RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNEDÉMOCRATIQUEET POPULAIRE

MINISTÈREDEL.ENSEIGNEMENTSUPÉRIEURETDE LA RECHERCHESCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉFERHATABBAS-SÉTIF 1

Université Ferhat Abbas Sétif 1

THÈSE

Présentéepourobtenir le grade de

DOCTEUR DEL'UNIVERSITE DESETIF 1

Spécialité:MathématiquesAppliquées

Par

Djamila BENTERKI

Titre

Etude asymptotique des fluides non-Newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords

Soutenue publiquementle 24 / 10/2017

Devant le Jury

N. BENSALEM	**Président**	**Prof**	**UFA SETIF 1**
H. BENSERIDI	**Rapporteur**	**Prof**	**UFA SETIF 1**
A.DAHMAN	**Examinateur**	**Prof**	**UMB M'SILA**
A. MERZOUGUI	**Examinateur**	**MCA**	**UMB M'SILA**

Table des matières

Remerciements

A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincue que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de ≪l'apprenti-chercheur≫ .

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, monsieur Hamid Benseridi, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille. j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Je remercie vivement Dahman Achour et Abdelkrim Merzougui, qui m'ont fait un grand honneur en acceptant d'être les rapporteurs de cette thèse.

Mes remerciements vont également à monsieur Naceuredine Bensalem pour avoir accepté de présider ce jury de thèse.

Ma reconnaissance va à celles et ceux qui me sont chers. Je suis redevable à mes parents pour leur soutien moral.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes sœurs et tous mes proches et amis, qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de cette thèse.

Introduction générale

La mécanique des fluides forme un sous-domaine de la mécanique des milieux continus. Elle comprend l'étude des gaz et des liquides dans les cas statiques et dynamiques. L'étude de l'intéraction fluides-solides est aussi une partie de la mécanique de fluide dont les applications sont partout : la météorologie, l'hydrologie, l'aérodynamique, l'étude des plasmas ; elle s'applique aussi en biologie, en géophysique et en astrophysique, en océanographie, ainsi qu'en génie chimique, nucléaire, hydraulique et en écologie. La mécanique des fluides consiste à offrir une théorie mathématique bien construite pour des domaines divers, ce qui indique son importance dans plusieurs champs surtout l'industrie. Le fluide (liquide, gaz ou gaz ionisé) est considéré comme un milieu continu représenté par les champs de densité, de pression et de vitesse satisfaisant la fameuse équation de Navier-Stokes.

Dans les écoulements de faible épaisseur, lorsque l'épaisseur diminue, l'influence relative des effets de surface par rapport aux effets de volume augmente. Il convient alors d'accorder une importance particulière à ce qui se passe à l'interface fluide solide et qui induit les conditions aux limites à imposer aux équations décrivant l'écoulement.

Usuellement, la plupart des travaux mathématiques concernant les équations de Navier-Stokes supposent des conditions d'adhérence aux parois, plus rarement des conditions de glissement ou des conditions en pression. Dans le cas des écoulements de faible épaisseur, on sait justifier [7], [3], [26] par des techniques asymptotiques l'approximation des équations de Navier-Stokes par une équation dite de Reynolds, laquelle prend en compte implicitement les conditions limites aux parois.

L'étude du comportement asymptotique a déjà été faite et des résultats ont été obtenus pour plusieurs fluides. Le premier résultat, dû à Bayada et Chambat [6], justifie l'équation de Reynolds, obtenue à partir des équations de Stokes considérées dans un domaine mince. L'écoulement du type Navier-Stokes est traîté par Assemien, Bayada et Chambat [5], ainsi que par Nazarov [38], pour différentes conditions aux limites du domaine d'étude.

Pour les problèmes non linéaires, plusieurs résultats sont connus, mais aucun n'englobe le cas du fluide de Bingham. Ainsi, l'écoulement d'un fluide dont la viscosité est donnée par une loi de puissance a été traîté par Mikelic et Tapiéro [37]. et par Bourgeat, Mikelic et Tapiéro. Par ailleurs, Taous [43] a étudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, le modèle de viscosité étant celui de Litvinov [36]. Dans [23], l'auteur a donné dans le dernier chapitre de sa thèse de doctorat le comportement asymptotique d'un fluide de Bingham dans un domaine mince. Malheureusement, dans ce travail, l'inéquation variationnelle limite n'a pas été donnée en raison de la difficulté rencontrée en raison du choix des fonctions de test et des conditions aux limites imposées. Bunoiu et Saint Jean Paulin [14] ont étudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, parmi lesquels ont trouve les fluides du type Cross, Carreau et Williamson. Les auteurs de [15] ont étudié le même problème, dans lequel seules les conditions de Dirichlet sur la frontière ont été considérées.

Ainsi replacés dans leur contexte, les travaux développés dans cette thèse de doctorat s'articulent donc autour de deux sujets principaux : d'une part nous poursuivons la recherche de [[24], [17]] sur le comportement asymptotique d'un problème stationnaire pour le fluide Bingham isotherme. Cependant, cette fois, notre opérateur sera perturbé par un terme $(u.\nabla u)$ dans un domaine mince tridimensionnel Ω^ε avec des conditions aux limites de Fourier et Tresca. Ce terme source joue un rôle essentiel dans la mécanique quantique, où ce terme non linéaire est utilisé pour perturber un opérateur linéaire pour obtenir un opérateur non linéaire qui donne les résultats applicables, voir [34]. D'autre part, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un écoulement non stationnaire, isotherme incompressible pour un fluide non Newtonien dans le même domaine Ω^ε avec les conditions de frottement non linéaire de type Tresca sur une partie de la frontière et les conditions de Dirichlet sur l'autre partie.

Dans les deux cas, la démarche sera la même. Des changements d'échelles permettront d'obtenir des estimations dans un domaine "fixe". On passera à la limite par des techniques asymptotiques.

Le premier chapitre, est consacré au début au rappel des notions principales de la théorie des milieux continus et d'analyse fonctionnelle nécessaires et résultats utilisés tout au long de ce travail. Ensuite, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui modélisent l'évolution isotherme (ou non-isotherme) d'un corps homogène élastique en présence de conditions non linéaires du type Tresca sur une partie de la frontière du domaine.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un fluide de Bingham stationnaire isotherme incompressible, notre opérateur sera perturbé par un terme $u.\nabla u$, dans un domaine borné à trois dimensions avec des conditions aux limites de Fourier et de Tresca. On donnera la formulation variationelle du problème en utilisant le changement d'échelle $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$ le domaine Ω^ε se transforme en un domaine Ω indépendant de ε. On etablit des estimations sur la vitesse et la pression et un théorème de convergence. On termine par etablir un problème limite et démontrer l'unicité de solution de ce dérnier.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un écoulement non stationnaire, isotherme incompressible pour un fluide non Newtonien dans le même domaine Ω^ε avec les conditions de frottement non linéaire de type Tresca sur une partie de la frontière et les conditions de Dirichlet sur l'autre partie.

Le problème complet dans Ω^ε, s'écrit :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial \sigma^\varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + f^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon \times [0,T]\,, \\
\operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0,T[\,, \\
u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times]0,T[\,, \\
u^\varepsilon = g\chi \ \text{ avec } g_3 = 0, \quad \chi \text{ fonction de } t > 0 & \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \times]0,T[\,, \\
u^\varepsilon.n = 0 & \text{sur } \omega \times]0,T[\,, \\
\left.\begin{array}{l} |\sigma^\varepsilon_\tau| < k^\varepsilon \Rightarrow u^\varepsilon_T = s \\ |\sigma^\varepsilon_\tau| = k^\varepsilon \Rightarrow \exists\ \beta \geq 0 \text{ tel que } u^\varepsilon_T = s - \beta\sigma^\varepsilon_\tau \end{array}\right\} & \text{sur } \omega \times]0,T[\,,
\end{cases}
$$

avec f^ε, k^ε, et g sont des données du problème.

Nous étudions l'analyse asymptotique du problème de la même manière que dans le deuxième chapitre.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Résumé. *Le but est d'introduire les outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités.*

Dans la première section, nous commençons par un rappel des résultats essentiels de la théorie du milieux continus et la loi de comportement de l'élasticité linéaire, puis, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui modélise l'évolution isotherme (ou non-isotherme) d'un corps homogène élastique en présence de conditions non linéaires du type Tresca sur une partie de la frontière du domaine Ω *de* $\mathbb{R}^3$.

La deuxième section est consacrée aux espaces fonctionnels, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle, concernant les espaces de Sobolev et les espaces $L^p(0,T;X)$*, les notions principales de la convergence faible et les lemmes de type Gronwall.*

1.1 Modélisation et rappels de la mécanique des milieux continus

Le but de cette section est d'établir le modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable ayant une loi élastique sous l'action des efforts extérieurs en présence de conditions de frottement sur une partie au bord du domaine. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2,\ 3$). Ce système comprend la loi de comportement du matériau, l'équation du mouvement et de l'énergie du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis. Pour les références bibliographiques, nous avons consulté [16].

Considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement. Soit $u(x,t)$ le champ des déplacements à l'instant $t \in [0,T]$ des points $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ du milieu continu en mouvement par rapport au repère Ox, le tenseur $\sigma(x,t)$ de compsantes σ_{ij} $(i,\ j = 1,2,3)$, est le tenseur des contraintes. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieures et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = Div\ \sigma + f\ , \tag{1.1}$$

où le vecteur f, de composantes f_i $(i = 1,2,3)$, représente une densité massique des forces extérieures, ρ est la densité de masse et Div désigne l'opérateur divergence, c'est-à-dire

$$Div\ \sigma = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (i = 1,2,3).$$

L'équation de conservation de l'énergie. L'expression générale du premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma : D(u) - \operatorname{div} q + r, \tag{1.2}$$

où

- e est un scalaire qui désigne l'énergie interne spécifique du milieu continu.
- r est un scalaire représentant l'apport d'énergie par unité de masse et de temps.
- q, de composantes q_i, est le vecteur transport d'énergie.
- $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

- $\sigma : D(u)$ est le produit de deux tenseurs σ et $D(u)$ défini par l'expression

$$\sigma : D(u) = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} d_{ij}(u).$$

D'un point de vue mathématique, nous disposons de plus d'inconnues par rapport au nombre d'équations. Donc les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie sont insuffisantes à décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on appelle des lois de comportement. Nous présentons ci-dessous les lois de comportement de l'élasticité linéaire traitées dans cette thèse.

Lois de comportement linéaire de matériaux élastiques. Cette loi reliant le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations linéairisées $D(u)$ est

$$\sigma(u) = E : D(u) \qquad (\sigma_{ij}(u) = E_{ijkl}\, d_{kl}(u)). \tag{1.3}$$

où $E = (E_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité symétrique d'ordre quatre. Ses composantes E_{ijkl} s'appellent coefficients d'élasticité et elles sont indépendantes du tenseur des déformations. Dans le cas d'un matériau *homogène*, les coefficients E_{ijkl} sont constants (indépendante du point x de Ω). En pratique, cette loi est souvent trop générale et il est possible de la simplifier en considérant un matériau *isotrope* (matériau ayant le même comportement dans toutes les directions). On l'appelle alors la *loi de Hooke* et elle est valide pour un très grand nombre de matériaux. Dans le cas isotrope, le tenseur d'élasticité E est défini par

$$E_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{1.4}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé qui sont spécifiques à chaque matériau. δ_{ij} désigne le symbole de Krönecker.

En utilisant (1.3), (1.4), on peut alors démontrer que le tenseur des contraintes σ d'un *corps homogène élastique et isotrope* est :

$$\sigma(u) = 2\mu D\left(u\right) + \lambda TrD\left(u\right)I,$$

où

- $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation.
- λ et μ sont les coefficients de Lamé.
- I est la matrice identité de rang 3.
- $TrD\left(u\right)$ désigne la trace de $D\left(u\right)$ définie par

$$TrD\left(u\right) = \sum_{k=1}^{3} d_{kk}\left(u\right).$$

Comme le corps élastique est considéré *non isotherme* son coefficient μ est une fonction de la température T

$$\mu = \mu(T).$$

La loi de comportement de *l'élasticité linéaire d'un corps homogène et non isotherme* est donc

$$\sigma(u) = 2\mu(T)D\left(u\right) + \lambda TrD\left(u\right)I. \tag{1.5}$$

A partir de ces lois nous chercherons les équations aux dérivées partielles modélisant l'évolution d'un corps homogène élastique linéaire dans un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$.

Cas non-isotherme

Considérons un corps homogène élastique, isotrope, et conducteur de la chaleur qui occupe un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$.

Si le milieu est homogène, la densité au point x de Ω reste constante au cours du temps, elle est donc de plus indépendante des variables d'espace. Ce que nous supposerons

$$\rho = \rho_0 = \text{constante}.$$

Il est même possible de poser $\rho = 1$, ce qui est fait dans la suite, et revient simplement à choisir l'unité de densité de la masse.

En utilisant la loi de comportement (1.6) l'équation de mouvement (1.1) devient

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Div\,(2\mu(T)D\,(u) + \lambda TrD\,(u)\,I) + f\ .$$

On a donc

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Div\ (2\mu(T)D\,(u)\,) + \lambda\,\mathrm{div}\,u + f\ . \tag{1.6}$$

Le terme $\sigma : D$ dans (1.2), parfois appelé *fonction de dissipation*, est défini par

$$\sigma : D(u) = 2\mu(T)D\,(u) : D(u) = 2\mu(T)d_{ij}^2\,(u)\,.$$

On peut alors écrire l'équation (1.2) comme suit

$$\frac{de}{dt} = 2\mu(T)D\,(u) : D(u) - \mathrm{div}\,q + r. \tag{1.7}$$

On suppose que

- e l'énergie interne spécifique est donnée par la loi

$$\frac{de}{dt} = C_v(T)\frac{dT}{dt},$$

où C_v désigne la chaleur spécifique à volume constant.

- l'apport d'énergie par unité de masse r dépend de la température T :

$$r = r(T).$$

- le vecteur flux de chaleur q par diffusion est donné par la loi de Fourier :

$$q = -K\nabla T.$$

où K est la conductivité thermique.

Dans ces conditions l'équation de l'énergie (1.8) s'ecrit

$$C_v(T)\frac{dT}{dt} = 2\mu(T)D\,(u) : D(u) + \mathrm{div}(K\nabla T) + r(T). \tag{1.8}$$

Finalement, les équations générales de problème dynamique d'élasticité linéaire non isotherme sont données par le système :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = Div(2\mu(T)D\,(u)\,) + \lambda\,\mathrm{div}\,u + f, \\ C_v(T)\dfrac{dT}{dt} = 2\mu(T)D\,(u) : D(u) + \mathrm{div}(K\nabla T) + r(T). \end{cases} \tag{1.9}$$

Dans le cas stationnaire on obtient le système :

$$\begin{cases} -Div\ (2\mu(T)D\,(u)\,) = \lambda\,\mathrm{div}\,u + f, \\ -\,\mathrm{div}(K\nabla T) = 2\mu(T)D\,(u) : D(u) + r(T). \end{cases}$$

Ensuite on suppose qu'il existe une force tangentielle sur une partie de la frontière qui sera notée par ω, on dit que l'on a un contact avec frottement. On est amené à introduire une loi de frottement qui relie cette composante tangentielle aux autres variables du système. Dans cette thèse nous allons considérer la loi de frottement dite du type Tresca.
Lois de frottement du type Tresca. Cette loi de frottement présente un seuil de frottement fixe k^ε lorsque le solide et la fondation sont en contact, la fondation exerce sur le solide un effort tangentiel qui ne dépasse pas un certain seuil

$$|\sigma_\tau^\varepsilon| \leq k^\varepsilon \quad \text{sur} \quad \omega \times \left]0,T\right[.$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y a blocage, ce qui se traduit par :

$$|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \ \ \text{sur} \quad \omega \times \left]0,T\right[.$$

Lorsque ce seuil est atteint le solide peut se déplacer tangentiellement par rapport à la fondation et il ya alors glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse. Alors on a

$$|\sigma_\tau^\varepsilon| \leq k^\varepsilon \Longrightarrow \text{il'existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau^\varepsilon = -\lambda \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau \quad \text{sur} \quad \omega \times \left]0,T\right[.$$

En conclusion, les conditions aux limites de type frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{cases} |\sigma_\tau^\varepsilon| \leq k^\varepsilon, \\ \text{Si} \quad |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \quad \text{alors} \ \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0, & \text{sur} \quad \omega \times]0,T[\,, \\ \text{Si} \quad |\sigma_\tau^\varepsilon| \leq k^\varepsilon \quad \text{alors} \ \sigma_\tau^\varepsilon = -\lambda \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau \quad \text{avec} \ \lambda \geq 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Remarque 1.1 *Quand $k^\varepsilon = 0$, on obtient $\sigma_\tau^\varepsilon = 0$ sur $\omega \times]0,T[$. Il s'agit du cas sans frottement.*

1.2 Espaces fonctionnels

Nous commençons par un rappel d'analyse fonctionnelle concernant l'espace des distributions, les espaces $L^p(\Omega)$ et les notions principales de la convergence faible. Ensuite, nous présentons également les espaces de Sobolev, de type $L^p(0,T;X)$, et les principales propriétés notamment les théorèmes de trace. Nous finissons en donnant quelques lemmes du type Gronwall, qui seront de plus utiles notamment dans la démonstration d'unicité des solutions faibles ainsi que les majorations et d'estimations d'erreurs.

1.2.1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Nous allons introduire dans ce paragraphe un résumé de l'analyse fonctionnelle, et quelques résultats qui interviennent dans l'étude des problèmes de ctte thèse. De nombreux ouvrages parcourent ce sujet, nous renvoyons le lecteur soucieux pour plus de détails à : par exemple [[1], [13]].

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $C_0^\infty(\Omega)$ (ou $D(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.

On munit $C_0^\infty(\Omega)$ de la «pseudo-topologie», c'est-à-dire qu'on définit une notion de convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$.

L'espace des distributions $D'(\Omega)$ est le «dual» de $D(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace de formes linéaires continues sur $D(\Omega)$. On note $\langle T, \phi\rangle = T(\phi)$ le produit de dualité entre une distribution $T \in D'(\Omega)$ et une fonction $\phi \in D(\Omega)$: ce produit de dualité généralise l'intégrale usuelle $\displaystyle\int_\Omega T\phi \; dx$. En effet, on vérifie que si f est une fonction localement intégrable dans Ω, alors on peut définir une distribution T_f par

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_\Omega f\phi \, dx.$$

On peut aussi munir $D^{'}(\Omega)$ d'une notion de convergence : on dit qu'une suite $T_n \in D^{'}(\Omega)$ **converge au sens des distributions** vers $T \in D^{'}(\Omega)$ si, pour tout $\phi \in D(\Omega)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T, \phi_n\rangle = \langle T, \phi\rangle.$$

Définissons maintenant la **dérivation au sens des distributions :** si $T \in D^{'}(\Omega)$, la dérivée $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} \in D^{'}(\Omega)$ est définie par :

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\rangle, \ \forall \phi \in D(\Omega). \tag{1.11}$$

Pour $1 \leq p < \infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace défni par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} ; \int\limits_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} ; \ \sup_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| \,,$$

où $\sup\limits_{x\in\Omega} ess \, |u(x)| = \inf \{ M > 0 \quad / \quad |u(x)| \leq M \quad \text{p.p.} \}$.

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on notera q l'exposant conjugué de p défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ avec la convention $\dfrac{1}{\infty} = 0$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et

$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$ (l'inégalité de Hölder).

Théorème 1.2 ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue).*** *Soit* (u_n) *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$. *On suppose que*

1. $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ *p.p. sur* Ω,
2. *il existe une fonction* $v \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* n, $|u_n(x)| \leq v(x)$ *p.p. sur* Ω.

Alors $u \in L^1(\Omega)$ *et* $\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$. *(pour plus de détails renvoyons à [13]).*

Remarque 1.3 *Il résulte de l'inégalité de Hölder que si* (u_n) *est une suite telle que* $u_n \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$, *et* (v_n) *une suite telle que* $v_n \to v$ *dans* $L^q(\Omega)$. *on obtient que la suite* $(u_n v_n) \subset L^1(\Omega)$ *converge vers* uv *dans* $L^1(\Omega)$, *ce qui implique* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v_n \, dx = \int_\Omega uv \, dx$.

Le résultat suivant, qui est presque l'inverse du théorème de convergence dominée de Lebesgue, il est d'une certaine importance dans l'étude des équations non linéaires, il établit une certaine relation entre la convergence dans le sens de la norme de $L^1(\Omega)$ et la convergence presque partout sur Ω.

Théorème 1.4 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions intégrables telle que* $u_n \to u$ *dans* $L^1(\Omega)$. *Alors, il existe une sous suite* $(u_{n_k})_k$ *et* $v \in L^1(\Omega)$ *telle que*

$u_n \to v$ *p.p dans* Ω *et* $|u_{n_k}| \leq v$ *p.p dans* Ω.

Convergence faible

Définition 1.5 *Soit* E *un espace de Banach. Une suite* $(u_n) \subset E$ *converge faiblement dans* E *vers un élément* $u \in E$, *et on note* $u_n \rightharpoonup u$, *si*

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle, \ \forall f \in E', \text{ où } E' \text{ est le dual de } E.$$

Théorème 1.6 ***(de Eberlein et Smulyan).*** *Soit* E *un espace de Banach réflexif, et soit* (x_n) *une suite bornée dans* E. *Alors il existe une sous suite* (x_{n_k}) *qui converge faiblement dans* E.

Proposition 1.7 *Soit* E *un espace de Banach, et une suite* $(u_n) \subset E$. *Alors :*

1. $u_n \to u$ *implique* $u_n \rightharpoonup u$.
2. *Si E est unez espace de dimension finie, alors la convergence faible et la convergence forte sont équivalentes.*
3. *Si* $u_n \to u$, *alors* (u_n) *est bornée et* $\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \|u\|$.
4. *Si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* E *et* $f_n \to f$ *dans* E, *alors il suit que* $\langle f_n, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$.
5. *Si* $u_n \to u$ *dans* E *et* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* E', *alors il suit que* $\langle f_n, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$.

Définition 1.8 *Soit E un espace de Banach, une suite $(f_n) \subset E'$ converge faiblement étoile vers un élément $f \in E'$, et on note $f_n \rightharpoonup^* f$, si*

$$\langle f_n, u\rangle \to \langle f, u\rangle, \forall u \in E.$$

Théorème 1.9 ***(d'Aloaglu)****. Soit E un espace de Banach separable, et soit (f_n) une suite bornée dans E' le dual de E. Alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge faiblement dans E'.*

Proposition 1.10 *Soit E un espace de Banach, et soit (f_n) une suite dans E' le dual d'espace E.*

1. $f_n \to f$ *dans* E' *implique* $f_n \rightharpoonup^* f$.
2. *Si* $f_n \rightharpoonup^* f$, *alors* (f_n) *est bornée et* $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\| \geq \|f\|$.
3. *Si* $u_n \to u$ *dans* E *et* $f_n \rightharpoonup^* f$ *dans* E', *alors il suit que* $\langle f_n, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$.
4. $f_n \rightharpoonup f$ *dans* E' *implique* $f_n \rightharpoonup^* f$.
5. *Si E est refléxif, alors* $f_n \rightharpoonup^* f$ *est équivlente à* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* E'.

Convergence faible dans les espaces de Hilbert.

Théorème 1.11 ***(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet).*** *Soit H un espace de Hilbert réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire de H. Pour tout $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que*

$$\langle \varphi, v\rangle_{H'\times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H \quad et \quad \|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H .$$

Nous dirons qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H converge faiblement vers $f \in H$ si pour tout $v \in H$, les produits scalaires (f_n, v) convergent vers (f, v) dans $\mathbb{R}$. Nous noterons cette convergence par le symbole $\rightharpoonup$ pour la distinguer de la convergence forte (c'est-à-dire pour la norme hilbertienne) :

$$f_n \to f \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$
$$f_n \rightharpoonup f \iff \forall v \in H \ , \ \lim_{n\to\infty} (f_n, v) = (f, v) \, .$$

Proposition 1.12
1. *Une suite dans H qui converge fortement vers $f \in H$ converge aussi faiblement vers f.*
2. *La propriété « toute suite dans H qui converge faiblement vers $f \in H$ converge fortement vers f » est vraie si et seulement si la dimension de H est finie.*
3. *Toute suite faiblement convergente est bornée.*
4. *Si E et F sont des espaces de Hilbert réels, et si $u \in L(E, F)$, alors l'image par u de toute suite dans E faiblement convergente vers un élément $x \in E$ est faiblement convergente dans F vers $u(x)$.*

Le résultat crucial suivant est une conséquence du théorème de Riesz-Fréchet et du théorème 1.8 de Banach-Alaoglu.

Théorème 1.13 ***(Théorème de compacité faible de la boule unité fermée des espaces de Hilbert).*** *Si H est un espace de Hilbert, alors toute suite bornée dans H admet une sous-suite faiblement convergente.*

1.2.2 Rappels sur les espaces de Sobolev

Nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les espaces de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles. Leur compréhension est donc une étape nécessaire avant d'aborder les équations en question. Nous reprenons dans cette sous section certains énoncés de O. Kavian et de H. Brezis [13] sur le sujet, pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra consulter l'ouvrage de R.A. Adams [1]. Par la suite, Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω. Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) v\,(x)\, dx,$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On note

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Définition 1.14 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \ ..., d\} \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de u au sens des distributions (1.11)

Proposition 1.15 *L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u(x)v(x) \ + \nabla u(x).\nabla v(x)) \ dx \tag{1.12}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u(x)|^2 \ + |\nabla u(x)|^2) \ dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Soboleve $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert [13].

Voici l'inégalité très utile portant sur les normes de Sobolev.

Proposition 1.16 ***(Inégalité de Poincaré).*** *Soit Ω un ouvert de borné de $\mathbb{R}^d$, Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} .$$

En particulier, $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à celle de $H_0^1(\Omega)$ ($H_0^1(\Omega)$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur Γ).

Traces des fonctions $H^1(\Omega)$

On peut mentionner le résultat suivant sur les traces des fonctions $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.17 *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un opérateur linéaire continu $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, appelé opérateur trace, tel que*

$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ est compact.

On définit l'espace vectoriel $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ comme suit :

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left\{\gamma(u); \quad u \in H^1(\Omega)\right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} = \inf\left\{\|u\|_{1,\Omega}\,; \quad \gamma(u) = f\right\}.$$

Les premières propriétés les plus remarquables et utiles sont les suivantes :

1. *Si $u \in H^1(\Omega)$, alors $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est linéaire surjectif et*

$$\|\gamma(u)\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \leq C\,\|u\|_{1,\Omega} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

2. *Comme Ω est régulier, toute fonction $u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est la trace d'une fonction $\tilde{u} \in H_0^1(G)$, i.e. $\tilde{u}_{|\partial\Omega} = u$, où G est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant $\overline{\Omega}$.*

Sur les questions concernant les espaces traces, voir par exemple J.L. Lions et E. Magenes [35].

Le théorème de trace permet de généraliser aux fonctions de $H^1(\Omega)$ la formule de Green établie pour des fonctions de classe C^1.

Théorème 1.18 ***(Formule de Green).*** *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i(x)dx,$$

où $\nu = (\nu_i)_{1\leq i\leq d}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

Formule de Green pour l'élasticité

On munit l'espace produit $H^1(\Omega)^d$ du produit scalaire canonique et de la norme associée respectivement $(.,.)_{1,\Omega}$ et $\|.\|_{1,\Omega}$ qui sont définis par :

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega u_i v_i\ dx + \int_\Omega u_{i,j}v_{i,j}\ dx, \tag{1.13}$$

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega |v|^2 \ dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Et la norme de $L^2(\Omega)^d$ sera notée $\|.\|_{0,\Omega}$.

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega)^d \to L^2(\Gamma)^d$ est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de $H^1(\Omega)^d$ par cette application est notée par H_Γ, ce sous espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Pour σ assez régulier nous avons la formule de Green :

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(u)\, dx + \int_\Omega Div(\sigma).u \ dx = \int_\Gamma \sigma\nu.v \ d\Gamma \qquad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \tag{1.14}$$

Un résultat essentiel pour les applications du prochain chapitre est l'inégalité suivante :

Théorème 1.19 ***(Inégalité de Korn).*** *Soit Ω un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)^d$, on a :*

$$\int_\Omega v_i v_i \ dx + \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx \geq C \|v\|_{1,\Omega}^2.$$

Dualité

Rappelons que le dual V' d'un espace de Hilbert V est l'ensemble des formes linéaires continues sur V. Par application du Théorème 1.10 de représentation de Riesz, le dual de $L^2(\Omega)$ est identifié à $L^2(\Omega)$ lui-même. On peut aussi définir le dual d'un espace de Sobolev. En l'occurrence le dual de $H_0^1(\Omega)$ joue un rôle particulier dans la suite.

Définition 1.20 *Le dual de l'espace de Soblev $H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$. On note $\langle L, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} = L(\phi)$ le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual pour tout forme linéaire continue $L \in H^{-1}(\Omega)$ et toute fonction $\phi \in H_0^1(\Omega)$.*

Proposition 1.21 ***(propriétés des espaces*** $H^{-1}(\Omega)$***)***

1. *L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est caractérisé par*

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ f = v_0 + \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad avec\ v_0, v_1, ..., v_d \in L^2(\Omega) \right\}.$$

2. $H^{-1}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme :

$$\|L\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle L, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)} .$$

Remarque 1.22 *$H^{-1}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme* (1.9).

Remarque 1.23 *Pour tout Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on a*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv \left(L^2(\Omega)\right)' \subset H^{-1}(\Omega).$$

Les espaces $L^p\,(0,T;X)$

Soit $T > 0$ et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. On définit les espaces suivants :

$$C\,(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \ \text{ continue}\} ,$$

$$L^p\,(0,T;X) = \left\{u : [0,T] \to X \text{ mesurable} ;\ \int_0^T \|u(t)\|_X \, dt \prec \infty\right\}, 1 \leq p < \infty,$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u\,(t)\|_X^p \ dt\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

et

$$L^\infty\,(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \text{ mesurable} ;\ \exists C > 0 \ \ \|u(t)\|_X \leq C \ \ p.p.t\} ,$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\left\{C > 0 \ ; \ \ \|u\,(t)\|_X \leq C \ \ p.p. \ t \ \right\} .$$

Remarque 1.24 *Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach et $C\,(0,T;X)$ est dense dans $L^p(0,T;X)$. Si $1 \leq p < \infty$ et si X est réflexif, alors $L^p(0,T;X)$ est réflexif (cf. H. Brezis [13]).*

Par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 1.25 *1. Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)_X$*

alors $L^p(0,T;\ X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u,v)_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \ dt.$$

2. $L^r(0,T;\ X) \subset L^q(0,T;\ X)$*, avec injection continue,* $1 \leq q \leq r \leq \infty$.
3. *Si X un espace de Hilbert, alors*

$$L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X), si\ 1 < p,q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0,T;X)' = L^\infty(0,T;X),$$

où $L^p(0,T;\ X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0,T;\ X)$, $1 \leq p < \infty$.

Théorème 1.26 *Soit $(X, (.,.)_X)$ un espace de Hilbert et soit $u : [0,T] \to X$ une fonction telles que u, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T;\ X)$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Alors :

1. *la fonction $t \to \frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0,T[$,*
2. $\frac{d}{dt}\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), u(t)\right)_X$ *p.p.* $t \in]0,T[$,
3. $\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s), u(s)\right)_X ds$ *pour tout* $t \in [0,T]$.

1.2.3 Lemmes de type Gronwall

Nous passons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.27 *Soient m et $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,T[$, $a \geq 0$ une constante, $\phi \in C(0,T;\mathbb{R})$*

1. *Si*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\, ds + \int_0^t n(s)\, \phi(s)\, ds \quad \forall t \in [0,T],$$

Alors
$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)\, ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)\, ds\right) \quad \forall t \in [0,T],$$

2. *Si*
$$\phi(t) \leq m(t) + a\int_0^t \phi(s)\, ds \quad \forall t \in [0,T],$$

Alors
$$\int_0^t \phi(s)\, ds \leq \exp(aT) \int_0^t m(s)\, ds \quad .$$

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie de (1) de ce lemme devient :

Corollaire 1.28 *Soit $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telle que, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,T[$, et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\, \phi(s)\, ds \quad \forall t \in [0,T],$$

Alors
$$\phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)\, ds\right) \quad \forall t \in [0,T].$$

le corollaire 1.27 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ϕ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s)\, \phi(s)\, ds \quad \forall t \in [0,T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ϕ.

Lemme 1.29 *Soient m et $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,T[$, $a \geq 0$ une constante. Soit également $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\, \phi(t)\, dt + \int_0^s n(t)\, \phi^2(t)\, dt \quad \forall s \in [0,T],$$

Alors
$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)\, dt\right) \exp\left(\int_0^s n(t)\, dt\right) \quad \forall s \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$ le lemme1.28 devient :

Corollaire 1.30 *Soit* $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ *telle que* $m(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in]0, T[$, $a \geq 0$ *une constante. Soit également* $\phi : [0, T] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)\,dt \quad \forall s \in [0, T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)\,dt\right) \quad \forall s \in [0, T].$$

1.3 Les opérateurs monotones

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle f, \ u \rangle$, $f \in F$, $u \in E$

Définition 1.31 *Soit* A *un opérateur de* E *dans* F. *On dit que* A *est monotone si*

$$\langle Ax - Ay, \ x - y \rangle \geq 0, \ \forall x, \ y \in E. \tag{1.15}$$

On dit que A *est fortement monotone si*

$$\langle Ax - Ay, \ x - y \rangle > 0, \ \forall x, \ y \in E \text{ tel que } x \neq y \tag{1.16}$$

Il suffit en général d'imposer en plus de la monotonie une condition de continuité très faible pour avoir des résultats satisfaisants.

Définition 1.32 *Soit* E *un espace de Banach et* E' *son dual. On dit qu'une application* A *de* E *dans* E' *est hémicontinue si pour tout* x, $y \in E$, *l'application*

$$t \in [0, \ 1] \to \langle A(x + ty), \ y \rangle \tag{1.17}$$

est continue.

Chapitre 2

Comportement asymptotique d'un fluide non-newtonien avec des conditions de Fourier et de Tresca sur le bord

Résumé . Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un

fluide de Bingham stationnaire isotherme incompressible, notre opérateur sera perturbé par un terme $u.\nabla u$, dans un domaine borné à trois dimensions avec des conditions aux limites de Fourier et de Tresca.

Contenu

2.1 Position du problème

Nous considérons un écoulement incompressible isotherme d'un fluide de Bingham perturbé par un terme $u.\nabla u$ en régime stationniare dans un domaine mince Ω^ε de $\mathbb{R}^3$, où ε est un réel positif appartenant à $]0,1[$ et qui tend vers zéro. La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}_L^\varepsilon$, avec :

• Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h\left(x_1, x_2\right)$,

• Γ_L^ε est la frontière latérale,

• ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε.

On note $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3$. Le domaine

$$\Omega^\varepsilon = \left\{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega,\ 0 < x_3 < \varepsilon h\left(x'\right)\right\}$$

où h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que :

$$0 < h_\star \leq h\left(x'\right) \leq h^\star,\ \forall\left(x', 0\right) \in \omega.$$

Pour les forces extérieures f^ε données, nous supposons que les équations qui gouvernent l'écoulement isotherme stationnaire du fluide de Bingham sont :

La loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$-\operatorname{div} \sigma^\varepsilon + u^\varepsilon.\nabla u^\varepsilon = f^\varepsilon$$

avec

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) + \alpha^\varepsilon \frac{d_{ij}(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|} - p^\varepsilon \delta_{ij}$$

le tenseur des contraintes et

$$d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

le tenseur des taux de déformations.

u^ε est la vitesse de fluide, μ est sa viscosité et p^ε sa pression.

Nous supposons aussi que le fluide est incompressible

$$\operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \quad \Omega^\varepsilon$$

Le frottement sur ω est modélisé par la loi de Tresca

$$\begin{aligned} &|\sigma_T^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow u_T^\varepsilon = 0 \\ &|\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } u_T^\varepsilon = -\beta \sigma_T^\varepsilon \end{aligned}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, k^ε est le seuil de frottement.
La vitesse sur le bord est donnée par :

$$u^\varepsilon = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon;$$

$$u^\varepsilon.n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \omega$$

$$\sigma_T^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) + l^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon$$

où $n = (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur normal unitaire extérieur à Γ^ε.
La normale unitaire extérieure à ω est le vecteur $(0, 0, -1)$.
On définit les composantes normales et tangentielles de la vitesse et du tenseur des contraintes par

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon &= u^\varepsilon.n = u_i^\varepsilon.n_i \\ u_{T_i}^\varepsilon &= u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon.n_i \\ \sigma_n^\varepsilon &= \left(\sigma^\varepsilon.n\right).n = \sigma_{ij}^\varepsilon.n_i.n_j \\ \sigma_{T_i}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^\varepsilon.n_j - \sigma_n^\varepsilon.n_i \end{aligned}$$

Le problème complet consiste donc à trouver un champ de vitesse u^ε vérifiant les équations et les conditions aux limites suivantes :

$$
(Pb_1)\left\{
\begin{array}{lr}
-\operatorname{div}\sigma^\varepsilon + u^\varepsilon.\nabla u^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{dans } \Omega^\varepsilon \quad (1) \\
\left.\begin{array}{l}
\sigma^\varepsilon_{ij} = \widetilde{\sigma}^\varepsilon_{ij} - p^\varepsilon \delta_{ij} \\
\widetilde{\sigma}^\varepsilon = 2\mu D(u^\varepsilon) + \alpha^\varepsilon \frac{D(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|}, \quad \text{si } D(u^\varepsilon) \neq 0 \\
|\widetilde{\sigma}^\varepsilon| \leq \alpha^\varepsilon \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } D(u^\varepsilon) \neq 0
\end{array}\right\} & \text{dans } \Omega^\varepsilon \quad (2) \\
\operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon \quad (3) \\
\left.\begin{array}{l}
\sigma^\varepsilon_T(u^\varepsilon) + l^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \\
\qquad u^\varepsilon.n = 0
\end{array}\right\} & \text{sur } \Gamma^\varepsilon_1 \quad (4) \\
u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\varepsilon_L \quad (5) \\
u^\varepsilon.n = 0 & \text{sur } \omega \quad (6) \\
\left.\begin{array}{l}
|\sigma^\varepsilon_T| < k^\varepsilon \Longrightarrow u^\varepsilon_T = 0 \\
|\sigma^\varepsilon_T| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } u^\varepsilon_T = -\beta\sigma^\varepsilon_T
\end{array}\right\} & \text{sur } \omega \quad (7)
\end{array}\right.
$$

Lemme 2.1

$$u^\varepsilon_T \sigma^\varepsilon_T + k^\varepsilon \left|u^\varepsilon_T\right| = 0 \qquad \textit{sur } \omega.$$

Preuve : On suppose que $u^\varepsilon_T \sigma^\varepsilon_T + k^\varepsilon \left|u^\varepsilon_T\right| = 0$.

- Si $|\sigma^\varepsilon_T| = k^\varepsilon$ alors

$$u^\varepsilon_T \sigma^\varepsilon_T = -\left|\sigma^\varepsilon_T\right| \left|u^\varepsilon_T\right|$$

d'où l'existence d'un $\beta \geq 0$ tel que $u^\varepsilon_T = -\beta\sigma^\varepsilon_T$.

- Si $|\sigma^\varepsilon_T| \leq k^\varepsilon$ alors

$$
\begin{aligned}
u^\varepsilon_T \sigma^\varepsilon_T + k^\varepsilon \left|u^\varepsilon_T\right| &\geq 0 \\
u^\varepsilon_T \sigma^\varepsilon_T + k^\varepsilon \left|u^\varepsilon_T\right| &\geq -\left|\sigma^\varepsilon_T\right| \left|u^\varepsilon_T\right| + k^\varepsilon \left|u^\varepsilon_T\right| \\
&\geq \left|u^\varepsilon_T\right| \left(k^\varepsilon - \left|\sigma^\varepsilon_T\right|\right)
\end{aligned}
$$

et comme $k^\varepsilon - |\sigma^\varepsilon_T| \geq 0$ alors $u^\varepsilon_T = 0$.

Réciproquement, on suppose que u^ε vérifie la condition aux limites de Tresca

▷ Si $|\sigma_T^\varepsilon| \leq k^\varepsilon$ alors $u_T^\varepsilon = 0$

$$u_T^\varepsilon \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon| = 0.$$

▷ Si $|\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon$ alors il existe $\beta \geq 0$ tel que $u_T^\varepsilon = -\beta \sigma_T^\varepsilon$.

D'où

$$u_T^\varepsilon \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon| = -\beta |\sigma_T^\varepsilon|^2 + \beta |\sigma_T^\varepsilon|^2 = 0.$$

■

2.2 Formulation variationnelle du problème

Pour l'ouvert Ω^ε on définit l'ensemble et les espaces suivants :

$$V^\varepsilon = \left\{ v \in \left(H^1(\Omega^\varepsilon)\right)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon ;\ v.n = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1^\varepsilon \right\},$$

$$V_{\text{div}}^\varepsilon = \{ v \in V^\varepsilon : \operatorname{div} v = 0 \},$$

$$L_0^2(\Omega^\varepsilon) = \left\{ q \in L^2(\Omega^\varepsilon) : \int_{\Omega^\varepsilon} q dx = 0 \right\},$$

On note :

$$a(u^\varepsilon, \varphi) = 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u^\varepsilon) d_{ij}(\varphi) dx,$$

$$(p^\varepsilon, \operatorname{div}(\varphi)) = \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div}(\varphi)\, dx,$$

$$b(u^\varepsilon, \varphi) = \int_{\Omega^\varepsilon} u_i^\varepsilon \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \varphi_j dx,$$

$$(f^\varepsilon, \varphi) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \varphi_i dx,$$

$$j^\varepsilon(\varphi) = \int_\omega k^\varepsilon |\phi|\, dx' + \alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(\varphi)|\, dx$$

Proposition 2.2 *Soient u^ε, p^ε des solutions du problème (Pb_1), alors elles verifient le* *problème variationnel suivant :*

$$(Pb_2)\begin{cases} \textit{Trouver } u^\varepsilon \in V^\varepsilon_{\text{div}} \textit{ et } p^\varepsilon \in L^2_0(\Omega^\varepsilon) \textit{ telle que} \\ a(u^\varepsilon,\varphi-u^\varepsilon)-(p^\varepsilon,\operatorname{div}(\varphi))+l^\varepsilon\displaystyle\int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(\varphi-u^\varepsilon)\,d\tau+b(u^\varepsilon,\varphi-u^\varepsilon)+j^\varepsilon(\varphi)-j^\varepsilon(u^\varepsilon)\geq \\ (f^\varepsilon,\varphi-u^\varepsilon),\ \forall\varphi\in V^\varepsilon, \end{cases}$$

Preuve : En multipliant l'équation (1) par $(\varphi - u^\varepsilon)$ où $\varphi \in V^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\sigma^\varepsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i-u^\varepsilon_i)dx+\int_{\Omega^\varepsilon}u^\varepsilon_i\frac{\partial u^\varepsilon_j}{\partial x_i}(\varphi_j-u^\varepsilon_i)dx- \\ \int_{\Gamma^\varepsilon}\sigma^\varepsilon_{ij}.n_j(\varphi_i-u^\varepsilon_i)ds=\int_{\Omega^\varepsilon}f^\varepsilon_i(\varphi_i-u^\varepsilon_i)dx \tag{2.1}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$d_{ij}(u^\varepsilon)d_{ij}(\varphi)\leq|D(u^\varepsilon)|\,|D(\varphi)| \tag{2.2}$$

D'après Les conditions aux limites et l'inégalité (2.2) on obtient

$$a(u^\varepsilon,\varphi-u^\varepsilon)-(p^\varepsilon,\operatorname{div}(\varphi))+l^\varepsilon\int_{\Gamma_1^\varepsilon}u^\varepsilon(\varphi-u^\varepsilon)\,d\tau+b(u^\varepsilon,\varphi-u^\varepsilon)+ \\ j^\varepsilon(\varphi)-j^\varepsilon(u^\varepsilon)\geq(f^\varepsilon,\varphi-u^\varepsilon).$$

■

2.2.1 Lemmes utiles

On rappelle les lemmes suivants dont on aura besoin :

Lemme 2.3 ***2.1*** *(Inégalité de Poincaré) [23]*

$$\int_{\Omega^\varepsilon}|u^\varepsilon|^2\,dx\leq 2\varepsilon h^\star\int_{\Gamma_1^\varepsilon}|u^\varepsilon|^2\,d\tau+2\,(\varepsilon h^\star)^2\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}\right|^2dx. \tag{2.3}$$

Lemme 2.4 *(Inégalité de Korn) [23]*

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq 2\int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|^2\, dx + C(\Gamma_1^\varepsilon)\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2\, d\tau. \tag{2.4}$$

avec $C(\Gamma_1^\varepsilon) = 2\,\|D_2 h^\varepsilon\|_{C(\overline{\omega})}\left(1 + \|D_1 h^\varepsilon\|^2_{C(\overline{\omega})}\right).$

Théorème 2.5 *Soit u^ε la solution du problème variationnel (Pb_2) alors*

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \frac{l^\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2\, d\tau + \int_\omega k^\varepsilon\, |u^\varepsilon|\, dx' + \alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|\, dx \leq \tag{2.5}$$

$$\frac{\mu}{16}\,\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left[\frac{8\varepsilon^2 h^{\star 2}}{\mu} + \frac{\varepsilon h^\star}{l^\varepsilon}\right]\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$$

Preuve : On choisit $\varphi = 0$ comme fonction test dans (Pb_2), on obtient

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2\, d\tau + b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \int_\omega k^\varepsilon\, |u^\varepsilon|\, dx' + \alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|\, dx \leq (f^\varepsilon, u^\varepsilon) \tag{2.6}$$

comme

$$(f^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\, \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \tag{2.7}$$

d'après (2.3)

$$(f^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \left(\sqrt{2\varepsilon h^\star}\left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\varepsilon h^\star\, \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right) \tag{2.8}$$

on a

$$\sqrt{2}\varepsilon h^\star\, \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\, \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \sqrt{2}\varepsilon h^\star \sqrt{\frac{8}{\mu}}\, \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \sqrt{\frac{\mu}{8}}\, \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$$

on applique l'inégalité de Young

$$\sqrt{2}\varepsilon h^\star\, \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\, \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \frac{8\varepsilon^2 h^{\star 2}}{\mu}\, \|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{\mu}{16}\, \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \tag{2.9}$$

De même

$$\sqrt{2\varepsilon h^\star}\,\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon}|u^\varepsilon|^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\varepsilon h^\star}\sqrt{\frac{1}{l^\varepsilon}}\,\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\sqrt{\frac{l^\varepsilon}{1}}\left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon}|u^\varepsilon|^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$
$$\leq \frac{\varepsilon h^\star}{l^\varepsilon}\,\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\frac{l^\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_1^\varepsilon}|u^\varepsilon|^2\,d\tau$$

en utilisant (2.9)-(2.10) on obtient

$$|(f^\varepsilon,u^\varepsilon)|\leq\frac{\mu}{16}\,\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\left[\frac{8\varepsilon^2h^{\star2}}{\mu}+\frac{\varepsilon h^\star}{l^\varepsilon}\right]\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\frac{l^\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_1^\varepsilon}|u^\varepsilon|^2\,d\tau \tag{2.11}$$

D'autre part

$$b(u^\varepsilon,u^\varepsilon)=\int_{\Omega^\varepsilon}u_i^\varepsilon\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}u_j^\varepsilon dx$$

on a

$$2u_j^\varepsilon\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j^\varepsilon\right)^2$$

en utilisant la formule de Green, il vient que

$$b(u^\varepsilon,u^\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_{\Gamma^\varepsilon}\left(u_j^\varepsilon\right)^2u_i^\varepsilon.n_i d\tau-\int_{\Omega^\varepsilon}\left(u_j^\varepsilon\right)^2\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_i}dx$$

et comme $u^\varepsilon\in V^\varepsilon_{\text{div}}$ on obtient

$$b(u^\varepsilon,u^\varepsilon)=0 \tag{2.12}$$

en substituant (2.11)-(2.12) dans (2.6) on obtient (2.5). ■

Théorème 2.6 *Supposons que* $\varepsilon l^\varepsilon=\widehat{l}$ *et*

$$\frac{C(\Gamma_1^\varepsilon)}{l^\varepsilon}\leq\frac{1}{\mu} \tag{2.13}$$

alors

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leq\left[\frac{384\varepsilon^2h^{\star2}}{\mu^2}+\frac{48\varepsilon h^\star}{\mu l^\varepsilon}\right]\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \tag{2.14}$$

Preuve : : En utilisant l'inégalité de Korn il vient

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \frac{4}{\mu} a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + 4C(\Gamma_1^\varepsilon) \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \, d\tau$$

d'après (2.5) on a

$$\begin{aligned}
\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \quad \leq \quad & \frac{1}{4} \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left[\frac{32\varepsilon^2 h^{\star 2}}{\mu^2} + \frac{4\varepsilon h^\star}{\mu l^\varepsilon}\right] \|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \\
& \frac{1}{2} \frac{\mu C(\Gamma_1^\varepsilon)}{l^\varepsilon} \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left[\frac{64C(\Gamma_1^\varepsilon)}{\mu l^\varepsilon} \varepsilon^2 h^{\star 2} + \frac{8C(\Gamma_1^\varepsilon)}{(l^\varepsilon)^2} \varepsilon h^\star\right] \|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}
\end{aligned}$$

et sous l'hypothèse (2.13) on déduit (2.14). ■

2.2.2 Changement d'échelle et formulation variationnelle

Afin d'obtenir des estimations sur $\hat{u}^\varepsilon$ et $\hat{p}^\varepsilon$ dans un domaine fixe Ω qui ne dépend pas de ε, on introduit le changement de variables $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$.
où

$$\Omega = \left\{(x', z) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega, \ 0 < z < h(x')\right\}$$

On note $\Gamma = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L$ sa frontière. Nous définissons maintenant sur Ω des nouvelles inconnues

$$\begin{cases}
\hat{u}_i^\varepsilon(x', z) = u_i^\varepsilon(x', x_3) \quad \text{pour } i = 1, 2; \\
\hat{u}_3^\varepsilon(x', z) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3). \\
\widehat{p}^\varepsilon(x', z) = \varepsilon^2 p^\varepsilon(x', x_3)
\end{cases}$$

Supposons ce qui suit :

$$\hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \quad \hat{f}(x', z) = \varepsilon^2 f^\varepsilon(x', x_3), \text{ et } \widehat{l} = \varepsilon l^\varepsilon, \quad \widehat{\alpha} = \varepsilon \alpha^\varepsilon$$

Soit

$$
\begin{aligned}
V &= \{\widehat{\varphi} \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 : \widehat{\varphi} = 0 \text{ sur } \Gamma_L;\ \widehat{\varphi}.n = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1\}, \\
V_{\text{div}} &= \{\widehat{\varphi} \in V : \operatorname{div}(\widehat{\varphi}) = 0\}, \\
\Pi(V) &= \{\varphi^* = (\varphi_1^\star, \varphi_2^\star) \in \left(H^1(\Omega)\right)^2 : \varphi^* = 0 \text{ sur } \Gamma_L\}, \\
V_z &= \{\varphi^* = (\varphi_1^\star, \varphi_2^\star) \in \left(L^2(\Omega)\right)^2 : \frac{\partial \varphi_i^\star}{\partial z} \in L^2(\Omega) \quad i = 1,2 \text{ et } \varphi^* = 0 \text{ sur } \Gamma_L\ \} \\
\sum(V) &= \{\varphi^* \in \Pi(V) : \varphi^* \text{ vérifie la condition } (D')\}
\end{aligned}
$$

où la condition (D') est donnée par

$$
\int_{\Omega^\varepsilon} \left(\varphi_1^\star \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \varphi_2^\star \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) dx' dz \quad \forall \theta \in C_0^\infty(\omega)
$$

En multipliant par ε la formulation variationnelle du problème (Pb_2) en injectant les nouvelles données et inconnues, nous déduisons que $(\hat{u}^\varepsilon, \hat{p}^\varepsilon)$ satisfait le problème suivant

$$\sum_{1\le i,j\le 2}\int\limits_{\Omega}\left[\mu\varepsilon^2\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)-\delta_{ij}\widehat{p}^\varepsilon\right]\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dx'dz+ \tag{2.15}$$

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dx'dz$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\mu\varepsilon^2\left(\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)dx'dz+$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(2\mu\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}-\widehat{p}^\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)dx'dz+$$

$$\sum_{1\le i,j\le 2}\int\limits_{\Omega}\varepsilon^2\hat{u}_i^\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}(\hat{\phi}_j-\hat{u}_j^\varepsilon)dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\varepsilon^4\hat{u}_i^\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)dx'dz+$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\varepsilon^2\hat{u}_3^\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dx'dz+\int\limits_{\Omega}\varepsilon^4\hat{u}_3^\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)dx'dz+$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}\widehat{l}\hat{u}_i^\varepsilon(x',h(x')\left(\hat{\phi}_i(x',h(x'))-\hat{u}_i^\varepsilon(x',h(x'))\right)\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx'+$$

$$\int_{\omega}\widehat{l}\varepsilon^2\hat{u}_3^\varepsilon(x',h(x')\left(\hat{\phi}_3(x',h(x'))-\hat{u}_3^\varepsilon(x',h(x'))\right)\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx'+$$

$$\int_{\omega}\hat{k}\left(\left|\hat{\phi}\right|-|\hat{u}^\varepsilon|\right)dx'+\widehat{\alpha}\int_{\Omega}\left|D(\hat{\phi})\right|dx-\widehat{\alpha}\int_{\Omega}|D(\hat{u}^\varepsilon)|\,dx'dz\ge$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dx'dz+\int_{\Omega}\varepsilon\hat{f}_3(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)dx'dz,\quad\forall\ \hat{\phi}\in V;$$

avec

$$|D(v)|=\left[\frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le 2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial v_3}{\partial x_i}\right)^2+\varepsilon^2\left(\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\quad\forall v\in V$$

Maintenant on va déduire des estimations sur la pression et la vitesse qui nous permettront de passer à la limite.

2.2.3 Estimation à priori

Théorème 2.7 *Etant donné* $f^\varepsilon \in \left(L^2(\Omega^\varepsilon)\right)^3$, $k^\varepsilon \in L^\infty(\omega)$ *et supposons que* $\frac{C(\Gamma_1^\varepsilon)}{l^\varepsilon} \leq \frac{1}{\mu}$, *alors il existe des constantes* $c_i > 0$, $i = 1, ...5$ *ne dépendant pas de* ε *telles que :*

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 2} \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{2} \left(\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq c_1. \tag{2.16}$$

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 \quad \textit{pour } i = 1, 2 \tag{2.17}$$

$$\|\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c_3 \tag{2.18}$$

$$\left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_4 \quad \textit{pour } i = 1, 2 \tag{2.19}$$

$$\left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \varepsilon c_5 \tag{2.20}$$

Preuve : En passant au domaine fixe Ω dans le membre de droite de (2.14) et en utilisant le fait que $\varepsilon^3 \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 = \left\| \hat{f} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$ on trouve :

$$\|\nabla \hat{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left[\frac{384 h^{\star 2}}{\mu^2} + \frac{48 h^\star}{\mu \widehat{l}} \right] \left\| \hat{f} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{2.21}$$

de (2.21) on déduit (2.16) avec $c_1 = \left[\frac{384 h^{\star 2}}{\mu^2} + \frac{48 h^\star}{\mu \widehat{l}} \right] \left\| \hat{f} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$.

▷ Pour montrer les estimations (2.17), (2.18) on utilise l'inégalité de Poincaré dans le domaine Ω :

$$\int_\Omega |\hat{u}_i^\varepsilon|^2 \, dx \leq 2h^\star \int_{\Gamma_1} |\hat{u}_i^\varepsilon|^2 \, d\tau' + 2h^{\star 2} \int_\Omega \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 dx' dz \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.22}$$

en utilisant (2.16) on obtient

$$
\begin{aligned}
2h^{\star 2}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z}\right|^2 dx'dz \leq c_5 \quad & i=1,2 \quad \left(c_5 = 2h^{\star 2}c_1\right) \\
2\varepsilon^2 h^{\star 2}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z}\right|^2 dx'dz \leq c_6 \quad & \left(c_6 = 2h^{\star 2}c_1\right)
\end{aligned}
$$

d'autre part

$$
\text{pour } i=1,2 \quad \int_{\Gamma_1} \left|\hat{u}_i^{\varepsilon}\right|^2 d\tau' \leq \max_{x'\in\omega}\sqrt{1+\left|\nabla h(x')\right|^2}\int_{\Gamma_1^{\varepsilon}}\left|u_i^{\varepsilon}\right|^2 d\tau \tag{2.23}
$$

$$
\int_{\Gamma_1} \left|\hat{u}_3^{\varepsilon}\right|^2 d\tau' \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\max_{x'\in\omega}\sqrt{1+\left|\nabla h(x')\right|^2}\int_{\Gamma_1^{\varepsilon}}\left|u_3^{\varepsilon}\right|^2 d\tau \tag{2.24}
$$

d'après (2.5) et (2.16) on a

$$
\int\limits_{\Gamma_1^{\varepsilon}} \left|u^{\varepsilon}\right|^2 d\tau \leq \frac{\mu c_1}{8\widehat{l}} + \left[\frac{16h^{\star 2}}{\mu\widehat{l}} + \frac{2h^{\star}}{\widehat{l^2}}\right]\left\|\hat{f}\right\|^2_{L^2(\Omega)}
$$

donc

$$
\int\limits_{\Gamma_1^{\varepsilon}} \left|u^{\varepsilon}\right|^2 d\tau \leq C(\Omega,\ \widehat{l},\ \mu,\ \hat{f},\ h^{\star}) \tag{2.25}
$$

en utilisant (2.22), (2.23), (2.24) et (2.25) on déduit

$$
\begin{aligned}
\|\hat{u}_i^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_2 \quad i=1,2 \\
\|\varepsilon\hat{u}_3^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_3.
\end{aligned}
$$

▷ On choisit $\hat{\phi} = (\hat{u}_1^{\varepsilon} + \psi,\ \hat{u}_2^{\varepsilon},\ \hat{u}_3^{\varepsilon})$ dans (2.15) en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on trouve

$$\int_\omega \widehat{l}\hat{u}_1^\varepsilon(x',h(x'))\psi(x',h(x'))\sqrt{1+\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx' \leq$$

$$\widehat{l}\left[\int_\omega |\hat{u}_1^\varepsilon(x',h(x'))|^2\sqrt{1+\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx'\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\int_\omega |\psi(x',h(x'))|^2\sqrt{1+\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx'\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \widehat{l}\max_{x'\in\omega}\sqrt{1+\nabla h^\varepsilon(x')|^2}\left[\int_\omega |\hat{u}_1^\varepsilon(x',h(x'))|^2\sqrt{1+\nabla h(x')|^2}dx'\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\int_\omega |\psi(x',h(x'))|^2\sqrt{1+\nabla h(x')|^2}dx'\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \widehat{l}\max_{x'\in\omega}\sqrt{1+\nabla h(x')|^2}\left(\int_{\Gamma_1}|\hat{u}_1^\varepsilon|^2 d\tau'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Gamma_1}|\psi|^2 d\tau'\right)^{\frac{1}{2}}$$

et comme

$$\left(\int_{\Gamma_1}|\hat{u}_1^\varepsilon|^2 d\tau'\right)^{\frac{1}{2}} \leq C'$$

d'après la continuité de l'application de trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$, il existe une constante C'' indépendante de ε telle que

$$\left(\int_{\Gamma_1}|\psi|^2 d\tau'\right)^{\frac{1}{2}} \leq C''\|\psi\|_{H^1(\Omega)}$$

d'où

$$\int_\omega \widehat{l}\hat{u}_1^\varepsilon(x',h(x'))\psi(x',h(x'))\sqrt{1+\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx' \leq C'''\|\psi\|_{H^1(\Omega)}$$

avec

$$C''' = C'C''\widehat{l}\max_{x'\in\omega}\sqrt{1+\nabla h(x')|^2}.$$

en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\left|\varepsilon^2\int_\Omega \hat{u}_1^\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1}\psi dx'dz\right| \leq \varepsilon^2\|\hat{u}_1^\varepsilon\|_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial\hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^4(\Omega)}$$

Utilisons l'injection de Sobolev $\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}$, on obtient

$$\left| \varepsilon^2 \int_\Omega \hat{u}_1^\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1} \psi dx' dz \right| \leq c\varepsilon^2 \|\hat{u}_1^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$$

de même

$$\left| \varepsilon^2 \int_\Omega \hat{u}_2^\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_2} \psi dx' dz \right| \leq c\varepsilon^2 \|\hat{u}_2^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$$

et

$$\left| \varepsilon^2 \int_\Omega \hat{u}_3^\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} \psi dx' dz \right| \leq c\varepsilon^2 \|\hat{u}_3^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on trouve

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial x_1} \psi dx' dz \quad \leq \quad & \mu\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{2} \left(\left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \\
& \mu \left(\left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} + \\
& c\varepsilon^2 \|\hat{u}_1^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \\
& c\varepsilon^2 \|\hat{u}_2^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \\
& + c\varepsilon^2 \|\hat{u}_3^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \\
& C''' \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \widehat{\alpha}\sqrt{|\Omega|} \|D(\psi)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \hat{f} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

et comme

$$\|D(\psi)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \tag{2.26}$$

de (2.16), (2.17) et (2.18) on déduit

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{p}^{\varepsilon}}{\partial x_1}\psi dx'dz \quad &\leq \quad \mu c_1 \left(\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) + \\ & (2cc_2c_1 + cc_3c_1 + C''') \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \widehat{\alpha}\sqrt{|\Omega|}\, \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \\ & \left\| \hat{f} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} .\end{aligned}$$

$\triangleright$ De même si on choisit $\hat{\phi} = (\hat{u}_1^{\varepsilon} - \psi,\, \hat{u}_2^{\varepsilon},\, \hat{u}_3^{\varepsilon})$ on déduit

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{p}^{\varepsilon}}{\partial x_1}\psi dx'dz \quad &\leq \quad \mu c_1 \left(\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) + \\ & (2cc_2c_1 + cc_3c_1 + C''') \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \widehat{\alpha}\sqrt{|\Omega|}\, \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \hat{f} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} .\end{aligned}$$

d'où on trouve (2.19) pour $i = 1$.

$\triangleright$ On choisit $\hat{\phi} = (\hat{u}_1^{\varepsilon},\, \hat{u}_2^{\varepsilon} \pm \psi,\, \hat{u}_3^{\varepsilon})$ on obtient (2.19) pour $i = 2$, et on choisit $\hat{\phi} = (\hat{u}_1^{\varepsilon}, \hat{u}_2^{\varepsilon}, \hat{u}_3^{\varepsilon} \pm \psi)$ pour obtenir (2.20). ■

2.3 Résultats de convergence et problème limite

Théorème 2.8 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 2.7, il existe $u_i^{\star}$ dans V_z, $i = 1, 2$ tel que*

$$\hat{u}_i^{\varepsilon} \rightharpoonup u_i^{\star} \quad (1 \leq i \leq 2) \quad \textit{faiblement dans } V_z, \tag{2.27}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i, j \leq 2) \ \textit{faiblement dans } L^2(\Omega), \tag{2.28}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z} \rightharpoonup 0 \ \textit{faiblement dans } L^2(\Omega), \tag{2.29}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i \leq 2) \ \textit{faiblement dans } L^2(\Omega), \tag{2.30}$$

$$\varepsilon \hat{u}_3^{\varepsilon} \rightharpoonup 0 \ \textit{faiblement dans } L^2(\Omega), \tag{2.31}$$

$$\widehat{p}^{\varepsilon} \rightharpoonup p^{\star} \ \textit{faiblement dans } L^2(\Omega), \ \textit{depend seulement de } x'. \tag{2.32}$$

Preuve. D'après (2.16), on obtient (2.27) et d'après (2.16) et (2.27) on obtient (2.28).

De (2.28), et du fait que $\operatorname{div}(\hat{u}_i^\varepsilon) = 0$ on obtient (2.29). De (2.16) et (2.18) on obtient (2.30). De (2.19) et (2.20) on obtient (2.32). De (2.18) , $\operatorname{div}(\hat{u}_i^\varepsilon) = 0$ et avec un choix particulier du fonction de test on obtient (2.31).

Théorème 2.9 *Sous les mêmes hypothèses du Théorème 2.7 $u^\star$, $p^\star$ vérifient*

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i - u_i^\star)dx'dz - \int\limits_{\Omega} p^\star(x')\left(\frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial x_2}\right)dx'dz + \tag{2.33}$$

$$\int\limits_{\omega} p^\star(x')\left[\hat{\phi}_1(x', h(x'))\frac{\partial h(x')}{\partial x_1} + \hat{\phi}_2(x', h(x'))\frac{\partial h(x')}{\partial x_2}\right]dx' +$$

$$\sum_{i=1}^{2}\widehat{l}\int\limits_{\omega} u_i^\star(x', h(x'))\left[\hat{\phi}_i(x', h(x')) - u_i^\star(x', h(x'))\right]dx' +$$

$$\int\limits_{\omega} \hat{k}\left(\left|\hat{\phi}\right| - |u^\star|\right)dx' + \widehat{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx'dz$$

$$-\widehat{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx'dz \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i, \hat{\phi}_i - u_i^\star) \qquad \forall\hat{\phi} \in \Pi(V).$$

Preuve. De (2.15) on obtient

$$\mu\varepsilon^2\sum_{1\le i,j\le 2}\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}dx'dz+\mu\sum_{i=1}^2\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}dx'dz \tag{2.34}$$

$$+\sum_{j=1}^2\int\limits_\Omega\mu\varepsilon^2\left(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right)\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j}dx'dz+\int\limits_\Omega 2\mu\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}dx'dz+$$

$$\sum_{i=1}^2\int_\omega\widehat{l}\hat{u}_i^\varepsilon(x',h(x')\hat{u}_i^\varepsilon(x',h(x'))\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx'+$$

$$\int_\omega\widehat{l}\varepsilon^2\hat{u}_3^\varepsilon(x',h(x')\hat{u}_3^\varepsilon(x',h(x'))\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx'+$$

$$\int_\omega\hat{k}\left|\hat{u}^\varepsilon\right|dx'+\widehat{\alpha}\int_\Omega\left|D(\hat{u}^\varepsilon)\right|dx'dz+\sum_{1\le i,j\le 2}\int\limits_\Omega\varepsilon^2\hat{u}_i^\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\hat{u}_j^\varepsilon dx'dz+\sum_{i=1}^2\int\limits_\Omega\varepsilon^4\hat{u}_i^\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\hat{u}_3^\varepsilon dx'dz+$$

$$\sum_{i=1}^2\int\limits_\Omega\varepsilon^2\hat{u}_3^\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\hat{u}_i^\varepsilon dx'dz+\int\limits_\Omega\varepsilon^4\hat{u}_3^\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\hat{u}_3^\varepsilon dx'dz\le\mu\varepsilon^2\sum_{1\le i,j\le 2}\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial x_j}dx'dz+$$

$$\mu\sum_{i=1}^2\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}dx'dz+\sum_{j=1}^2\int\limits_\Omega\mu\varepsilon^2\left(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right)\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial x_j}dx'dz+$$

$$\int\limits_\Omega 2\mu\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz+\sum_{1\le i,j\le 2}\int\limits_\Omega\varepsilon^2\hat{u}_i^\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\hat{\phi}_j dx'dz+\sum_{i=1}^2\int\limits_\Omega\varepsilon^4\hat{u}_i^\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\hat{\phi}_3 dx'dz+$$

$$\sum_{i=1}^2\int\limits_\Omega\varepsilon^2\hat{u}_3^\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\hat{\phi}_i dx'dz+\int\limits_\Omega\varepsilon^4\hat{u}_3^\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\hat{\phi}_3 dx'dz$$

$$\sum_{i=1}^2\int_\omega\widehat{l}\hat{u}_i^\varepsilon(x',h(x')\hat{\phi}_i(x',h(x'))\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx'+$$

$$\int_\omega\widehat{l}\varepsilon^2\hat{u}_3^\varepsilon(x',h(x')\hat{\phi}_3(x',h(x'))\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx'+$$

$$\int_\omega\hat{k}\left|\hat{\phi}\right|dx'+\widehat{\alpha}\int_\Omega\left|D(\hat{\phi})\right|dx'dz+\sum_{i=1}^2\int\limits_\Omega\widehat{p}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial x_i}dx'dz+$$

$$\int\limits_\Omega\widehat{p}\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz+\sum_{i=1}^2\int_\Omega\hat{f}_i(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dx'dz+\int_\Omega\varepsilon\hat{f}_3(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)dx'dz$$

le terme
$$\int_\omega \widehat{l}\varepsilon^2 \hat{u}_3^\varepsilon(x', h(x')\hat{u}_3^\varepsilon(x', h(x'))\sqrt{1+|\nabla h^\varepsilon(x')|^2}dx' \geq 0$$
donc on peut le négliger, puis on applique $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0}$ à gauche et la $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ à droite de (2.34) et d'après les résultats de convergence du Théorème 2.8 on obtient

$$\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}dx'dz + \sum_{i=1}^2 \widehat{l}\int_\omega u_i^\star\left(x', h(x')\right) u_i^\star\left(x', h(x')\right) dx' + \tag{2.35}$$
$$\int_\omega \hat{k}\left|u^\star\right| dx' + \widehat{\alpha}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\left(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx'dz \leq$$
$$\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z}dx'dz + \sum_{i=1}^2 \widehat{l}\int_\omega u_i^\star\left(x', h(x')\right) \hat{\phi}_i\left(x', h(x')\right) dx' +$$
$$\int_\omega \hat{k}\left|\hat{\phi}\right| dx' + \widehat{\alpha}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\left(\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx'dz +$$
$$\int_\Omega p^\star\left(x'\right)\left(\frac{\partial\hat{\phi}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\hat{\phi}_2}{\partial x_2}\right)dx'dz + \int_\Omega p^\star\left(x'\right)\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz +$$
$$+\sum_{i=1}^2\int_\Omega \hat{f}_i\left(\hat{\phi}_i - u_i^\star\right)dx'dz$$

et comme

$$\int_\Omega p^\star\left(x'\right)\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz = \int_\omega\int_0^{h(x')} p^\star\left(x'\right)\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dzdx' = \int_\omega p^\star\left(x'\right)\hat{\phi}_3\left(x', h(x')\right)dx'$$

car $\hat{\phi}_3\left(x', 0\right) = 0$, on a $\hat{\phi}_1 n_1 + \hat{\phi}_2 n_2 + \hat{\phi}_3 n_3 = 0$ sur Γ_1, donc

$$\hat{\phi}_3 = \frac{-1}{n_3}\left(\hat{\phi}_1 n_1 + \hat{\phi}_2 n_2\right) = \sqrt{1+|\nabla h(x')|^2}\left(\hat{\phi}_1 n_1 + \hat{\phi}_2 n_2\right) = \hat{\phi}_1\frac{\partial h}{\partial x_1} + \hat{\phi}_2\frac{\partial h}{\partial x_2},$$

d'où
$$\int_\Omega p^\star\left(x'\right)\frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}dx'dz = \int_\omega p^\star\left(x'\right)\left(\hat{\phi}_1\frac{\partial h}{\partial x_1} + \hat{\phi}_2\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)dx' \tag{2.36}$$

de (2.34)-(2.36) on déduit (2.33).

Remarque 2.10 *Si $\hat{\phi}$ vérifie la condition (D'), l'inégalité* (2.33) *est réduite comme suit :*

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\left(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}-\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right)dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\widehat{l}\int\limits_{\omega}u_i^\star\left(x',h(x')\right)\left(\hat{\phi}_i\left(x',h(x')\right)-u_i^\star\left(x',h(x')\right)\right)dx'+ \tag{2.37}$$

$$\int\limits_{\omega}\hat{k}\left(\left|\hat{\phi}\right|-|u^\star|\right)dx'+\widehat{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx'dz-\widehat{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx'dz\geq$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\hat{f}_i\left(\hat{\phi}_i-u_i^\star\right)dx'dz\quad\forall\hat{\phi}\in\sum(V)$$

Théorème 2.11 *Les fonctions limites $u^\star$, $p^\star$ vérifient*

$$p^\star\left(x_1,x_2,z\right)=p^\star\left(x_1,x_2\right)\quad dans\ \Omega,\quad p^\star\in H^1\left(\omega\right), \tag{2.38}$$

$$-\mu\frac{\partial^2u_i^\star}{\partial z^2}+\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}=\hat{f}_i\quad i=1,2\quad dans\ L^2\left(\Omega\right). \tag{2.39}$$

et l'équation généralisée faible de Reynolds :

$$\int\limits_{\omega}\left(\frac{h^3}{12\mu}\nabla p^\star-\frac{h}{2}s^\star-\frac{h}{2}s_h^\star+\widetilde{F}\right)\nabla\hat{\phi}dx'+\int\limits_{\partial\omega}h\widetilde{u}^\star\phi.nd\sigma=0\quad\forall\hat{\phi}\in H^1\left(\omega\right) \tag{2.40}$$

avec

$$\begin{aligned}
s^\star\left(x'\right)&=u^\star\left(x',0\right),\quad s_h^\star\left(x'\right)=u^\star\left(x',h\left(x'\right)\right)\\
F_i\left(x',z\right)&=\int\limits_0^z\int\limits_0^\zeta\hat{f}_i\left(x',z\right)dtd\zeta,\quad\widetilde{F}_i\left(x'\right)=\frac{1}{\mu}\int\limits_0^{h(x')}F_i\left(x',z\right)dz-\frac{h}{2\mu}F(x',h(x'))
\end{aligned}$$

De plus, les traces

$$\tau^\star=\frac{\partial u^\star}{\partial z}\left(,0\right),\quad\tau_h^\star=\frac{\partial u^\star}{\partial z}\left(,h(x')\right)$$

vérifient la condition aux limites de Tresca

$$\left.\begin{array}{r}|\tau^\star| = \hat{k} \Longrightarrow \exists\lambda \geq 0 : u^\star = s^\star + \lambda\tau^\star \\ |\tau^\star| \leq \hat{k} \Longrightarrow u^\star = s^\star\end{array}\right\} \ p.p \ sur \ \omega$$

Preuve : On choisit dans (2.15) $\hat{\phi}_i = \hat{u}_i^\varepsilon$ pour $i = 1, 2$, $\hat{\phi}_3 = \hat{u}_3^\varepsilon \pm \psi$ avec $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \mu\varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx'dz + \int_\Omega \left(2\mu\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} - \widehat{p}^\varepsilon\right) \frac{\partial \psi}{\partial z} dx'dz$$
$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^4 \hat{u}_i^\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \psi dx'dz + \int_\Omega \varepsilon^4 \hat{u}_3^\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \psi dx'dz = \int_\Omega \varepsilon \hat{f}_3 \psi dx'dz,$$

En utilisant les résultats de convergence (2.27)-(2.32) et (2.33) on déduit

$$\int_\Omega p^\star \frac{\partial \psi}{\partial z} dx'dz = 0 \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega),$$

donc

$$\frac{\partial p^\star}{\partial z} = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega). \tag{2.41}$$

$\triangleright$ En choisissant $\hat{\phi}_i = \hat{u}_i^\varepsilon \pm \psi_i$ pour $i = 1, 2$, avec $\psi_i \in H_0^1(\Omega)$ et $\hat{\phi}_3 = \hat{u}_3^\varepsilon$ dans (2.15) il vient

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 2} \int_\Omega \left[\mu\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij}\widehat{p}^\varepsilon\right] \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} dx'dz +$$
$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right) \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx'dz + \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \int_\Omega \varepsilon^2 \hat{u}_i^\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \psi_j dx'dz +$$
$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \hat{u}_3^\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \psi_i dx'dz = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i \psi_i dx'dz$$

En utilisantc$-$(2.33), et choisissant $\psi_1 = 0$ et $\psi_2 \in H_0^1(\Omega)$ puis $\psi_2 = 0$ et $\psi_1 \in H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$-\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} p^\star \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dx' dz + \mu \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i^\star}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx' dz = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx' dz, \tag{2.42}$$

en utilisant la formule de Green on obtient

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2} + \frac{\partial p^\star}{\partial x_i} = \hat{f}_i \quad i = 1,2 \;\text{ dans } H^{-1}(\Omega). \tag{2.43}$$

Pour prouver que $p^\star \in H^1(\omega)$, on a d'après (2.41) $p^\star$ ne dépend pas de z, on choisit dans (2.42) [3] $\psi_i(x', z) = z(z - h(x'))\theta(x')$ avec $\theta \in H_0^1(\omega)$, et en utilisant la formule de Green on obtient

$$\frac{1}{6} \int\limits_{\omega} p^\star \frac{\partial (h^3 \theta)}{\partial x_i} dx' - 2\mu \int\limits_{\omega} h \tilde{u}_i^\star \theta dx' + \mu \int\limits_{\omega} h(x') \left[u_i^\star(x', h(x')) + u_i^\star(x', 0) \right] \theta dx' = \int\limits_{\omega} \widetilde{f}_i \theta dx',$$

avec

$$\tilde{u}_i^\star = \frac{1}{h(x')} \int\limits_{0}^{h(x')} u_i^\star(x', z)\, dz \;, \quad \widetilde{f}_i = \int\limits_{0}^{h(x')} z(z - h(x')) \hat{f}_i(x', z)\, dz.$$

d'où

$$h(x') \left[u_i^\star(x', h(x')) + u_i^\star(x', 0) \right] - 2h \tilde{u}_i^\star - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial p^\star}{\partial x_i} = \widetilde{f}_i \;\; i = 1,2 \;\text{ dans } H^{-1}(\omega) \tag{2.44}$$

comme $\hat{f}_i \in L^2(\Omega)$, $u_i^\star \in V_z$ en particulier dans $L^2(\omega)$, alors $\tilde{u}_i^\star$ et $\widetilde{f}_i$ sont dans $L^2(\omega)$ $\left(\hat{f}_i \in L^2(\Omega) \text{ et } h \in L^\infty(\omega) \right)$.

Donc d'après (2.43) on déduit

$$\frac{\partial p^\star}{\partial x_i} \in L^2(\omega) \;\text{ pour } i = 1,2,$$

d'où on obtient (2.38). comme $\dfrac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2} \in L^2(\Omega)$ alors (2.43) devient (2.39).

$\triangleright$Pour démontrer (2.40) en intégrant deux fois (2.39) de 0 à z, il vient :

$$\mu u^\star(x', z) = \mu s^\star(x') + \frac{z^2}{2} \nabla p^\star + \mu z \tau^\star - F(x', z) \tag{2.45}$$

en remplaçant z par h, on obtient

$$\mu u^{\star}\left(x',h(x')\right)=\mu s^{\star}\left(x'\right)+\frac{h^{2}}{2}\nabla p^{\star}+\mu h\tau^{\star}-F\left(x',h\right)$$

d'où

$$h\tau^{\star}=\frac{1}{\mu}F\left(x',h(x')\right)+s_{h}^{\star}\left(x'\right)-s^{\star}\left(x'\right)-\frac{h^{2}}{2\mu}\nabla p^{\star} \tag{2.46}$$

intégrons (2.45) par rapport à z, dans l'intervalle $(0,h(x'))$, on obtient

$$h\widetilde{u}^{\star}\left(x',h(x')\right)=hs^{\star}\left(x'\right)+\frac{h^{3}}{6\mu}\nabla p^{\star}+\frac{h^{2}}{2}\tau^{\star}-\frac{1}{\mu}\int_{0}^{z}F\left(x',z\right)dz \tag{2.47}$$

on pose pour toute fonction φ

$$\widetilde{\varphi}\left(x'\right)=\frac{1}{h(x')}\int_{0}^{h(x')}\varphi\left(x',z\right)dz\qquad\forall x'\in\omega$$

d'autre part $\forall\phi\in H^{1}(\omega)$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\phi\,\mathrm{div}(\hat{u}^{\varepsilon})dx'dz &= 0=\int_{\omega}\phi\left(x'\right)\int_{0}^{h(x')}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}+\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial z}\right)dzdx'\\ &= \int_{\omega}\phi\left(x'\right)\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\left(h\widetilde{\hat{u}}_{i}^{\varepsilon}\right)}{\partial x_{i}}+\hat{u}_{3}^{\varepsilon}\left(x',h(x')\right)-\hat{u}_{3}^{\varepsilon}(x',0)\right]dx'\end{aligned}$$

on a $\hat{u}_{3}^{\varepsilon}(x',0)=0$ sur $\partial\Omega$ alors

$$\int_{\omega}\phi\left(x'\right)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\left(h\widetilde{\hat{u}}_{i}^{\varepsilon}\right)}{\partial x_{i}}dx'=0$$

en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\omega}\frac{\partial\phi}{\partial x_{i}}\widetilde{\hat{u}}_{i}^{\varepsilon}hdx'=\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\omega}h\widetilde{\hat{u}}_{i}^{\varepsilon}\phi.n_{i}d\sigma$$

Comme $\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^\star$ dans V_z par conséquence dans $L^2(\omega)$, par suite $\widetilde{\hat{u}}_i^\varepsilon \rightharpoonup \widetilde{u}_i^\star$ dans $L^2(\omega)$, on déduit

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \widetilde{u}_i^\star h dx' = \sum_{i=1}^{2} \int_{\partial\omega} h \widetilde{u}_i^\star \phi . n_i d\sigma \quad \forall \phi \in H^1(\omega) \tag{2.48}$$

en utilisant (2.46) pour éliminer le terme contenant $\tau^\star$ de (2.47).

en multipliant (2.47) par $\nabla\phi$, puis on intègre sur ω en utilisant (2.48) on obtient

$$\int_{\omega} \left(\frac{-h^3}{12\mu} \nabla p^\star + \frac{h}{2} s^\star(x') + \frac{h}{2} s_h^\star - \widetilde{F}(x') \right) \nabla\phi dx' = \int_{\partial\omega} h \widetilde{u}^\star \phi . n d\sigma.$$

■

Théorème 2.12 *La solution $(u^\star, p^\star)$ du problème limite est unique.*

Preuve : Soit (U^1, p^1), (U^2, p^2) deux solutions de l'inéquation variationnelle (2.37) donc

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial U_i^1}{\partial z} \left(\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z} - \frac{\partial U_i^1}{\partial z} \right) dx' dz + \sum_{i=1}^{2} \widehat{l} \int_{\omega} U_i^1(x', h(x')) \left(\hat{\phi}_i(x', h(x')) - U_i^1(x', h(x')) \right) dx' + \tag{2.49}$$

$$\int_{\omega} \hat{k} \left(\left| \hat{\phi} \right| - \left| U^1 \right| \right) dx' + \widehat{\alpha} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx' dz - \widehat{\alpha} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial U_i^1}{\partial z} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx' dz \geq$$

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \hat{f}_i \left(\hat{\phi}_i - U_i^1 \right) dx' dz$$

et

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\left(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}-\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\right)dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\widehat{l}\int\limits_{\omega}U_i^2\left(x',h(x')\right)\left(\hat{\phi}_i\left(x',h(x')\right)-U_i^2\left(x',h(x')\right)\right)dx'+$$

$$\int\limits_{\omega}\hat{k}\left(\left|\hat{\phi}\right|-\left|U^2\right|\right)dx'+\widehat{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx'dz-\widehat{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx'dz\geq$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\hat{f}_i\left(\hat{\phi}_i-U_i^2\right)dx'dz\qquad\forall\hat{\phi}\in\sum(V)\tag{2.50}$$

On prend $\hat{\phi}=U^2$ dans (2.49) et $\hat{\phi}=U^1$ dans (2.50) on obtient

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial U_i^1}{\partial z}\left(\frac{\partial U_i^2}{\partial z}-\frac{\partial U_i^1}{\partial z}\right)dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\widehat{l}\int\limits_{\omega}U_i^1\left(x',h(x')\right)\left(U_i^2\left(x',h(x')\right)-U_i^1\left(x',h(x')\right)\right)dx'+$$

$$\int\limits_{\omega}\hat{k}\left(\left|U^2\right|-\left|U^1\right|\right)dx'+\widehat{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx'dz-\widehat{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U_i^1}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx'dz\geq$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\hat{f}_i\left(U_i^2-U_i^1\right)dx'dz\tag{2.51}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\left(\frac{\partial U_i^1}{\partial z}-\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\right)dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\widehat{l}\int\limits_{\omega}U_i^2\left(x',h(x')\right)\left(U_i^1\left(x',h(x')\right)-U_i^2\left(x',h(x')\right)\right)dx'+$$

$$\int\limits_{\omega}\hat{k}\left(\left|U^1\right|-\left|U^2\right|\right)dx'+\widehat{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U_i^1}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx'dz-\widehat{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx'dz\geq$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\hat{f}_i\left(U_i^1-U_i^2\right)dx'dz\tag{2.52}$$

En sommant les deux inéquations (2.51) et (2.52) on trouve

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial U_i^1}{\partial z}\left(\frac{\partial U_i^2}{\partial z}-\frac{\partial U_i^1}{\partial z}\right)dx'dz+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\left(\frac{\partial U_i^1}{\partial z}-\frac{\partial U_i^2}{\partial z}\right)dx'dz-$$
$$\sum_{i=1}^{2}\widehat{l}\int_{\omega}\left|U_i^2\left(x',h(x')\right)-U_i^1\left(x',h(x')\right)\right|^2dx'\geq 0$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(U_i^2-U_i^1\right)\right|^2dx'dz\leq 0$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\left\|U_i^2-U_i^1\right\|_{V_z}=0, \tag{2.53}$$

donc $u^\star$ is unique.

♦ L'unicité de $p^\star$ dans $L_0^2(\omega)\cap H^1(\omega)$ découle à partir de (2.40), en effet nous avons

$$\int_{\omega}\left(\frac{h^3}{12}\nabla p^1-\frac{h}{2}U^1(x',0)-\frac{h}{2}U^1(x',h(x'))+\widetilde{F}\right)\nabla\hat{\phi}dx'+\int_{\partial\omega}h\widetilde{U^1}\hat{\phi}.nd\sigma=0\ \forall\hat{\phi}\in H^1(\omega) \tag{2.54}$$

$$\int_{\omega}\left(\frac{h^3}{12}\nabla p^2-\frac{h}{2}U^2(x',0)-\frac{h}{2}U^2(x',h(x'))+\widetilde{F}\right)\nabla\hat{\phi}dx'+\int_{\partial\omega}h\widetilde{U^2}\hat{\phi}.nd\sigma=0\ \forall\hat{\phi}\in H^1(\omega) \tag{2.55}$$

Retranchant (2.55) de (2.54) et en utilisant (2.53) il vient

$$\int_{\omega}\frac{h^3}{12}\left(\nabla p^1-\nabla p^2\right)\nabla\hat{\phi}dx'=0,$$

En prenant $\hat{\phi}=p^1-p^2$ et d'après l'inégalité de Poincaré on obtient

$$\left\|p^1-p^2\right\|_{L^2(\omega)}=0.$$

■

Chapitre 3

Comportement asymptotique d'un fluide non-newtonien non-stationnaire avec des conditions aux limites de Tresca

3.1 Introduction

On s'intéresse à des écoulements tridimentionnels non-stationnaire avec glissement des fluides non-Newtoniens. On établira un théorème d'existence et d'unicité de solution faible du problème, Un changement d'échelle permettra d'obtenir des estimations dans un domaine "fixe". On passera à la limite par des techniques asymptotiques. Nous montrons que la pression $p^{\star}$ ne dépend pas de la variable z. Ensuite nous obtenons un problème limite et nous terminons par montrer l'unicité $(u^{\star}, p^{\star})$ de ce dérnier.

3.2 Position du problème

Dans le domaine Ω^{ε} du premier chapitre

$$\Omega^{\varepsilon} = \left\{ (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega,\ 0 < x_3 < \varepsilon h\,(x') \right\}$$

et sa frontière

$$\Gamma^\varepsilon = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}_L^\varepsilon$$

Nous considérons un écoulement incompressible isotherme en régime dynamique d'un fluide non-newtonien incompressible, nous supposons que l'écoulement est modélisé par les équations suivantes :

$$\frac{du^\varepsilon}{dt}(t) - \operatorname{div} \sigma^\varepsilon - f^\varepsilon(t) = 0 \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[\tag{3.1}$$

où $\sigma^\varepsilon = (\sigma_{ij})^\varepsilon_{1\le i,j\le 3}$le tenseur des contraintes

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = 2\mu \left| D\left(u^\varepsilon\left(t\right)\right)\right|^{p-2} d_{ij}(u^\varepsilon\left(t\right)) - p^\varepsilon\left(t\right)\delta_{ij}, \quad d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right), \ p > 2.$$

avec $u^\varepsilon(x,t)$ est la vitesse du fluide et $p^\varepsilon\left(x,t\right)$ sa pression.

L'équation d'incompressibilité

$$\operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0 \tag{3.2}$$

La vitesse sur le bord est donnée sauf sur ω.

• Sur $\Gamma_1^\varepsilon \times]0, T[$, nous considérons une condition de non glissement

$$u^\varepsilon = g = 0 \tag{3.3}$$

• Sur $\Gamma_L^\varepsilon \times]0, T[$, la vitesse est connue

$$u^\varepsilon = g\chi \ \text{ avec } g_3 = 0, \ \ \chi \text{ fonction de } t > 0 \text{ seulement} \tag{3.4}$$

• Sur $\omega \times]0, T[$, la vitesse est supposée inconnue et elle vérifie la condition suivante :

$$u^\varepsilon.n = 0 \tag{3.5}$$

• Nous supposons aussi l'existence du frottement sur ω, ce frottement est modélisé par la loi non linéaire de type Tresca :

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_T^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow u_T^\varepsilon = s \\ |\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists\beta \ge 0 \text{ tel que } u_T^\varepsilon = s - \beta\sigma_T^\varepsilon \end{array}\right\} \quad \text{sur } \omega \times]0, T[\tag{3.6}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, s la vitese de cisaillement, k^ε est le seuil de frottement.
Les composantes normales et tangentielles de la vitesse u_n^ε et $u_T^\varepsilon = (u_{T_i}^\varepsilon)_{1\leq i\leq 3} \in \mathbb{R}^3$ et du tenseur des contraintes σ_n^ε et σ_T^ε sont définies par :

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon.n = u_i^\varepsilon.n_i$$

$$u_{T_i}^\varepsilon = u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon.n_i$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_n^\varepsilon &= (\sigma^\varepsilon.n).n = \sigma_{ij}^\varepsilon.n_i.n_j \\ \sigma_{T_i}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^\varepsilon.n_j - \sigma_n^\varepsilon.n_i \end{aligned}$$

Le problème complet consiste donc à trouver un champ de vitesse u^ε et une pression p^ε vérifiant la condtion initiale

$$u^\varepsilon(x,0) = 0, \quad \forall x \in \Omega^\varepsilon. \tag{3.7}$$

et les équations et les conditions aux limites suivantes :

$$(Pb^\varepsilon)\begin{cases} \dfrac{du_i^\varepsilon}{dt}(t) - \dfrac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} - f_i^\varepsilon(t) = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0,T[\,, \\ \operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0,T[\,, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times]0,T[\\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \times]0,T[\\ u^\varepsilon.n = 0 & \text{sur } \omega \times]0,T[\\ \left.\begin{array}{l} |\sigma_T^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow u_T^\varepsilon = s \\ |\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_T^\varepsilon = s - \beta\sigma_T^\varepsilon \end{array}\right\} & \text{sur } \omega \times]0,T[\\ u^\varepsilon(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon \end{cases}$$

3.2.1 Problème variationnel

Pour l'ouvert Ω^ε on définit l'ensemble et les espaces fonctionnels suivants :

$$\left(W^{1,p}\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3 = \left\{ v \in \left(L^p\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3 : \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j} \in L^p\left(\Omega^\varepsilon\right) \text{ pour } i,\ j = 1, ..., 3 \right\}$$

l'espace de Sobolev muni de la norme

$$\|v\|_{1,p} = \left(\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} |v_i|^p \, dx + \sum_{1 \le i,j \le 3} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1 < p < \infty.$$

$W_0^{1,p}\left(\Omega^\varepsilon\right)$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $W^{1,p}\left(\Omega^\varepsilon\right)$ nulles sur Γ^ε. On note $W^{-1,q}\left(\Omega^\varepsilon\right)$ son dual topologique, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$W^{1,p}_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}\left(\Omega^\varepsilon\right) = \left\{ \psi \in W^{1,p}\left(\Omega^\varepsilon\right) : \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon \right\}$$

Soit X un espace de Banach, on note ici

$$L^p_{loc}\left(0, +\infty; X\right) = \left\{ v \text{ défine sur } \left[0, +\infty\right[\text{ telle que } v \in L^p\left(0, T; X\right)\ \forall T \text{ fini} \right\},$$

On note $L_0^q\left(\Omega^\varepsilon\right)$ le sous espace vectoriel des fonctions de $L^q\left(\Omega^\varepsilon\right)$ à moyenne nulle :

$$L_0^q\left(\Omega^\varepsilon\right) = \left\{ v \in L^q\left(\Omega^\varepsilon\right) : \int_{\Omega^\varepsilon} v \ dx = 0 \right\}$$

Ensuite nous définissons les ensembles convexes fermés non vides de $\left(W^{1,p}\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3$

$$V_0^\varepsilon = \left\{ v \in \left(W^{1,p}\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon;\ v = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon;\ v.n = 0 \text{ sur } \omega \right\},$$

$$V_{0\,\mathrm{div}}^\varepsilon = \left\{ v \in V_0^\varepsilon : \mathrm{div}\left(v\right) = 0 \right\}.$$

La formulation variationnelle du problème (3.1)-(3.7) s'écrit :

$$
(Pb_1) \begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in L^p\left(0,T;V^\varepsilon_{0\,\mathrm{div}}\right) \text{ avec } \dfrac{du^\varepsilon}{dt} \in L^q\left(0,T;\left(W^{-1,q}\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3\right), \\ p^\varepsilon \in L^q\left(0,T;L^q_0\left(\Omega^\varepsilon\right)\right) \text{ telles que} \\ \left(\dfrac{du^\varepsilon}{dt}(t),\phi - u^\varepsilon\right) + a(u^\varepsilon(t),\phi - u^\varepsilon(t)) - (p^\varepsilon(t),\mathrm{div}(\phi - u^\varepsilon(t)) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \\ \geq (f^\varepsilon(t),\phi - u^\varepsilon(t)), \quad \forall\ \phi \in V^\varepsilon_0, \end{cases}
$$

Et par suit, si $\phi \in V^\varepsilon_{0\,\mathrm{div}}$ on obtient le problème variationnel en vitesse

$$
(Pb_2) \begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in L^p\left(0,T;V^\varepsilon_{0\,\mathrm{div}}\right) \text{ avec } \dfrac{du^\varepsilon}{dt} \in L^q\left(0,T;\left(W^{-1,q}\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3\right) \text{ telle que} \\ \left(\dfrac{du^\varepsilon}{dt}(t),\phi - u^\varepsilon\right) + a(u^\varepsilon(t),\phi - u^\varepsilon(t)) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \\ \geq (f^\varepsilon(t),\phi - u^\varepsilon(t)), \quad \forall\ \phi \in V^\varepsilon_{0\,\mathrm{div}}; \end{cases}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
a(u^\varepsilon,\phi) &= 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} \left|D\left(u^\varepsilon\left(t\right)\right)\right|^{p-2} d_{ij}(u^\varepsilon\left(t\right))d_{ij}(\phi)dx; \\
(p^\varepsilon(t),\mathrm{div}(\phi - u^\varepsilon(t)) &= \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon(t)\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}dx; \\
(f^\varepsilon(t),\phi) &= \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon(t)\phi_i dx; \\
j^\varepsilon\left(\phi\right) &= \int_\omega k^\varepsilon \left|\phi - s\right| dx'.
\end{aligned}
$$

On définit l'opérateur non-linéaire A par :

$$
\begin{aligned}
A : \left(W^{1,p}\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3 &\to \left[\left(W^{1,p}\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3\right]' \\
u^\varepsilon &\mapsto A(u^\varepsilon)
\end{aligned}
$$

tel que

$$
(A(u^\varepsilon),\phi) = a(u^\varepsilon,\phi)
$$

3.2.2 Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 3.1 *Supposons que* f^ε, $\dfrac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0;T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right))$, $k^\varepsilon \in L^\infty\left(\omega\right)$, *tel que* $k^\varepsilon \geq 0$ *presque partout sur* ω, *et supposons que* $u^\varepsilon(0) = 0$. *Alors il existe une solution unique* u^ε

du problème (Pb_2) *avec* $u^\varepsilon \in L^p\left(0,T;V^0_{\text{div}}\right)$, $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)$ *et* $\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|D(u^\varepsilon)\right|^{\frac{p-2}{2}} d_{ij}(u^\varepsilon)\right) \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)$.

Preuve. voir [39]

3.3 Analyse asymptotique du problème

Pour l'analyse asymptotique de notre problème, on utilise le changement d'échelle $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$.

Donc le domaine Ω^ε se transforme en un domaine Ω indépendant de ε.

où

$$\Omega = \left\{(x', z) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega,\ 0 < z < h\left(x'\right)\right\}$$

On note $\Gamma = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L$ sa frontière.

Nous définissons maintenant sur Ω des nouvelles inconnues

$$\begin{cases} \hat{u}_i^\varepsilon(x', z) = u_i^\varepsilon(x', x_3) \quad \text{pour } i = 1, 2; \\ \hat{u}_3^\varepsilon(x', z) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3). \end{cases} \tag{3.8}$$

Pour les données du problème (Pb^ε), on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante :

$$\begin{gathered} \hat{k} = \varepsilon^{p-1} k^\varepsilon; \\ \hat{f}\left(x', z\right) = \varepsilon^2 f^\varepsilon\left(x', x_3\right); \\ \hat{g}\left(x', z\right) = g\left(x', x_3\right) \end{gathered} \tag{3.9}$$

avec $\hat{k}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ ne dépendant pas de ε.

3.3.1 Formulation varitionnelle du problème dans Ω

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω :

$$V_0=\{\varphi\in\left(W^{1,p}\left(\Omega\right)\right)^3:\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3),\ \varphi=0 \text{ sur } \Gamma_1\cup\Gamma_L;\ \varphi.n=0 \text{ sur } \omega\},$$
$$V_{0\,\mathrm{div}}=\{\varphi\in V_0:\operatorname{div}\varphi=0\},$$
$$\Pi(V_0)=\{\bar\varphi\in\left(W^{1,p}\left(\Omega\right)\right)^2:\bar\varphi=(\varphi_1,\varphi_2),\varphi_i=0\ \ \Gamma_1\cup\Gamma_L\ \ i=1,2\},$$
$$\widetilde{\Pi}\left(V_0\right)=\{\bar\varphi\in\Pi(V_0):\bar\varphi \text{ vérifie } (D')\},$$
$$V_z=\{v=(v_1,v_2)\in\left(L^p\left(\Omega\right)\right)^2:\frac{\partial v_i}{\partial z}\in L^p\left(\Omega\right)\quad i=1,2 \text{ et } v=0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

La condition (D') est donnée par

$$\forall v=(v_1,v_2)\in L^2(\Omega)^2 \text{ tel que : }\int_\Omega\left(v_1\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)dx'dz=0\ \forall\theta\in C_0^\infty\left(\omega\right)$$

En utilisant (3.8)-(3.9) et en passant au domaine fixe Ω on montre que le problème variationnel (Pb_1) est équivalent au problème suivant

Trouver $\hat u^\varepsilon\in L^p\left(0,T;V_{0\,\mathrm{div}}\right)$ et $\widehat{p}^\varepsilon\in L^q\left(0,T;L_0^q\left(\Omega\right)\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{i=1}^{2}\varepsilon^p(\dfrac{\partial\hat u_i^\varepsilon}{\partial t}(t),\hat\phi_i-\hat u_i^\varepsilon(t))+\varepsilon^{p+2}(\dfrac{\partial\hat u_3^\varepsilon}{\partial t}(t),\hat\phi_3-\hat u_3^\varepsilon(t))+\\ a(\hat u^\varepsilon(t),\hat\phi-\hat u^\varepsilon(t))-(\widehat{p}^\varepsilon(t),\operatorname{div}\left(\hat\phi-\hat u^\varepsilon(t)\right))+\hat\jmath(\hat\phi)-\hat\jmath(\hat u^\varepsilon(t))\geq\\ \sum\limits_{i=1}^{2}(\hat f_i(t),\hat\phi_i-\hat u_i^\varepsilon(t))+\varepsilon(\hat f_3(t),\hat\phi_3-\hat u_3^\varepsilon(t)),\ \forall\ \hat\phi\in V_0\\ \hat u^\varepsilon(0)=0.\end{array}\right.\tag{3.10}$$

avec

$$\hat\jmath(\hat\phi)=\int_\omega\hat k\left|\hat\phi-s\right|dx',$$

$$a(\hat{u}^\varepsilon,\hat{\phi}-\hat{u}^\varepsilon)=\mu\varepsilon^2\sum_{1\leq i,j\leq 2}\int_\Omega \left|\widehat{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^{p-2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)dx'dz+$$

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \left|\widehat{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^{p-2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon)+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)\right)dx'dz+$$

$$\mu\varepsilon^2\int_\Omega \left|\widehat{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^{p-2}\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^\varepsilon)dx'dz.$$

où

$$\left|\widehat{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right|^2=\varepsilon^2\left(\frac{1}{4}\sum_{1\leq i,j\leq 2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2$$

3.3.2 Estimation à priori

On introduit deux lemmes utiles pour la suite.

Lemme 3.2 *[22] (Inégalité de Poincaré)*

On rappelle que $0<h(x)<h^\star$ $\forall x'\in\omega$: On a linégalité suivante

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}\leq h^\star\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^p(\Omega)}\qquad i=1,2,3$$

Lemme 3.3 *[22] (Inégalité de Korn)*

Pour tout $\varphi\in V_0^\varepsilon$ on a

$$\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)}\leq c\,\|D\varphi\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)}$$

où c est une constante qui ne dépend ni de ε ni de φ.

Théorème 3.4 *Sous les hypothèses du théorème 3.1, on a les estimations suivantes*

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leq i,j\leq 2}\int_0^t\left\|\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}(s)\right\|_{L^p(\Omega)}^p ds+\int_0^t\left\|\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}(s)\right\|_{L^p(\Omega)}^p ds+\\&\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\left(\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}(s)\right\|_{L^p(\Omega)}^p+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}(s)\right\|_{L^p(\Omega)}^p\right)ds\leq c,\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq c, \tag{3.12}$$

$$\left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial x_i}(t) \right\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq c_1 \quad pour\ i = 1, 2 \tag{3.13}$$

$$\left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq \varepsilon c_2 \tag{3.14}$$

Preuve : Comme j^ε n'est pas différentiable, on l'approche par une fonctionnelle différentiable ; on choisira

$$j^\varepsilon_\zeta(v) = \int_\omega k^\varepsilon(x)\phi_\zeta(|v_\tau|^2)dx', \text{ avec } \phi_\zeta(|\lambda|) = \frac{1}{1+\zeta} |\lambda|^{(1+\zeta)}, \ \zeta > 0.$$

On considère l'équation :

$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t), \phi\right) + a(u^\varepsilon_\zeta(t), \phi) + (j^{\varepsilon\prime}_\zeta(u^\varepsilon_\zeta(t)), \phi) = (f^\varepsilon(t), \phi), \quad \phi \in V^\varepsilon_{0\,\mathrm{div}} \tag{3.15}$$
$$u^\varepsilon_\zeta(0) = 0$$

Soit u^ε une solution du problème (Pb_2) :

$$\left(\frac{du^\varepsilon(t)}{dt}, \phi - u^\varepsilon(t)\right) + a(u^\varepsilon(t), \phi - u^\varepsilon(t)) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \geq (f^\varepsilon(t), \phi - u^\varepsilon(t)), \quad \forall\ \phi \in V^\varepsilon_{0\,\mathrm{div}}$$

en choisissant $\phi = 0$; on obtient

$$\left(\frac{du^\varepsilon}{dt}(t), u^\varepsilon(t)\right) + a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + j^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq (f^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \leq (f^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))$$

En intégrant en temps pour $s \in [0,t]$ et en utilisant les inégalités de Korn et Poincaré on obtient

$$\frac{1}{2}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}+2\mu C_{V}\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{L^{p}(\Omega^{\varepsilon})}^{p}ds\leq\int_{0}^{t}\left|\left(f^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s)\right)\right|ds$$

d'autre part on a

$$\left\|f^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{q}(\Omega^{\varepsilon})}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{p}(\Omega^{\varepsilon})}\leq\mu C_{V}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{p}(\Omega^{\varepsilon})}^{p}+\frac{\varepsilon^{q}h^{\star q}}{q\left(\mu pC_{V}\right)^{\frac{q}{p}}}\left\|f^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{q}(\Omega^{\varepsilon})}^{q}$$

donc

$$\frac{1}{2}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}+2\mu C_{V}\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{L^{p}(\Omega^{\varepsilon})}^{p}ds\leq$$

$$\mu C_{V}\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{L^{p}(\Omega^{\varepsilon})}^{p}ds+\frac{\varepsilon^{q}h^{\star q}}{q\left(\mu pC_{V}\right)^{\frac{q}{p}}}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{L^{q}(\Omega^{\varepsilon})}^{q}ds$$

$$\frac{1}{2}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}+\mu C_{V}\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{L^{p}(\Omega^{\varepsilon})}^{p}ds\leq\frac{\varepsilon^{q}h^{\star q}}{q\left(\mu pC_{V}\right)^{\frac{q}{p}}}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{L^{q}(\Omega^{\varepsilon})}^{q}ds \tag{3.16}$$

on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{q}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{q}(\Omega^{\varepsilon})}^{q} &= \varepsilon^{1-q}\left\|\hat{f}\right\|_{L^{q}(\Omega)}^{q};\\
\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2} &= \varepsilon^{-3}\left\|\hat{f}\right\|_{L^{q}(\Omega)}^{2}\\
\left\|\frac{\partial u_{i}^{\varepsilon}}{\partial x_{3}}\right\|_{L^{p}(\Omega^{\varepsilon})}^{p} &= \varepsilon^{1-p}\left\|\frac{\partial \hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p} \quad i=1,2,\\
\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2} &= \varepsilon\left\|\hat{u}^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}
\end{aligned}$$

et on a $1 < q \leq 2 \leq p$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{p+q-1}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{L^{q}(\Omega^{\varepsilon})}^{q} &= \varepsilon^{p-q}\left\|\hat{f}\right\|_{L^{q}(\Omega)}^{q}\\
&\leq c\left\|\hat{f}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}
\end{aligned}$$

en multipliant (3.16) par ε^{p-1} on déduit

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{p}\left\|\hat{u}^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\mu C_{V}\int_{0}^{t}\left\|\nabla\hat{u}^{\varepsilon}\left(s\right)\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p}ds\leq\frac{h^{\star q}}{q\left(\mu p C_{V}\right)^{\frac{q}{p}}}\int_{0}^{t}\left\|\hat{f}(s)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}ds$$

d'où

$$\int_{0}^{t}\left\|\nabla\hat{u}^{\varepsilon}\left(s\right)\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p}ds\leq c,$$

et

$$\varepsilon^{p}\left\|\hat{u}^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\leq c.$$

■

3.3.3 Estimation de la dérivée

On dérive en t (3.15) on prend $\phi=\dfrac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)$, on obtient

$$\left(\frac{\partial^{2}u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(t),\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)+4\frac{p-1}{p^{2}}\int_{\Omega^{\varepsilon}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|D(u_{\zeta}^{\varepsilon})\right|^{\frac{p-2}{2}}d_{ij}(u_{\zeta}^{\varepsilon})\right)\right)^{2}dx'dx_{3}+$$
$$\left(j_{\zeta}^{\varepsilon\prime}(u_{\zeta}^{\varepsilon}(t)',\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)=\left(\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial t}(t),\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)$$

où $(j_{\zeta}^{\varepsilon\prime}(u_{\zeta}^{\varepsilon}(t)',\dfrac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t))\geq 0$.
En intégrant en temps pour $s\in[0,t]$ il vient

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}\leq\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(0)\right\|_{L^{2}(\Omega^{\varepsilon})}^{2}+\int_{0}^{t}\left(\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial t}(s),\frac{\partial u_{\zeta}^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right)ds$$

on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds\right| &\leq \int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2 h^{\star 2}}{2}\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2 h^{\star 2}}{2}\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds \tag{3.17}$$

Maintenant on cherche à estimater $\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)$. D'après (3.15) il vient que

$$(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \phi) + a(u_\zeta^\varepsilon(0), \phi) = (f^\varepsilon(0), \phi)$$

on a

$$\begin{aligned}|(f^\varepsilon(0), \phi)| &\leq \varepsilon h^\star \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\ &\leq \varepsilon h^\star \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \|\phi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\end{aligned}$$

d'où

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq c \tag{3.18}$$

avec $c = h^\star \left\|\hat{f}(0)\right\|_{L^2(\Omega)}$ est indépendante de ε.

En passant à la limite dans (**??**) pour $\zeta \to 0$, il vient

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2 h^2_{\max}}{2}\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds \tag{3.19}$$

Multiplions (3.19) par ε, on obtient

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq A + \int_0^t \varepsilon\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds$$

avec $A = c^2 + h^{\star 2}\left\|\nabla\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$.
D'après l'inégalité de Gronwall il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C.$$

Pour obtenir une estimation sur la pressure, on choisit $\phi = u^\varepsilon \pm \psi$ dans (Pb_1) avec $\psi \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^3$, on obtient

$$(p^\varepsilon(t), \operatorname{div}(\psi) = \left(\frac{du^\varepsilon}{dt}(t), \psi\right) + a(u^\varepsilon(t), \psi) - (f^\varepsilon(t), \psi) \tag{3.20}$$

en intégrant en temps pour $s \in [0, t]$ il vient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon(s)\operatorname{div}(\psi)dxds\right| \leq\ & \frac{\varepsilon^q h^{\star q}}{C}\int_0^t \left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^q_{L^q(\Omega^\varepsilon)} ds + \mu C_V \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)} ds \\ & + T\left(C_V + \frac{2^p\mu}{p\,(qC_V)^{\frac{p}{q}}} + \frac{T}{p}\left(\frac{c}{q}\right)^{\frac{p}{q}}\right)\|\nabla\psi\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)} \\ & + \frac{\varepsilon^q h^{\star q}}{q\,(pC_V)^{\frac{q}{p}}}\int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|^q_{L^q(\Omega^\varepsilon)} ds +\end{aligned} \tag{3.21}$$

En prenant $\psi = (\psi_1, 0, 0)$, $\psi = (0, \psi_2, 0)$ et $\psi = (0, 0, \psi_3)$ respectivement dans (3.21), et en passant au domaine fixe Ω on déduit (3.13), (3.14).

3.3.4 Résultats de convergence et problème limite

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle f, \ u \rangle$, $f \in F$, $u \in E$.

Proposition 3.5 *Soit X un convexe de E, L une application linéaire monotone de $D(L)$ dans F compatible avec X, et A une application monotone hémicontinue et bornée de X dans F.*

Soient $u \in X$ et $f \in F$; les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $(f, v-u) - (Au, v-u) - (Lv, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in D(L) \cap X.$

ii) $(f, v-u) - (Av, v-u) - (Lv, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in D(L) \cap X.$

Preuve. voir [22].

Lemme 3.6 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 3.1, il existe $u^\star = (u_1^\star, u_2^\star) \in L^p(0,T;V_z)$ et $p^\star \in L^q(0,T;L_0^q(\Omega))$ telles que :*

$$\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^\star \quad (1 \leq i \leq 2) \quad \textit{faiblement dans } L^p(0,T;V_z), \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_i^\star}{\partial t} \quad (1 \leq i \leq 2) \quad \textit{faiblement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{3.23}$$

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i,j \leq 2) \\ \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0 \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i \leq 2) \\ \varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0 \end{array}\right\} \textit{faiblement dans } L^p(0,T;L^p(\Omega)) \tag{3.24}$$

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i \leq 2) \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \quad (1 \leq i \leq 2) \end{array}\right\} \textit{faiblement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \tag{3.25}$$

$$\widehat{p^\varepsilon} \rightharpoonup p^\star \textit{ faiblement dans } L^q(0,T;L_0^q(\Omega)), \tag{3.26}$$

Preuve : D'après (3.11) il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}(s) \right\|_{L^p(\Omega)}^p ds \leq C \quad (i = 1, 2)$$

En utilisant cette estimation et l'inégalité de Poincaré dans $\Omega \times]0, T[$ on déduit (3.22). Pour (3.23) on utilise (3.12), de même (3.24)-(3.25) découle de (3.11) et (3.12). On obtient (3.26) comme dans [10]. ■

Lemme 3.7 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 3.1, la solution $(u^\star, p^\star)$ vérifie*

$$p^\star(x', z, t) = p^\star(x', t) \quad p.p \text{ dans } \Omega \times]0, T[\tag{3.27}$$

$$\int_0^t \int_\Omega p^\star(s) \left(\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_1}(s) + \frac{\partial u_2^\star}{\partial x_2}(s) \right) dx' dz dt = 0 \tag{3.28}$$

Preuve : Choisissons $\hat{\phi}_i = \hat{u}_i^\varepsilon$ pour $i = 1, 2$, $\hat{\phi}_3 = \hat{u}_3^\varepsilon \pm \varphi$ avec $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$\varepsilon^{p+2}(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t), \varphi) - (\widehat{p}^\varepsilon(t), \frac{\partial \varphi}{\partial z}) + a(\hat{u}^\varepsilon, \varphi) = \varepsilon(\hat{f}_3(t), \varphi)$$

en posant $a(\hat{u}^\varepsilon, \varphi) = A_\varepsilon(\varphi)$. On déduit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon(\hat{f}_3(t), \varphi) = 0, \ \lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon(\varphi) = 0$$

en utilisant (3.25) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} = 0$, il vient $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^p(\varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t), \varphi) = 0.$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\widehat{p}^\varepsilon(t), \frac{\partial \varphi}{\partial z}) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon(t)}{\partial z}, \varphi \right) = 0 \ \ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

en utilisant (3.26) on déduit $p^\star(x', z, t) = p^\star(x', t)$.

$\triangleright$ Soit $\theta_m \in C_0^\infty(\omega)$ et $\gamma_m \in D(0, T)$, $\varphi_m(x, t) = \theta_m(x')\gamma_m(t) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} p^\star(x', t)$ dans $L^q(0, T; L^q(\omega))$.

On a $\mathrm{div}(\hat{u}^\varepsilon) = 0$ dans Ω, donc

$$\int_0^s \int_\Omega \varphi_m(x,t) \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1}(t) + \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x_2}(t) + \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}(t) \right) dx' dz dt =$$

$$- \int_0^s \int_\Omega \theta_m(x') \gamma_m(t) \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1}(t) + \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x_2}(t) \right) dx' dz dt = 0$$

car $\hat{u}^\varepsilon.n = 0$ sur $(\omega \times]0,T[) \cup (\Gamma_1 \times]0,T[)$, et comme $\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^\star$, $i = 1,2$ dans $L^p(0,T;V_z)$, alors $u^\star$ vérifie la condition (D')

$$\int_0^s \int_\Omega \theta_m(x') \gamma_m(t) \left(\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_1}(t) + \frac{\partial u_2^\star}{\partial x_2}(t) \right) dx' dz dt = 0 \quad \forall \theta_m \in C_0^\infty(\omega), \gamma_m \in D(0,T)$$

donc pour $m \to +\infty$ on déduit (3.28). ■

Théorème 3.8 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 3.1, la solution $(u^\star, p^\star)$ vérifie*

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u_i^\star}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i - u_i^\star) dx' dz - \int_\Omega p^\star(x',t) \left(\frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial x_2} \right) dx' dz + \tag{3.29}$$

$$\widehat{j}(\hat{\phi}) - \widehat{j}(u^\star) \geq \sum_{i=1}^2 (\hat{f}_i, \hat{\phi}_i - u_i^\star) \qquad \forall \hat{\phi} \in \Pi(V).$$

$$-\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u_i^\star}{\partial z} \right) + \frac{\partial p^\star}{\partial x_i} = \hat{f}_i \quad i = 1,2 \quad \textit{dans } L^q(\Omega). \tag{3.30}$$

$$u_i^\star(x', z, 0) = 0 \quad \forall i = 1,2$$

Preuve : En utilisant la proposition 3.5 et le fait que $div\,(\hat{u}^\varepsilon) = 0$ dans Ω, alors (3.10) est équivalente à

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2}\varepsilon^p(\dfrac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial t}(t), \hat{\phi}_i\,(t) - \hat{u}_i^\varepsilon(t)) + \varepsilon^{p+2}(\dfrac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial t}(t), \hat{\phi}_3\,(t) - \hat{u}_3^\varepsilon(t)) + \\ a(\hat{\phi}(t), \hat{\phi}\,(t) - \hat{u}^\varepsilon(t)) - (\widehat{p}^\varepsilon(t), \mathrm{div}\left(\hat{\phi}\,(t) - \hat{u}^\varepsilon(t)\right)) + \hat{j}(\hat{\phi}(t)) - \hat{j}(\hat{u}^\varepsilon(t)) \geq \\ \sum\limits_{i=1}^{2}(\hat{f}_i(t), \hat{\phi}_i\,(t) - \hat{u}_i^\varepsilon(t)) + \varepsilon(\hat{f}_3(t), \hat{\phi}_3\,(t) - \hat{u}_3^\varepsilon(t)),\ \forall\ \hat{\phi}\,(t) \in V_0; \\ \hat{u}^\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Utilisons le Lemme 3.6 et le fait que $\widehat{j}$ est convexe et semi-continue inférieurement, on obtient

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z})^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\phi}_i - u_i^\star\right)dx'dz - \sum_{i=1}^{2}(p^\star(t), \frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial x_i}) - (p^\star(t), \frac{\partial\hat{\phi}_3}{\partial z}) + \tag{3.32}$$

$$+\hat{j}(\hat{\phi}(t)) - \hat{j}(u^\star(t)) \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i(t), \hat{\phi}_i\,(t) - u_i^\star(t))$$

$\triangleright$ Utilisons (3.27)-(3.28), l'inéquation (3.32) devient

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}(\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z})^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\phi}_i - u_i^\star\right)dx'dz - \sum_{i=1}^{2}(p^\star(t), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{\phi}_i - u_i^\star\right)) + \tag{3.33}$$

$$+\hat{j}(\hat{\phi}) - \hat{j}(u^\star(t)) \geq \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i(t), \hat{\phi}_i\,(t) - u_i^\star(t))$$

En utilisant la Proposition 3.5, on obtient (3.29).

- D'après [21] (lemme 5.3) on peut choisir $\widehat{\phi}_i = u_i^\star \pm \psi_i,\ \ i = 1, 2\ \forall\psi_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

  donc

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\,(t))^2)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\,(t)\,\frac{\partial\psi_i}{\partial z}dx'dz - \sum_{i=1}^{2}(p^\star\,(x', t)\,, \frac{\partial\psi_i}{\partial x_i}) = \sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_i\,(t)\,, \psi_i).$$

Utilisons la formule de Green, et en choisissant $\psi_1 = 0$ et $\psi_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, puis $\psi_2 = 0$ et

$\psi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, il vient que :

$$-\mu\frac{\partial}{\partial z}\left((\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t))^2)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t)\right)+\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}(t)=\hat{f}_i(t) \quad i=1,2 \text{ in } W^{-1,q}(\Omega) \quad (3.34)$$

et comme $\hat{f}_i(t) \in L^q(\Omega)\ \forall t \in [0,T]$. Alors (3.34) devient (3.30). ■

Théorème 3.9 *Sous les mêmes hypothèses du Théorème 3.1, les traces* $s^\star = u^\star(x',0,t)$, $\pi^\star = \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(x',0,t)\right)^2\right]^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(x',0,t)$ *vérifient l'inégalité*

$$\int_\omega \widehat{k}\left(|\psi+s^\star-s|-|s^\star-s|\right)dx' - \int_\omega \mu\pi^\star\psi dx' \geq 0 \quad \forall\psi \in [L^p(\omega)]^2, \qquad (3.35)$$

et la condition aux limites de Tresca :

$$\begin{array}{c} \mu|\pi^\star| < \widehat{k} \Longrightarrow s^\star = s \\ \mu|\pi^\star| = \widehat{k} \Longrightarrow \exists\beta \geq 0 \ \text{tel que}\ s^\star = s-\beta\pi^\star \end{array} \quad p.p\ sur\ \omega\times]0,T[\qquad (3.36)$$

De plus $u^\star$ *et* $p^\star$ *vérifient l'équation généralisée faible de Reynolds :*

$$\int_\omega\left(\frac{h^3}{12\mu}\nabla p^\star(x',t)+\widetilde{F}(x',t)+\int_0^h\int_0^y A^\star(x',\xi,t)\frac{\partial u_i^\star}{\partial\xi}(x',\xi,t)\,d\xi dy\right)\nabla\psi(x')dx' \quad (3.37)$$
$$-\int_\omega\frac{h}{2}\left(\int_0^h A^\star(x',\xi,t)\frac{\partial u_i^\star}{\partial\xi}(x',\xi,t)\,d\xi\right)\nabla\psi(x')dx' = 0 \quad \forall\psi \in W^{1,p}(\omega)$$

avec

$$\begin{aligned} A^\star(x',\xi,t) &= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(x',\xi,t)\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}, \ F(x',y,t)=\int_0^y\int_0^\zeta \hat{f}_i(x',\alpha,t)d\alpha d\zeta, \\ \text{et } \widetilde{F}(x',t) &= \frac{1}{\mu}\int_0^h F(x',y,t)dy-\frac{h}{2\mu}F(x',h,t). \end{aligned}$$

Preuve : En utilisant [21] on peut choisir $\widehat{\phi}_i = u_i^\star + \psi_i, \ i = 1,2 \ \forall \psi_i \in W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ .donc

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} (\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} (\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t))^2)^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t) \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx' dz - \sum_{i=1}^{2} (p^\star(x',t), \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}) +$$

$$+ \hat{j}(\psi + s^\star) - \hat{j}(s^\star(t)) \geq \sum_{i=1}^{2} (\hat{f}_i(t), \psi_i)$$

d'après la formule de Green, on déduit

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \left\{ -\mu \frac{\partial}{\partial z} \left((\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} (\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t))^2)^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u_i^\star}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_i^\star}{\partial x_i} \right\} \psi_i dx' dz +$$

$$+ \int_{\omega} \widehat{k} \left(|\psi + s^\star - s| - |s^\star - s| \right) dx' - \int_{\omega} \mu \pi^\star \psi dx' \geq \sum_{i=1}^{2} (\hat{f}_i(t), \psi_i)$$

et d'après (3.30) il vient

$$\int_{\omega} \widehat{k} \left(|\psi + s^\star - s| - |s^\star - s| \right) dx' - \int_{\omega} \mu \pi^\star \psi dx' \geq 0.$$

Cette inégalité reste valable pour tout $\psi \in (D(\omega))^2$, et par densité de $D(\omega)$ dans $L^p(\omega)$ on trouve (3.35).

Pour démontrer (3.37) en intégrant deux fois (3.30) de 0 à z, il vient que :

$$-\mu \int_0^z A^\star(x',\xi,t) \frac{\partial u_i^\star}{\partial \xi}(x',\xi,t) d\xi + \mu z \pi_i^\star + \frac{z^2}{2} \frac{\partial p^\star}{\partial x_i}(x',t) = \int_0^z \int_0^\xi \hat{f}_i(x',y,t) dy d\xi, \ \ i = 1,2, \tag{3.38}$$

pour $z = h$ on obtient

$$-\mu \int_0^h A^\star(x',\xi,t) \frac{\partial u_i^\star}{\partial \xi}(x',\xi,t) d\xi + \mu h \pi_i^\star + \frac{h^2}{2} \frac{\partial p^\star}{\partial x_i}(x',t) = \int_0^h \int_0^\xi \hat{f}_i(x',y,t) dy d\xi, \ \ i = 1,2, \tag{3.39}$$

En intégrant (3.38) de 0 à h, on obtient :

$$-\mu\int_0^h\int_0^y A^\star(x',\xi,t)\frac{\partial u^\star}{\partial\xi}(x',\xi,t)\,d\xi dy+\mu\frac{h^2}{2}\pi^\star+\frac{h^3}{6}\nabla p^\star(x',t)=\int_0^h F(x',y,t)dy \quad (3.40)$$

avec

$$F_i(x',y,t)=\int_0^h\int_0^\xi \hat{f}_i(x',y,t)\,dyd\xi,\quad i=1,2.$$

d'après (3.39) et (3.40) on déduit (3.37). ■

Théorème 3.10 *La solution* $(u^\star,p^\star)$ *dans* $L^p(0,T;V_z)\times L^q(0,T;L_0^q(\omega)\cap W^{1,q}(\omega))$ *du problème limite* (3.29) *est unique.*

Preuve. La preuve est similaire à celle de [10].

Bibliographie

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, NewYork, 1975.

[2] A. Aissaoui, N. Hemici : A frictional contact problem with damage and adhesion for an electro elastic-viscoplastic body. Electron J. Differential Equations. 11, 1-19 (2014).

[3] G. Allaire, Homogenization of the Navier-stokes equations with a slip boundary condition. Comm. Pure Appl.Math. 44 No 6 (1991) 605-641.

[4] C. Amrouche, V. Girault, Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension. Czechoslovak Mathematical Journal, 44, (1994).

[5] A. Assemien, G. Bayada and M. Chambat, Inertial effects in the asymptotic behaviour of a thin film flow. Asymptotic Analysis No.9, (1994), 117-208.

[6] G. Bayada and M. Chambat, On inerface conditions for a thin film flow past a porous meduim, SIAM J. Math. anal, 26, 5, (1995), 1113-1129.

[7] G. Bayada, M. Chambat, S.R. Gamouana, About thin film micropolar asymptotic equations, Quart. Appl. Math. 59 No 3 (2001) 413-439.

[8] H. Benseridi, A. Saadallah, and M. Dilmi, On the asymptotic analysis of a non-isothermal Bingham fluid with mixed boundary conditions and friction law. submitted

[9] M. Boukrouche and R. El mir, Asymptotic analysis of a non-Newtonian fluid in a thin domain with Tresca law, Nonlinear Anal. 59(2004), no. 1–2, 85–105.

[10] M. Boukrouche, G. Lukaszewicz, On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions. Math Mod and Meth in Applied Sciences. 14(6), 913-941 (2004).

[11] A. Bourgeat, A. Mikelic, R. Tapiéro, Dérivation des équations moyennées décrivant un écoulement non newtonien dans un domaine de faible épaisseur, C. R. Acad. Sci. Paris, 316(I), 965-970 (1993).

[12] H. Brezis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualitlié, Annales de l'institut Fourier, 18, (1968), 115-175.

[13] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications ; Masson Paris, 1983.

[14] R. Bunoiu, J. Saint Jean Paulin, Nonlinear viscous flow through a thin slab in the lubrication case, Rev. Roum. Math. Pures et Appliquées, XLV(4), 577-591 (2000).

[15] R. Bunoui, S. Kesavan : Asymptotic behavior of a Bingham fluid in thin layers. J. Math. Anal. Appl. 293(2), 405-418 (2004).

[16] P-G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, Volume 3, Theory of shells, North Holland ; 1 edition (May 25, 2000).

[17] J-C. De Los Reyes, S. Gonz alez, Path following methods for steady laminar Bingham flow in cylindrical pipes. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 43(1), 81-117 (2009).

[18] E-J. Dean, R. Glowinski, and G. Guidoboni, On the numerical simulation of bingham visco-plastic flow : Old and new results. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 142, 36-62 (2007).

[19] M. Dilmi, H. Benseridi, and A. Saadallah, Asymptotic Analysis of a Bingham Fluid in a Thin Domain with Fourier and Tresca Boundary Conditions. Adv. Appl. Math. Mech. 6, 797-810 (2014).

[20] P. Di, A. D-A, Ern, A hybrid high-order locking-free method for linear elasticity on general meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 283, 1-21 (2015).

[21] Bo-Qing Dong, Zhi-Min Chen, Asymptotic stability of non-Newtonian flows with large perturbation in R2, Applied Mathematics and Computation, Volume 173, Issue 1 (2006), 243-250.

[22] G. Duvant, J.L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod Paris (1972).

[23] El mir, R, Comportement asymptotique d'un fluide de Bingham dans un lmi mince avec des conditions non-linéaires sur le bord. Thèse de Doctorat, Université Saint Etienne, France (2006).

[24] M. Fuchs, J-F Grotowski, J. Reuling, On variational model for quasi-static Bingham fluids. Math Meth and Meth in Applied Sciences. 19, 991-1015 (1996).

[25] M. Fuchs, G. Seregin, Regularity results for the quasi-static Bingham variational inequality in dimensions two and three. Mathematische Zeitschrift. 227, 525-541 (1998).

[26] V. Girault , P.A. Raviart, Finite element approximation of the Navier Stokes equation, Springer-Verlag, 1979.

[27] R. Glowinski, J-L. Lions, R. Trémolières, Analyse numerique des inéquations variationnelles, Bd. 1 : théorie générale- premières applications, 268 S, 180 FF ; Bd. 2, applications aux phénomènes stationnaires et d'évolution, 290 S., 210 FF. Paris, Bordas, Dunod (1976).

[28] B-G, Guoguang Lin, Existence and uniqueness of stationary solutions of nonNewtonian viscous incompressible fluids, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 4, Issue 1 (1999), 63-68.

[29] I-R. Ionescu, Q-L. Nguyen, S. Wolf, Slip-dependent friction in dynamic elasticity. Nonlinear Analysis. 53, 375-390 (2003).

[30] H. Kabaria, A-J. Lew, B. Cockburn, A hybridizable discontinuous Galerkin formulation for non-linear elasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 283, 303-329 (2015).

[31] M. Kaneta, H. nishikawa , K. Kameishi, Observation of wall slip in ehd lubrication, Journal of tribology, vol. 112 (1990) 447-452.

[32] B-P. Lamichhane, A new stabilization technique for the non-conforming Crouzeix-Raviart element applied to linear elasticity. Applied Mathematics Letters. 39, 35-41 (2015).

[33] Z. Lerguet, Z. Zellagui, H. Benseridi & S. Drabla, Variational analysis of an electro viscoelastic contact problem with friction. Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences. 14(1), 93-100 (2013).

[34] J. L. Lions, "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires," Dunod, Gauthier-Villars. (1969).

[35] J.-L. Lions et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 15 1961 311-326.

[36] W.G. Litvinov, Models for Laminar and Turbulent Flows of Viscous and Nonlinear Viscous Fluids, Recent developments in theoretical fluid mechanic, Longman Scientific ad Technical, Galdi, J.P. et Necas, J. (éd.), Pitman Research Notes in Mathematics Series, 291, 1992.

[37] A. Mikelic, R. Tapiero, Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab, M2 A.N., 29, 3-22 (1995).

[38] S.A. Nazarov, Asymptotic solution of the Navier-Stokes problem on the flow of a thin layer of fluid, Siberian Math. J., 31, 296-307 (1990).

[39] S. Poyiadji, K- D. Housiadas, G-C. Georgiou & K. Kaouri, Asymptotic solutions of weakly compressible Newtonian Poiseuille flows with pressure-dependent viscosity, European Journal of Mechanics B/Fluids, 49 (2015), 217-225

[40] Y. Qin, X- Lu, Xinguang Yang, Global existence and exponential stability of solutions to the one-dimensional full non-Newtonian fluids, Nonlinear Analysis : Real World Applications, Volume 13, Issue 2, 2012, 607-633.

[41] A. Saadallah, H. Benseridi and M. Dilmi, Estimates for the asymptotic convergence of a nonisothermal Bingham fluid with mixed boundary conditions, submitted in Adv. Appl. Math. Mech.

[42] Z. S. Safar, "Journal bearings operating with non-newtonian lubricant films," Wear, vol. 53, no. 1, pp. 95–100, 1979. View at Google Scholar.

[43] K. Taous, Equations de Reynolds pour une large classe de fluides non-newtoniens, C. R. Acad. Sci. Paris, 322(I), 1213-1218 (1995)

[44] P. D. Williams and G. R. Symmons, "Analysis of hydrodynamic journal bearings lubricated with non-Newtonian fluids," Tribology International, vol. 20, no. 3, pp. 119–124, 1987.

Résumé

Le but de ce travail est d'étudié le comportement asymptotique d'un fluide non-Newtonien isotherme stationnaire de Bingham dans un domaine mince tridimensionnel Ω^{ε}, puis on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un écoulement non stationnaire, isotherme incompressible pour un fluide non Newtonien dans le même .domaine Ω^{ε} avec des conditions de frottement non linéaire

Abstract

The objectif of this work is to study the asymptotic behavior of a Bingham stationary isothermal non-Newtonian fluid in a three-dimensional thin domain Ω^{ε}, and then to study the asymptotic analysis of a non-stationary, non-Newtonian lubrication problem with Tresca fluid-solid law in the same .domain Ω^{ε}.

ملخص

الهدف من هذه العمل هو دراسة السلوك المقارب لسائل غير نيوتوني لبينغهام متساوي الحرارة و في حالة استقرار في منطقة رقيقة ثلاثية الأبعاد Ω^{ε} و بعد ذلك دراسة تحليلية مقاربة لتدفق سائل لا ينضغط غير نيوتوني متساوي الحرارة في حالة ديناميكية في نفس المنطقة Ω^{ε}.