13) \\ &\quad + \frac{(2i-1)(2i-3)\dots 1}{2^i i!} \theta \\ &= \frac{1}{2^{2i-1}} \sum_{l=0}^{i-1} C_{2i}^l \frac{\sin 2(i-l)\theta}{2^{2(i-l)}} + \frac{1}{2^{2i}} C_{2i}^i \theta \end{aligned}$$

où $C_{2i}^p = \frac{2i!}{p!(2i-p)!}$.

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^{2i+1} s ds &= \frac{\sin \theta}{2^{i+1}} \left(\cos^{2i} \theta + \sum_{l=0}^{i-1} \frac{2^{l+1} i(i-1)\dots(i-l)}{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l-1)} \cos^{2i-2l-2} \theta \right) \\ &= \frac{1}{2^{2i}} \sum_{l=0}^{i-1} C_{2i+1}^l \frac{\sin(2i-2l+1)\theta}{(2i-2l+1)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^i s \sin^{2\alpha} s ds &= -\frac{\cos^{i+1} \theta}{2\alpha+i} \left(\sum_{l=1}^{\alpha-1} \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots(2\alpha-2l+1)}{(2\alpha+i-2)(2\alpha+i-4)\dots(2\alpha+i-2l)} \sin^{2\alpha-2l-1} \theta + \sin^{2\alpha+1} \theta \right) \\ &\quad + \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\dots 1}{(2\alpha+i)(2\alpha+i-2)\dots(i+2)} \int_0^\theta \cos^i s ds \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\int_0^\theta \cos^i s \sin^{2\alpha+1} s ds = -\frac{\cos^{i+1} \theta}{2\alpha+i+1} \left(\sin^{2\alpha} \theta + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \frac{2^l \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-l+1)}{(2\alpha+i-1)(2\alpha+i-3)\dots(2\alpha+i-2l+1)} \sin^{2\alpha-2l} \theta \right) \quad (3.16)$$

3.6 Conclusion

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes différentiels. Elle permet aussi de donner une borne supérieure pour le nombre de cycles limites que peut avoir l'équation différentielle perturbée.

Nous continuons à travailler sur la recherche des cycles limites des équations différentielles ordinaires. On se propose d'étudier les cycles limites pour une classe de systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^{2p-1} - \sum_{i>1} \varepsilon^i (g_{1i}(x) y^{2\alpha} + f_{1i}(x) y^{2\alpha+1}), \\ \dot{y} = x^{2q-1} - \sum_{i>1} \varepsilon^i (g_{2i}(x) y^{2\alpha} + f_{2i}(x) y^{2\alpha+1}), \end{cases}$$

Où g_{1i}, f_{1i}, f_{2i} et g_{2i} sont des polynômes de degré m, n, l et k , respectivement, et α, p et q sont des entiers positifs, et ε est un paramètre suffisamment petit.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail on s'est intéressé à l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux planaires ainsi qu'à celle des systèmes différentiels planaires de Kolmogorov. Il est important pour un système différentiel de savoir s'il admet ou non une solution périodique, de plus si cette solution périodique est isolée, on parle par définition d'un cycle limite. Les résultats obtenus dans cette thèse s'articulent sur ces questions.

Dans le premier chapitre on a présenté quelques notions de base, concernant la théorie qualitative des systèmes différentiels, en particulier les systèmes différentiels planaires.

Dans le deuxième chapitre on a traité quelques classes de systèmes différentiels planaires. Ce chapitre est réparti en trois parties, dans la première partie on a déterminé l'expression exacte de cycle limite algébrique d'une classe de systèmes différentiels planaires de Kolmogorov, dans la deuxième partie on a déterminé les conditions d'existence d'un cycle limite pour une classe de systèmes différentiels planaires de degré $2k + 1$ pour laquelle nous pouvons obtenir un cycle limite non algébrique donné explicitement, et on a consacré la troisième partie à une autre classe de systèmes différentiels quintiques et planaires pour laquelle nous pouvons obtenir deux cycles limites explicites, un cycle limite algébrique et un autre non algébrique.

Dans le troisième chapitre on a traité les bornes supérieures pour le nombre de cycles limites qui peuvent être obtenus pour deux classes de systèmes différentiels planaires. Ce chapitre est réparti en deux parties, dans la première partie on a déterminé les bornes supérieures optimales pour le nombre de cycles limites qui peuvent être obtenus en perturbant le centre du système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on a déterminées les bornes supérieures optimales pour le nombre de cycles limites, qui peut être obtenu en perturbant le centre non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^{2p-1}, \\ \dot{y} = x^{2q-1}, \end{cases}$$

où p et q sont des entiers positifs.

Pour les perspectives, il est commode d'espérer trouver une classe des systèmes différentiels quadratiques qui admet un cycle limite non algébrique explicitement donné. Il est commode de chercher des modèle de systèmes différentiels comme système de Kaldor en économie, système proies prédateurs dans l'écologie, système de Kolmogorov dans beaucoup de phénomènes naturels (dynamique des populations, les réactions chimiques, la physique des plasmas, l'hydrodynamique, etc. ..), et essayer d'appliquer notre démarche dans la recherche de l'expression exacte des cycles limites.

Notre investissement est dans ce chemin, cette thèse sert comme un outil puissant dans la recherche de l'existence de cycles limites.

Bibliographie

- [1] M. A. ABDELKADER, Relaxation Oscillators with Exact Limit Cycles, Journal of Mathematical Analysis and Applications. Volume 218, Issue 1, 1 February 1998.
- [2] M. ABRAMOWITZ AND I. STEGUN, Handbook of mathematical function with formulas, graphs, and mathematical tables, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, no. 55. Washington, DC :US Government, Printing Office. 1964.
- [3] J. ALAVEZ-RAMIREZ, G. BLÉ, J. LLIBRE AND J. LOPEZ-LOPEZ, On the maximum number of limit cycles of a class of generalized Liénard differential systems, Int. J. Bifurcation and Chaos. 22 1250063 (2012), [14 pages].
- [4] AL-DOSARY AND I. T KHALIL, Non-algebraic limit cycles for parametrized planar polynomial systems, Int. J. Math 18 (2007), 179-189.
- [5] R. ASHEGHI AND H. R. Z. ZANGENEH, Bifurcations of limit cycles for a quintic Hamiltonian system with a double cuspidal loop, Comput. Math. Appl. 59 (2010), 1409-1418.
- [6] A. BENDJEDDOU AND A. BERBACHE, A class of differential system of odd degree with explicit non algebraic limit cycle, Int Electr J of Pure and Appl Math. No. 4 (2015), 243-253.
- [7] A. BENDJEDDOU, A. BERBACHE AND R. CHEURFA, A class of Kolmogorov system with exact algebraic limit cycle, Int. J. Diff. Equa. Appli. Volume 14 No.3 (2015), 159-165.
- [8] A. BENDJEDDOU, A. BERBACHE AND R. CHEURFA, Exact algebraic and non-algebraic limit cycles for a class of integrable quintic and planar polynomial differential systems, accepted for publication in journal, Scientific Annals of the Alexandru Ioan Cuza University of Iași (NS). Mathematics.

- [9] R. BENTERKI AND J. LLIBRE, Polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycles, *Electronic Journal of Differential equations*. 2012 (2012), No. 78, 1-6.
- [10] I.S. BEREZIN AND N.P. ZHIDKOV, *Computing Methods, Volume II*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [11] T.R. BLOWS AND N. G. LLOYD, The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equations, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 95 (1984), 359-366.
- [12] N.N. BOGOLIUBOV AND YU. A .MITROPOLSKII, *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*, Gordon and Breach, New York, 1961.
- [13] H. W. BROER, F. DUMORTIER, S. J. VAN STRIEN AND F. TAKENS, *Structures in dynamics*, North-Holland Publishing Co, Amsterdam (1991).
- [14] A. BUICA, J. P. FRANCOISE AND J. LLIBRE, Periodic Solutions of Nonlinear Periodic Differential Systems with a Small Parameter, *Comm. Pure Appl. Anal.* 6 N 1 (2007), pp. 103-111.
- [15] A. BUICA AND J. LLIBRE, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, *Bull. Sci. Math.* 128 (2004) 7-22.
- [16] C. CAIRO , M.R. FEIX AND J. LLIBRE, Integrability and algebraic solutions for planar polynomial differential systems with emphasis on the quadratic systems, *Resenhas de la Universidade de Sao Paulo.* 4 (2000) 127-161.
- [17] J. CAO AND H. JIANG, Planar polynomial vector fields having first integrals and algebraic limit cycles, *J. Math. Anal. Appl.* 361 (2010) 177-186.
- [18] J. CHAVARRIGA, H. GIACOMINI, J. GINÉ AND J. LLIBRE, Darboux integrability and the inverse integrating factor, *J. Differential Equations.* 194 (2003), 116-139.
- [19] J. CHAVARRIGA, H. GIACOMINI AND J. GINÉ, On a new type of bifurcation of limit cycles for a planar cubic system, *Nonlinear Analysis.* 36 (1999), 139-149.
- [20] X. CHEN, J. LLIBRE AND Z. ZHANG, Sufficient conditions for the existence of at least n or exactly n limit cycles for the Liénard differential systems, *J. Differential Equations.* 242 (2007), 11-23.
- [21] C. CHRISTOPHER AND C. LI, *Limit Cycles in Differential Equations*, Birkhauser, Boston, 2007.

- [22] C.J. CHRISTOPHER AND S. LYNCH, Small-amplitude limit cycle bifurcations for Liénard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces, *Nonlinearity*. 12 (1999), 1099-1112.
- [23] C.J. CHRISTOPHER AND J. LLIBRE, Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems, *Ann. Differential Equations*. 16 (2000) 5-19.
- [24] A. CIMA, A. GASULL AND F. MANSAS, Limit cycles for vector fields with homogeneous components, *Applicaciones Mathematicae*. 24 (1997), 281-287.
- [25] W. A. COPPEL, Some quadratic systems with at most one limit cycles, *Dynamics Reported*, Vol.2, Wiley, New York. 1998, pp. 61-68.
- [26] C. DU AND Y. LIU, General center conditions and bifurcation of limit cycles for a quasi-symmetric seventh degree system, *Comput. Math. Appl.* 56 (2008), 2957-2969.
- [27] H. DULAC, Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielle ayant pour point singulier un centre, *Bull. Sci. Math. Sér. (2)* 32 (1908), 230-252.
- [28] F. DUMORTIER AND C. LI, On the uniqueness of limit cycle surrounding one or more singularities for Liénard equations, *Nonlinearity*. 9 (1996), 1489-1500.
- [29] F. DUMORTIER AND C. LI, Quadratic Liénard equations with quadratic damping, *J. Differential Equations*. 139 (1997), 41-59.
- [30] F. DUMORTIER AND C. ROUSSEAU, Cubic Liénard equations with linear damping, *Nonlinearity*. 3 (1990), 1015-1039.
- [31] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTÉS, *Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer-Verlag, 2006
- [32] B. GARCA, J. LLIBRE, AND J. S. PÉREZ DEL RIO, Limit cycles of generalized Liénard polynomial differential systems via averaging theory", *Chaos Solitons Fractals*. vol. 62-63 (2012), 1-9.
- [33] A. GASULL AND J. TORREGROSA, Small-Amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity, *J. Differential Equations*. 159 (1998), 1015-1039.
- [34] A. GASULL, H. GIACOMINI AND J. LLIBRE, New criteria for the existence and non-existence of limit cycles in Liénard differential systems, *Dynamical Systems, An International Journal*. 24 (2009), 171-185.

- [35] A. GASULL, H. GIACOMINI AND J. TORREGROSA, Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems. Preprint, 2005.
- [36] H. GIACOMINI, J. LLIBRE AND M. VIANO, On the nonexistence existence and uniqueness of limit cycles, *Nonlinearity*. 9 (1996) 501-516.
- [37] J. GINE AND M. GRAU, Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles, explicitly given, using Riccati equations, *Nonlinearity*. 19 (2006) 1939-1950.
- [38] J. GUCKENHEIMER AND P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Science, Vol. 42, 2nd Printing, Springer, New York, 1986.
- [39] M. HAN AND V.G. ROMANOVSKI, On the number of limit cycles of polynomial Liénard systems, *Nonlinear Analysis, Real World Applications*. 14 (2013), 1655–1668.
- [40] M. HAN, Y. TIAN AND P. YU, Small-amplitude limit cycles of polynomial Liénard systems, *Science China Math*. 56 (2013), doi, 10.1007/s11425-013-4618-9.
- [41] D. HILBERT, Mathematical problems, In *Proceeding of Symposia in Pure Mathematics* 28 (1976), 1-34.
- [42] D. HILBERT, *Mathematische Problem (lecture)*, Second Internat. Congress Math. Paris, 1900, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math-Phys. Kl.* 1900, pp 253-297.
- [43] J. JIANG, M. HAN, P. YU AND S. LYNCH, Limit cycles in two types of symmetric Liénard systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 17 (2007), 2169–2174.
- [44] N. M. KRYLOFF AND N. N. BOGOLIUBOFF, *Introduction à la mécanique non-linéaire, les méthodes approchées et asymptotiques*, Vol. 1-2 of *Ukrainska Akad. Nauk Inst. Mec. Paris, Chaire de Phys. Math. Annales* (1937).
- [45] A. LIÉNARD, *Etude des oscillations entretenues*, *Revue Générale de l' Electricité*. 23 (1928), 946-954.
- [46] A. LINS, W. DE MELO AND C.C. PUGH, *On Liénard's Equation*, *Lecture Notes in Math*. 597, Springer, Berlin. (1977), pp 335–357.
- [47] C. LI AND J. LLIBRE, Uniqueness of limit cycles for Liénard differential equations of degree four, *J. Differential Equations*. 252 (2012), 3142–3162.
- [48] A. M. LIAPUNOV, *Stability of motion*, With a contribution by V. A. Pliss and an introduction by V. P. Basov. Translated from the Russian by Flavian Abramovici

and Michael Shimshoni, *Mathematics in Science and Engineering* (1966), vol. 30, Academic Press. New York.

- [49] A. LINS NETO, On the number of solutions of the equation $\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^N a_j(t)x^j$, $0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$, *Invent. Math.* 59 (1980), 67–76.
- [50] J. LLIBRE, Averaging theory and limit cycles for quadratic systems, *Rad. Mat.* 11 (2002/03), 215–228.
- [51] J. LLIBRE AND A. MAKHLOUF, Limit cycles of a class of generalized Liénard polynomial equations, *J. Dyn. Control Syst.* 12 (2015), No 2, 189–192.
- [52] J. LLIBRE AND A. C. MEREU, Limit cycles for generalized Kukles polynomial differential systems, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications.* Vol 74, no 4 (2011), pp 1261–1271 .
- [53] J. LLIBRE AND CH. PANTAZI, Polynomial differential systems having a given Darbouxian first integral, *Bull. Sci. math.* 128 (2004), 775–788.
- [54] J. LLIBRE AND G. RODRÍGUEZ, Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields, *J. Differential Equations* 198 (2004), 374–380.
- [55] J. LLIBRE AND C. VALLS, On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems, *Proc A. R Soc.* (2012), 468 2347–60.
- [56] J. LLIBRE AND C. VALLS, Limit cycles for a generalization of Liénard polynomial differential systems, *Chaos, Solitons and Fractals.* 46 (2013), 65–74.
- [57] J. LLIBRE AND C. VALLS, On the number of limit cycles for a generalization of Liénard polynomial differential systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 23 (3) (2013), 1350048 (16 pages).
- [58] N. G. LLOYD, On a class of differential equations of Riccati type, *J. London Math. Soc.* 10 (1975), 1–10.
- [59] N. G. LLOYD, *Limit cycles of polynomial systems some recent developments*, London. Math. Soc. Lecture Note Ser 127, Cambridge University Press. (1988), 192–234.
- [60] S. LYNCH, Limit cycles if generalized Liénard equations, *Applied Math. Letters.* 8 (1995), 15–17.
- [61] S. LYNCH, Generalized quadratic Liénard equations, *Applied Math. Letters.* 11 (1998), 7–10.

- [62] S. LYNCH, Generalized cubic Liénard equations, *Applied Math. Letters.* 12 (1999), 1-6.
- [63] S. LYNCH AND C.J. CHRISTOPHER, Limit cycles in highly non-linear differential equations, *J.Sound Vib.* 224 (1999), 505-517.
- [64] K. ODANI, The limit cycle of the Van der Pol equation is not algebraic, *J. Differential Equations.* 115 (1995), 146-152.
- [65] I.G.MALKIN, *Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations*, (Russian) Gostexizdat, Moscow, (1956).
- [66] J. PALIS JR AND W. DEMELO, *Geometric theory od dynamical systems*, Springer-Verlag New-York (1982).
- [67] L. PERKO, *Differential equations and dynamical systems*, Third edition. *Texts in Applied Mathematics*, 7. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [68] H. POINCARÉ, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *J. Math. Pures. Appl.* 7 (3) (1881), 375-422.
- [69] J. QIAO AND S. SHUI, Limit cycles for a class of polynomial differential systems, *Elec. J of Qua The. of Diff Equa.* 9 (2016), 1-9.
- [70] M. ROSEAU, *Vibrations Non-linéaires et Théorie de la Stabilité*, (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 8, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1966.
- [71] G. S. RYCHKOV, The maximum number of limit cycle of the system $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5, \dot{y} = -x$ is two, *Differential'nye Uravneniya.* 11 (1975), 380–391.
- [72] S. SMALE, *Mathematical Problems for the Next Century*, *Mathematical Intelligencer.* 20 (1998), 7-15.
- [73] Y. WU, Y. GAO AND M. HAN, On the number and distributions of limit cycles in a quintic planar vector field, *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng.* 18 (2008), 1939-1955.
- [74] YU. S. ILYASHENKO, Centennial history of Hilbert's 16th problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 39 (2002), 301-354.
- [75] YE. YANQIAN, *Theory of Limit Cycles*, *Transl. Math. Monogr*, vol. 66, Amer. Math. Soc, Providence, 1984.
- [76] P. YU AND M. HAN, Limit cycles in generalized Liénard systems, *Chaos, Solitons and Fractals.* 30 (2006), 1048-1068.

- [77] B. VAN DER POL, Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance, London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag. 3(1927), P 65 .
- [78] F. VERHULST, Nonlinear differential equations and dynamical systems, Berlin : Springer-Verlag, second edition (1927).
- [79] J. A. SANDERS AND F. VERHULST, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Applied Mathematical Sciences 59, Springer, New York, 1985.
- [80] Z. ZHANG, T. DING, W. HUANG AND Z. DONG, Qualitative Theory of Differential Equations, American Mathematical Society, Providence (1992).

المخلص :

الغرض من هذه الأطروحة هو الدراسة نوعية لبعض الفئات من النظم التفاضلية كثيرة الحدود في المستوى النتائج المتحصل عليها في هذه الدراسة متعلقة بتصرفات الحلول في المستوى و وجود وعدم وجود الحلول الدورية بصفة خاصة الدورات النهائية لبعض النظم التفاضلية من نوع كولموجوروف و التي تمثل نماذج الفريسة والمفترس في ديناميك السكان كما تمكنا من إيجاد العبارة الصريحة لدورة نهائية غير جبرية لفئة معينة من النظم التفاضلية من الدرجة الفردية بعد ذلك تطرقت الدراسة لتعيش دورة حد جبرية مع دورة حد غير جبرية لجملة معادلات تفاضلية من الدرجة الخامسة وفي الأخير تم إيجاد الحد الأعلى لدورات الحد الذي يمكن الحصول عليه باستعمال نتائج طريقة المتوسط لفئتين من النظم التفاضلية

ولاشك في أهمية هذه الدراسة في التطبيق لان كثير من الظواهر الطبيعية يمكن نمذجتها على شكل جملة معادلات تفاضلية

كلمات مفتاحية : دورة نهائية، منحني صامد، حل دوري، حل جبري ، حل غير جبري، نظم كولموجوروف ، طريقة المتوسط ، النظام التفاضلي ، اضطراب

Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude qualitative de quelques classes des systèmes différentiels planaires polynômiaux. Les résultats obtenus dans cette étude concernent l'existence et la non existence des solutions périodiques isolées par conséquent les cycles limites de quelques classes des systèmes de types Kolmogorov, qui représente les modèles proie - prédateur dans la dynamique des populations. De plus on détermine explicitement un cycle limite non algébrique pour une classe des systèmes différentiels de degré impair. Nous avons considéré ensuite de systèmes planaire de degré 5, et nous avons montré qu'il possède deux cycles limites explicites, un cycle limite algébrique et le deuxième non algébrique. Enfin nous avons trouvé des bornes supérieures pour le nombre de cycles limites de deux classes de systèmes différentielles ordinaires. En utilisant un théorème de la théorie de moyennisation

Mots clés : Cycle limite, courbe invariante, solution périodique, solution algébrique, solution non algébrique, système de Kolmogorov, méthode de moyennisation, système différentiel, perturbation.

Abstract

The objective of this thesis is the qualitative study of some classes of planar polynomial differential systems. The results obtained in this study concerns the existence and non existence of isolated periodic solutions consequently limit cycles of some classes of Kolmogorov systems, which is prey- predator models in population dynamics. And we give an explicitly expression of a non algebraic limit cycle for a class of planar polynomial differential systems of degree odd. We have then considered planar systems of degree 5, and we have shown that it has two explicit limit cycles, one algebraic limit cycle and the second one non-algebraic. Finally, we find upper bounds for the number of limit cycles of two classes of ordinary differential systems. Using a theorem of the averaging theory.

Keywords: Limit cycle, invariant curve, periodic solution, algebraic solution, non algebraic solution, Kolmogorov system, averaging method, differential system, perturbation.