

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

Université du Ferhat Abbas Sétif

MEMOIRE

**Présenté à la Faculté des Sciences de l'ingénieur
Département d'Optique et Mécanique de Précision**

Pour l'obtention du Diplôme de

MAGISTER

Option : Mécanique Appliquée

Par

ZAHRI ABDELIAMINE

THEME

**Approches probabilistes aux problèmes de fiabilité
des transmissions mécaniques par engrenages**

Soutenu le :

Devant le Jury d'examen :

| | | | |
|---------------------|------|---------------------|------------|
| M. : Rabah Zegadi | Pr. | Université de Sétif | Président |
| M. : Ferhat Djeddou | M.C. | Université de Sétif | Rapporteur |
| M. : Ahmed Felkaoui | M.C. | Université de Sétif | Examineur |
| M. : Boualem Keskes | M.C. | Université de Sétif | Examineur |
| M. : Lakhdar Smata | M.C. | Université de Sétif | Examineur |

Introduction générale

Introduction générale :

La fiabilité est une science relativement récente dont on peut situer approximativement les débuts vers les années 1960. Elle s'est développée très rapidement, elle a des applications dans de nombreux domaines. En effet, pour des raisons de sécurité, il est absolument nécessaire que certains matériels assurent un fonctionnement sans défaillance ; c'est le cas, par exemple, des systèmes de défense, des grands réseaux de distribution, des systèmes centralisés des informations...

D'autres raisons sont plutôt d'ordre économique ; au prix de revient d'une première installation s'ajoutent tous les frais d'exploitation et ceux-ci comportent généralement une large part due aux coûts de défaillance ou aux entretiens préventifs, il est donc impératif de les minimiser.

En général, on considère qu'un matériel est constitué de composants ou pièces alors qu'un système est un ensemble de composants ou de matériels interconnectés ou en interaction.

Le monde de l'industrie et le monde des transports disposent de machine et d'installations de plus en plus performantes et complexes. Les exigences de haute sécurité, la réduction des coûts d'exploitation et la maîtrise de la disponibilité des équipements donnent à la fiabilité des systèmes un rôle prépondérant.

Dans ce travail, nous nous intéressons principalement aux transmissions de puissance mécanique utilisées dans différents domaines tels que l'aéronautique, l'automobile, les transports ferroviaires et l'industrie, ...etc. La fiabilité de ces systèmes de transmission occupe un rôle très important relativement à leur temps d'utilisation. Actuellement la recherche scientifique vise à développer les outils nécessaires à l'optimisation et à la fiabilité de tels systèmes. Les travaux de recherche dans ce domaine ont donc pour objectif de définir une politique de fiabilité basée sur l'utilisation d'outils adéquats et adoptée à un système mécanique complexe. Différentes disciplines sont utilisées pour prendre en charge la conception, la fabrication et la maintenance des engrenages en termes de résistance, de durabilité, de sûreté et de fiabilité.

Néanmoins, le but de ce travail consiste en la détermination de l'indice de fiabilité d'une transmission mécanique par une paire de roues dentées et ceci par différentes méthodes analytiques et numériques tout en les comparant avec celles exposées dans la bibliographie.

Enfin, ce travail comporte une introduction, trois chapitres, et une conclusion générale. Dans un premier temps, nous présentons un aperçu sur les engrenages, ainsi que des concepts de sécurité et leur mise en œuvre pratique au quotidien. Ces opérations sont indispensables

Introduction générale

lors de la planification, la construction, l'exploitation des engrenages et la mise au point du plan maintenance.

Le deuxième chapitre est consacré à la description de différentes méthodes de prédiction de la fiabilité généralement recommandées lors de la conception des systèmes mécaniques

Enfin, Le chapitre trois aborde le calcul de l'indice de sureté par les différents méthodes, les facteurs de sensibilité des paramètres influents et la variation de l'indice de fiabilité en fonction de l'écart-type des incertitudes.

Dédicace

A ma Mère, mon Père

A Ma femme

Et toute la famille.

A Touts mes amis

Un grand merci à tous pour leur compréhension et leur aide

Je dédie ce travail

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au département d'Optique et Mécanique de Précision (UFAS – SETIF).

Je tiens à exprimer tout ma gratitude à Monsieur DJEDDOU Ferhat Maître de Conférences (Université Ferhat Abbas), de m'avoir accordé sa confiance et son soutien tout au long de ce travail, je le remercie particulièrement de l'attention qu'il m'a témoigné et la patience.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur ZEGADI Rabeih Professeur (Université Ferhat Abbas), pour l'intérêt avec lequel il a suivi ce travail et pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Mes remerciements vont également aux membres du jury, particulièrement à Monsieur FELKAOUI Ahmed Maître de Conférences (Université Ferhat Abbas),

KESKES Boualem Maître de Conférences (Université Ferhat Abbas) et SMATA Lakhdar Maître de Conférences (Université Ferhat Abbas) d'avoir bien voulu consacrer une partie de leur précieux temps pour examiner ce travail.

Je n'oublie pas non plus tous ceux qui m'ont aidé pour réaliser ce travail, et qui ont contribué à le rendre possible.

Résumé :

La fiabilité et sa signification dans la technologie sont un champ rapidement croissant. La sûreté et la fiabilité d'un composant mécanique ou autre est invariablement l'objectif technique principal d'une conception de technologie.

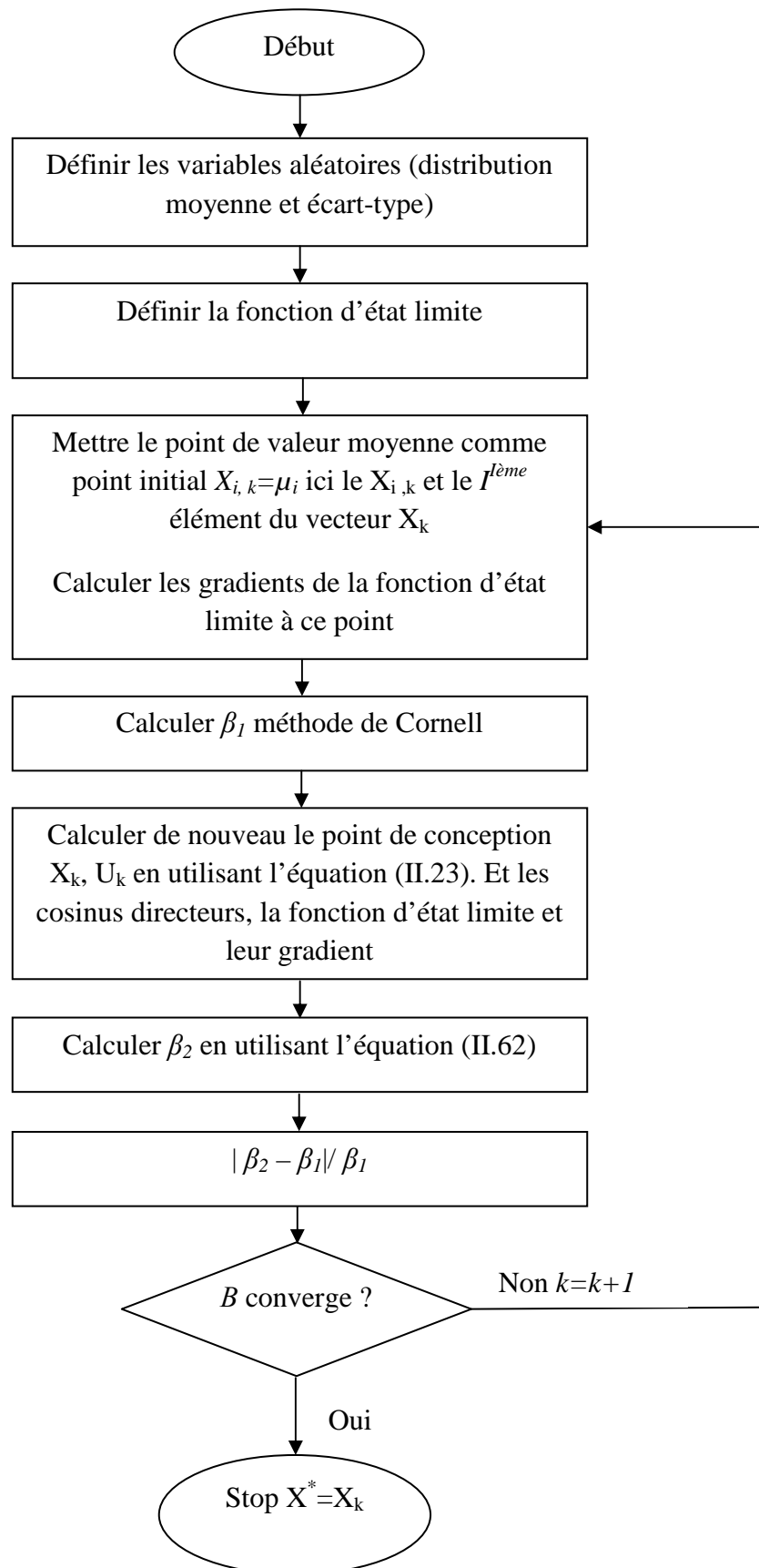
Les transmissions par engrenages sont largement adaptées à beaucoup de genres d'équipement mécaniques. La construction complexe d'une paire de roues dentées présente beaucoup de facteurs qui influencent la fiabilité ; les erreurs de fabrication, conditions variables de travail et la non homogénéité des propriétés des matériaux contribuent aux difficultés quand à la résolution de ce problème. A ce jour, il n'y a aucune conclusion définie sur la conception de fiabilité, il est important donc, de rechercher la fiabilité des transmissions par engrenages. Bien que ce problème puisse être résolu par des expériences de fiabilité, il est difficile de porter l'expérience outre que les limites des conditions de l'expérience, de la main d'œuvre, des moyens et du temps d'expérience.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans le passé pour la conception optimale des engrenages à denture droite et hélicoïdale. Ces méthodes ont utilisées des techniques déterministes d'optimisation de conception pour obtenir ce qui devrait être considéré comme paramètres de conception satisfaisants. Il y'a beaucoup de problèmes qui surgissent avec les résultats de l'approche déterministe ; l'incapacité de traiter les incertitudes dans les propriétés des matériaux, les conditions de service des engrenages et leurs défauts de fabrication,etc. ceci a provoqué la recherche dans les domaines des méthodologies de conception probabilistes applicables à la conception structurale et composants de machine. Cette méthode cherche à expliquer les incertitudes dans les propriétés, les conditions de travail et les erreurs de fabrication.

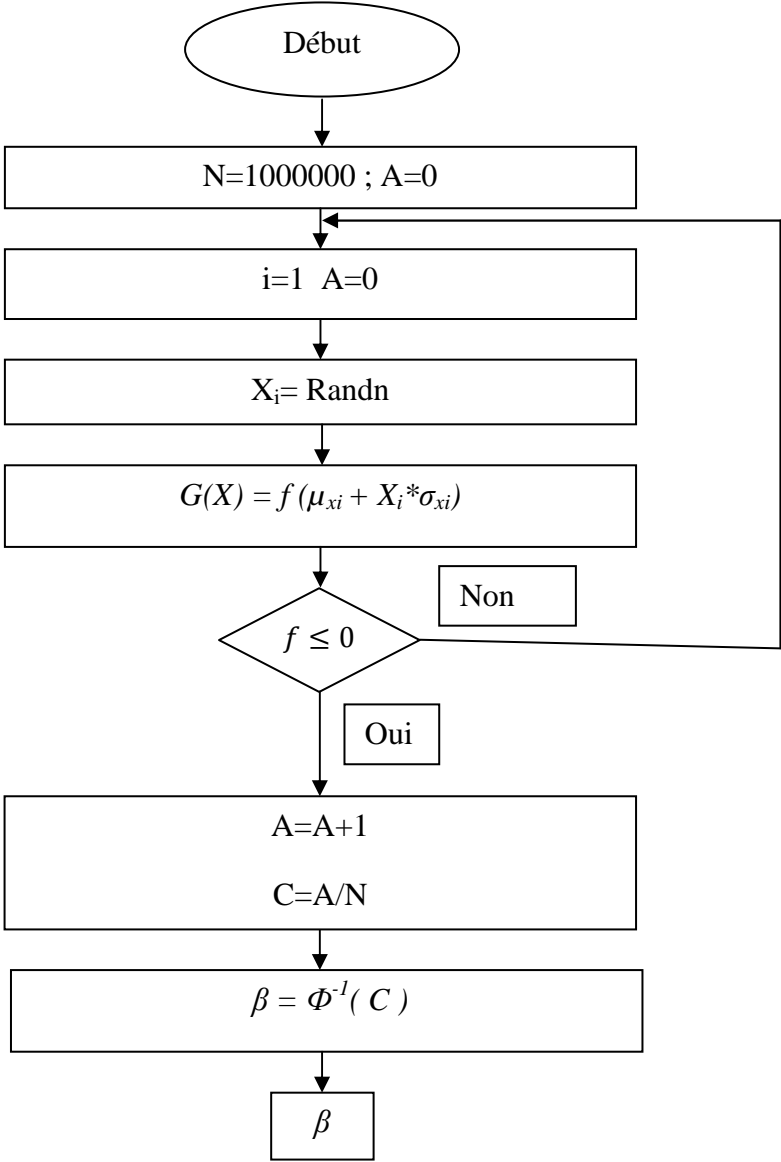
L'objectif principal de ce travail de magister est donc de développer des méthodes probabilistes analytiques et numériques pour estimer la fiabilité des systèmes mécaniques à engrenages. La validation de ces méthodes devra être vérifiée par une application sur un exemple concret de transmission par engrenages.

Mots-clés : Transmissions mécaniques, Conception et Performance, Engrenages, Paramètres statistiques, fiabilité des systèmes mécaniques.

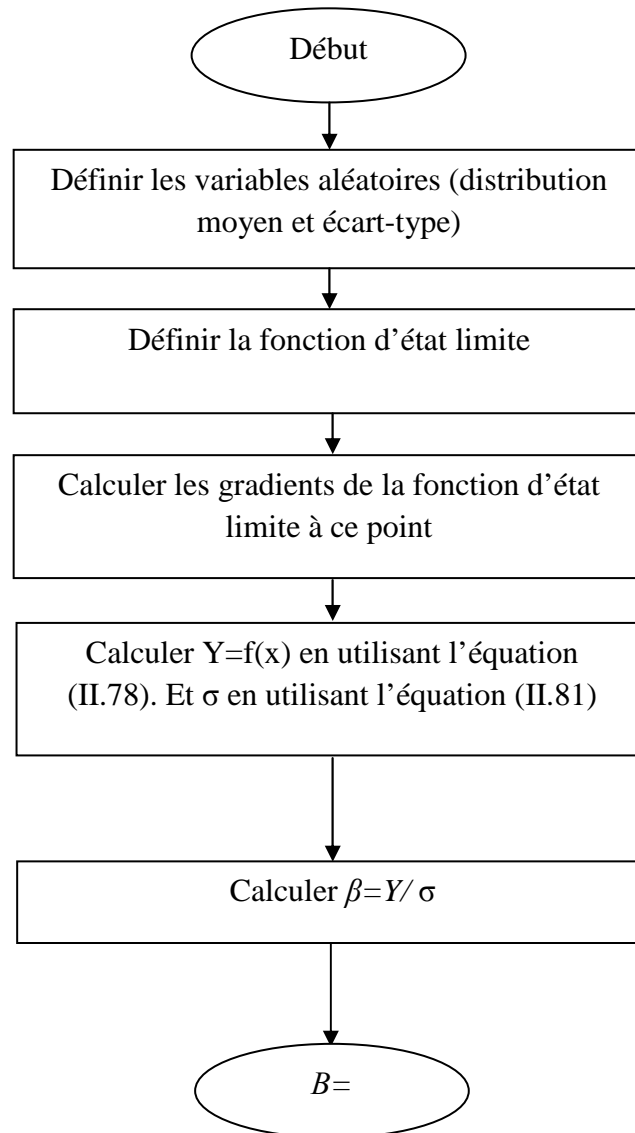
Annexe A.1 : Algorithme de calcul de la méthode Hasofer et Lind (HL)



Annexe A.2 : Algorithme de calcul de la méthode de Monte Carlo (MCS)



Annexe A.3 : Algorithme de calcul de la méthode analytique de Taylor



Annexe B : Indice de fiabilité (HL) $\beta=f(\sigma)$.

| Variation écart type | Pression de contact | Flexion pignon | Flexion roue |
|----------------------|---------------------|----------------|--------------|
| 0.2 | 16.4413 | 13.3771 | 14.1471 |
| 0.4 | 8.2206 | 6.6885 | 7.0735 |
| 0.6 | 5.4804 | 4.4590 | 4.7157 |
| 0.8 | 4.1103 | 3.3442 | 3.5368 |
| 1 | 3.2883 | 2.6753 | 2.8294 |
| 1.2 | 2.7402 | 2.2294 | 2.3578 |
| 1.4 | 2.3488 | 1.9109 | 2.0210 |
| 1.6 | 2.0552 | 1.6720 | 1.7684 |
| 1.8 | 1.8268 | 1.4862 | 1.5719 |
| 2 | 1.6441 | 1.3375 | 1.4147 |
| 2.2 | 1.4947 | 1.2159 | 1.2861 |
| 2.4 | 1.3701 | 1.1145 | 1.1789 |
| 2.6 | 1.2647 | 1.0288 | 1.0882 |
| 2.8 | 1.1744 | 0.9553 | 1.0105 |
| 3 | 1.0961 | 0.8915 | 0.9431 |
| 3.2 | 1.0276 | 0.8358 | 0.8842 |
| 3.4 | 0.9671 | 0.7866 | 0.8322 |
| 3.6 | 0.9134 | 0.7428 | 0.7859 |
| 3.8 | 0.8653 | 0.7037 | 0.7446 |
| 4 | 0.8221 | 0.6992 | 0.7074 |
| 4.2 | 0.7829 | 0.6659 | 0.6737 |
| 4.4 | 0.7473 | 0.6356 | 0.6430 |
| 4.6 | 0.7148 | 0.6080 | 0.6151 |
| 4.8 | 0.6850 | 0.5826 | 0.5895 |
| 5 | 0.6576 | 0.5593 | 0.5659 |
| 5.2 | 0.6323 | 0.5378 | 0.5441 |
| 5.4 | 0.6089 | 0.5179 | 0.5240 |

Annexe C : Indice de fiabilité (MCS) $\beta=f(\sigma)$.

| Variation écart type | Pression de contact | Flexion pignon | Flexion roue |
|----------------------|---------------------|----------------|--------------|
| 0.2 | - | - | - |
| 0.4 | - | - | - |
| 0.6 | - | 4.5264 | 4.7534 |
| 0.8 | 4.2240 | 3.4601 | 3.5234 |
| 1 | 3.2888 | 2.7813 | 2.8237 |
| 1.2 | 2.7137 | 2.3215 | 2.3386 |
| 1.4 | 2.3281 | 1.9826 | 2.0055 |
| 1.6 | 2.0336 | 1.7292 | 1.7499 |
| 1.8 | 1.7990 | 1.5356 | 1.5508 |
| 2 | 1.6112 | 1.3737 | 1.3918 |
| 2.2 | 1.4573 | 1.2461 | 1.2583 |
| 2.4 | 1.3290 | 1.1370 | 1.1524 |
| 2.6 | 1.2229 | 1.0428 | 1.0604 |
| 2.8 | 1.1311 | 0.9669 | 0.9792 |
| 3 | 1.0430 | 0.8965 | 0.9100 |
| 3.2 | 0.9712 | 0.8356 | 0.8458 |
| 3.4 | 0.9117 | 0.7856 | 0.7949 |
| 3.6 | 0.8544 | 0.7339 | 0.7434 |
| 3.8 | 0.8032 | 0.6926 | 0.7003 |
| 4 | 0.7565 | 0.6539 | 0.6625 |
| 4.2 | 0.7162 | 0.6174 | 0.6243 |
| 4.4 | 0.6776 | 0.5862 | 0.5935 |
| 4.6 | 0.6409 | 0.5574 | 0.5612 |
| 4.8 | 0.6070 | 0.5284 | 0.5345 |
| 5 | 0.5808 | 0.5030 | 0.5084 |
| 5.2 | 0.5505 | 0.4772 | 0.4840 |
| 5.4 | 0.5273 | 0.4565 | 0.4588 |

Annexe D : Indice de fiabilité $\beta=f(\sigma)$ par la méthode analytique (Taylor) .

| Variation écart type | Pression de contact | Flexion pignon | Flexion roue |
|----------------------|---------------------|----------------|--------------|
| 0.2 | 14.9805 | 13.3771 | 13.5264 |
| 0.4 | 7.4923 | 6.6885 | 6.7632 |
| 0.6 | 4.9972 | 4.4590 | 4.5088 |
| 0.8 | 3.7503 | 3.3442 | 3.3815 |
| 1 | 3.0027 | 2.6753 | 2.7052 |
| 1.2 | 2.5048 | 2.2294 | 2.2543 |
| 1.4 | 2.1495 | 1.9109 | 1.9322 |
| 1.6 | 1.8834 | 1.6720 | 1.6907 |
| 1.8 | 1.6767 | 1.4862 | 1.5028 |
| 2 | 1.5116 | 1.3375 | 1.3525 |
| 2.2 | 1.3768 | 1.2159 | 1.2295 |
| 2.4 | 1.2647 | 1.1145 | 1.1270 |
| 2.6 | 1.1701 | 1.0288 | 1.0403 |
| 2.8 | 1.0891 | 0.9553 | 0.9659 |
| 3 | 1.0192 | 0.8915 | 0.9015 |
| 3.2 | 0.9581 | 0.8358 | 0.8451 |
| 3.4 | 0.9044 | 0.7866 | 0.7954 |
| 3.6 | 0.8569 | 0.7428 | 0.7511 |
| 3.8 | 0.8144 | 0.7037 | 0.7116 |
| 4 | 0.7421 | 0.6685 | 0.6760 |
| 4.2 | 0.7110 | 0.6366 | 0.6437 |
| 4.4 | 0.6828 | 0.6076 | 0.6144 |
| 4.6 | 0.6570 | 0.5811 | 0.5876 |
| 4.8 | 0.6241 | 0.5570 | 0.5632 |
| 5 | 0.5992 | 0.5346 | 0.5406 |
| 5.2 | 0.5761 | 0.5140 | 0.5198 |
| 5.4 | 0.5165 | 0.4949 | 0.5005 |

Annexe E : Indice de fiabilité $\beta=f(\sigma)$ par la méthode de Matlab (fminc) .

| Variation écart type | Pression de contact | Flexion pignon | Flexion roue |
|----------------------|---------------------|----------------|--------------|
| 0.2 | 16.4401 | 13.9835 | 14.1471 |
| 0.4 | 8.2201 | 6.9917 | 7.0735 |
| 0.6 | 5.4800 | 4.6611 | 4.7157 |
| 0.8 | 4.1100 | 3.4958 | 3.5368 |
| 1 | 3.2880 | 2.7967 | 2.8294 |
| 1.2 | 2.7400 | 2.3305 | 2.3578 |
| 1.4 | 2.3486 | 1.9976 | 2.0210 |
| 1.6 | 2.0550 | 1.7479 | 1.7684 |
| 1.8 | 1.8267 | 1.5537 | 1.5719 |
| 2 | 1.6440 | 1.3983 | 1.4147 |
| 2.2 | 1.4946 | 1.2712 | 1.2861 |
| 2.4 | 1.3700 | 1.1652 | 1.1789 |
| 2.6 | 1.2646 | 1.0756 | 1.0882 |
| 2.8 | 1.1743 | 0.9988 | 1.0105 |
| 3 | 1.0960 | 0.9322 | 0.9431 |
| 3.2 | 1.0275 | 0.8739 | 0.8842 |
| 3.4 | 0.9671 | 0.8225 | 0.8322 |
| 3.6 | 0.9133 | 0.7768 | 0.7859 |
| 3.8 | 0.8653 | 0.7359 | 0.7446 |
| 4 | 0.8220 | 0.6991 | 0.7074 |
| 4.2 | 0.7829 | 0.6658 | 0.6736 |
| 4.4 | 0.7473 | 0.6356 | 0.6430 |
| 4.6 | 0.7148 | 0.6080 | 0.6150 |
| 4.8 | | 0.5826 | 0.5895 |
| 5 | | 0.5593 | 0.5659 |
| 5.2 | | 0.5378 | 0.5441 |
| 5.4 | | 0.5179 | 0.5240 |

Annexe F : Facteurs de sensibilité et les coordonnées du MMP par la méthode (HL) :

| $(i=1, \dots, 18)$ | pression de contact | | flexion pignon | | flexion roue | |
|--------------------|---------------------|----------|----------------|----------|----------------|----------|
| | $Les \alpha_i$ | X_i | $Les \alpha_i$ | X_i | $Les \alpha_i$ | X_i |
| 01 | -0.84937 | 864.2981 | -0.9449 | 146.1469 | -0.9464 | 143.96 |
| 02 | -0.15829 | 0.9828 | -0.0740 | 2.0856 | -0.0730 | 2.0856 |
| 03 | -0.15786 | 1.0124 | -0.0740 | 0.9931 | -0.0730 | 0.9931 |
| 04 | -0.15829 | 1.0221 | -0.0740 | 0.9832 | -0.0730 | 1.0031 |
| 05 | -0.15829 | 0.9041 | -0.0740 | 1.0577 | -0.0730 | 1.0577 |
| 06 | -0.15829 | 0.9828 | -0.0740 | 0.9931 | -0.0730 | 0.9931 |
| 07 | -0.15829 | 0.9828 | 0.0730 | 2.3759 | 0.0720 | 2.1544 |
| 08 | 0.023560 | 2.3208 | 0.0730 | 1.7617 | 0.0720 | 1.9530 |
| 09 | 0.227127 | 196.88 | 0.0111 | 0.7151 | 0.0109 | 0.7151 |
| 10 | 0.023560 | 0.8103 | 0.0111 | 0.8001 | 0.0109 | 0.8001 |
| 11 | 0.023560 | 0.9573 | 0.0333 | 34692.51 | 0.0329 | 34692.42 |
| 12 | 0.035292 | 34704.30 | 0.0730 | 1.0067 | 0.0720 | 1.0067 |
| 13 | 0.077128 | 1.0083 | 0.2265 | 1.5862 | 0.2235 | 1.5860 |
| 14 | 0.236078 | 1.6092 | 0.0730 | 1.6138 | 0.0720 | 1.6137 |
| 15 | 0.077128 | 1.6940 | 0.0730 | 1.1678 | 0.0720 | 1.1678 |
| 16 | 0.077128 | 1.1697 | -0.0111 | 199.96 | -0.0109 | 199.96 |
| 17 | -0.01178 | 199.96 | -0.0111 | 3.9993 | -0.0109 | 3.9993 |
| 18 | -0.01178 | 148.72 | - | - | - | - |

Aperçu sur les engrenages

I.1 Introduction :

L'engrènement est un phénomène connu depuis plusieurs siècles, les moulins à vent utilisaient des engrenages en bois assez perfectionnés, et les mécanismes d'horlogerie ont utilisés très tôt les roues dentées. Les engrenages ont de multiples applications. Ils sont très largement appliqués dans divers domaines techniques. Leur rôle est d'assurer une transmission de grande puissance entre les axes concourants, parallèles et perpendiculaires. Ils se retrouvent principalement dans les boîtes de transmission des moyens de transport, comme l'automobile, le train ou l'aviation. Les développements industriels actuels demandent de repenser en termes de recherche les points clés du développement de ce type d'engrenage. Par exemple l'introduction des machines numériques en fabrication et de la mesure par machine à mesurer. Il y a aussi les moyens d'étude comme les logiciels d'éléments finis de plus en plus performants qui conduisent à développer totalement l'étude des engrenages. Différentes disciplines sont utilisées pour prendre en charge la conception, la fabrication et la maintenance des engrenages en termes de résistance, de durabilité, de sûreté et de fiabilité.

I.2. Les engrenages :

Les transmissions de puissance mécanique par engrenage sont généralement utilisées dans différents domaines tels que l'aéronautique, l'automobile, les transports ferroviaires et l'industrie, ...etc. La fiabilité de ces systèmes de transmission occupe un rôle très important relativement par rapport à leur temps d'utilisation.

Le principe des pièces solides qui s'engrènent et qui poussent l'une sur l'autre en assurant la continuité du mouvement existe et est utilisé depuis des temps immémoriaux ; les romains, les grecs et avant eux, les égyptiens et les chinois l'ont utilisé. Mais l'étude systématique et l'usage intensif des engrenages avec le profil de denture cycloïde datent des débuts de l'horlogerie au 12^{ème} siècle. La théorie des engrenages avec le profil développante de cercle est connue depuis le 17^{ème} siècle et appliquée depuis le milieu du 19^{ème} siècle. Aujourd'hui, ce profil de denture est universellement utilisé : il offre une transmission positive et efficace tout en étant économique à la fabrication et à l'application [1].

Le rôle principal des engrenages est d'assurer la transmission de puissance avec un mouvement de rotation d'un arbre à un autre, avec un rapport moyen de vitesse angulaire

constant. Selon le positionnement relatif des arbres, trois classes majeures d'engrenages peuvent être distinguées :

I.2.1 Type des engrenages :

a) les engrenages à axes parallèles :

Ce type est nommé aussi cylindrique. Les deux arbres sont parallèles. Diverses catégories sont distinguées selon la géométrie des dents suivant la génératrice. On trouve les dentures droites, les dentures hélicoïdales, ...etc.

b) les engrenages à axes concourants :

Ce type est nommé aussi conique. Les deux arbres sont tels que leurs axes de rotation se coupent. Selon la géométrie des dents, on distingue les sous-catégories des engrenages :

*dentures droites, les génératrices passent par le point de concours des axes de rotation,

* dentures hélicoïdales,

*dentures spirales, engendrées par des segments rectilignes s'appuyant sur une courbe directrice.

c) les engrenages à axes quelconques :

Ces engrenages sont nommés gauches. Les axes des arbres n'ont pas de point commun et occupent une position relative quelconque. Dans cette catégorie se retrouvent par exemple les dentures hypoïdes.

I.2.2. Conception des engrenages :

La conception des engrenages repose généralement sur des suppositions et incertitudes qui rendent leurs durées de vies variables d'une application à une autre. Néanmoins, cela est dû principalement aux :

- Charge initiale, et par conséquent dureté variable.
- Causes constitutives d'alignement.
- Non-linéarité de mouvement.
- Résultats de jeu entre-dents, des lacunes entre les composants et ses causes.

- Manque provisoire de mouvement sur l'inversion de couple.
- Causes de frottement.
- Problèmes de contrôle.
- Rétablissement de chaleur.
- Usage.

I.2.3. Mécanismes de défaillances des engrenages :

Les mécanismes de défaillance primaires pour les dents d'engrenage sont :

1) contraintes de flexion excessives à la base de la dent (flexion pignon / roue).

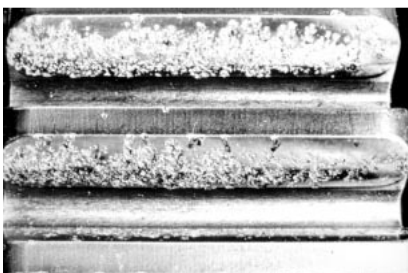
2) tension excessive de roulement ou de contact au moment où le contact (pression de contact).

Et pour que les transmissions par engrenage soient satisfaisantes, elles doivent fonctionner comme prévu à l'étape de conception. Une mauvaise performance des boites de vitesse conduit généralement à la défaillance des engrenages qui peuvent être originellement due à :

1- La fatigue par piqûres causée par le fait que les contraintes de contact excèdent la résistance de contact du matériau.

Le phénomène de piqûre, dans lequel de petites particules sont enlevées de la surface de la dent en raison des forces de contact élevées qui sont présentées entre les dents d'accouplement. (Figure I.1)

a/ Piqûres



b/ Ecaillage

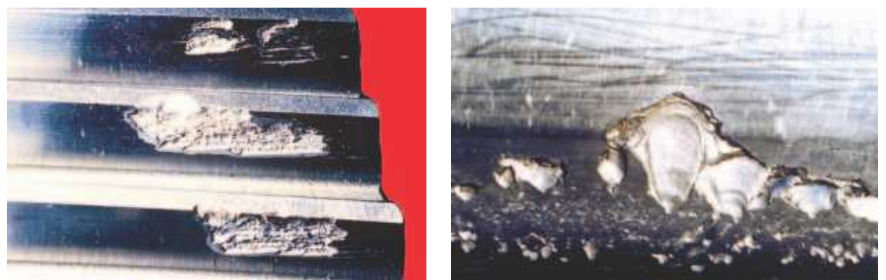


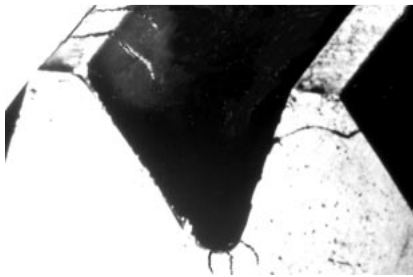
Figure. I.1 : Phénomène de piqûres et écaillage [2]

La piquêre est réellement la défaillance de fatigue de la surface de dent.

La dureté est la propriété primaire de la dent d'engrenage qui fournit la résistance à la piquêre de corrosion.

2- La rupture de dents provoquée par le fait que les contraintes de flexion excèdent la résistance à la flexion du matériau. (Figure I.2 La rupture des dents)

a/ Fracture au sommet de la dent



b/ Fracture au fond de la dent



c/ Fissuration



Figure I.2 : La rupture des dents [2]

3- D'autres types de défaillances associées aux mauvaises conditions de lubrification telles que l'écaillage, piquêres et usures. [3]

Les méthodes actuelles pratiques utilisées pour la prédiction des contraintes présentes durant le fonctionnement des engrenages sont généralement celles données par l'un des standards tels que ISO/6336 [4], BS 436 [5], DIN/ 3990 [6] et AGMA 2101[7]. Tous ces standards sont basés en premier lieu sur la détermination des contraintes nominales de contact σ_{H0} et de flexion σ_{F0} pour les engrenages parfaits (avec une géométrie exacte des dents, une charge constante et une distribution parfaite de charge le long de la denture). Les contraintes de contact et de flexion pour des engrenages réels sont ensuite calculées à partir de celles nominales tout en tenant compte des effets de déviations de la géométrie exacte des dents et des actuelles conditions de travail des engrenages.

I.3 Contraintes dans les engrenages parfaits (*contact* σ_{H0} , *flexion* σ_{F0}) :

I.3.1 Contraintes de Contact σ_{H0} :

Dans tous les mécanismes, la transmission des efforts en fonctionnement se fait par l'intermédiaire des surfaces de liaison entre les solides. La théorie d'Hertz [8] permet

d'évaluer les déformations des deux solides en contact ainsi que la pression de contact engendrée sur les deux solides.

Dans le cas du contact des deux cylindres de longueur L et de diamètres d_1 et d_2 (figure. I.3), la superficie de contact est un rectangle étroit de largeur $2b$ et de longueur L . La distribution de pression est elliptique.

La contrainte maximale «Hertzienne» de contact au point primitif est généralement considérée comme un critère adéquat pour prédire la pression superficielle de contact [8]. Le calcul de celle-ci est basé sur la théorie de deux cylindres pressés l'un contre l'autre sans roulement ni glissement ou lubrifiant. En utilisant la notation de la figure I.3, la théorie d'Hertz nous donne :

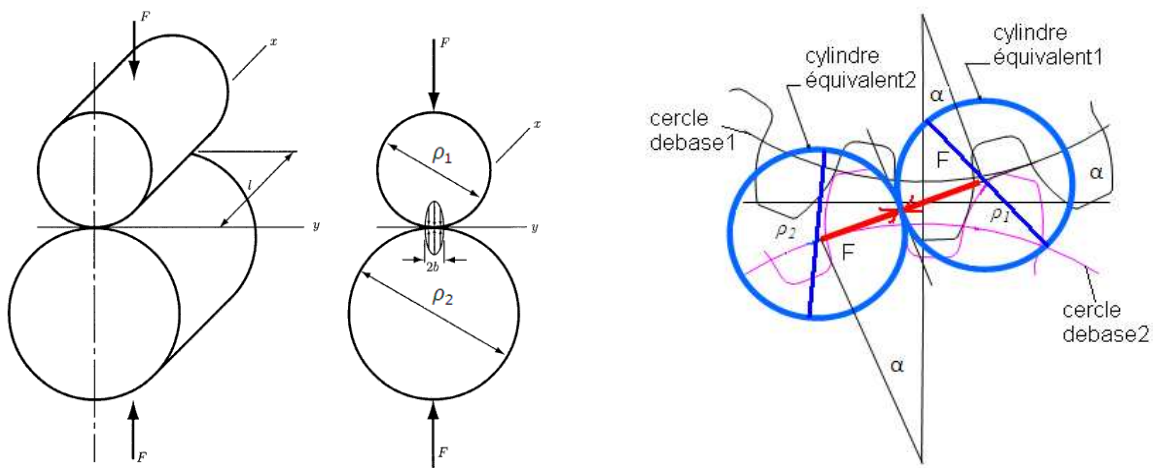


Figure I.3 : Notation pour la Contrainte de Contact entre Deux Cylindres [9]

$$b = \sqrt{\left(\frac{2F}{\pi L}\right) \left(\frac{(1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2}{\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)} \right)} \quad (\text{I.1})$$

Avec :

- b est la largeur de contact
- ρ_1 et ρ_2 sont les diamètres des deux cylindres respectivement.
- E_1 et E_2 sont les modules d'élasticité longitudinaux des matériaux.
- ν_1 et ν_2 sont les coefficients de Poisson.

La pression de contact est donnée par la relation suivante :

$$P_{max} = 2F/\pi bL \quad (\text{I.2})$$

Avec :

- F est l'effort de contact.
- b est la largeur de contact.
- L est la longueur de contact (longueur de la dent).

La formule donnant la pression d'Hertz de base σ_{H0} pour un contact entre deux cylindres est :

$$\sigma_{H0} = \sqrt{\left(\frac{F_n}{\pi}\right) / \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) \left(\frac{1}{b(1-\nu^2)}\right) \left(\frac{1}{\rho_1 + \rho_2}\right)} \quad (\text{I.3})$$

La pression d'Hertz (de calcul) en fonctionnement d'un engrenage σ_H tient compte des facteurs d'influence étudiés et en substituant ρ_1, ρ_2, \dots etc., par des paramètres géométriques d'engrenages comme l'indique la Figure. I.3), nous donne :

$$\sigma_{H0} = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\left(\frac{F_t}{bd_1}\right) \left(\frac{u+1}{u}\right)} \quad (\text{I.4})$$

Où, les différents facteurs :

Z_H : Le facteur géométrique qui tient compte de l'effet de l'angle de pression et de l'angle d'hélice sur le rayon de courbure et sur la composante de la force normale sur les flancs de la dent.

Z_E : Le facteur d'élasticité qui tient compte de l'effet des propriétés élastiques du matériau des dents engrenées.

Z_ε : Le facteur de conduite qui prend en considération le nombre de dents qui partage la charge à transmettre. Z_ε est estimé semi empiriquement de la moyenne de la longueur totale de la ligne de contact.

Z_β : Le facteur d'inclinaison déterminé empiriquement qui tient compte de l'augmentation de la longueur de contact dans les engrenages hélicoïdaux ainsi que l'effet de la non uniformité de la distribution de la charge le long de la ligne de contact même dans les engrenages «parfaits».

F_t : effort tangentiel « utile ».

d_1 : diamètre de la roue menante.

u : le rapport de transmission.

I.3.2 Contraintes de flexion :

Pour les contraintes de flexion, la norme ISO [4] adopte deux méthodes (B et C). Dans la méthode B, la charge maximale est supposée appliquée au « point de contact unique » comme cela se produit effectivement durant l'engrènement. Tandis que dans la méthode C, la charge maximale est supposée appliquée au sommet de la dent où un facteur correctif Y_e est introduit pour être placé dans les conditions effectives de la méthode B. Les deux méthodes considèrent la roue dentée comme une poutre encastrée chargée en flexion par la composante tangentielle de la force totale appliquée sur la dent et aussi elles assument que la section critique de la dent est située au pied de la dent aux points tangents inclinés à 30° (Figure I.4) [8].

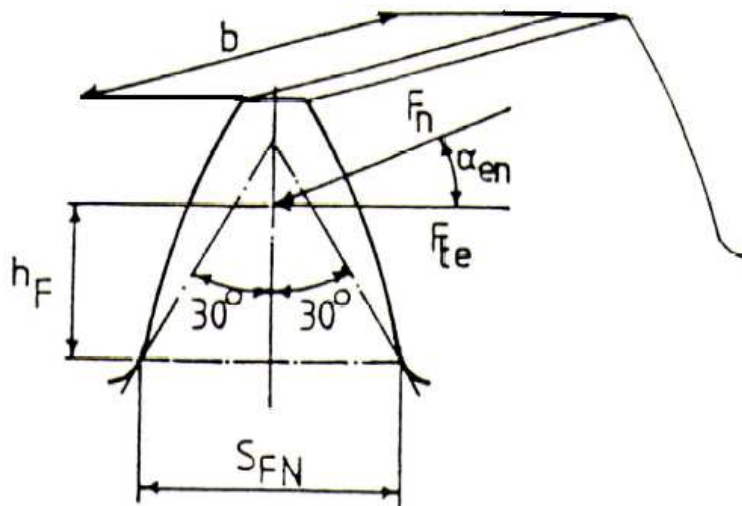


Figure I.4 : Notation pour la contrainte de Flexion [8]

Les contraintes de compression et de cisaillement sont négligées du fait qu'on connaît de l'expérience avant la rupture de la dent on observe des craquelures sur la surface de tension du filet du flanc chargé [8].

En utilisant la notation de la figure (I.4) et la méthode de la norme ISO [4], la contrainte de flexion pour un engrenage « parfait » est donnée par :

$$\sigma_{FO} = \left(\frac{6F_t}{bd_1} \right) \left(\frac{h_F}{S_{FN}^2} \right) \left(\frac{\cos\alpha_{en} Y_S Y_\beta}{\cos\alpha_n} \right) \quad \text{(I.5.a)}$$

$$\sigma_{FO} = \left(\frac{F_t}{bm_n}\right) Y_F Y_S Y_\beta \quad (\text{I.5.b})$$

Où Y_F est un facteur de forme donné par :

$$Y_F = 6 \left(\frac{h_F}{m_n}\right) / \left(\frac{S_{FN}}{m_n}\right)^2 \cdot \left(\frac{\cos\alpha_{en}}{\cos\alpha_n}\right) \quad (\text{I.6})$$

Où,

Y_S est un facteur empirique de concentration de contrainte dû au filet de la dent.

Y_β est un facteur d'inclinaison de l'angle d'hélice avec un effet similaire à Z_β .

I.4 Contraintes dans les engrenages réels :

Les contraintes de contact et de flexion pour les engrenages «réels» sont calculées à partir des contraintes nominales (σ_{H0} et σ_{F0}) en prenant en considération la non uniformité du couple transmis, les erreurs de fabrication et les distorsions élastiques des dents de l'engrenage.

I.4.1 Résistance à la pression superficielle (contrainte de contact) :

En substituant ρ_1, ρ_2, \dots etc., par des paramètres géométriques d'engrenages, la Figure I.3 nous donne :

$$\sigma_{H0} = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{\left(\frac{F_t}{bd_1}\right) \left(\frac{u+1}{u}\right)} \quad (\text{I.7})$$

La pression d'Hertz « de calcul » σ_H tient compte des facteurs d'influence suivants :

K_A , facteur d'application,

K_V , facteur dynamique,

$K_{H\beta}$, facteur de distribution longitudinale,

et $K_{H\alpha}$, facteur de distribution transversale.

Tous ces facteurs interviennent sur l'effort tangentiel, c'est-à-dire par leur racine carrée sur la pression d'Hertz [12].

$$\sigma_H = \sigma_{H0} \sqrt{K_A K_V K_{H\beta} K_{H\alpha}} \leq \sigma_{HP} \quad (\text{I.8})$$

Soit :

$$\sigma_H = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{(F_t/bd_1) \left(\frac{u+1}{u}\right) K_A K_V K_{H\beta} K_{H\alpha}} \quad (\text{I.9})$$

Où,

σ_{HP} : pression de Hertz de calcul limite admissible (daN/mm²) :

$$\sigma_{HP} = \sigma_{H.lim} Z_N Z_L Z_R Z_V Z_W Z_X \quad (\text{I.10})$$

Où,

$\sigma_{H.lim}$: limite d'endurance pour la pression superficielle pour le matériau considéré (daN/mm²).

Z_N , facteur de durée.

Z_L , facteur lubrifiant.

Z_R , facteur de rugosité.

Z_V , facteur de vitesse.

Z_W , facteur de rapport de dureté entre pignon et roue.

Z_X , facteur de dimension.

Le facteur de sécurité relatif au couple, à la puissance ou à l'effort tangentielle, est égal à S_H^2 .

I.4.2 Contrainte de flexion :

La formule (I.5.a, ou I.5b) donne la contrainte de rupture de base σ_{FO} . La contrainte de rupture « de calcul » en fonctionnement σ_F tient compte des facteurs d'influence :

K_A : facteur d'application,

K_V : facteur dynamique,

$K_{F\beta}$: facteur de distribution longitudinale,

$K_{F\alpha}$: facteur de distribution transversale,

Ces facteurs interviennent directement sur l'effort tangentiel.

$$\sigma_F = \sigma_{FO} K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha} \leq \sigma_{FP} \quad (\text{I.11})$$

Soit :

$$\sigma_F = \left(\frac{F_t}{b m_n} \right) Y_{F\alpha} Y_\varepsilon Y_{s\alpha} Y_\beta (K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}) \quad (\text{I.12})$$

I.5 Contraintes admissibles :

I.5.1 Contrainte admissible de contact σ_{HP} :

La contrainte calculée de Hertz (σ_H) d'un engrenage réel ne doit pas excéder celle admissible du matériau. Dans la méthode B du standard ISO [4]. Elle est basée sur la limite d'endurance ($\sigma_{H.lim}$) pour un engrenage d'essai «idéal» sous une charge constante corrigée par la suite pour tenir compte de la durée de vie demandée et des conditions de travail réelles. La contrainte admissible de contact est ainsi calculée séparément pour le pignon et la roue :

$$\sigma_{HP} = \left(\frac{\sigma_{Hlim}}{S_{Hmin}} \right) Z_N Z_L Z_V Z_R Z_W Z_X \quad (\text{I.13})$$

Où,

$\sigma_{H.lim}$: limite d'endurance pour la pression superficielle pour le matériau considéré.

S_{Hmin} : facteur de sécurité minimal qui dépend de l'application et de la fiabilité exigée.

Z_N : facteur de durée qui rend compte du fait qu'une pression de Hertz plus élevée peut être admise si on ne demande qu'une endurance (nombre de cycles) limitée.

Z_L et Z_V : facteurs du lubrifiant et de vitesse qui prennent en considération l'effet de la viscosité et de la vitesse sur l'épaisseur du film d'huile élasto-hydrodynamique et par conséquent sur la résistance de contact.

Z_L , Z_V et Z_R : Ces facteurs ensemble tiennent compte de la réduction de la résistance à la fatigue quand les aspérités des surfaces des dents en contact excèdent l'épaisseur du film d'huile.

Z_W : facteur d'écroûissage qui rend compte de l'écroûissage superficiel de la denture d'une roue lorsque celle-ci engrène avec un pignon avec denture durcis superficiellement et très bon état de surface.

Z_X : facteur de dimensions qui rend compte de l'influence des dimensions de la dent sur la pression d'Hertz admissible. Généralement, la valeur $Z_X=1$, est adoptée.

Dans les standards ISO [4] et DIN [6], la limite d'endurance du matériau peut être déterminée par des essais de même matériau. En l'absence des valeurs précises de $\sigma_{H,lim}$, des guides pratiques donnent ces valeurs pour différents matériaux et traitement thermique pour trois grades de qualité de matériau ME, MQ et ML (Figure .I.5).

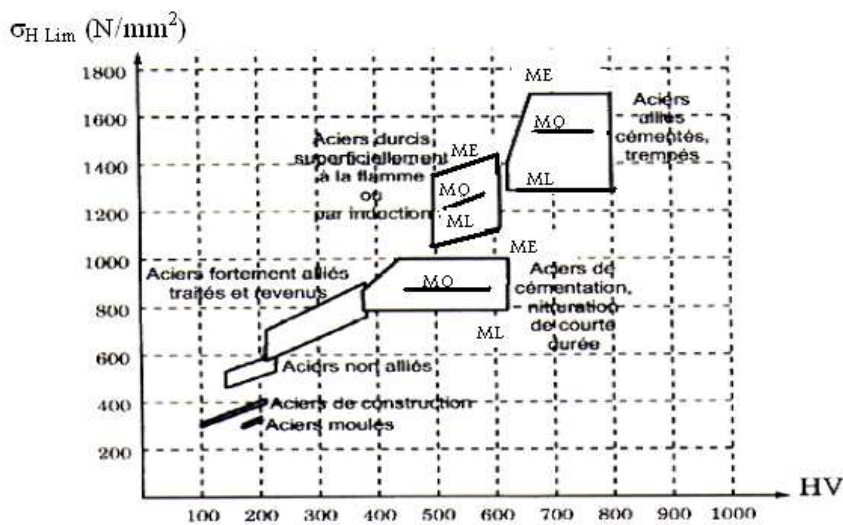


Fig.I.5: Limites d'Endurances de Contact [4,6]

1.5.2 Contrainte admissible de flexion σ_{FP} :

La contrainte calculée de flexion (σ_F) pour un engrenage réel ne doit pas excéder celle admissible du matériau. Dans la méthode B du standard ISO [4], la contrainte admissible de rupture de la dent est donnée par :

$$\sigma_{FP} = \left(\frac{\sigma_{Flim}}{S_{Fmin}} \right) Y_{ST} Y_{NT} Y_{RrelT} Y_{\delta relT} Y_X \quad (I.14)$$

où,

$\sigma_{F,lim}$: limite d'endurance nominale à la rupture de l'engrenage d'essai ;

S_{Fmin} : facteur de sécurité minimal qui ressemble à S_{Hmin} et qui dépend de l'application et de la fiabilité exigée ;

Y_{ST} : facteur de concentration de contrainte Y_S de l'engrenage d'essai égale à 2,1 et la quantité $\sigma_{FE} = \sigma_{F.lim} \cdot Y_{ST}$ de la figure (I.6) est l'endurance limite du spécimen sans entaille avec l'hypothèse que le matériau, après le traitement thermique, est parfaitement élastique ;

Z_{NT} : facteur de durée pour la résistance de pied de la dent relatif à l'engrenage d'essai qui considère l'augmentation possible de capacité de charge dans la zone de durée de vie limitée.

$Z_{\delta rel}$: facteur de sensibilité relative à l'entaille de l'engrenage étudié par rapport à l'engrenage d'essai ;

Z_{Rrel} : facteur de rugosité relatif qui tient compte de l'influence de la rugosité de surface du fond de dent de l'engrenage étudié ;

Y_X : facteur de dimensions qui rend compte de l'influence des dimensions de la dent sur la résistance du pied de la dent en particulier l'influence du module.

Dans les standards ISO [4] et DIN [6] la limite d'endurance du matériau peut être déterminée par des essais au pulsateur sur des engrenages d'essais pour toute condition du matériau ou d'état du matériau. En l'absence des valeurs précises de $\sigma_{F.lim}$ les guides pratiques donnent les valeurs limites d'endurances de différents matériaux et traitement thermiques. Les normes donnent les valeurs de $\sigma_{F.Lim}$ pour trois grades de qualité de matériau ME, MQ et ML (Fig.I.6)

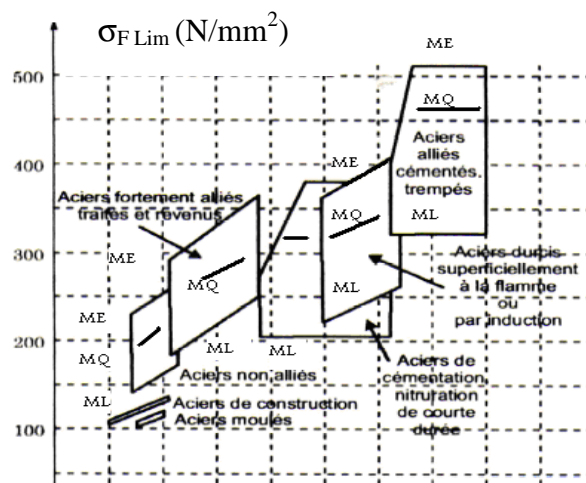


Fig.I.6: Limites d'Endurances de Flexion [4,6]

I.5.3 Facteurs de sécurité S_H et S_F :

Les facteurs de sécurité S_H et S_F sont des facteurs globaux présentés pour assurer la fiabilité exigée en présence des incertitudes d'estimation des variables qui sont inconnues à l'étape de conception.

$$S_H = \frac{\sigma_{HP}}{\sigma_H} = \left(\frac{\sigma_{H.lim}}{\sigma_{HO}} \right) Z_N Z_L Z_R Z_V Z_W Z_X / \sqrt{K_A K_V K_H \beta K_{H\alpha}} \quad (\text{I.15})$$

$$S_F = \frac{\sigma_{FP}}{\sigma_F} = (\sigma_{Flim} Y_{ST} Y_{NT} Y_{\delta rel.T} Y_{R.rel.T} Y_X) / (\sigma_{FO} K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}) \quad (\text{I.16})$$

Ces incertitudes sont :

- L'endurance limite du matériau utilisé dû aux irrégularités et variations de la composition chimique, la structure, traitement thermique du matériau, ...etc.
- les charges dynamiques en service cycliques ou constantes. Leurs grandeurs sont toujours incertaines à un certain degré. Les variations dans les cycles de travail entre les utilisateurs peuvent être aussi une plus grande source d'incertitude.
- La qualité du lubrifiant utilisé et maintenance.

Les moyens de relier une fiabilité désirée (ou donnée) ainsi que les incertitudes ci-dessus à S_H et S_F ne sont pas donnés dans les normes. Le standard ISO/DIS6336 [4] tabule des valeurs recommandées de S_H et S_F qui sont originellement dérivés de Niemann et Winter [10] (Tableau (I.1)) et ceci pour des niveaux différents de fiabilité mais sans mesure de la probabilité prévue de défaillance des engrenages.

Tableau. I.1 : Valeurs Recommandées pour les Facteurs de Sécurité [10].

| Conditions de Conception | S_H | S_F |
|--|-----------|-----------|
| A. Puissance ou couple de conception basée sur des valeurs nominales estimées. | | |
| I. Transmissions industrielles Normales | 1,1 - 1,2 | 1,4 - 1,5 |

| | | |
|---|-----------|-----------|
| II. Transmissions avec fiabilité élevée où la rupture de l'engrenage présente une perte substantielle | 1,3 - 1,6 | 1,6 - 3,0 |
| B. Puissance ou couple basés sur des valeurs mesurées ou connues | | |
| I. Transmissions industrielles normales | 1,0 | 1,2 - 1,4 |
| II. Transmissions avec fiabilité élevée | 1,2 - 1,4 | 1,4 - 2,0 |

De ce tableau on remarque que S_F est généralement plus haut que S_H ; cela est dû au fait que pour beaucoup d'engrenages industriels les quantités modérées de piqûres sont tout à fait acceptables et par conséquent ils peuvent fonctionner, à faible vitesse, pendant des années avec $S_H < 1,0$ [11]. Cependant, la rupture de la dent implique presque toujours la défaillance totale de la commande. Il est important de noter néanmoins que dans les applications à grande vitesses les piqûres progressives mèneront rapidement à la destruction des dents ou excessif bruit et vibration. Dans ces cas S_H et S_F doivent être assez haut pour assurer un bas taux de défaillance [12,13].

Henriot [8] a supposé que la méthode B de la norme ISO expliquée précédemment assure une probabilité de détérioration de 1% quand $S_H = S_F = 1$; il présente alors un facteur global K_R de fiabilité (Fig.I.7) par lequel le facteur d'application devrait être multiplié quand une probabilité de défaillance plus grande ou inférieure à 1% est exigée.

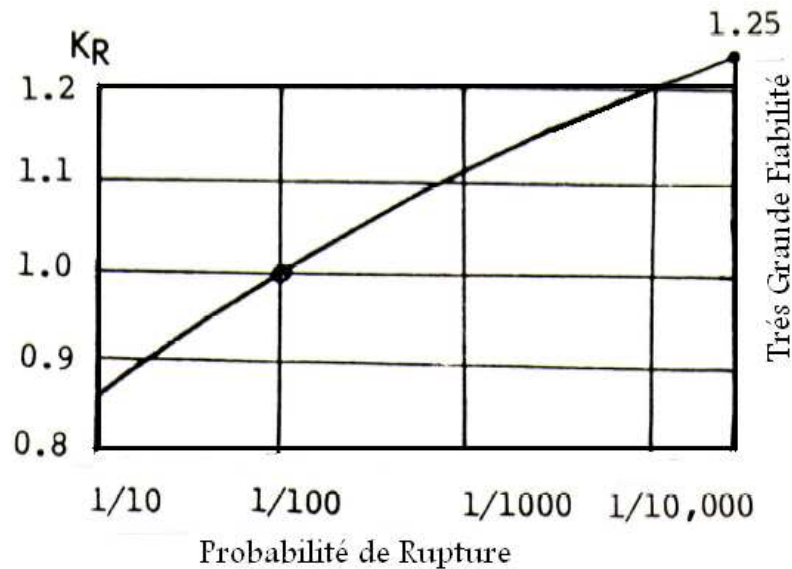


Figure I.7. Facteur de Fiabilité K_R [8]

Hofmann [14], d'autre part, donne un diagramme à partir duquel S_H et S_F peuvent être choisis pour une probabilité donnée de défaillance. Son diagramme mentionne rudement tous les facteurs qui sont les sources principales des incertitudes mais la base de ces résultats n'est pas expliquée. Les valeurs attribuées aux facteurs de sécurité sont réellement basées en grande partie sur l'ignorance et une meilleure méthode pour les estimer est nécessaire (Comme l'ont expliquée plusieurs auteurs [15,16,17]). La recherche décrite dans ce travail est prévue pour fournir une base plus sûre pour estimer les effets des incertitudes sur la fiabilité.

I.6 Etude détaillée des facteurs survenant lors du service de l'engrenage

I.6.1 Facteur d'application K_A

Le facteur d'application K_A tient compte des surcharges dynamiques provenant des sources extérieures à l'engrenage qui tentent d'augmenter le couple moyen transmis. Ces surcharges dépendent des caractéristiques des machines menantes-menées, du rapport des masses, des accouplements et des conditions de service. K_A tient aussi compte des variations délibérées de la charge transmise provoquées par exemple par les fluctuations de la charge durant le cycle de travail de la machine. Ces dernières ne sont pas prises en considération par K_A ; leur effet est calculé séparément par un autre facteur K_{Duty} [18] superposé à K_A . La méthode B de la norme ISO [4], recommandée pour les conceptions préliminaires, donne des tableaux de valeurs de K_A identiques aux celles du Tableau (I.2) basées sur des manuelles pratiques.

Tableau.I.2 : Valeurs Recommandées pour K_A [18]

| Caractéristiques de la machine menante | Caractéristiques de la machine menée | | |
|--|--------------------------------------|---------------|------------------|
| | Uniforme | Chocs modérés | Chocs importants |
| Uniforme | 1,00 | 1,25 | 1,75 |
| Chocs légers | 1,25 | 1,50 | 2 ou plus |
| Chocs moyens | 1,50 | 1,75 | 2,25 ou plus |

I.6.2 Facteur dynamique K_V

Le facteur dynamique est défini comme étant le rapport entre la charge maximale intervenant au contact des dentures conjuguées et la charge nominale due au couple extérieur appliqué $K_A.T_{nom}$. Ce facteur représente ainsi les influences dynamiques internes dues aux vibrations du pignon et de la roue qui tentent de produire des augmentations dynamiques dans le couple transmis généralement à des fréquences de même niveau que celles d'engrènement [19,20].

Les influences principales sont :

- Les erreurs de denture en particulier les erreurs de division et de profil,
- Les moments d'inertie polaires du pignon et de la roue,
- La rigidité des couples de dents conjuguées,
- La charge transmise y compris le facteur d'application K_A .

Le standard ISO propose trois méthodes ou procédures pour le calcul du facteur dynamique. Néanmoins, comme l'objectif de ce travail est axé sur la fiabilité des transmissions par engrenages dont les erreurs de fabrication et les incertitudes dans l'estimation des différents paramètres ont un effet signifiant sur la performance de ces derniers (voir Eq.I-17), seule la méthode B, la plus précise, est considérée.

Le facteur dynamique est ainsi défini comme étant une fonction du paramètre sans dimension N (voir ci-dessous). La méthode B, dans la zone subcritique ($N \leq 0,85$), nous donne :

$$K_V = N.K + 1 \quad (\text{I.17})$$

$$K = C_{V1}B_P + C_{V2}B_f + C_{V3}B_K \quad (\text{I.18})$$

où,

N : la vitesse de référence égale au rapport entre la vitesse de rotation du pignon et la vitesse de rotation de résonance donné par :

$$N = \frac{n_1}{n_{E1}} = n_1 / (30 \cdot \frac{10^3}{\pi \cdot Z_1} \sqrt{\frac{C_V}{m_{red}}}) \quad (\text{I.19})$$

B_P , B_f et B_K : sont des paramètres sans dimensions qui tiennent compte de l'effet des erreurs de dentures sur la charge dynamique et de la modification du profil :

$$B_P = C \left(\frac{f_{pb} - y_{pb}}{F_t \cdot K_A / b} \right) \quad (\text{I.20})$$

$$B_f = C' \left(\frac{f_f - y_f}{F_t \cdot K_A / b} \right) \quad (\text{I.21})$$

$$B_K = 1 - C \cdot \frac{c_a}{F_t \cdot K_A / b} \quad (\text{I.22})$$

C_{V1} , C_{V2} , et C_{V3} : sont des constantes empiriques définies dans le standard [4].

Y_p , Y_f : La valeur de la diminution par rodage de fonctionnement de l'erreur du pas ou du profil.

c_a : La valeur prévue de la dépouille de sommet.

C' : La valeur de la rigidité d'une paire de dents conjuguées.

I.6.3 Facteurs de distribution de charge longitudinale $K_{H\beta}$ $K_{F\beta}$

La distribution longitudinale de la charge sur les dentures est un paramètre important pour la détermination de la capacité de charge d'un engrenage. Les normes de calcul abordent

ce problème par l'intermédiaire de deux facteurs appelés facteurs de distribution longitudinale de la charge qui sont notés $K_{H\beta}$ et $K_{F\beta}$.

1.6.3.1 Facteur de distribution de charge longitudinale $K_{H\beta}$

Les écarts géométriques existant sur les dentures font partie de nombreux paramètres ayant une influence sur la distribution de la charge. Ils sont habituellement pris en compte par l'intermédiaire des écarts maximaux d'inclinaison d'hélice existant sur les dentures [21,22].

L'objectif de ce travail est d'étudier plus précisément l'influence de ces écarts sur la distribution longitudinale de la charge sur les dentures.

Dès qu'il y aura une distorsion d'alignement relative des dentures conjuguées, la distribution des contraintes sous la charge n'est plus uniforme le long des lignes de contact comme le montre la figure (I.8).

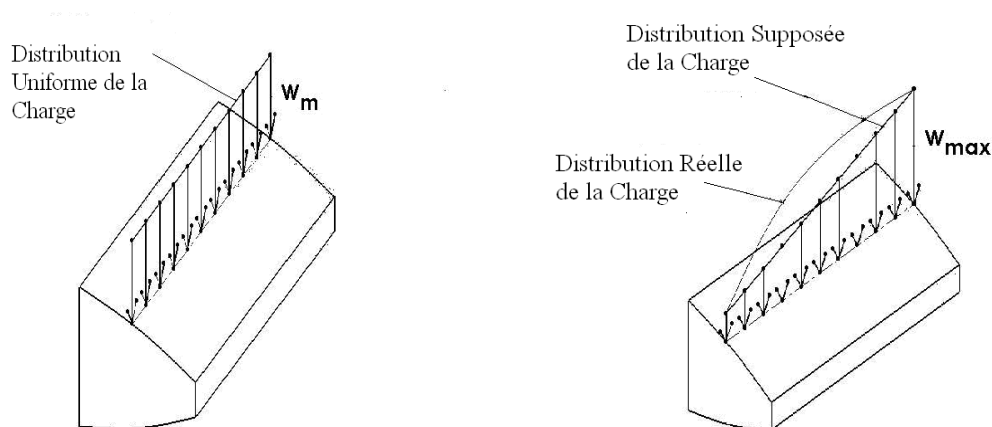


Fig. I.8 : Mauvaise Distribution de la Charge dans les Engrenages Réels [8]

Le facteur longitudinal de la répartition de la charge ($K_{H\beta}$) est défini comme étant le rapport entre la charge spécifique maximale et la valeur moyenne qui serait obtenu avec un engrenage idéal. $K_{H\beta}$ est donc donné par : [4, 5, 6] .

$$K_{H\beta} = \frac{w_{max}}{w_m} \quad (\text{I.23})$$

La charge spécifique moyenne $W_m = (F_m/b)$ est la valeur nominale de la force tangentielle (F_t/b) sur le rayon primitif modifiée par le facteur d'application (K_A) et le facteur dynamique (K_V). L'introduction de K_A et K_V tient compte des surcharges dynamiques qui sont présents tout le temps. Ainsi :

$$W_m = \left(\frac{F_t}{b}\right) \cdot K_A \cdot K_V \quad (\text{I.24})$$

Ce facteur dépend de nombreux paramètres :

- Caractéristiques des dentures,
- Ecart de taillage,
- Effets de rodage,
- Distorsion d'alignement et jeux internes des paliers,
- Corrections de denture,
- Rigidité des dentures, des arbres, des corps de roue, des paliers et des carters,
- Forces appliquées.

Pour déterminer la charge spécifique maximale, la courbe de la répartition de la charge le long de la largeur de la denture, après rodage initial de fonctionnement des engrenages, doit être connue. Cette courbe est cependant, une fonction de l'erreur totale de la distorsion d'alignement et la déformation relative des dentures conjuguées. La méthode B de la norme ISO [4] et d'autres normes telles que BS 436 [5] et DIN 3990 [6] ne supposent pas que la charge à une distribution linéaire (Fig.I.8). Si $f_{\beta y}$ est la distorsion totale d'alignement des dentures conjuguées sans charge (Fig.I.9) [4,8] et b_{cal} est la largeur apparente de contact, alors quatre solutions alternatives de contact peuvent être distinguées :

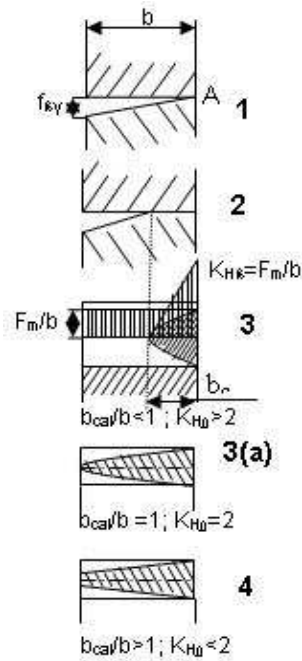


Fig.I.9: Facteur de distribution de charge Longitudinale [8]

(1) Aucune charge : point de contact A.

(2), (3) Contact partiel (charge légère ou grande $f_{\beta y}$). Dans ce cas-ci, le contact se produit réellement au-dessus d'une largeur b_{cal} avec

$b_{cal} / b < 1$ et $K_{H\beta} > 2$, donc :

$$K_{H\beta} = \sqrt{2 \cdot f_{\beta y} \cdot \frac{C_{\gamma}}{W_m}} \quad (\text{I.25})$$

3):a Plein contact de face (cas de limitation) avec $b_{cal} / b = 1$ et

$$K_{H\beta} = 2 \quad (\text{I.26})$$

Plein contact de face (chargement lourd ou petite valeur de $f_{\beta y}$) avec $b_{cal} / b > 1$ et de $K_{H\beta} < 2$. Ceci correspond à :

$$K_{H\beta} = 1 + \frac{f_{\beta y}}{2 \cdot W_m} \cdot C_{\gamma} \quad (\text{I.27})$$

Il est clair que les engrenages bien conçus devraient fonctionner dans le régime (4). La quantité $f_{\beta y}$ est la distorsion d'alignement efficace donnée par :

$$f_{\beta y} = f_{\beta x} - y_{\beta} \quad (\text{I.28})$$

Où,

$f_{\beta x}$ est l'erreur totale initiale de la distorsion d'alignement des dents conjuguées au début de leur durée de vie et y_{β} est une réduction de l'erreur de distorsion initiale par rodage de fonctionnement.

La valeur de y_{β} est purement empirique et dépend de la dureté des matériaux. Elle est plutôt importante pour les aciers trempés totalement et pratiquement zéro pour les aciers cémentées ou nitrurés [4]. L'erreur totale de distorsion d'alignement $f_{\beta x}$ est la résultante de f_e et de f_{ma} où :

f_e représente des déformations élastiques sous la charge des arbres, des corps des roues dentées, des roulements, des carters d'engrenages, ...etc.

f_{ma} représente des erreurs de fabrication et de montages, des roues dentées, d'arbres, des carters, ...etc.

Par conséquent :

$$f_{\beta x} = f_e - f_{ma} \quad (\text{I.29})$$

Toutes les normes modernes incluent des conseils détaillés sur la façon dont on peut estimer la valeur de f_e à partir de l'arrangement des engrenages par rapport aux paliers mais dans tous les cas elles supposent une valeur de f_{ma} basée, sans une vraie justification, seulement sur le grade de précision des engrenages. Alors que les recommandations de la norme ISO [4] sont plus simples comme le montre la citation suivante (texte intégral en anglais de la norme ISO/DIS/6336).

“ Pour une pente donnée d'exactitude, avec l'ensemble des vitesses sans rectifier ou régler des procédures (aucune vérification de poteau-ensemble): puisque selon ISO 1328-63 [4] et DIN 3962 [6] toutes les tolérances d'alignement sont les mêmes pour le pignon et la roue à la même qualité de vitesse et puisque porter des tolérances d'alignement devrait être en accord avec ceci, la combinaison la plus défavorable des erreurs serait :

$$f_{ma} = 3.0.T_{\beta} \quad (\text{I.30})$$

Là où T_β est la tolérance d'alignement de dent. La considération de la probabilité indique qu'il serait peu susceptible combiner des erreurs pour produire des valeurs dépassant $1.0 T_\beta$."

Sur la base de cet argument, une valeur de f_{ma} est adoptée :

$$f_{ma} = 1.0 \cdot T_\beta \quad (\text{I.31})$$

Où T_β est la tolérance de distorsion d'une denture.

Ceci est une simplification exagérée. Plusieurs d'autres erreurs telles que les erreurs de montage des roues dentées, les battements de roulements [23] et d'alignement d'alésages du carter des boîtes de vitesse [23,24], ...etc. peuvent être combiné pour produire une disparité dépassant de loin la tolérance T_β ; par exemple, Myers [24] et d'autres [25] ont prouvés que statistiquement le maximum probable $\pm 3\sigma$ de la déviation d'alignement f_{ma} est typiquement de l'ordre de $\pm 3 T_\beta$. La valeur la plus probable de f_{ma} est peu susceptible d'être aussi la valeur probable. Henriot [8] a également prouvé que la différence entre les valeurs données sont extrêmement importantes et peuvent avoir une influence considérable sur la valeur de $K_{H\beta}$.

I.6.3.2 Facteur de distribution de charge longitudinale $K_{F\beta}$:

Pour la flexion des dents, la largeur entière de la denture participe plus ou moins à soutenir la charge même lorsqu'elle est concentrée seulement sur une partie de la largeur de la dent comme dans la figure (I.9) (cas 2 et 3). Le facteur de distribution de charge longitudinale pour la résistance à la flexion ($K_{\beta F}$) tient donc compte de cette "diffusion" de charge à travers la largeur de la denture. Le facteur $K_{F\beta}$ dépend ainsi non seulement de $K_{H\beta}$ mais également du rapport de la hauteur de la dent h_F à la largeur b . Empiriquement [4], (basé sur la théorie des poutres encastées) :

$$K_{F\beta} = (K_{H\beta})^N \quad (\text{I.32})$$

Où,

$$N = (b/h_F)^2 / \left(1 + \frac{b}{h_F} + (b/h_F)^2\right) \quad (\text{I.33})$$

Pour la plupart des engrenages larges (grande valeur de b), approximativement $K_{F\beta} = K_{H\beta}$.

I.6.4 Facteurs de distribution de charge transversale $K_{H\alpha}$, $K_{F\alpha}$:

Dans un engrenage parfait il y'a une distribution «idéale» de la charge transmise sur plusieurs paires de dents conjuguées simultanément. Cette distribution est prise en considération par les facteurs Y_ε et Z_ε (voir Eq.I.7). Par contre, la présence des erreurs du profil et du pas de base rend cette dernière non idéale ce qui augmente les contraintes de contact et de flexion. Les facteurs de distribution de charge transversale $K_{H\alpha}$ et $K_{F\alpha} \geq 1$ sont utilisés donc pour tenir compte de ces effets. Cependant, on remarque que ces facteurs ont des valeurs limitées pour les engrenages moins précis quand il y'a un seul couple de dents en contact.

Pour les engrenages de haute qualité ISO 5 et mieux, $K_{H\alpha}$ et $K_{F\alpha}$ sont égales à l'unité et pour les grades de précision ISO 6 et ISO 7, leurs valeurs sont entre 1,1 à 1,2.

Dans le cas des engrenages ayant un rapport total de conduite $\varepsilon_\gamma > 2$, ces facteurs sont données par :

$$K_{H\alpha} = K_{F\alpha} = 0.9 + 0.4 \sqrt{2 \cdot \frac{(\varepsilon_\gamma - 1)}{\varepsilon_\gamma}} \cdot C_\gamma \frac{(f_{pb} b^{-y_\alpha})}{F_{tH} / b} \quad (\text{I.34})$$

Où,

F_{tH} : force tangentielle effective donnée par :

$$F_{tH} = F_t \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \quad (\text{I.35})$$

f_{pb} : erreur maximale du pas de base du pignon ou de la roue ; dans le cas d'une dépouille de sommet adaptée à la charge, on considérera seulement la moitié de cette tolérance.

Y_α : réduction de l'erreur escomptée par rodage de fonctionnement.

I.7 Conclusion :

Les valeurs des contraintes de contact et de flexion (σ_H et σ_F) appliquées réellement sur des engrenages en service sont très différentes de ceux des engrenages parfaits (σ_{H0} et σ_{F0}) ayant une géométrie exacte des dents, une charge constante, une distribution parfaite de la charge le long de la denture et des actuelles conditions de travail des engrenages. De plus, de très grandes incertitudes proviennent du matériau des engrenages dues à leur composition chimique, leur traitement thermique, leur grosseur des grains, ... etc.

En effet, il n'est possible de prédire la durée de vie des engrenages en service que par le biais d'une conception basée sur une étude fiabiliste (probabiliste) qui prend en considération toutes les erreurs et les incertitudes influents sur la performance des engrenages. Le deuxième chapitre présentera les méthodes numériques et analytiques actuellement utilisées pour prédire la fiabilité des systèmes mécaniques en présence des incertitudes.

Bibliographie

[01] Gear Handbook de Darle W. Dudley

[02] Gear Failure Analysis and Troubleshooting. GEARTECH, 1999

[03] Gear Failure Analysis and Troubleshooting. "Robert Errichello" (GEARTECH, 1999).

[4] ISO/ 6336, Parts 1, 2 and 3, "Calculation of the Load Capacity of Spur and Helical Gears", 1996.

[5] BS 437., "Spur and Helical Gears", Part 3: "Method of Calculation of Contact and Root Bending Stress- Limitations for Metallic Involute Gears", BSI, 1986.

- [6] DIN 3990., "Grundlagen für die Trafahigkeitsberechnung von Gerad-und Sghrastirnradern", (Principes de Base pour le Calcul de la Capacité de Charge des Engrenages à denture Droite et Hélicoïdale) parts 1-53, 5.Beuth, 1987.
- [7] AGMA 2101., "Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear teeth", AGMA 2101-C95, 1995.
- [8] G.Henriot., "Reflections on the Longitudinal Distribution Factor $K_{H\beta}$ of the ISO Procedure", American Gear manufacturers Assocn. Paper 209.13, pp 231- 239, 1981.
- [9] AGMA Standard 2001-C95
- [10] G.Niemann., and G.Winter., "Maschinenelemente", (Eléments de machine), Vol.II, Springer, 1983.
- [11] D.W.Dudley., "Handbook of Practical Gear Design", McGraw Hill 1984.
- [12] Q.J.Yand., "Fatigue Test and Reliability Design of Gears", Int.J.Fatigue, Vol.18, N°3, pp 171- 177, Elsevier, 1996.
- [13] A . D . S . Carter., "A View of Mechanical Reliability", Proc.Symp. Mechanical Reliability". IPC Sci.Technol.Press pp 1-7, 1980.
- [14] D.A.Hofmann., "The design of Spur and Helical Involute Gears - A Procedure Compatible with BS 436", Part 3 , ESDU 88033, Dec.1988.
- [15] Y.M Zhang., et al., "Practical Reliability-Based Design of Gear Pairs", J.Mechanism and Machine Theory, Vol.38, pp.1363-1370, Elsevier, 2003.
- [16] J.A.Pennell., "Estimation of Safety Factors for a Given Reliability", Proc.IFTOMM/ISO, Seminar, Service Loading and Application Factors, Trois Epis, 1987.
- [17] J.E.Shigley., and C.R.Mischke., "Mechanical Engineering Design, McGraw-Hill, Ed.5, 1989.
- [18] ISO 6336-5, Part 5., "Calculation of load capacity of spur and helical gears - Strength and quality of materials", 2003.
- [19] D.Remond., J.Sabot., and P.Velex., "Comportement Dynamique et Accoustique des Transmissions par Engrenages", Senlis: CETIM, Synthèse bibliographique, 189p, 1993.
- [20] P.Velex., and M.Maatar., "A Mathematical Model for Analysing the Influence of Shape Deviations and Mounting Errors on Gear Dynamic Behaviour", Journal of Sound and Vibration, 191(5), pp 629-660, Academic Press Limited, 1996.
- [21] E.Chernet., P.Velex., and M.Pasquier., "Influence des Ecart d'Inclinaison d'Hélice sur le Facteur de Distribution Longitudinale de la Charge", 4^{ème} Congrès Mondial des Engrenages, Paris, 19-17 Mars, 1999.

[22] ISO TR 10064., Parts: 1,2 and 3, "Cylindrical Gears – Code of Inspection Practice", 1996.

[23] DIN 3962., "Accuracy of Cylindrical Gears: Tolerances for Individual Errors", Beuth , 1978.

[24] E.J.Myers., “Influence of Manufacturing Errors on Gear Mesh Misalignment”, Unpublished Report DU902/MG, Design Unit, Univ. Newcastle Upon Tyne, 1988.

[25] M.Maatar., “ Contribution à l’Analyse du Comportement Dynamique de Réducteurs à Engrenages à simple étage. Influence des Ecart de Forme et des Défauts de Montage”, Thèse de docteur ingénieur : Institut des Sciences Appliquées de Lyon, 189p, 1995.

Chapitre II

Méthodes structurales de fiabilité

II .1. Introduction :

L'art du concepteur consiste à proposer une solution technique qui satisfait aux exigences fonctionnelles et qui garantit la sécurité vis-à-vis des biens, des personnes et de l'environnement. Les exigences fonctionnelles doivent s'assurer du bon fonctionnement des systèmes considérés, et parmi celles-ci de la *fiabilité*, c'est-à-dire de l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée. Le rôle du concepteur est alors de dimensionner de manière optimale en justifiant une fiabilité suffisante en fonction des risques, c'est-à-dire des conséquences redoutées par l'occurrence d'un événement indésirable : une fiabilité absolue ne peut pas exister et il subsiste toujours une possibilité d'échec. On peut dire aujourd'hui que le principe de précaution ne consiste qu'en la démonstration que toutes les connaissances actuelles ont été mises en œuvre pour que le gain obtenu par le succès du dispositif soit suffisant pour accepter le coût de l'échec éventuel dû à son dysfonctionnement.

II.2. Définition :

La fiabilité est la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation et pour une période de temps déterminée (norme AFNOR X 06501). Par contre NF X 060-010 – AFNOR 1991 considère la fiabilité, au stade de la conception, comme une mesure de l'efficacité du système. Elle est définie comme étant la caractéristique d'un système exprimée par la probabilité qu'il accomplisse la fonction pour laquelle il a été conçu, dans des conditions données et pendant une durée donnée. Ainsi, rappelons que la durée de vie d'un système est une mesure de la quantité de service rendu. Selon le système étudié, elle s'exprime en termes de temps, de kilomètres, d'heures de fonctionnement ou autres.

- La *fonction requise* exige la définition d'un seuil d'admissibilité en deçà duquel la fonction n'est plus remplie.
- Les *conditions d'utilisation* doivent être bien définies. Le même matériel placé dans deux contextes de fonctionnement différents n'aura pas la même fiabilité.
- la *période de temps* doit être définie en unités d'usage (temps de fonctionnement, km parcourus, tonnage produit, nombre de cycles d'opération, etc.).

II.3. Principaux types de fiabilité :

Il est important de savoir qu'il y'a trois types de fiabilité.

II.3.1 Fiabilité prévisionnelle: Elle est calculée par le concepteur sur la base d'un modèle mathématique. Notre travail est basée sur la fiabilité prévisionnelle parce qu'on a le modèle mathématique tirée de la source bibliographique.

II.3.2 Fiabilité estimée : Elle est mesurée au cours d'essais spécifiques effectués dans le cadre d'un programme d'essais bien défini.

II.3.3 Fiabilité opérationnelle : Elle est mesurée par l'utilisateur a partir de l'observation et l'analyse du comportement des équipements identiques pendant le fonctionnement.

Le tableau ci-dessous représente les méthodes de la fiabilité.

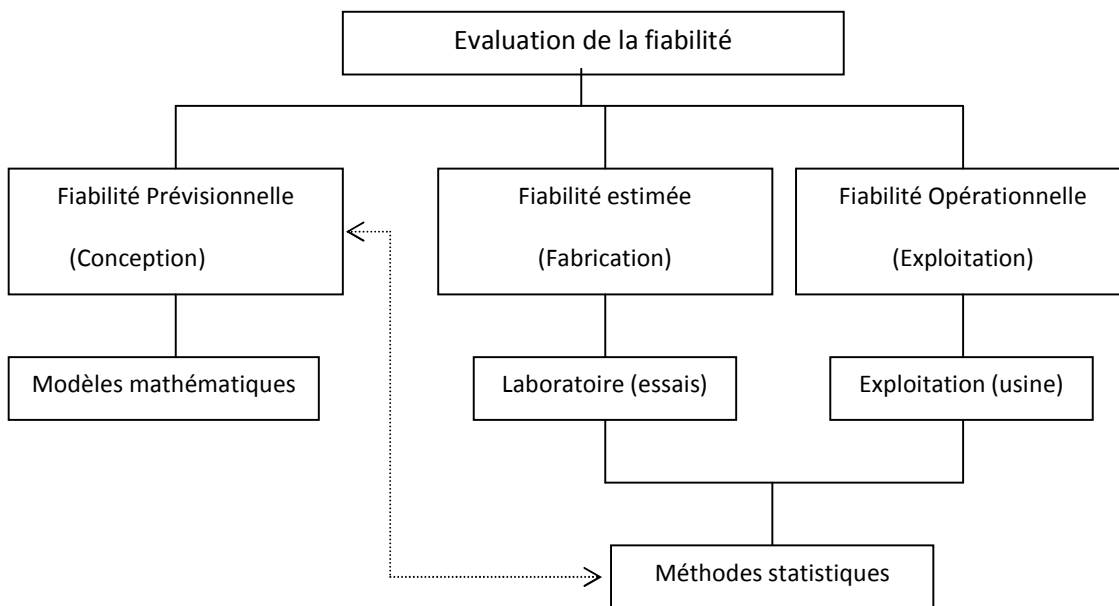


Figure II.1 : Méthodes de fiabilité [1]

II.4. Défaillance :

La défaillance est la fin de l'aptitude d'un dispositif ou d'un système à accomplir la fonction que l'on attendait de ce matériel.

On distingue :

- * les défaillances graves ou totales entraînant la fin de la fonction,
- * les défaillances partielles réduisant les performances mais non la fonction.

II .5. Fiabilité à la conception :

Les méthodes traditionnelles de conception des systèmes mécaniques sont basées sur le concept de facteur de sécurité. Aujourd'hui, les systèmes sont de plus en plus performants et les facteurs de sécurité ne suffisent plus pour prendre en compte les fluctuations des charges, des propriétés des matériaux, des caractéristiques dimensionnelles, des conditions de fonctionnement, des approximations de la modélisation et du facteur humain. Les concepteurs réalisent que seule l'analyse fiabiliste permet une modélisation réaliste de ces incertitudes. De plus, elle offre un moyen de comparaison sur la base : économie/sûreté [2].

La fiabilité est un paramètre décisif dans les phases de la conception, de la fabrication et de l'exploitation des systèmes mécaniques. Dans les deux premières phases, l'analyse de fiabilité permet de faire les meilleurs choix sur la base du rapport coût/fiabilité, et non seulement sur des critères économiques. Au cours de la phase d'exploitation, elle permet d'assurer le bon fonctionnement des installations et d'optimiser les opérations de maintenance ; des opérations telle que l'extension des durées d'exploitation ne peut être envisagées sans l'analyse de la fiabilité. L'objet de l'analyse fiabiliste est de donner des éléments de réponse à ces interrogations. L'avantage de l'analyse fiabiliste est qu'elle permet d'intégrer le caractère incertain des variables dans la conception ou pendant la durée de vie de la structure. Cet avantage est d'autant plus important que le rôle des variables étudiées devient redoutable par rapport à la résistance de la structure.

La formulation déterministe, associée à un coefficient de sécurité, est la plus courante pour l'étude d'un mode de défaillance. Par contre, si on considère que les grandeurs utilisées dans les formules de dimensionnement sont des grandeurs aléatoires, le risque de défaillance s'exprime en termes de probabilité. Les mathématiques nous apprennent qu'à partir des distributions de probabilité de chacune des grandeurs, il est possible de calculer la distribution de probabilité d'une contrainte dans un élément de structure, la probabilité de résistance du matériau et enfin la probabilité de rupture.

II.6. Intérêt de l'analyse fiabiliste :

Les intérêts de l'analyse fiabiliste des structures peuvent être résumés comme suit :

- Elles offrent un traitement réaliste des incertitudes et juge la rigueur des facteurs de sécurité arbitraires.
- Elle permet l'aide à la décision menant à une économie dans le coût de construction et à une conception mieux équilibrée.
- Elle produit des conceptions vraiment sécurisantes et elle mesure mieux la fiabilité des conceptions par rapport aux règlements et tient compte des différents modes de défaillance.
- Elle permet une répartition optimale des matériaux entre les différents composants de la structure ; elle intègre facilement l'expérience dans le processus de conception et elle permet de définir une stratégie d'Inspection-Maintenance-Réparation pour les structures existantes afin d'étendre leur durée de vie, tout en tenant compte du facteur économique.
- Elle élargit la connaissance de l'influence des incertitudes sur la réponse de la structure soumise à une charge.

Tous ces intérêts montrent l'avantage de l'analyse fiabiliste, soit pour les structures envisagées en optimisant le rapport coût/fiabilité, soit pour les structures existantes en optimisant leurs performances à travers les maintenances et la prolongation de leur durée de vie [2].

II.7. Analyse de fiabilité :

L'analyse de fiabilité exige un scénario de défaillance. Il sépare les situations que le concepteur décide de considérer acceptables de celle qu'il décide de considérer inacceptables. Selon les mots de Vidal-Cohen : la fiabilité c'est la probabilité et la décision en plus [3]. La décision peut être totalement déterminée et séparer deux domaines de manière binaire, elle peut être floue en associant un degré de satisfaction croissant progressivement des situations défaillantes vers les situations de bon fonctionnement.

Le scénario est représenté par une ou plusieurs fonctions de performances délimitant deux domaines ; l'un de fonctionnement lorsque la fonction de performance prend des valeurs

positives, l'autre de défaillance lorsqu'elle prend des valeurs négatives ou nulles. La fonction d'état limite est la fonction de performance nulle, elle est exprimée en fonction des variables de base. Celles-ci comprennent les données relatives aux actions, aux paramètres d'état, mais également aux résistances

A partir des données (action, état, résistance) et d'un modèle fiabiliste, l'objectif est de calculer un indice de fiabilité « β » [4] et d'approximer une probabilité de défaillance P_f . Outre celle-ci, les produits de l'analyse de fiabilité incluent le point de conception et les facteurs de sensibilité à la défaillance. On peut dire que la procédure de calcul du modèle fiabiliste excite les modèles de sollicitation et de résistance par un choix judicieux des données pour produire les résultats demandés. Les méthodes de simulation ou les méthodes d'approximation des indices de fiabilité constituent des stratégies d'excitation [3].

II .8. L'approche contrainte/résistance :

Cette approche considère la contrainte et la résistance comme deux variables qui peuvent prendre des valeurs aléatoires. Ces variables sont alors définies par leur fonction de densité de probabilité, respectivement. La fiabilité n'est autre que la probabilité que la contrainte reste inférieure à la résistance du produit.

Il existe plusieurs techniques de modélisation de la dégradation de la résistance :

Le vieillissement : modélisé, la plupart du temps, par une diminution linéaire de la moyenne de la résistance (ou augmentation de l'écart type) ;

Le dommage cyclique : la fonction de densité de la résistance dépend alors du nombre de cycles (une ampoule allumée et éteinte plusieurs fois vit moins longtemps qu'une ampoule qui reste allumée).

Le dommage cumulatif : la résistance diminue avec le nombre et l'amplitude des efforts appliqués par le passé.

Le scénario de fonctionnement est la disponibilité d'une résistance supérieure à la sollicitation, c'est à dire :

$$g(R, S) = R - S > 0 \quad \text{fonctionnement} \quad (\text{II.1})$$

Et le scénario de défaillance est alors :

$$g(R, S) = R - S \leq 0 \quad \text{défaillance} \quad (\text{II.2})$$

* $g(X)=0$ définit conventionnellement la surface d'état limite, frontière entre deux domaines D_s et D_f , c'est la fonction d'état limite.

* $g(x)>0$ définit le domaine de sûreté D_s , domaine intérieur à l'état limite, domaine des événements de succès.

* $g(X) \leq 0$ définit le domaine de défaillance D_f , domaine extérieur à l'état limite, domaine des événements de défaillance. Le choix d'inclure l'état limite $g(X)=0$ dans le domaine de défaillance est arbitraire [3].

La mesure de défaillance est alors la probabilité associée à l'événement $(R-S \leq 0)$, soit

$$P_f = \text{Prob}(R - S \leq 0) \quad (\text{II.3})$$

La fiabilité est, pour son art, définie comme le complément de la probabilité de défaillance :

$$R = 1 - P_f \quad (\text{II.4})$$

II.9. Méthodes structurales de fiabilité :

On présente des méthodes actuelles pour deux mesures significatives de fiabilité : indice de sûreté et la probabilité de défaillance. En raison de la nature itérative de prévoir ces mesures, l'utilisation des approximations de fonction d'état-limite est un aspect nécessaire. Cependant, le choix efficace des approximations appropriées à différentes étapes d'analyse de fiabilité rend ces outils pratiques pour beaucoup de problèmes à grande échelle technologique. En outre, l'évaluation physique de la sensibilité des facteurs utilisés dans le modèle est discutable.

II.9.1. Méthode de premier ordre de fiabilité (FORM) :

En principe, les variables faites au hasard sont caractérisées par leur premier moment (moyen), deuxième moment (variance), et moments plus élevés. Différentes manières de rapprocher la forme de fonction d'état-limite à la base pour différents algorithmes d'analyse de fiabilité *c-à-d*, FORM, SORM..., *etc*. Nous discutons d'abord la méthode de premier ordre deuxième moment FOSM, et puis les détails de la méthode FORM, parce que le développement de cette dernière peut être tracé à FOSM [5].

II.9.2. Méthode de premier ordre deuxième moment (FOSM) :

La méthode de FOSM, également désignée sous le nom de la valeur moyenne FOSM (MVFOSM), simplifie le rapport fonctionnel et allège les complexités du calcul de la probabilité de défaillance. Les "deux premiers ordres" nommés viennent du développement du premier ordre de la fonction d'état limite. Comme implicite, les entrées et les sorties sont exprimées comme écart type et moyen. Des moments plus élevés, qui pourraient décrire le biais et l'égalité de la distribution, sont ignorés. Dans la méthode de MVFOSM, la fonction d'état-limite est représentée comme le premier ordre des séries de Taylor au point de valeurs moyennes [5]. Supposant que les variables \mathbf{X} sont statistiquement indépendantes, la fonction approximative d'état-limite au moyen est écrite par :

$$\tilde{g}(X) \approx g(\mu_x) + \nabla g(\mu_x)^T (X_i - \mu_{xi}) \quad \text{(II.5)}$$

La où, $\mu_x = \{\mu_{x1}, \mu_{x2}, \dots, \mu_{xn}\}^T$ et $\nabla g(\mu_x)$ gradient de g évalué au point moyen μ_x

La valeur moyenne de la fonction d'état-limite est :

$$\mu_x \approx E[g(\mu_x)] = g(\mu_x) \quad \text{(II.6)}$$

Parce que :

$$Var[g(\mu_x)] = 0, \quad Var[\nabla g(\mu_x)] = 0 \quad \text{(II.7)}$$

$$Var[\nabla g(\mu_x)^T (X - \mu_x)] = [\nabla g(\mu_x)^T]^2 Var(X) \quad \text{(II.8)}$$

La variance de la fonction d'état-limite est :

$$Var[\tilde{g}(X)] \approx Var[g(\mu_x)] + Var[\nabla g(\mu_x)^T (X - \mu_x)] \quad \text{(II.9)}$$

D'où l'écart-type de la fonction d'état-limite est :

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{g}} &= \sqrt{Var[\tilde{g}(X)]} = \sqrt{[\nabla g(\mu_x)^T]^2 Var(X)} \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g(\mu_x)}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{xi}^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad \text{(II.10)}$$

L'indice de fiabilité est calculée par :

$$\beta = \frac{\mu_{\tilde{g}}}{\sigma_{\tilde{g}}} \quad \text{(II.11)}$$

L'équation (II.11) est utilisée lorsque la fonction d'état-limite est linéaire. Si la fonction d'état-limite est non linéaire, la surface approximative d'état-limite est obtenue en linéarisant la fonction originale d'état-limite au point de valeur moyenne. Par conséquent, cette méthode s'appelle la méthode de valeur moyenne, et le β donné dans l'équation (II.11) s'appelle index de fiabilité de MVFOSM. Dans un cas général avec des variables indépendantes de l'espace de n dimension, la surface de défaillance est un hyperplan et peut être définie comme fonction linéaire de défaillance :

$$\tilde{g}(X) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (\text{II.12})$$

L'indice de fiabilité donné par l'équation (II.11) peut être resté toujours utilisé pour le cas de n dimensions, tel que :

$$\mu_{\tilde{g}} = c_0 + c_1 \mu_{x1} + c_2 \mu_{x2} + \dots + c_n \mu_{xn} \quad (\text{II.13})$$

$$\sigma_{\tilde{g}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (\text{II.14})$$

La méthode de MVFOSM change le problème complexe original de probabilité en simple problème. Cette méthode établit directement le rapport entre l'index de fiabilité et les paramètres fondamentaux (écart type et moyenne) des variables faites au hasard par l'intermédiaire de l'équation (II.1). Cependant, il y a deux inconvénients sérieux dans la méthode de MVFOSM :

1) l'évaluation de la fiabilité par la linéarisation de la fonction d'état-limite concernant les valeurs moyennes conduit à des estimations erronées pour les fonctions de performance avec haut où variation à coefficient large. Ceci peut être vu du calcul de la valeur moyenne de $\tilde{g}(X)$, qui suppose que la troncation du développement de série de Taylor pour un cas seulement et pour une seule variable faite au hasard aux trois premiers termes est [6]:

$$\tilde{g}(X) \approx g(\mu_x) + (X - \mu_x) \nabla g(\mu_x) + \frac{(X - \mu_x)^2}{2} \nabla^2 g(\mu_x) \quad (\text{II.15})$$

La valeur moyenne de $\tilde{g}(X)$ peut être calculée comme :

$$\mu_{\tilde{g}} \approx E[g(\mu_x)] + E[(X - \mu_x) \nabla g(\mu_x)] + E\left[\frac{(X - \mu_x)^2}{2} \nabla^2 g(\mu_x)\right] \quad (\text{II.16})$$

Parce que :

$$E[g(\mu_x)] = g(\mu_x) \quad (\text{II.17.a})$$

$$E[(X - \mu_x)\nabla g(\mu_x)] = E[(X\nabla g(\mu_x)) - E[\mu_x\nabla g(\mu_x)]]$$

$$\nabla g(\mu_x)E(X) - \mu_x\nabla g(\mu_x) = 0 \tag{II.17.b}$$

$$E\left[\frac{(X-\mu_x)^2}{2}\nabla^2 g(\mu_x)\right] = \frac{1}{2}\nabla^2 g(\mu_x)E[(X - \mu_x)^2]$$

$$= \frac{1}{2}\nabla g^2(\mu_x)Var(X) \tag{II.17.c}$$

De l'équation (II.17.c), il est évident que la troisième limite du côté droit de l'équation (II.15) dépend de la variance de X et les gradients de second ordre de la fonction d'état-limite. Si la variance de X est petite ou la fonction d'état-limite est proche de linéaire, la troisième limite de l'équation (II.11) peut être ignorée et la valeur moyenne de $\tilde{g}(X)$ est identique à l'équation (II.6). Autrement, les grandes erreurs dans l'évaluation de la valeur moyenne se produisent.

2) la méthode de MVFOSM n'est pas invariable avec différentes formulations mathématiquement équivalentes du même problème. C'est un problème non seulement pour les formes non linéaires de $g(\cdot)$, mais également pour certaines formes linéaires.

II.9.3. Méthode par indice de fiabilité :

II.9.3.1. Indice de Rjanifzyne – Cornell [7]:

La définition proposée est très simple : l'indice β_c est obtenu à partir de la moyenne μ_x et de l'écart type σ_x :

$$\beta_c = \frac{\mu_x}{\sigma_x} \tag{II.18}$$

L'indice β_c apparaît donc comme l'inverse du coefficient de variation de la variable aléatoire X . La représentation graphique (fig II-2) montre que cet indice indique le nombre des écarts types entre le point moyen m_x et l'état limite ($x=0$).

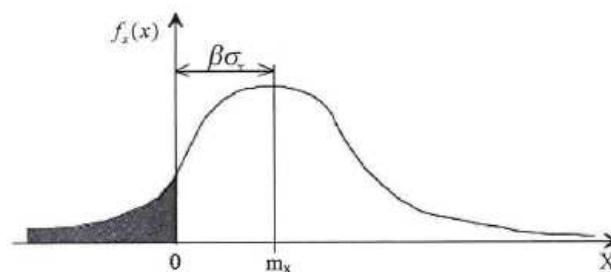


Figure II.2 : Représentation de Cornell

II.9.3.2. Critique de l'indice β_c :

La situation associant variables Gaussiennes et l'état-limite linéaire est la seule pour laquelle la démarche de l'indice de Rjanitzyne et Cornell est rigoureuse. En effet, une représentation différente de la marge Z pour le même état limite, conduit à une valeur différente de β_c . Par exemple, si la marge est maintenant définie par $Z: R/S - I$, le calcul de la moyenne et de l'écart-type de Z n'est plus possible analytiquement et Z n'est pas une variable aléatoire Gaussienne même si R et S sont Gaussiennes. Une approximation est obtenue par linéarisation de la fonction d'état limite autour des valeurs moyennes et l'indice calculé au premier ordre n'est pas le même, car il vient :

$$\beta_c = \frac{\mu_R - \mu_S}{\left(\sigma_R^2 + \left(\frac{\mu_R}{\mu_S}\right)^2 \cdot \sigma_S^2\right)^{1/2}} \quad (\text{II.19})$$

En effet: la relation avec P_f dépend maintenant de la loi de Z .

On voit donc apparaître deux difficultés :

- la première est liée à la non invariance de l'indice de fiabilité β_c dans différentes représentations d'une même fonction d'état-limite. L'indice d'Hasofer et Lind règle cette question.
- la deuxième est liée au passage de l'indice de fiabilité à la probabilité de défaillance. Ce sera le rôle des approximations de premier et second ordre.

L'indice β_c peut être considéré comme une approximation de l'indice de fiabilité exact et invariant par un développement au premier ordre.

L'indice β_c . Est correct dans le cas de variables Gaussiennes et d'un état limite linéaire dans l'espace physique.

II.9.3.3. Indice de Sûreté d'Hasofer et Lind (HL) :

La recherche du MPP sur la surface d'état-limite est une opération principale en HL méthode. L'amélioration d'HL méthode comparée au MVFOSM vient également d'expansion au point de valeur moyenne en MPP. La figure II.3 montre comment l'index de fiabilité pourrait être interprété comme mesure de la distance de l'origine à la surface de défaillance [8,10].

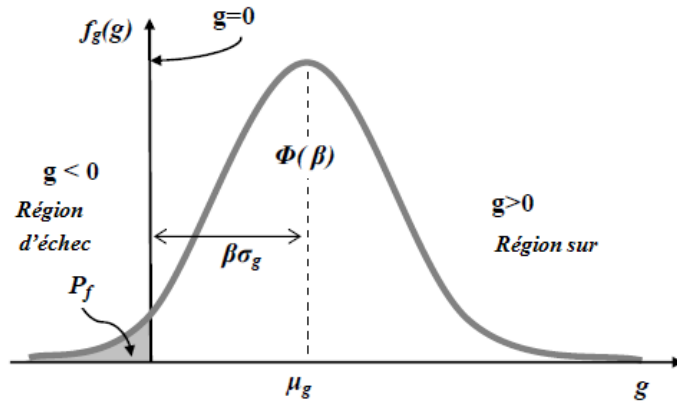


Figure II.3 ; Densité de probabilité de la fonction d'état-limite

Dans le cas unidimensionnel, l'écart type de la marge de sécurité a été commodément employé comme échelle. Pour obtenir une échelle similaire dans le cas des variables multiples, Hasofer et Lind [9] ont proposé une cartographie linéaire des variables fondamentales en jeu de variables normales et indépendantes, u_i .

Considérer le cas principal avec les variables indépendantes de la résistance R , et de la sollicitation S , qui sont tous les deux normalement distribués. D'abord, Hasofer et Lind ont introduit les variables faites au hasard normalisées par :

$$\hat{R} = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad , \quad \hat{S} = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \tag{II.20}$$

Là où μ_R et μ_S sont les valeurs moyennes des variables faites au hasard R et S , respectivement, et σ_R et σ_S sont les écarts type de R et S , respectivement.

Après, transformer la surface de la fonction d'état-limite $g(R, S) = R - S = 0$ dans le même système original (R, S) en surface d'état-limite dans le système normalisé (\hat{R}, \hat{S}) ,

$$g(R(\hat{R}), S(\hat{S})) = \hat{g}(\hat{R}, \hat{S}) = \hat{R}\sigma_R - \hat{S}\sigma_S + (\mu_R - \mu_S) = 0 \tag{II.21}$$

Ici, la distance la plus courte de l'origine dans le (\hat{R}, \hat{S}) , du système du même rang de (S, R) sur la surface de défaillance, $\hat{g}(\hat{R}, \hat{S}) = 0$ est égal à l'indice de sûreté, $(\beta = \hat{O}P^* = (\mu_R - \mu_S) / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2})$, suivant les indications de la figure II.4 le point $P^*(\hat{R}^*, \hat{S}^*)$, dans $\hat{g}(\hat{R}, \hat{S}) = 0$, qui correspond à cette distance la plus courte, désigné souvent sous le nom du MPP.

Dans un cas général avec des variables normalement distribuées et indépendantes de l'espace de n dimensions, la surface de défaillance est une fonction non linéaire :

$$g(X) = g(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T) \tag{II.22}$$

Transformer les variables en leurs formes normalisés :

$$u_i = \frac{x_i - \mu_{xi}}{\sigma_{xi}} \tag{II.23}$$

Où μ_{xi} , σ_{xi} représente la moyenne et l'écart-type de x_i normalement distribués, la moyenne de u_i égale 0 et l'écart-type et unitaire.

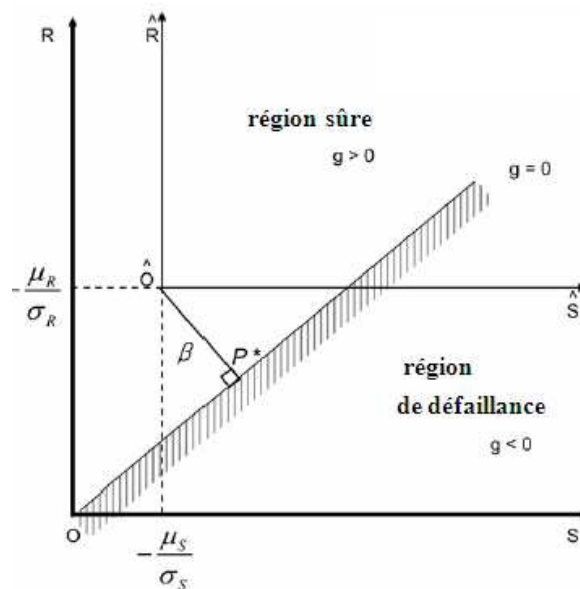


Figure II.4 : Illustration géométrique d'indice de Sûreté

Toute distribution orthogonale des variables distribuées normalement $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ se produit dans un nouveau ensemble de variables normales et non-corrélées. Donc la distribution basée sur la transformation de l'équation (II.23), le point de valeur moyenne dans l'espace original (*espace de X*) est tracé dans l'origine de l'espace normal (*espace de U*). La surface de défaillance $g(X)=0$ dans (*espace de X*) est tracé dans la surface correspondante de défaillance $g(U)=0$ dans (*espace de U*), de la figure II.5. En raison de la symétrie de rotation de la représentation du deuxième moment de U , la distance géométrique de l'origine dans l'espace U à tout point sur $g(U)=0$ est simplement le nombre d'écart type du point de valeur moyenne dans l'espace X au point correspondant sur $g(X)=0$. La distance à la surface de défaillance peut alors être mesurée par la fonction d'index-sûreté :

$$\beta(U) = (U^T U)^{1/2} = \|U\|_2, U \in g(U) = 0 \tag{II.24}$$

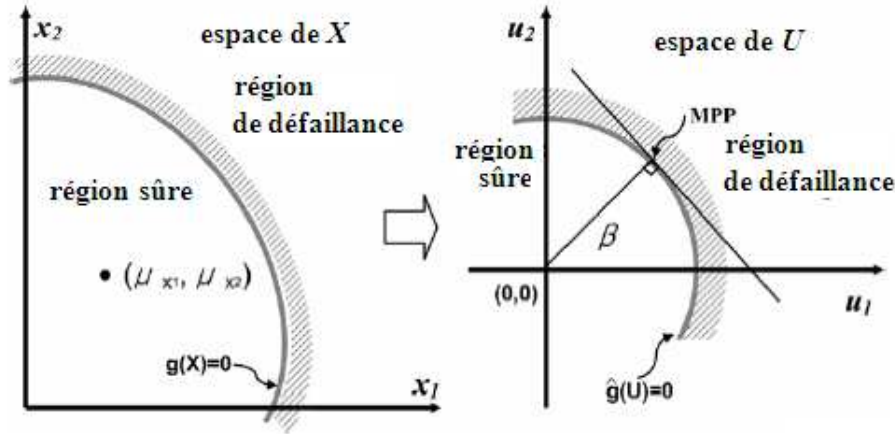


Figure II.5 : Tracé de la surface de défaillance d'espace du X au l'espace U

L'index de sûreté β est la distance la plus courte de l'origine à la surface de défaillance $g(U) = 0$, i.e.

$$\beta = \min_{U \in g(U)=0} (U^T U)^{1/2} \tag{II.25}$$

Cet index-sûreté s'appelle également l'indice de sûreté d'Hasofer et Lind (HL), β_{HL} . Le point $U^*(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ sur $g(U)=0$ est le point modèle. Les valeurs d'indice de sûreté donnée dans les équations (II.3) et (II.25) sont identiques quand la surface de défaillance est un hyperplan. L'indice de sûreté de Hasofer et Lind peut également être interprété comme indice de fiabilité de FOSM. La valeur de β_{HL} est la même pour la véritable surface de défaillance aussi bien que pour l'hyperplan approximatif de tangente au point modèle. L'ambiguïté en valeur de l'indice de premier ordre de fiabilité est ainsi résolue quand le point modèle est pris comme point de linéarisation. L'indice résultant de fiabilité est une mesure sensée pour la distance à la surface de défaillance.

II.9.3.4. Facteurs de sensibilité :

Les cosinus directeurs α_i dirigés vers l'extérieur du vecteur normal d'unité de la fonction d'état-limite, sont défini comme facteur de sensibilité. Le facteur de sensibilité montre l'importance relative de chaque variable faite au hasard à la probabilité de défaillance. La sensibilité de la probabilité de défaillance ou de l'indice de fiabilité sur de petits changements des

variables faites au hasard peut être examinée, qui fournit habituellement des informations utiles à étudier la variation statistique de la réaction [10].

La signification physique des α_i implique la cotisation relative de chaque variable faite au hasard à la probabilité de défaillance (Figure II.6). Par exemple, plus la valeur de α_i est grande, plus la cotisation à la probabilité de défaillance est haute. C'est dû à :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1 \tag{II.26}$$

En fait, α_i est la sensibilité d'indice de fiabilité au MPP. De la définition de β comme distance de l'origine à la surface d'état-limite, $g(U)=0$, il suit cela :

$$\frac{\partial \beta}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2} = \frac{u_i}{\beta} = \alpha_i, (i = 1, 2, \dots, n) \tag{II.27}$$

Les facteurs de sensibilité pour la probabilité de défaillance est :

$$\frac{\partial \beta}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \Phi(-\beta) = \phi(-\beta) \frac{\partial \beta}{\partial u_i} \tag{II.28}$$

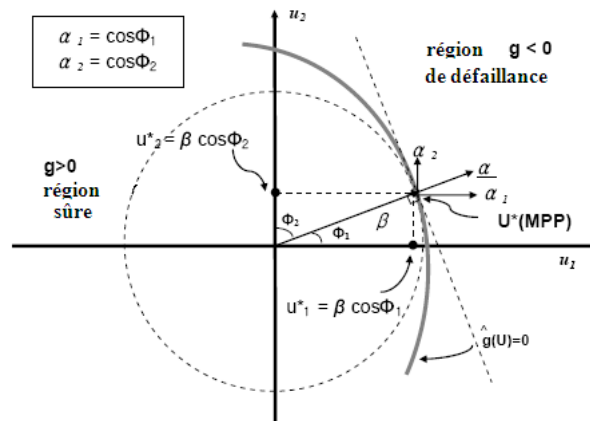


Figure II.6 Facteurs de sensibilité

Dans l'équation (II.63), $\partial g(X)/\partial x_i$ représente la sensibilité de la fonction de performance $g(X)$, qui mesure le changement de la fonction de performance résultant des changements des variables faites au hasard physiques. Cependant, la sensibilité d'indice de fiabilité β représente le changement de l'incertitude des variables faites au hasard. C'est-à-dire, elle dépend de la sensibilité de la fonction de performance, $\partial g(X)/\partial x_i$ et sur l'écart type σ_i des variables faites au hasard de l'équation (II.63).

En résumé, le calcul de α_i fournit la sensibilité d'indice de fiabilité en ce qui concerne u_i , qui a deux buts importants. D'abord, ces facteurs de sensibilité montrent les cotisations des variables faites au hasard à l'indice de fiabilité ou à la probabilité de défaillance. En second lieu, le signe du facteur de sensibilité montre le rapport entre la fonction de performance et les variables physiques. Le positif α_i signifie que la fonction de performance $g(U)$ diminue à mesure que la variable faite au hasard augmente, et des négatifs d'un facteur moyens $g(U)$ augmentent à mesure que la variable faite au hasard augmente.

La sensibilité de la probabilité de défaillance aura le même sens, mais α_i est multipliée par la valeur de la fonction densité de probabilité (équation II.28).

II.9.4. FORM avec des approximations adaptatives :

Dans l'algorithme précédent, la fonction d'état-limite, $g(U)$, a été rapprochée par le développement de premier ordre de Taylor au MPP. Pour des problèmes non linéaires, cet élan est seulement une approximation, et plusieurs itérations sont habituellement exigées. Comme la convergence de l'algorithme dépend de la linéarisation de la fonction d'état-limite approximative de fonction non linéaire $g(U)$. La fonction d'état-limite pourrait être rapprochée par d'autres fonctions, telles que les *approximations non linéaires adaptatives de Deux point* (TANA), y compris TANA et TANA2. Cette classe neuve des approximations est construite en employant le développement de série de Taylor en termes de variables intervenantes adaptatives. La non-linéarité des approximations adaptatives est automatiquement changée en employant l'information connue produite pendant le procédé d'itération. TANA2 a également une limite de correction pour les limites de second ordre [8,9].

Pour calculer la surface approximative de la fonction d'état-limite $\tilde{g}(x)$ dans l'espace de U utilisant TANA, nous devons d'abord obtenir la surface approximative adaptative d'état-limite dans l'espace de X . Deux méthodes sont possibles, TANA et TANA2, pour exécuter cette opération sont donnés ci-dessous.

TANA:

$$\tilde{g}(X) = g(X_k) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n x_{i,k}^{1-r} \frac{\partial g(X_k)}{\partial x_i} (x_i^r - x_{i,k}^r) \quad (\text{II.29})$$

là où $x_{i,k}$ est le $i^{\text{ème}}$ élément dans le vecteur X_k de k itération. La notation de virgule ne signifie pas la différentiation.

L'indice non linéaire r dans l'équation II.29 peut être déterminé de :

$$\tilde{g}(X_{k-1}) - \{ \tilde{g}(X) = g(X_k) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n x_{i,k}^{1-r} \frac{\partial g(X_k)}{\partial x_i} (x_i^r - x_{i,k}^r) \} = 0 \quad (\text{II.30})$$

TANA2:

$$\tilde{g}(X) = g(X_k) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g(X_k)}{\partial x_i} ((x_{i,k})^{1-p_i/p_i}) (x_i^{p_i} - (x_{i,k})^{p_i}) + 1/2 \cdot \varepsilon_2 \sum_{i=1}^2 (x_i^{p_i} - (x_{i,k})^{p_i})^2 \quad (\text{II.31})$$

p_i et ε dans l'équation (II.30) peuvent être déterminés par :

$$\frac{\partial g(X_{k-1})}{\partial x_i} = \left(\frac{x_{i,k-1}}{x_{i,k}} \right)^{p_i-1} \frac{\partial g(X_k)}{\partial x_i} + \varepsilon_2 (x_{i,k-1}^{p_i} - x_{i,k}^{p_i}) x_{i,k-1}^{p_i-1} p_i \quad (\text{II.32})$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(X_{k-1}) &= g(X_k) \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(X_k)}{\partial x_i} ((x_{i,k})^{1-p_i/p_i}) (x_i^{p_i} - (x_{i,k})^{p_i}) + 1/2 \cdot \varepsilon_2 \sum_{i=1}^n (x_i^{p_i} - (x_{i,k})^{p_i})^2 \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

La prochaine opération est de tracer $\tilde{g}(X)$ dans $\tilde{g}(U)$ en employant les transformations normales ou équivalentes normales :

$$\tilde{g}(X) = \tilde{g}(\sigma_{x'_1} u_1 + \sigma_{x'_2} u_2 + \dots + \sigma_{x'_n} u_n + \mu_{x'_n}) \quad (\text{II.34})$$

L'indice non linéaire, r , est numériquement calculé en réduisant au minimum la différence entre les fonctions exactes et approximatives d'état-limite au point X_{k-1} . Dans la théorie, r peut être tout nombre réel positif ou négatif (pas égale à 0). Dans la pratique, r peut être restreint par exemple de -5 à 5, pour que les itérations de l'espace X évitent des difficultés numériques liées aux polynômes évolués [11]. r peut être résolu, utilisant n'importe quel solveur d'équation non linéaire, mais ici un arrangement itératif simple est employé. L'itération recherchant r commence à partir de $r = 1$. Quand r est augmenté ou diminué à une longueur d'opération (0, 1), la différence ε entre la fonction exacte et la fonction approximative est prévue. Si ε est plus petit que l'erreur initiale (par exemple, la correspondance à $r = 1$), l'itération ci-dessus est répétée jusqu'à l'erreur permise, $\varepsilon = 0.001$, ou la limitation de r est atteinte et l'indice non linéaire r est déterminé. Autrement, r est diminué de moitié et le procédé ci-dessus d'itération est répété jusqu'à ce que le r final soit obtenu. Cette recherche informatisée est peu coûteuse parce que l'équation (II.30) est procurable dans une équation de forme fermée et, est très facile à mettre en application.

Habituellement, l'algorithme adaptatif d'indice est meilleur que la méthode de HL-RF, parce que l'indice non linéaire r est déterminé en comparant des approximations linéaires (à partir de 1) et de réduire au minimum la différence entre les fonctions exactes et les fonctions approximatives

d'état-limite. En cour de recherche de r , l'indice non linéaire deviendra automatiquement 1 si d'autres valeurs de r ne peuvent apporter aucune amélioration au-dessus de l'approximation linéaire.

Les opérations principales de cet algorithme sont récapitulées comme suit :

1) dans la première itération, calculer l'écart type et moyen de l'équivalent de la distribution normale au point de valeur moyenne pour des variables de distribution non gaussiennes. Construire une approximation linéaire avec de l'équation (II.60) en employant le développement de série de Taylor de premier ordre à un premier point (si le point initial est choisi comme point de valeur moyenne, μ , l'approximation linéaire est augmentée à μ) et calculer la valeur et les gradients de la fonction d'état-limite au point initial.

2) calculer l'indice de sûreté β_I initial utilisant la méthode de HL-RF et ses cosinus directeurs, α_i , (si le point initial est le point de valeur moyenne, la méthode de valeur moyenne est employée.).

3) calculer de nouveau point X_k utilisant l'équation (II.65).

4) calculer la moyenne et l'écart-type équivalent de la distribution normale à X_k pour des variables non-normales de distribution. Prévoir les gradients de la fonction d'état-limite au point neuf X_k .

5) déterminer l'indice non linéaire r en résolvant l'équation (II.30) pour TANA ; ou déterminer l'indice non linéaire P_k en résolvant l'équation (II.32) et l'équation (II.33) pour TANA2 ; basé sur l'information des points courants et précédents (quand k est égal à 2, le point précédent de modèle est la valeur moyenne X).

6) obtenir l'approximation non linéaire, l'équation (II.29) pour TANA adaptative (II.31) pour TANA2.

7) transformer la fonction approximative d'état-limite de l'espace X en fonction de l'espace U utilisant l'équation (II.34).

8) trouver le point le plus probable de défaillance du modèle approximatif d'indice de sûreté donné dans l'équation (II.57) à suivre la méthode de HL ou en résolvant le problème d'optimisation utilisant n'importe quel logiciel commercial. Calculer l'indice de sûreté β_{k+1} .

9) vérifier la convergence :

$$\varepsilon = |\beta_{k+1} - \beta_k|/\beta_k \quad (\text{II.35})$$

10) arrêter le procédé si ε satisfait la limite de tolérance requise de convergence (par exemple, 0.001) ; autrement, continuer.

11) Calculer la valeur exacte de la fonction d'état-limite et les gradients approximatifs à \mathbf{X}_{k+1} et estimer l'indice de sûreté approximatif suivre la méthode de HL-RF.

12) Rapprocher la vérification de convergence d' β ,

13) Continuer le procédé si ε satisfait la tolérance requise de convergence (0.001) ; autrement, arrêter.

14) Calculer des gradients exacts de la fonction d'état-limite à \mathbf{X}_{k+1} et passer à l'opération 5 ; répéter le procédé jusqu'à ce que β converge.

En opération 8, l'indice de sûreté β du modèle approximatif donné dans l'équation (II.57 a) peut être obtenu facilement en calculant la fonction explicite $g(\mathbf{U})$, dans lequel n'importe quel arrangement d'optimisation ou algorithme d'itération peut être employé. Calcul de la fonction de performance exacte $g(\mathbf{X})$ n'est pas exigé ; donc, le temps machine est grand et réduit pour des problèmes concernant des fonctions de rendement complexes et implicites, en particulier des modèles d'éléments finis pour la simulation de l'effet structural.

II.9.5. Méthode de second ordre de fiabilité (SORM) :

La FORM fonctionne bien habituellement quand la surface d'état-limite a seulement un point minimal de distance et sa fonction est presque linéaire dans le voisinage du point de modèle. Cependant, si la surface de défaillance a de grandes courbures (non-linéarité élevée), la probabilité de défaillance prévue par FORM utilise l'indice de sûreté β peut donner les résultats peu raisonnables et imprécis [12]. Pour résoudre ce problème, la série de Taylor de second ordre est considérée. On a proposé de diverses méthodes approximatives non linéaires dans la littérature. Breitung [13], Tvedt [19], [20], Hohenbichler et Rackwitz [16], Koyluoglu et Nielsen [17], et Eao et Elishakoff [14] ont développé SORM utilisant l'approximation de second ordre pour remplacer les surfaces originales. Wang et Grandhi [11] et Der Kiureghian, *et autres* [15] probabilités de second ordre prévues de défaillance emploi des courbures approximatives pour éviter des calculs de second ordre exacts de dérivés de surface d'état-limite . D'abord, dans la section (II.7.5), nous présentons les connaissances de base de l'approximation de second ordre de la surface de réaction avec la transformation orthogonale.

II.9.6. Approximation premier et second ordre de la fonction d'état-limite :

Pour faciliter l'intégration de l'équation $P_f = [g(X) \leq 0] = \int \dots \int f_X(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$ de nouveau dans l'espace Y normal tourné au lieu dans l'espace U , u peuvent être considérées dans la plupart des calculs de probabilité de défaillance. Pour induire la rotation de l'espace U vers l'espace Y , une matrice orthogonale H doit être produite dans laquelle la ligne n de H est la normale d'unité de la fonction d'état-limite au MPP, c.-à-d. $-\nabla g(U^*)/|\nabla g(U^*)|$. Pour générer H , en premier, une matrice initiale est choisie comme suit :

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial g(U^*)/\partial U_1}{|\nabla g(U^*)|} & -\frac{\partial g(U^*)/\partial U_2}{|\nabla g(U^*)|} & \dots & -\frac{\partial g(U^*)/\partial U_n}{|\nabla g(U^*)|} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(II.36)}$$

Là où les dernières lignes $n-1$ se composent des zéros et de l'unité sur la diagonale. L'algorithme de Gramme-Schmidt [18] est employé pour orthogonaliser la matrice ci-dessus pour obtenir une matrice orthogonale. Au début soit f_1, f_2, \dots, f_n , indiquent le premier, le second, ... et le vecteur de ligne $n^{ième}$ de la matrice ci-dessus, respectivement :

$$f_1 = \left\{ -\frac{\partial g(U^*)/\partial U_1}{|\nabla g(U^*)|}, -\frac{\partial g(U^*)/\partial U_2}{|\nabla g(U^*)|}, \dots, -\frac{\partial g(U^*)/\partial U_n}{|\nabla g(U^*)|} \right\}^T, f_2 = \{0, 1, 0, \dots, 0\}^T, f_n = \{0, 0, 0, \dots, 1\}^T$$

Mettre, $D_1 = (f_1, f_1)^{\frac{1}{2}}$, $e_{11} = \frac{1}{D_1}$, $\gamma_1 = e_{11}f_1$,

$$D_2 = [(f_2, f_2) - (f_2, \gamma_1)^2]^{1/2}, e_{12} = -\frac{(f_2, \gamma_1)}{D_2},$$

$$e_{22} = \frac{1}{D_2}, \gamma_2 = e_{12}\gamma_1 + e_{22}f_2$$

Enfin en général,

$$D_k = [(f_k, f_k) - |f_k, \gamma_1|^2 - |f_k, \gamma_2|^2 \dots - |f_k, \gamma_{k-1}|^2]^{1/2}$$

$$e_{1k} = -\frac{(f_k, \gamma_1)}{D_k}, e_{2k} = -\frac{(f_k, \gamma_2)}{D_k}, \dots, e_{k-1,k} = -\frac{(f_k, \gamma_{k-1})}{D_k}$$

$$e_{kk} = \frac{1}{D_k}, e_{2k} = e_{1k}\gamma_1 + e_{2k}\gamma_2 + \dots + e_{k-1,k}\gamma_{k-1} + e_{kk}f_k$$

la où (f, f) et (f, γ) représente le produit scalaire des deux vecteurs. Peut être vérifier par génération du vecteur orthogonal $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. La génération de la matrice orthogonale H_0 est :

$$H_0^T = \{\gamma_1^T, \gamma_2^T, \dots, \gamma_n^T\} \quad \text{(II.37)}$$

En fait, dans la matrice orthogonale de l'équation (II.37) la première ligne $-\nabla g(U^*)/|\nabla g(U^*)|$ en raison que $D_I=I$ pour satisfaire cela la n^{ième} ligne de H est $-\nabla g(U^*)/|\nabla g(U^*)|$, la première ligne de la matrice orthogonale H est déplacée vers la dernière ligne. Cette remise en ordre de la matrice est également une matrice orthogonale et satisfait que la n^{ième} ligne de H est égale $-\nabla g(U^*)/|\nabla g(U^*)|$, ainsi elle est définie comme matrice H et est donnée par :

$$H^T = \{\gamma_2^T, \dots, \gamma_n^T, \gamma_1^T\} \quad (\text{II.38})$$

Approximation premier ordre :

Supposer que le point d'échec le plus probable (MPP) dans l'espace de U peut être,

$U^* = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*\}$, l'approximation linéaire de la fonction $g(U)=0$ est donnée par le développement du premier ordre de Taylor au point (MPP) :

$$\tilde{g}(U) \approx g(U^*) + \nabla g(U^*)(U - U^*) = 0 \quad (\text{II.39})$$

Dans cette équation, $g(U^*)$ égale à 0 , U^* appartient à la surface, divisant par $|\nabla g(U^*)|$, l'équation (II.39) est écrit :

$$\tilde{g}(U) \approx \frac{\nabla g(U^*)}{|\nabla g(U^*)|} (U - U^*) \quad (\text{II.40})$$

De l'équation (II.62) nous avons :

$$\frac{\nabla g(U^*)}{|\nabla g(U^*)|} U^* = -\beta \quad (\text{II.41})$$

Remplaçant cette équation dans l'équation (II.40) on obtient :

$$\tilde{g}(U) \approx \frac{\nabla g(U^*)}{|\nabla g(U^*)|} U^* + \beta = 0 \quad (\text{II.42})$$

Par une rotation de U de nouveau, mutuellement les variables aléatoires normales indépendantes Y utilisent la matrice orthogonale H donnée dans l'équation (II.38),

$$Y=HU \quad (\text{II.43})$$

et l'approximation de la surface de réponse donnée dans l'équation (II.42) devient :

$$\tilde{g}(U) \approx -Y_n + \beta = 0 \quad (\text{II.44 a})$$

Où

$$Y_n = \beta \quad (\text{II.44 b})$$

L'équation (II.44 b) est l'approximation de premier ordre de la surface de réaction dans l'espace normal tourné (indiqué comme *espace* de Y), suivant les indications de la Figure (II.7). Si les fonctions d'état-limite des problèmes pratiques sont linéaires ou proche de linéaire, cette approximation attentive ou représentation exacte de la surface de réaction. Autrement, les erreurs de troncation de l'approximation de premier ordre de Taylor pourraient être grandes et des approximations plus précises doivent être utilisées.

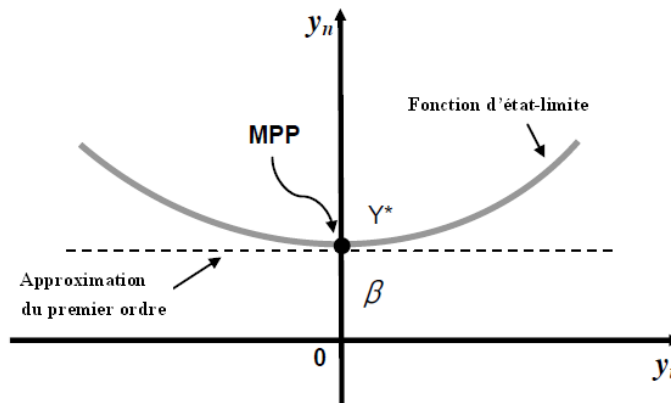


Figure II.7 : Approximation premier ordre de la surface de réponse dans l'espace de Y

L'approximation du second ordre de la surface de réaction $g(U) = 0$ est donnée par le développement de série de second ordre de Taylor au MPP :

$$\tilde{g}(U) \approx g(U^*) + \nabla g(U^*)(U - U^*) + \frac{1}{2}(U - U^*)^T \nabla^2 g(U^*)(U - U^*) \quad (\text{II.45})$$

là où $\nabla^2 g(U^*)$ représente la matrice symétrique du deuxième dérivé de la fonction d'état-limite :

$$\nabla^2 g(U^*)_{ij} = \frac{\partial^2 g(U^*)}{\partial u_i \partial u_j} \quad (\text{II.46})$$

Divisant sur $\nabla g(U^*)$ et considéré que $g(U^*)=0$, on obtiens :

$$\tilde{g}(U) \approx \alpha^T (U - U^*) + \frac{1}{2} (U - U^*)^T \beta (U - U^*) \quad (\text{II.47 a})$$

Avec :

$$\alpha = \frac{\nabla g(U^*)}{|\nabla g(U^*)|}, \text{ et } \beta = \frac{\nabla^2 g(U^*)}{|\nabla g(U^*)|} \quad (\text{II.47 b})$$

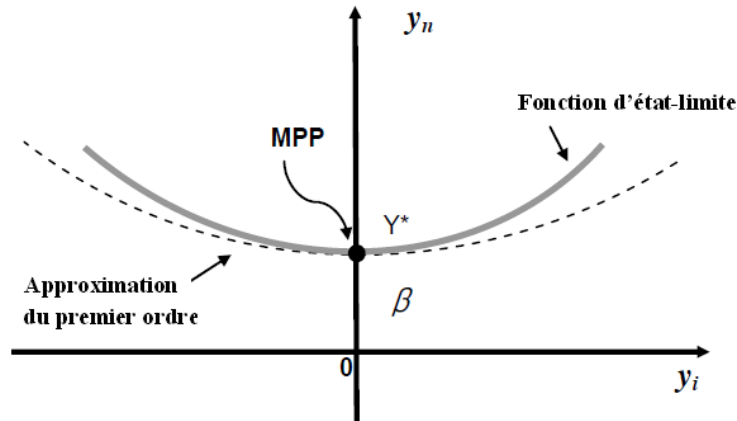


Figure II.8: Approximation du second ordre de la surface de réponse dans l'espace Y

Physiquement, les transformations suivantes sont les rotations du même rang pour faire l'axe y_n des ordonnées coïncider avec le vecteur β , suivant les indications de la figure II.8. Substituant l'équation (II.43) dans l'équation (II.47) et remplaçant le premier terme par l'équation (II.44.a), la surface de réaction approximative de l'espace U est :

$$\tilde{g}(Y) \approx -y + \beta + \frac{1}{2}(H^{-1}Y - H^{-1}Y^*)\beta(H^{-1}Y - H^{-1}Y^*) \quad (\text{II.48})$$

Là où Y^* est l'espace de Y (MPP) ($Y^* = \{0, 0, \dots, \beta\}^T$) correspondant à l'espace U (MPP) U^* . Dans l'espace de Y , l'axe Y_n des ordonnées est dans la coïncidence avec le vecteur de β . Puisque la matrice de H est une matrice orthogonale,

$$H^{-1} = HT \quad (\text{II.49})$$

Substituant cette équation dans l'équation (II.48), on obtiens :

$$\tilde{g}(Y) \approx -y_n + \beta + \frac{1}{2}(Y - Y^*)H\beta H^T(Y - Y^*) \quad (\text{II.50})$$

La où,

$$(Y - Y^*)^T = \{y_1, y_2, \dots, y_n - \beta\}^T \quad (\text{II.51})$$

Par une série de transformations orthogonales, H_1, H_2, \dots, H_n , pour les premières $n-1$ variables,

$$\bar{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}^T, \text{ i. e.,}$$

$$\bar{Y} = H_1 H_2, \dots, H_m \bar{Y} \quad (\text{II.52})$$

Des quantités liées aux variables $n-1$ sont indiquées avec une barre. En conclusion, la première matrice d'ordre $(n-1) * (n-1)$ de $HBHT$ devient une matrice diagonale :

$$\bar{H}\bar{B}\bar{H}^T = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & \dots \end{vmatrix} \quad (\text{II.53})$$

Et l'équation (II.50) devient :

$$y_n = \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_i y_i'^2 \quad (\text{II.54})$$

En fait, la procédure ci-dessus pour trouver la matrice diagonale peut être traitée comme problème de valeur propre. Ainsi, k est donnés par :

$$k_{ij} = (\bar{H}\bar{B}\bar{H}^T) \quad , \quad (i, j = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (\text{II.56})$$

Là où k_{ij} représente la courbure de la surface de réponse au MPP.

L'équation (II.54) est l'approximation de second ordre de la surface de réponse dans l'espace standard normal tourné. Le coût de calcul est important en calculant les deuxièmes dérivés B de la fonction d'état-limite au MPP. Les dérivés de second ordre exacts de $g(U)$ exigent $n(n-1)$ simulation supplémentaire de la fonction d'état-limite pour un arrangement de différence finie. Pour des problèmes ayant un grand nombre de variables faites au hasard, ce calcul a extrêmement besoin d'ordinateur intensif. De ce procédé, il est clair qu'on doit augmenter le rendement de calcul en prévoyant la matrice de courbure et les dérivés de second ordre de fonction. Puis, il permet un procédé accéléré et rentable pour exécuter l'analyse de second ordre de probabilité, en particulier quand des outils d'analyse structurale sont basés sur les élément-finis utilisés.

II.10. Méthode d'itératives :

II.10.1 Méthode d'itération de Hasofer et de Lind :

L'équation (II.25) montre que l'index de sûreté β , est la solution d'un problème d'optimisation contrainte dans l'espace normal.

Réduire au minimum :
$$\beta(U) = (U^T U)^{1/2} \quad (\text{II.57 a})$$

Sujet à :
$$g(U) = 0 \quad (\text{II.57 b})$$

Il y a beaucoup d'algorithmes procurables qui peuvent résoudre ce problème, tel que des arrangements d'optimisation mathématique ou d'autres algorithmes d'itération. Dans [33], plusieurs méthodes d'optimisation contrainte ont été employées pour résoudre ce problème

d'optimisation, des méthodes y compris des méthodes principales (sens faisables, gradient, projection, gradient réduit), des méthodes de pénalité, des méthodes duelles, et de Lagrange multiplicateur. Chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients, selon les attributs de la méthode et la nature du problème. Dans la description qui suit, les algorithmes récursifs les plus utilisés généralement (les méthodes d'HL et d'HL-RF) sont introduits pour résoudre les problèmes de fiabilité.

On a proposé HL de méthode par Hasofer et Lind. Rackwitz et Fiessler ont étendu HL de méthode pour inclure l'information de distribution de variable faite au hasard, appelle leur méthode prolongée la méthode de HL-RF. Supposant que la surface d'état-limite avec distribution normale de des variables X faites au hasard et indépendantes de n dimensions est

$$g(X) = g(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T) = 0 \quad (\text{II.58})$$

Cette fonction d'état-limite peut être linéaire ou non linéaire. Basé sur la transformation donnée dans l'équation II.23, la fonction d'état-limite donnée dans l'équation II.58 est transformée dans

$$g(U) = g(\{\sigma_{x1}u_1 + \mu_{x1}, \sigma_{x2}u_2 + \mu_{x2}, \dots, \sigma_{xn}u_n + \mu_{xn}\}^T) = 0 \quad (\text{II.59})$$

Le vecteur normal de l'origine O^* sur la surface d'état-limite $g(U)$ produit d'un point P^* d'intersection suivant les indications du Figure II.3 et du Figure II.4. La distance de l'origine au MPP est l'index de sûreté β . Le développement de Taylor de premier ordre de $g(U)$ au MPP U^* est :

$$\tilde{g}(U) = g(U^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(U^*)}{\partial u_i} (u_i - u_i^*) \quad (\text{II.60})$$

Là où k indique le nombre d'itération de l'algorithme récursif.

De la transformation de l'équation II.23, nous avons

$$\frac{\partial \tilde{g}(U)}{\partial u_i} = \frac{\partial g(X)}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \quad (\text{II.61})$$

La distance la plus courte de l'origine à la surface approximative ci-dessus de défaillance indiquée dans l'équation II.60 est

$$\hat{O}P^* = \beta = (g(U^*) - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial g(U^*)}{\partial x_i} \sigma_{x_i} u_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\frac{\partial g(U^*)}{\partial x_i} \sigma_{x_i})^2}}) \quad (\text{II.62})$$

Le cosinus directeur du vecteur normal est donné par :

$$\cos \theta_{xi} = \cos \theta_{ui} = -\frac{\frac{\partial g(U^*)}{\partial x_i}}{|\nabla g(U^*)|} = \alpha_i \quad (\text{II.63})$$

Là où α_i exprime l'effet relatif de la variable faite au hasard correspondante sur toute la variation. Ainsi, s'appelle le *facteur de sensibilité*. Plus de détails environ α_i seront fournis plus tard dans la section (II.7.2.1.2).

Les coordonnées du P^* sont calculées par :

$$u_{xi}^* = \frac{x_i^* - \mu_{xi}}{\sigma_{xi}} = \hat{O}P^* \cos \theta_{xi} = \beta \cos \theta_{xi} \quad (\text{II.64})$$

Les coordonnées correspondant au P^* dans l'espace original sont :

$$x_i^* = \mu_{xi} + \beta \sigma_{xi} \cos \theta_{xi} , (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II.65})$$

Puisque P^* est un point sur la *surface* d'état de limite :

$$g(\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}^T) = 0 \quad (\text{II.66})$$

Les opérations principales de la méthode d'itération de HL sont :

- 1) définissent les appropriées de la fonction d'état-limite de l'équation (II.58)
- 2) placé le point de valeur moyenne comme un premier point de modèle, *i.e.*, $x_{i,k} = \mu_{xi}$, $i=1, 2, \dots, n$, et calcule les gradients de $g(X_k)$ de la fonction d'état-limite à ce point. Ici, $x_{i,k}$, est l'élément du vecteur X_k de l'itération de k^{th} .
- 3) calculent β initial suivre la méthode de la valeur moyenne (indice de sureté de Cornel).
- 4) calcul de nouveaux X_k et U_k (équations (II.64) et (II.65)), valeur de fonction, et gradients à ce nouveau point.
- 5) calculent l'indice sûreté β utilisant l'équation (II.62) et le facteur cosinus ou de sensibilité par l'équation (II.63).
- 6) Répète les étapes 4,6 jusqu'à l'évaluation de la convergence de β .
- 7) calculent les coordonnées du point X_k du point de modèle le plus probable de défaillance (MPP), X^* .

Dans certains cas, la surface de défaillance peut contenir plusieurs points correspondant aux valeurs stationnaires de la fonction d'indice de fiabilité. Par conséquent, il peut être nécessaire d'employer plusieurs points de départ pour trouver tout les $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$. Ceci s'appelle un problème *multiple de MPP*.

HL index de sûreté est :

$$B_{HL} = \min\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\} \quad (\text{II.67})$$

Des équations (II.11) et (II.62), la différence entre la méthode de MVFOSM et les HL de méthode sont que HL de méthode rapproche la fonction d'état-limite utilise le développement de premier ordre de Taylor au point de modèle X_k ou U_k au lieu des valeurs moyennes μ_X . En outre, la méthode de MVFOSM n'exige pas des itérations, alors que la méthode de HL a besoin de plusieurs itérations pour converger pour des problèmes non linéaires.

La méthode d'HL fournit habituellement de meilleurs résultats que la méthode de valeur moyenne pour des problèmes non linéaires.

À quel point une fonction d'état-limite linéarisée, $g(U)$, rapproche une fonction non linéaire $g(U)$ en termes de probabilité P_f de défaillance dépend de la forme de $g(U)$. S'il est concave vers l'origine, P_f est sous-estimé par l'approximation d'hyperplan. De même, une fonction convexe implique la surestimation. Cependant, il n'y a aucune garantie que l'algorithme HL converge dans toutes les situations. En outre, méthode de HL considère seulement des variables faites au hasard normalement distribuées, ainsi il ne peut pas être employé pour des variables faites au hasard non gaussiennes.

II.10.2. Méthode Monte Carlo (MCS) :

La simulation de Monte Carlo, baptisée du nom des jeux de casino de Monte Carlo, Monaco, provient du travail de recherches de Neumann et d'Ulam en 1949 [21]. Le comportement aléatoire est trouvé dans les jeux de hasard tels que des fentes, des roues de roulette, et des matrices. La simulation de Monte Carlo (MCS) est connue comme méthode simple d'échantillonnage aléatoire ou la méthode d'essai statistique qui font des réalisations basées sur le prélèvement aléatoirement produit place pour des variables incertaines.

La technique de simulation de Monte Carlo reproduit le fonctionnement d'un système réel par le biais d'une méthode analytique et analyse les effets des variations des entrées sur les sorties du système. Elle comprend six éléments clés

- 1 - Définir le problème en termes de variables aléatoires de conception ;

- 2 - Identifier les caractéristiques probabilistes de toutes les variables aléatoires en terme de fonction de densité de probabilité et des paramètres associés ;
- 3 - Générer des valeurs pour ces variables aléatoires ;
- 4 - Evaluer le problème pour chaque ensemble de données ;
- 5 - Conclure sur la probabilité de défaillance du produit ;
- 6 - Déterminer la précision de la simulation.

II.10.2.1. Principe de la méthode la Méthode Monte Carlo [30]:

Les tirages sont effectués dans tout l'espace suivant la loi multi-normale. L'intégrale à évaluer est :

$$P_f = \int_{D_f} \phi_n(u_k) du_1 du_2 \dots du_n \quad (\text{II.68})$$

Où P_f est la probabilité de défaillance, $\phi_n(u_k)$ et la fonction de densité multi-normale de dimension n et D_f est le domaine de défaillance défini par $H(u_k) \leq 0$ (ou $G(x_k) \leq 0$). En introduisant l'indicateur de défaillance I_{Df} défini par :

$$I_{Df} = \begin{cases} 1 & \text{si } H(u_k) \leq 0 \\ 0 & \text{si } H(u_k) > 0 \end{cases}$$

L'intégrale de P_f peut être écrite sous la forme

$$P_f = \int_{R^n} I_{Df} \phi_n(u_k) du_1 du_2 \dots du_n = E[I_{Df}]$$

Où $E[.]$ est l'espérance mathématique.

II.10.2.2 Estimateurs statiques :

Pour N tirages aléatoires, la moyenne empirique de I_{Df} est une estimation non biaisée de P_f :

$$P_f = E[I_{Df}] \approx \tilde{P}_f = \frac{1}{N} \cdot \sum_{r=1}^N I_{Df}^{(r)} \quad (\text{II.69})$$

Dont la variance est obtenue par le calcul suivant :

$$var[\tilde{P}_f] = var\left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{r=1}^N I_{Df}^{(r)}\right] = \frac{1}{N^2} \cdot var\left[\sum_{r=1}^N I_{Df}^{(r)}\right] = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{r=1}^N var.[I_{Df}^{(r)}]$$

Car les v.a $I_{Df}^{(r)}$; sont issue de réalisations indépendantes des variables de l'état-limite

$$var[\tilde{P}_f] = \frac{1}{N^2} N var\left[I_{Df}^{(r)}\right] = \frac{1}{N} (E\left[I_{Df}^{(r)2}\right] - E\left[I_{Df}^{(r)}\right]^2) \quad (\text{II.70})$$

Car les variables sont identiquement distribuées.

Ce pendant, on peut montrer que cet estimateur est biaisé et que l'estimateur non biaisé est obtenu en multipliant par $I/(N-I)$. une approximation de l'estimateur de la variance est alors obtenue en introduisant (II.69):

$$\widetilde{var}[\tilde{P}_f] \approx \frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N I_{Df}^{(r)} - \left(\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N I_{Df}^{(r)} \right)^2 \right) \quad (\text{II.71})$$

II.10.2.3 Loi de l'estimateur :

En remarquant que $(E[I_{Df}] = P_f \text{ et } E[I_{Df}^2] = E[I_{df}] \text{ car } I_{Df}^2 = I_{Df})$ la relation (II.70) devient :

$$var[\tilde{P}_f] = \frac{1}{N} P_f (1 - P_f) \approx \frac{1}{N} \tilde{P}_f (1 - \tilde{P}_f)$$

Qui peut être retrouvée par une autre voie. Une expérience numérique consiste à tirer la variable I_{Df} . Notons $p = \text{Prob}(I_{Df}=1) = P_f$, $q = \text{Prob}(I_{Df}=0) = (1 - P_f)$ et $K = \sum_{r=1}^N I_{Df}^{(r)}$. La loi de la v.a K est la loi binomiale :

$$prob(k) = \frac{N!}{k! (N - k)!} p^k q^{N-k}$$

Dont la moyenne est $E[K] = Np$ et la variance $var[K] = N p q = N p (1 - p)$,

D'où

$$var[\tilde{P}_f] = \frac{1}{N^2} var[K] = \frac{1}{N} P_f (1 - P_f)$$

Ce qui est l'expression à chercher. La loi à associer à l'estimateur de la probabilité est donc une loi binomiale dont la limite, lorsque $N \rightarrow \infty$ est une distribution Gaussienne.

Le coefficient de variation de l'estimateur s'écrit alors

$$cv = \sqrt{\frac{1-P_f}{NP_f}} \approx \sqrt{\frac{1}{NP_f}} \quad (P_f \rightarrow 0) \quad (\text{II.72})$$

Pour un objectif $cv=0.1$ et une probabilité $P_f=10^{-n}$, on obtient $N=10^{n+2}$.

Intervalle de confiance :

Il est obtenu dans le cadre de l'estimation de la moyenne à variance inconnue, pour un intervalle de confiance bilatéral symétrique au seuil α .

$$\tilde{P}_f - t_{1-\frac{\alpha}{2}(v)} \sqrt{\text{var}[\tilde{P}_f]} \leq P_f \leq \tilde{P}_f + t_{1-\frac{\alpha}{2}(v)} \sqrt{\text{var}[\tilde{P}_f]}$$

Où $t_{1-\alpha/2}(v)$ est la variable de Student de paramètre $v=N-1$. Pour N grand, elle est remplacée par le fractile de loi normale (erreur de 0.12 % pour $N = 1000$)

Pour un intervalle à 95% , $t_{0.975} \approx u_{0.975} = 1.96$, d'où :

$$\tilde{P}_f \left(1 - 1.96 \sqrt{\frac{1 - \tilde{P}_f}{NP_f}}\right) \leq P_f \leq \tilde{P}_f \left(1 + 1.96 \sqrt{\frac{1 - \tilde{P}_f}{NP_f}}\right)$$

Ce qui conduit à la relation de shooman en admettant $1.96 \approx 2$:

$$\%erreur = 200 \sqrt{\frac{1 - \tilde{P}_f}{N\tilde{P}_f}} \quad (\text{II.73})$$

Ou \tilde{P}_f est l'estimateur de P_f et N le nombre de simulations. Cette erreur correspond à une probabilité de 95% que la valeur exacte de P_f appartienne à l'intervalle $\tilde{P}_f (1 \pm \%erreur)$, c'est l'intervalle de confiance à 95%.

II.10.2.4 Estimateur de l'indice de fiabilité :

L'indice de fiabilité associé à l'estimateur est donné par la relation habituelle :

$$\tilde{\beta} = -\Phi^{-1}(\tilde{P}_f) \quad (\text{II.74})$$

Il s'agit d'une variable aléatoire dont on peut également connaître les moments sur la base de P_f suivant une loi de gauss $N(\tilde{P}_f, \text{var}[\tilde{P}_f])$. En effet, en rappelant que :

si $y=y(x)$

$$E[Y(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)f_X(x) dx \tag{II.75}$$

alors :

$$E[\tilde{\beta}] = \int_0^1 -\Phi^{-1}(t) \frac{1}{\sqrt{\text{var}[\tilde{P}_f]}} \Phi\left(\frac{t-\tilde{P}_f}{\sqrt{\text{var}[\tilde{P}_f]}}\right) dt \tag{II.76}$$

$$\text{var}[\tilde{\beta}] = \int_0^1 (-\Phi^{-1}(t) - E[\tilde{\beta}])^2 \frac{1}{\sqrt{\text{var}[\tilde{P}_f]}} \Phi\left(\frac{t-\tilde{P}_f}{\sqrt{\text{var}[\tilde{P}_f]}}\right) dt \tag{II.77}$$

II.11. Méthode Analytique

II.11.1Méthode analytique de Taylor

Il n'est pratiquement pas possible de concevoir une procédure analytique rigoureuse pour calculer les moyennes et les écarts types des fonctions générales de n variables aléatoires. Il est, en fait, très difficile de trouver la fonction de densité de probabilité même pour une fonction générale de plus de deux variables aléatoires. Néanmoins, dans la plupart des problèmes d'erreur d'engineering où on peut assumer que les variations aléatoires de chaque variable sont "petites", et puisque Sandler [22] a montré que les incertitudes dans l'estimation des différents facteurs de calcul d'engrenages sont relativement petites (voir tableau (II.1)), l'approximation par la série de Taylor [23, 24, 25] peut être considérée comme méthode adéquate pour combiner les variables aléatoires.

$$Y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial X_i} \Big|_{X=\bar{X}} (X_i - \bar{X}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 Y}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{X_i=\bar{X}_i} (X_i - \bar{X}_i) \cdot (X_j - \bar{X}_j) + \dots \tag{II.78}$$

Tableau .III.1 : Incertitudes d'estimations des Facteurs des Standards ISO et AGMA [31]

| $\pm \Delta X$ | $\pm 1\%$ | | $\pm 2\%$ | | $\pm 5\%$ | | $\pm 7.5\%$ | | $\pm 10\%$ | | $\pm 15\%$ | | $\pm 20\%$ | | $\pm 40\%$ | |
|----------------|-----------|------|-----------|-------------|-----------|------------------|-------------|-------|------------|-----|------------|-----|------------|--|------------|--|
| Méthode | ISO | AGMA | ISO | ISO | AGMA | ISO | AGMA | ISO | AGMA | ISO | AGMA | BOX | BOX | | | |
| X_i | Z_H | I | Z_N | $K_H\alpha$ | C_m | $\delta_{H\lim}$ | S_{ac} | K_A | C_{SF} | n | x | | | | | |
| | Z_E | | Z_V | $K_H\beta$ | C_L | K_V | C_V | S | | | | | | | | |
| | | | | Z_L | | | | C_P | | | | | | | | |
| | | | | | | Z_R | | | | | | | | | | |
| | | | | | | Z_W | | | | | | | | | | |

Dans la plupart des problèmes d'erreurs d'engineering, les valeurs des termes d'ordre supérieurs dans l'expansion de Taylor sont considérées comme petites comparées aux valeurs moyennes et au premier ordre, et sont donc négligées. En utilisant des procédures standard, [32,33] nous obtenons alors la moyenne comme suit :

$$\bar{Y} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \tag{II.79}$$

Tandis que la petite variation aléatoire de Y est donnée par :

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial X_i} \Delta X_i \tag{II.80}$$

Où,

$\Delta \bar{X}_i = (X_i - \bar{X}_i)$ est la variation de Xi de sa moyenne, et ΔY est une fonction linéaire de ΔX_i .

En utilisant des théorèmes standards, l'écart type résultant de Y est donné par :

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \Big|_{X_i=\bar{X}_i} \sigma_{X_i} \right)^2} \tag{II.81}$$

II.12. Méthode de quasi-Newton (Matlab 7.0 (fminc)) :

Afin de résoudre les équations (II.82) et (II.83), les indices de sûreté doivent être calculés. L'indice de sûreté pour la contrainte de contact et de flexion (Eq. (II.11)) devient :

$$g(X_i) = \sigma_{H.lim} Z_N Z_L Z_R Z_V Z_W Z_X - Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{(F_t/bd_1) \left(\frac{u+1}{u}\right) K_A K_V K_{H\beta} K_{H\alpha}} \quad \text{(II.82)}$$

$$g(X_i) = \sigma_{Flim} Y_{ST} Y_{NT} Y_{relT1} Y_{RrelT1} Y_{X1} - Y_{Fa1} Y_{Sa1} Y_\varepsilon Y_\beta \left(\frac{F_t}{b m_n}\right) K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha} \quad \text{(II.83)}$$

$$B_H = \min(\sum_{i=1}^n Z_i^2)^{1/2} \quad \text{(II.84)}$$

Sujet à :

$$Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 Z_7 - Z_8 Z_9 Z_{10} Z_{11} \sqrt{(Z_{12}/Z_{17} Z_{18}) \left(\frac{u+1}{u}\right) Z_{13} Z_{14} Z_{15} Z_{16}} = 0 \quad \text{(II.85.a)}$$

$$Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6 - \frac{Z_7 Z_8 Z_9 Z_{10} Z_{11} Z_{12} Z_{13} Z_{14} Z_{15}}{Z_{16} Z_{17}} = 0 \quad \text{(II.85.b)}$$

Les contraintes sur X1.....X17/18 sont $\pm n$, où n est le nombre d'écart type. Généralement on prend [26] :

$$\bar{X}_i - 3. \sigma_{X_i} \leq Z_i \leq \bar{X}_i + 3. \sigma_{X_i} \quad \text{(II.86)}$$

L'analyse numérique a été effectuée par le logiciel MATLAB version 7.1 par l'emploi de la sub-routine "fmin" qui est une composante de la boîte à outils d'optimisation de MATLAB [29]. Cet algorithme, qui met en application une routine de minimisation quasi-Newtonienne avec contraintes, exhibe en général des bons résultats dans la résolution des problèmes de technologie.

En insérant les valeurs de l'écart type et la moyenne de chaque variable Xi (obtenues de l'analyse statistique dans les équations ci-dessus, les indices de contact et de rupture sont obtenus β_H, β_F .

Les contraintes de cette optimisation sont les modes de défaillance pour la fatigue de contact et la fatigue à la rupture :

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP} \quad \text{(II.87)}$$

et

$$\sigma_F \leq \sigma_{FP} \quad (\text{II.88})$$

$$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 - X_8 X_9 X_{10} X_{11} \sqrt{(X_{12}/X_{17} X_{18}) \left(\frac{u+1}{u}\right) X_{13} X_{14} X_{15} X_{16}} = \beta_H - \Phi^{-1}(R) \quad (\text{II.89.a})$$

$$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 - \frac{X_7 X_8 X_9 X_{10} X_{11} X_{12} X_{13} X_{14} X_{15}}{X_{16} X_{17}} = \beta_F - \Phi^{-1}(R) \quad (\text{II.89.b})$$

Ceci correspond à une fiabilité donnée de résistance à la contrainte de contact et de résistance à la rupture.

Après avoir déterminé l'indice de sûreté pour chaque mode de défaillance, l'indice minimal de sûreté (β_{\min}) est employé dans les équations (II.89.a) et (II.89.b). Le modèle de PDO a été exécuté pour différents niveaux de fiabilité donnant les résultats montrés dans l'expérimentale. L'utilisation de la méthode de conception par l'optimisation probabiliste (PDO) donne divers choix de conception qu'elle fournit aux concepteurs. Les variables de conception peuvent être choisis selon le concepteur et le niveau de fiabilité désiré. Il est important de mentionné aussi qu'une fois que le modèle mathématique de PDO est établi, on peut opter pour d'autres variables de conception tels que le module, l'entraxe, les diamètres, ...etc., et dans ce cas la on détermine les tolérances de ces dernières qui seront des cotes fonctionnelles exigées au niveau du bureau de méthodes pour la fabrication des engrenages [26,27,28].

Conclusion :

L'objectif principal de cette partie de ce travail était de présenter les différentes méthodes analytiques et numériques pour estimer la fiabilité du système à engrenages étudié dans ce travail et par conséquent la validation et l'évaluation des résultats obtenus des méthodes présentées dans le chapitre III. Cependant, les conclusions générales suivantes ont été obtenues de cette partie :

- L'utilisation d'une telle ou telle méthode pour l'estimation de la fiabilité d'un système mécanique dépend particulièrement de :
 - la précision demandée ou exigée.
 - de la nature de la fonction d'état limite (linéaire, légèrement linéaire ou fortement non linéaire).
 - Moyens disponibles pour l'exécution du modèle de fiabilité (méthode analytique ou Numérique).

- L'application de la méthode numérique de Monte Carlo pour le calcul de la fiabilité simule exactement ce qui se passe réellement en pratique et par conséquent elle est la plus précise des méthodes présentées dans ce travail mais hélas elle est longue de solution et consomme beaucoup de temps informatique et d'espace.

- L'application de la méthode analytique (FORM) est simple et très pratique ; elle est surtout précise pour les fonctions d'états linéaires ou légèrement non linéaires.

- L'application de la méthode analytique (SORM) est compliquée mais précise ; elle est recommandée pour les fonctions d'états fortement non linéaires (exposant d'ordre trois et plus).

- Les méthodes FORM adaptives telle que TANA1 et TANA2 peuvent facilement remplacer la méthode SORM et par conséquent éviter la complexité du modèle de fiabilité de la SORM.

- La connaissance des valeurs statistiques (moyenne et écarts types) des différents paramètres (ayant une influence sur la performance de la fonction d'état limite) pour n'importe quelle méthode soit-elle analytique ou numérique est nécessaire pour le calcul de la fiabilité sauf si les incertitudes de ces paramètres sont mesurées ou obtenues de la bibliographie à partir d'une banque de données.

- L'utilisation de la méthode de conception par l'optimisation probabiliste (PDO) est très recommandée en conception ; elle donne divers choix de conception qu'elle fournit aux concepteurs et permet ainsi de choisir la conception optimale au point de vu coût, sûreté (fiabilité désirée), capacité de transmission, ...etc.).

Bibliographie

- [1] J-C Ligeron-M205 / IMDR 2009.
- [2] A. Mohamed, F. Suau et M. Lemaire, Conception et Optimisation basées sur la fiabilité, RYFES édition, version 1.3, 1999
- [3] M. Lemaire, Evaluation des indices de fiabilité associés à des modèles de mécanique de structure. Revue Française de Mécanique, 1992.
- [4] Rackwitz R. & Fiessler 8., Structural reliability under combined random load sequences, Computers & Structures, vol 9, 1979, pp 489-494
- [5] Seung-Kyum Choi, Ramana V. Grandhi and Robert A. Canfield Reliability-based Structural Design.
- [6] ISO/ 6336, Parts 1, 2 and 3, "Calculation of the Load Capacity of Spur and Helical Gears", 1996.
- [7] Salim Georges IALLOUF Approche Probabiliste du Dimensionnement Contre le Risque de Rupture.
- [8] Freudenthal, A. M., Garrelts, J. M., and Shinozuka, M., "The Analysis of Structural Safety," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, No. ST1, 1966, pp. 267-325.
- [9] Grandhi, R.V., and Wang, L.P., Structural Reliability Analysis and Optimization: Use of Approximations, NASA CR-1999-209154, 1999.
- [10] Hasofer, A.M., and Lind, N.C., "Exact and Invariant Second-Moment Code Format," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 100(EM), 1974, pp.111-121.
- [11] Wang, L.P., and Grandhi, R.V., "Improved Two-point Function Approximation for Design Optimization," AIAA Journal, Vol. 32, No. 9, 1995, pp. 1720-1727.
- [12] Melchers, R.E., Structural Reliability Analysis and Prediction, Ellis Horwood Limited,UK., 1987.
- [13] Breitung, K., "Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 110, No. 3, Mar., 1984, pp 357-366.

- [14] Cai, G.Q., and Elishakoff, I., "Refined Second-order Approximations Analysis," Structural Safety, Vol. 14, No. 4, April, 1994, pp. 267-276.
- [15] Der Kiureghian, A., Lin, H.Z., and Hwang, S.J., "Second Order Reliability Approximations," Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 113, 1987, pp. 1208-1225.
- [16] Hohenbichler, M., and Rackwitz, R., "Improvement of Second-order Reliability Estimates by Importance Sampling," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 116, 1990, pp. 1183-1197.
- [17] Koçuluoğlu, H.U., and Nielsen, S.R.K., "New Approximations for SORM Integrals," Structural Safety, Vol. 13, No. 4, April, 1994, pp. 235-246.
- [18] Todd, J., Survey of Numerical Analysis, McGraw Hill, NY, 1962.
- [19] Tvedt, L., "Two Second-order Approximations to the Failure Probability," Section on Structural Reliability, A/S Vertas Research, Hovik, Norway, 1984.
- [20] Tvedt, L., "Distribution of Quadratic Forms in Normal Space Applications to Structural Reliability," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 116, 1990, pp. 1183-1197.
- [21] R.E.Melshers., "Structural Reliability Analysis and Prediction", New York. John Wiley and Sons, 1999.
- [22] B.Z.Sandler., "Probabilistic Approach to Mechanisms", Elsevier, 1984.
- [23] Y.M.Zhang., "Practical Reliability Based Design of Gear Pair", Mechanism and Machine Theory 38 pp 1363-1370, 2003.
- [24] X.Du., Sudjianto., and W.Chen., "An Integrated Framework for Probabilistic Optimisation using Inverse Reliability Strategy", Proceeding of DETC' 03 ASME, Design Eng. Tech.Conf. and Computers and information in Eng.Conf., Chigago, Illinois USA, September 2-6, 2003.
- [25] E.B.Haugen ., " Probabilistic Mechanical Design ", Wiley-Interscience, 1980.
- [26] E.M.Mansoor., "The Application of Probability to Tolerances used in Engineering Design", Proc. Inst.Mech.Engrs, 178 Part I, pp29-39,Discussion pp 39-51, 1964.
- [27] F.D.Thompson., G.Shubhagm., and A.Shukla., "Tradeoff Analysis in Minimum Volume Design of Multi-Stage Spur Gear reduction Units", Mechanism and Machine Theory, 35, pp 609-627, Elsevier, 2000.

[28] X.Du., and W.chen., “Sequential Optimisation and Reliability Assessment Method for Efficient Probabilistic Design”, Proceedings of DETC’02, ASME, Design Eng Tech Conf and Computers and Information in Eng Conf, September 29-October 2, Montréal, Canada, 2002.

[29] D.Hanselma., and B.Littlefield., “Mastering Matlab 6, -A comprehensive Tutorial and reference”, Prentice Hall, 2001.

[30] Jaan Kiusalaas Numerical “Methods in Engineering with MATLAB 2005”

[31] AGMA 2101, "Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear teeth", AGMA 2101-C95, 1995.

[32] A . D . S . Carter., “A View of Mechanical Reliability”, Proc.Symp. Mechanical Reliability”. IPC Sci.Technol.Press pp 1-7, 1980.

[33] G. Henriot, Traité Théorique et Pratique des Engrenages. 6th ed., Dunod, Paris, 1979.

Application des méthodes de fiabilité sur une transmission par engrenages

Afin d'appliquer et de valider les méthodes de prédiction de la fiabilité des systèmes de transmission mécanique développées dans le chapitre II, on a opté pour un cas réel d'une transmission par une paire de roues dentées étudié par Y.M.Zhang et all [1] et dont les données statistiques sont représentées dans les tableaux ci-dessous.

Tableau III.1 Données numériques de l'engrenage étudié

| <i>Variable aléatoire</i> | <i>Moyenne</i> | <i>Ecart type (e_i)</i> | <i>Variable aléatoire</i> | <i>Moyenne</i> | <i>Ecart type (e_i)</i> |
|---------------------------|----------------|--------------------------------------|---------------------------|----------------|--------------------------------------|
| σ_{Hlim} | 1300 | 156 | Z_ϵ | 0.81 | 0.00405 |
| Z_N | 1 | 0.033 | Z_β | 0.957 | 0.004785 |
| Z_L | 0.92 | 0.03036 | F_t | 34644 | 519.66 |
| Z_R | 1.03 | 0.03399 | K_A | 1 | 0.033 |
| Z_V | 1.04 | 0.03432 | K_V | 1.484 | 0.1613 |
| Z_W | 1 | 0.033 | $K_{H\beta}$ | 1.68 | 0.05544 |
| Z_X | 1 | 0.033 | $K_{H\alpha}$ | 1.16 | 0.03828 |
| Z_H | 2.32 | 0.0116 | $2a$ | 200 | 1 |
| Z_E | 189.8 | 9.49 | d_1 | 148.75 | 0.74375 |
| σ_{Flim} | 310 | 62 | Y_β | 0.8 | 0.004 |
| Y_{ST} | 2.1 | 0.0693 | $K_{F\beta}$ | 1.603 | 0.052899 |
| Y_{NT} | 1 | 0.033 | $K_{F\beta}$ | 1.603 | 0.052899 |
| $Y_{\delta relT1}$ | 0.99 | 0.03267 | $K_{F\alpha}$ | 1.16 | 0.03828 |
| $Y_{\delta relT2}$ | 1.01 | 0.03333 | $K_{F\alpha}$ | 1.16 | 0.03828 |
| Y_{RrelT1} | 1.065 | 0.035145 | m_n | 4 | 0.02 |
| Y_{RrelT2} | 1.065 | 0.035145 | Y_ϵ | 0.715 | 0.003575 |
| Y_{X1} | 1 | 0.033 | Y_{Sa2} | 1.94 | 0.06402 |
| Y_{X2} | 1 | 0.033 | Y_{Sa1} | 1.75 | 0.05775 |
| Y_{Fa1} | 2.36 | 0.07788 | Y_{Fa2} | 2.14 | 0.07062 |

Le travail présenté par Y.M.Zhang et al [1] consiste en l'analyse de la fiabilité d'une paire de roue dentées en utilisant la méthode numérique de perturbation et la théorie de la conception basée sur la fiabilité. Les résultats trouvés par les auteurs [1] pour l'exemple spécifique présentant les données statistiques mentionnées ci-dessus sont comme suit :

- Pour la pression de Hertz : $\beta_H = 2.9685$
- Pour la flexion du pignon : $\beta_{fp} = 2.754$
- Pour la flexion de la roue : $\beta_{fg} = 2.7052$

III.1 Calcul de l'indice de fiabilité par les différentes méthodes développées dans ce travail :

III.1.1 Présentation et notation des variables aléatoires :

1 - Pression de contact :

Les contraintes de contact et de résistance du pignon et de la roue sont données par :

$$\sigma_H = Z_H Z_E Z_\varepsilon Z_\beta \sqrt{(F_t / b d_1) \left(\frac{u+1}{u}\right) K_A K_V K_{H\beta} K_{H\alpha}} , \sigma_{HP} = \sigma_{H.lim} Z_N Z_L Z_R Z_V Z_W Z_X$$

La fonction d'état limite pour la contrainte de contact est :

$$g(X) = \sigma_{H.lim} - \sigma_H$$

Le tableau ci-dessous représente les différentes notations ainsi que les valeurs correspondant aux paramètres statistiques des variables aléatoires utilisées dans nos calculs numériques pour la détermination de l'indice de fiabilité de la pression de contact (pression d'Hertz).

Tableau III.2 données numériques des variables aléatoires de la pression de contact

| Variable aléatoire (réelle et notée) | | Moyenne | Ecart type (e_i) | Variable aléatoire (réelle et notée) | | Moyenne | Ecart type (e_i) |
|---|----------------|---------|-------------------------|---|-----------------|---------|-------------------------|
| $\sigma_{H.lim}$ | X ₁ | 1300 | 156 | Z_ε | X ₁₀ | 0.81 | 0.00405 |
| Z_N | X ₂ | 1 | 0.033 | Z_β | X ₁₁ | 0.957 | 0.004785 |
| Z_L | X ₃ | 0.92 | 0.03036 | F_t | X ₁₂ | 34644 | 519.66 |
| Z_R | X ₄ | 1.03 | 0.03399 | K_A | X ₁₃ | 1 | 0.033 |
| Z_V | X ₅ | 1.04 | 0.03432 | K_V | X ₁₄ | 1.484 | 0.1613 |
| Z_W | X ₆ | 1 | 0.033 | $K_{H\beta}$ | X ₁₅ | 1.68 | 0.05544 |
| Z_X | X ₇ | 1 | 0.033 | $K_{H\alpha}$ | X ₁₆ | 1.16 | 0.03828 |
| Z_H | X ₈ | 2.32 | 0.0116 | $2b$ | X ₁₇ | 200 | 1 |
| Z_E | X ₉ | 189.8 | 9.49 | d_1 | X ₁₈ | 148.75 | 0.74375 |

2 - Flexion pignon :

Les contraintes de flexion et de résistance du pignon sont données par :

$$\sigma_F = Y_{Fa1} Y_{Sa1} Y_\varepsilon Y_\beta \left(\frac{F_t}{b m_n} \right) K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}, \quad \sigma'_{Flim} = \sigma_{Flim} Y_{ST} Y_{NT} Y_{\varepsilon relT1} Y_{RrelT1} Y_{X1}$$

La fonction d'état limite pour la contrainte de flexion du pignon est :

$$g(X) = \sigma_{Fplim} - \sigma_{Fp}$$

Le tableau ci-dessous représente les différentes notations ainsi que les valeurs correspondant aux paramètres statistiques des variables aléatoires utilisées dans nos calculs numériques pour la détermination de l'indice de fiabilité de la contrainte de flexion du pignon.

Tableau III.3 données numériques de la contrainte de flexion du pignon

| Variable aléatoire (réelle et notée) | | Moyenne | Ecart type (e_i) | Variable aléatoire (réelle et notée) | | Moyenne | Ecart type (e_i) |
|---|-------|---------|-------------------------|---|----------|---------|-------------------------|
| σ_{Flim} | X_1 | 310 | 62 | Y_β | X_{10} | 0.8 | 0.004 |
| Y_{ST} | X_2 | 2.1 | 0.0693 | F_t | X_{11} | 34644 | 519.66 |
| Y_{NT} | X_3 | 1 | 0.033 | K_A | X_{12} | 1 | 0.033 |
| $Y_{\delta relT1}$ | X_4 | 0.99 | 0.03267 | K_V | X_{13} | 1.484 | 0.1613 |
| Y_{RrelT1} | X_5 | 1.065 | 0.035145 | $K_{F\beta}$ | X_{14} | 1.603 | 0.052899 |
| Y_{X1} | X_6 | 1 | 0.033 | $K_{F\alpha}$ | X_{15} | 1.16 | 0.03828 |
| Y_{Fa1} | X_7 | 2.36 | 0.07788 | $2b$ | X_{16} | 200 | 1 |
| Y_{Sa1} | X_8 | 1.75 | 0.05775 | m_n | X_{17} | 4 | 0.02 |
| Y_ε | X_9 | 0.715 | 0.003575 | | | | |

3 - Flexion roue :

Les contraintes de flexion et de résistance de la roue sont données par :

$$\sigma_F = Y_{Fa2} Y_{Sa2} Y_\varepsilon Y_\beta \left(\frac{F_t}{b m_n} \right) K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}, \quad \sigma'_{Flim} = \sigma_{Flim} Y_{ST} Y_{NT} Y_{\varepsilon relT2} Y_{RrelT2} Y_{X2}$$

La fonction d'état limite pour la contrainte de flexion de la roue est :

$$g(X) = \sigma_{F_{lim}} - \sigma_{Fg}$$

Tableau III.4 Données numériques de la contrainte de flexion de la roue

| Variable aléatoire | notation | Moyenne | Ecart type (e_i) | Variable aléatoire | notation | Moyenne | Ecart type (e_i) |
|----------------------|----------------|---------|----------------------|--------------------|-----------------|---------|----------------------|
| σ_{Flim} | X ₁ | 310 | 62 | Y_β | X ₁₀ | 0.8 | 0.004 |
| Y_{ST} | X ₂ | 2.1 | 0.0693 | F_t | X ₁₁ | 34644 | 519.66 |
| Y_{NT} | X ₃ | 1 | 0.033 | K_A | X ₁₂ | 1 | 0.033 |
| $Y_{\delta_{relT2}}$ | X ₄ | 1.01 | 0.03333 | K_V | X ₁₃ | 1.484 | 0.1613 |
| Y_{RrelT2} | X ₅ | 1.065 | 0.035145 | $K_{F\beta}$ | X ₁₄ | 1.603 | 0.052899 |
| Y_{X2} | X ₆ | 1 | 0.033 | $K_{F\alpha}$ | X ₁₅ | 1.16 | 0.03828 |
| Y_{Fa2} | X ₇ | 2.14 | 0.07062 | $2b$ | X ₁₆ | 200 | 1 |
| Y_{Sa2} | X ₈ | 1.94 | 0.06402 | m_n | X ₁₇ | 4 | 0.02 |
| Y_ϵ | X ₉ | 0.715 | 0.003575 | | | | |

III.2 Indices de Fiabilité :

Les indices de fiabilité des trois contraintes (contact et flexion pignon / roue) généralement caractérisant la performance des transmissions par engrenages sont calculées par les différentes méthodes présentées dans le chapitre II de ce travail et qui sont :

III.2.1 Méthode HL : est la méthode de Hasofer et Lind pour laquelle nous avons développé un programme permettant le calcul de l'indice de fiabilité par cette méthode (voir Annexe A.1).

III.2.2 Méthode MCS : C'est la simulation par la méthode de Monte Carlo dont nous avons aussi développés un programme informatique (voir Annexe A.2) permettant le calcul de l'indice de fiabilité. Il est important de mentionner que le calcul de la fiabilité par cette méthode est le plus précis mais il nécessite la génération d'un nombre important d'échantillons pour chaque variable aléatoire (environ 1 million) et par conséquent elle est longue de solution et consomme beaucoup de temps informatique et d'espace.

III.2.3 Méthode Analytique de Taylor : Elle est basée sur l'approximation de la fiabilité par la série de Taylor (voir Annexe A.3). Elle est généralement adéquate pour combiner les variables aléatoires dans les variations des paramètres autour de leurs moyennes sont petites et dont l'état limite est linéaire.

III.2.4 Méthode Matlab fminc : Il s'agit de calculer directement l'indice de fiabilité par l'emploi de la sub-routine "fminc" qui est une composante de la boîte à outils d'optimisation de MATLAB version 7.1 [2]. Cet algorithme, qui met en application une routine de minimisation quasi-Newtonienne avec contraintes, exhibe en général des bons résultats dans la résolution des problèmes de technologie.

En insérant les valeurs de l'écart type et la moyenne de chaque variable X_i (présentées dans les tableaux présentées ci-dessus de l'exemple spécifique étudié par Y.M.Zhang et al [1]) dans la fonction d'état limite de chaque contrainte , les indices de fiabilité de contact et de flexion sont ensuite obtenus comme le montre le tableau III.5

Tableau III.5 : Résultats d'indice de fiabilité par les quatre méthodes :

| Méthode | Indice de Fiabilité de la Pression de contact | Indice de Fiabilité de la Flexion du pignon | Indice de Fiabilité de la Flexion de la roue |
|---------|---|---|--|
| HL | 3.2883 | 2.7967 | 2.8294 |
| MCS | 3.2888 | 2.7813 | 2.8237 |
| Taylor | 3.0027 | 2.6753 | 2.7052 |
| fminc | 3.2880 | 2.7967 | 2.8294 |

Tableau III.6 : Résultats des fiabilités en %

| Méthode | Fiabilité en % de la Pression de contact | Fiabilité en % de la Flexion du pignon | Fiabilité en % de la Flexion de la roue |
|---------|--|--|---|
| HL | 99,95 % | 99,742 % | 99,767 % |
| MC | 99,95 % | 99,729 % | 99,763 % |
| Taylor | 99,866 % | 99,627 % | 99,659 % |
| fminc | 99,95% | 99,742% | 99,767% |

Le programme que nous avons développé dans ce travail pour le calcul de l'indice de fiabilité par la méthode de simulation numérique de Monte Carlo produit 1 000 000 de valeurs aléatoires pour chaque paramètre (X_i). Comme s'est connu de la bibliographie [3], les valeurs de l'indice de fiabilité calculées par cette méthode sont considérées les plus exactes, et par conséquent les résultats des autres méthodes doivent être comparés avec cette dernière.

Il est clair donc du tableau.III.5 que la méthode HL et celle de Matlab (fminc) sont les plus précises des méthodes développées dans ce travail étant donné qu'elles estiment la fiabilité avec seulement une marge d'erreur de l'ordre de 0,01% pour la contrainte de contact et de 0,5% pour les contraintes de flexion. L'erreur de la méthode analytique de Taylor est d'environ de 10% ; cela est dû principalement au fait que la méthode de Taylor utilise un calcul direct, en utilisant un algorithme simple de calcul basé sur la dérivée première de la fonction d'état limite. Néanmoins, les méthodes développées dans ce travail montrent qu'elles estiment la fiabilité mieux que celle développée par Y.M.Zhang et al [1] du fait que cette dernière présente une erreur d'estimation de l'ordre de 11%.

Il est important aussi de mentionner, qu'en connaissant l'aspect de la distribution de la fonction d'état limite on peut, à partir de la valeur d'indice de fiabilité, déterminer la fiabilité correspondante en %. Si on suppose que les fonctions d'état limite de contact et de rupture suivent des distributions normales, les fiabilités correspondantes aux indices de fiabilités du tableau.III.5 sont comme montrées dans le tableau. III.6.

Dans le but de bien visionner les résultats obtenus ci-dessus, la figure. III.1 illustre les résultats obtenus du tableau III.5 de l'indice de fiabilité par les quatre méthodes sous forme d'histogramme. Par contre, les figures III.2, III.3 et III.4 représente séparément les histogrammes de l'indice de fiabilité pour chaque contrainte.

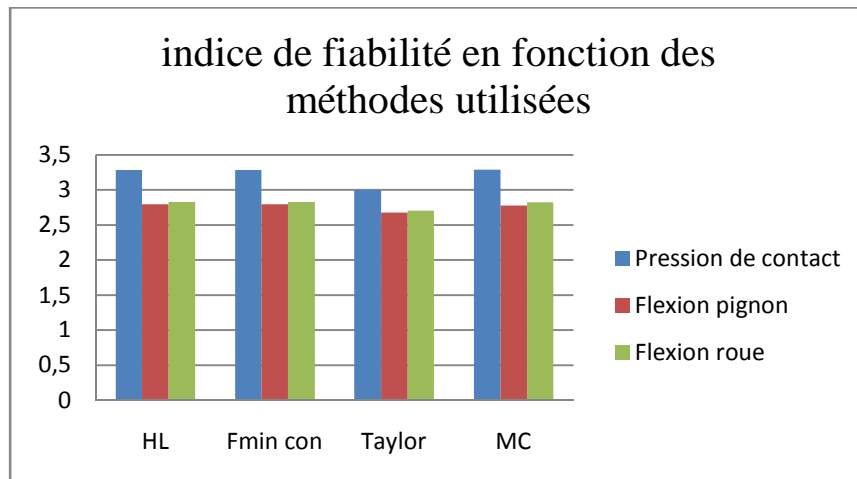


Figure III.1 : Indice de fiabilité 4 méthodes (contact/flexion)

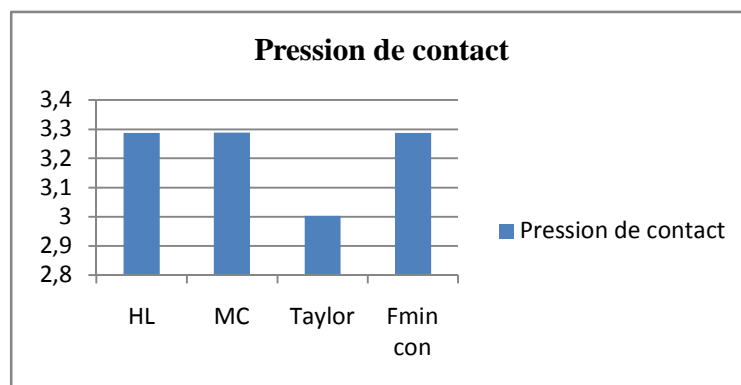


Figure III.2 : Indice de fiabilité des 4 méthodes (pression de contact)

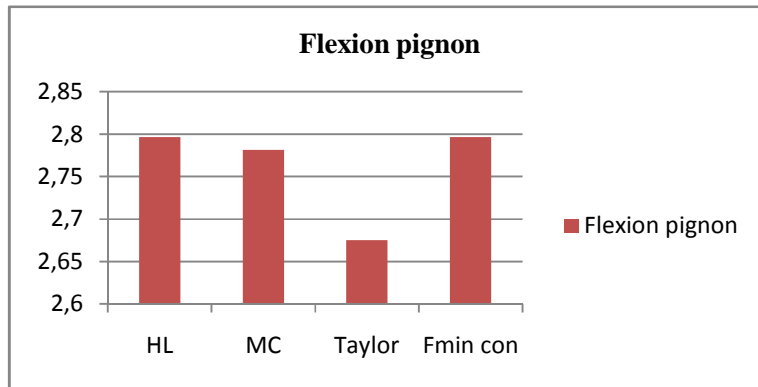


Figure III.3 : Indice de fiabilité des quatre méthodes (Flexion /pignon)

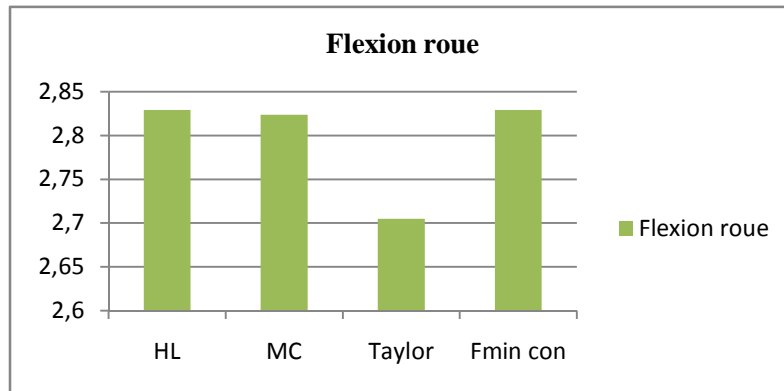


Figure III.4 : Indice de fiabilité des quatre méthodes (Flexion/Roue)

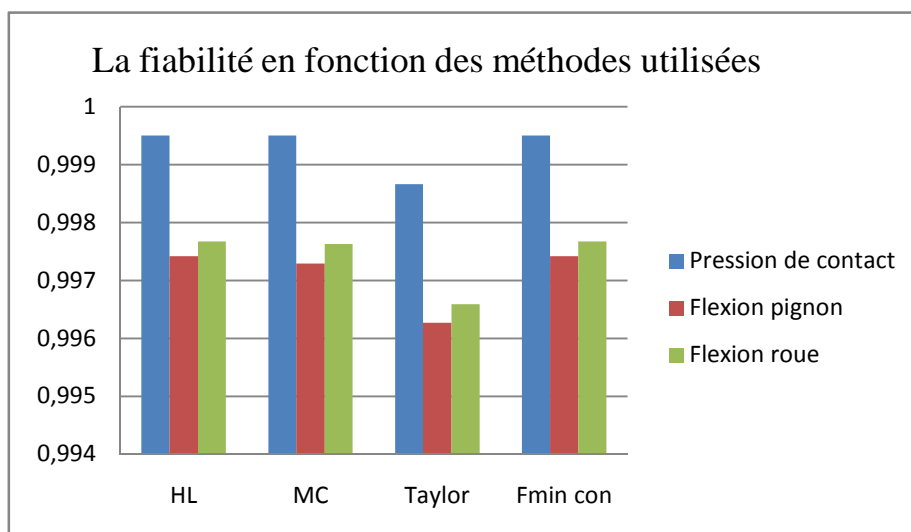


Figure III.5 : Fiabilité des quatre méthodes (contact/flexion)

Des figures ci-dessus, on remarque aussi que la fiabilité est élevée pour la pression de contact ($\sim 99.9\%$), relativement à la flexion de la roue et du pignon. Cela montre que s'il y'a une défaillance de cet engrenage, elle proviendra sûrement de la flexion des dents car elle présente la plus faible fiabilité ($\sim 99.6\%$). Néanmoins, on peut dire que cet engrenage est bien conçu étant donné que les valeurs de fiabilité obtenue des deux contraintes sont très proches.

III.3 Comportement de l'Indice de fiabilité en fonction de l'écart-type

III.3.1 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode d'HL en fonction de l'écart-type

En appliquant l'algorithme de calcul d'HL (Annexe A), on obtient les résultats de l'indice de fiabilité par la méthode d'HL pour les différentes contraintes appliquées sur l'engrenage en question (voir Annexe B) . La figure.III.6 illustre le comportement de l'indice β_i en variant la valeur de l'écart type des paramètres X_i . Par exemple :

Pour le paramètre X_i , l'écart type σ_{X_i} est varié de $0.1\sigma_{X_i}$ à $6.0\sigma_{X_i}$ ou σ_{X_i} est la valeur initiale de l'écart type du paramètre X_i donné dans les tableaux.III.2 et III.3.

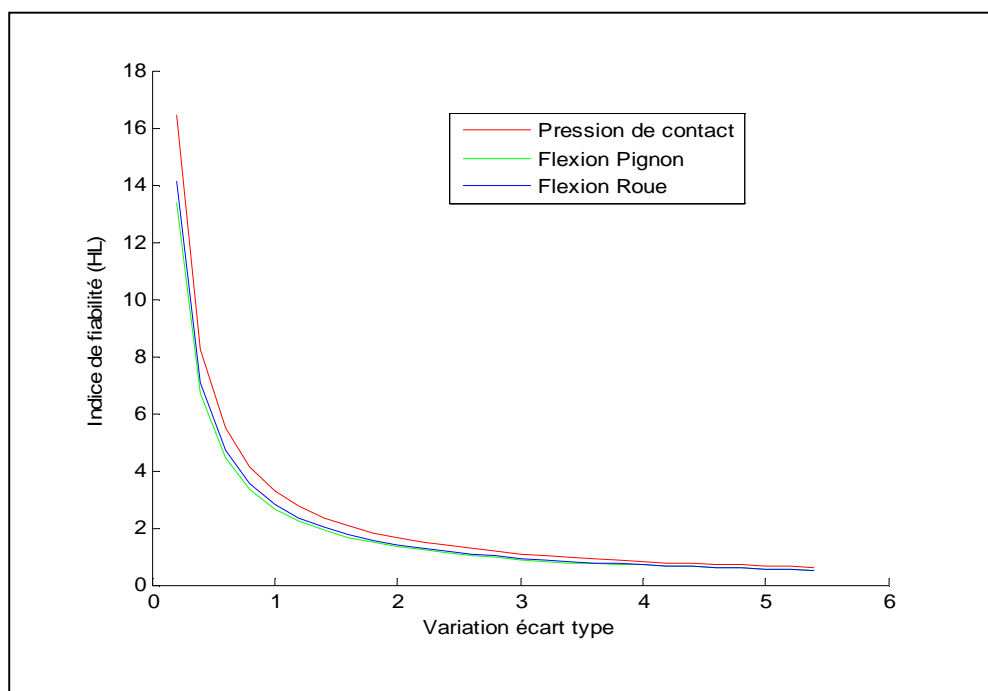


Figure III.6: Variation de l'indice de fiabilité de la méthode HL

Il est clair de la figure ci-dessus que la valeur de la fiabilité de l'engrenage est très influencée (en suivant une loi exponentielle) par les distributions des paramètres X_i . Elle diminue lorsque les distributions des valeurs des paramètres X_i sont plus éparpillées par rapport à leurs moyennes. Néanmoins, en construction mécanique [4], l'intervalle de variation de chaque paramètre X_i (variable aléatoire) est typiquement de l'ordre de $\pm 3 \sigma_{xi}$ correspondant à un intervalle de tolérance égale à $6 \sigma_{xi}$. Dans les cas particuliers où une sûreté élevée des mécanismes ou machines (avion par exemple) est exigée, les intervalles de tolérances des paramètres X_i ne doivent pas excéder $\pm 1,0 \sigma_{xi}$ et par conséquent un contrôle rigoureux est exigé lors de la fabrication et la conception des engrenages en question.

On remarque aussi que la courbe de pression de contact est un peu supérieure relativement à la flexion de la roue et pignon en indiquant une fiabilité plus grande et par conséquent elle confirme les résultats du tableau.III.5.

III.3.2 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode MCS en fonction de l'écart-type

En utilisant la simulation de Monte Carlo, on obtient les résultats de l'indice de fiabilité présenté dans l'Annexe C. La figure.III.6 illustre la variation de β_H et $\beta_{fl,2}$ en fonction des variations des écarts types σ_{xi} . Nous pouvons constater qu'une légère croissance de l'écart type des variables aléatoires peut conduire à des résultats importants. En effet, Lorsque l'écart type est compris entre 1.2σ et 1.6σ , l'indice de fiabilité est très grand correspondant ainsi à une probabilité meilleure. Par contre, si l'écart type dépasse $\pm 4,0 \sigma_{xi}$ l'indice de fiabilité tombe vers 0.5 indiquant une fiabilité moins de 70% .

En comparant cette courbe avec celle obtenue par la méthode HL (voir figure.III.6, on peut dire que les résultats des deux méthodes sont en bon accord en indiquant la bonne précision de la méthode HL comme s'est confirmé précédemment.

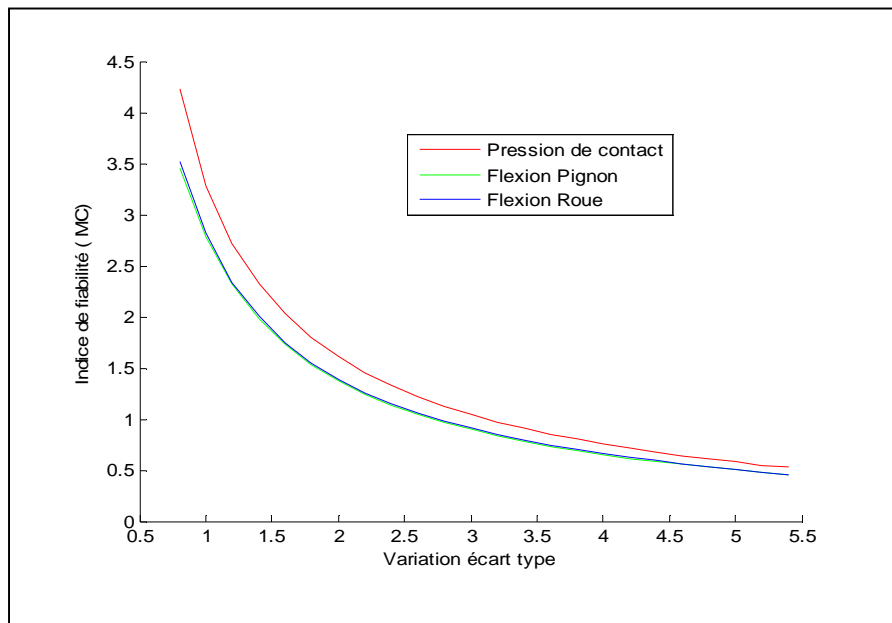


Figure III.7 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode MCS

III.3.3 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode analytique en fonction de l'écart-type (Taylor)

Les résultats de l'indice de fiabilité sont présentés dans l'Annexe D.

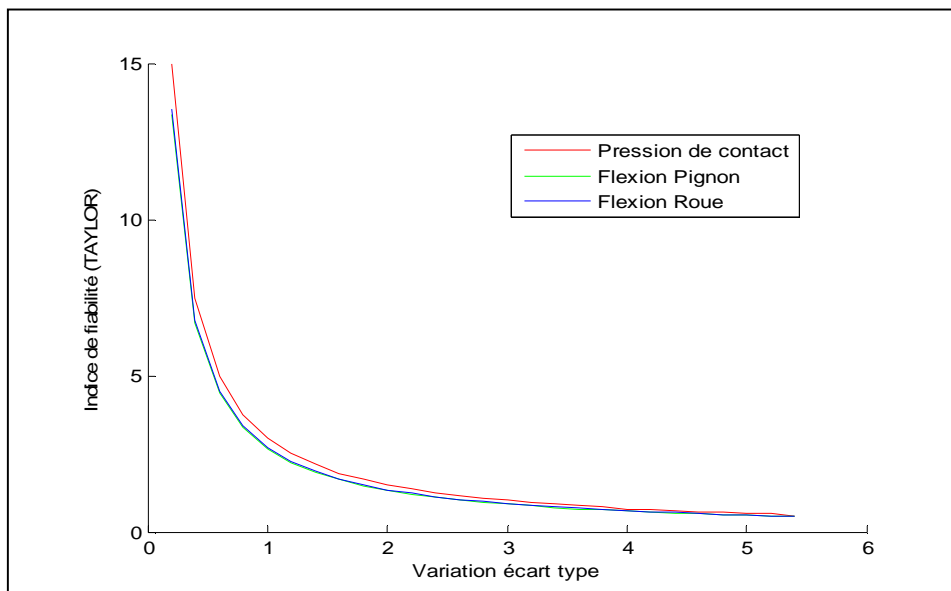


Figure III.8: Variation de l'indice de fiabilité de la méthode analytique en fonction de l'écart-type

L'allure générale de la courbe de variation de β_i de cette méthode analytique est identique aux celles des deux précédentes méthodes mais il est évident que cette dernière manque de précision lorsque les dispersions des paramètres X_i sont grandes par rapport à leurs valeurs nominales. Cela peut être expliqué par le fait que la méthode analytique utilise seulement le premier ordre de la série de Taylor.

III.3.4 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode Matlab (fminc)

Les résultats de l'indice de fiabilité sont présentés dans l'Annexe E.

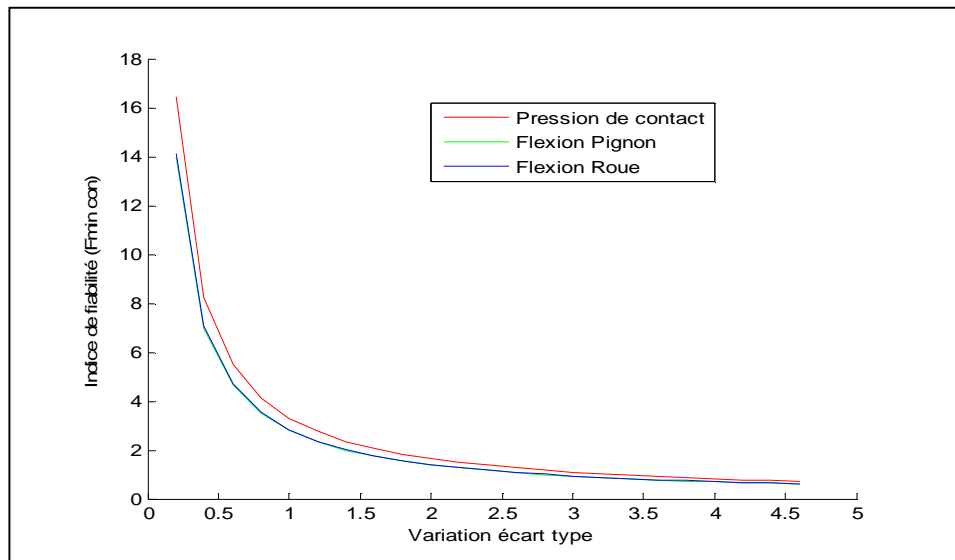


Figure III.9 : Variation de l'indice de fiabilité de la méthode Matlab en fonction de l'écart-type

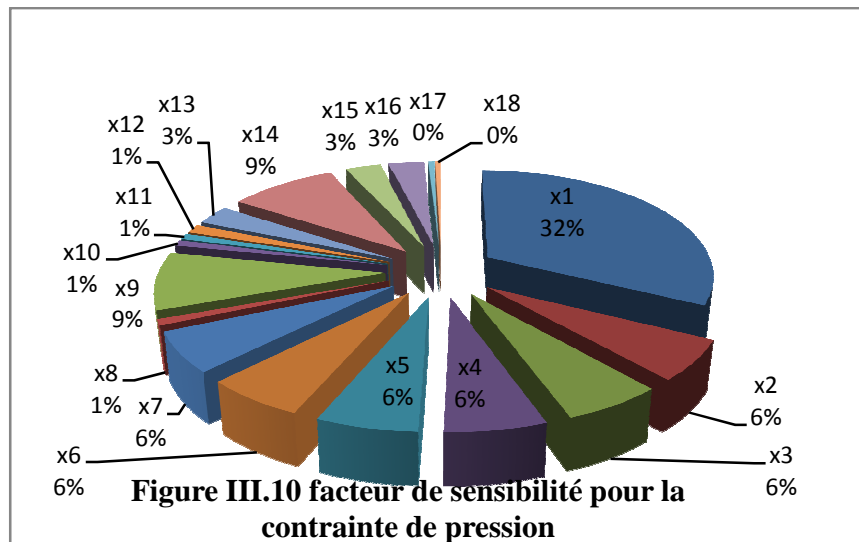
Comme cité précédemment, la méthode proposée par Matlab via la sub-routine fminc donne des résultats très proches de ceux de la méthode utilisant l'algorithme développé par Hasofer et Lind (méthode HL).

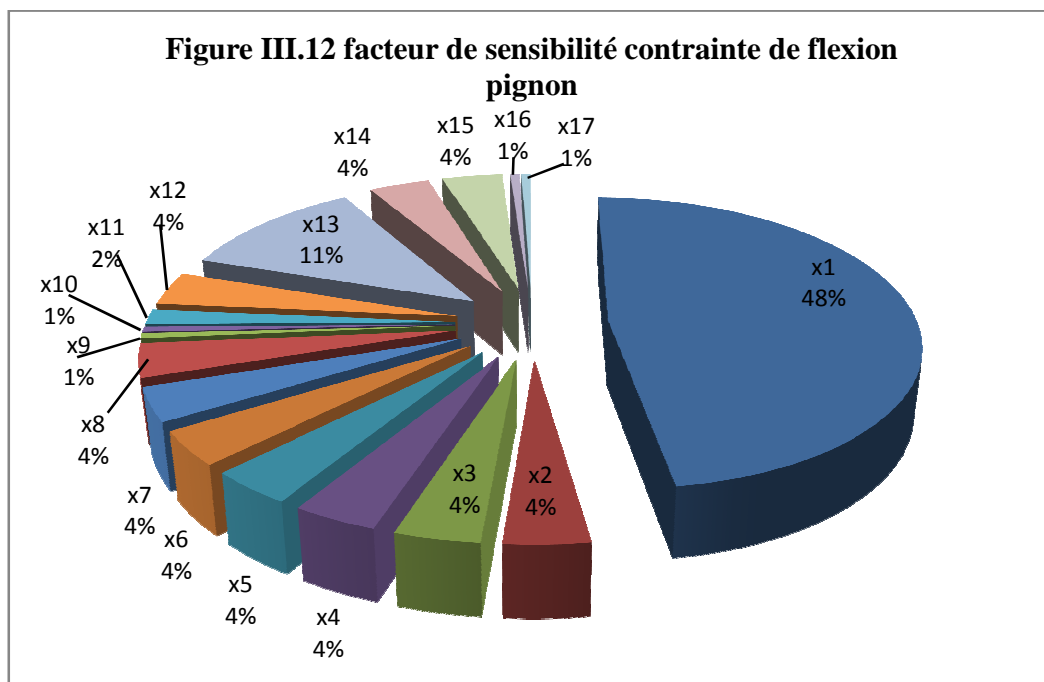
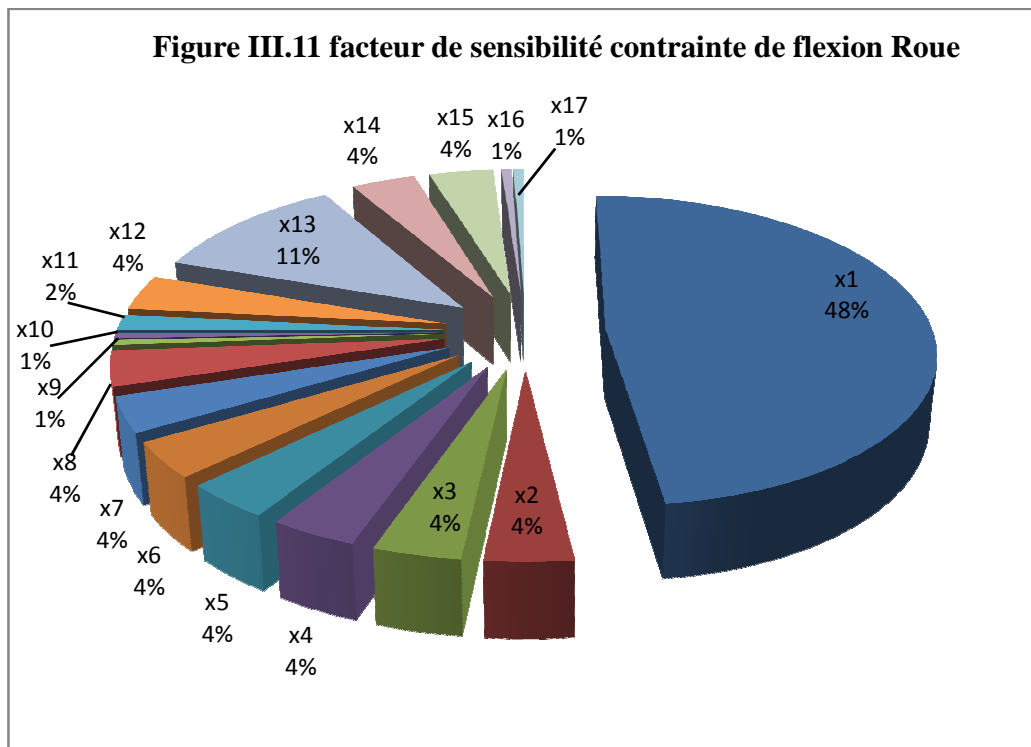
III.4 Facteurs de sensibilité et les coordonnées du MPP :

Les facteurs de sensibilité montrent l'importance relative de chaque variable faite au hasard à la probabilité de défaillance. La sensibilité de la probabilité de défaillance ou de l'indice de fiabilité sur de petits changements des variables.

La signification physique des facteurs de sensibilité implique la cotisation relative de chaque variable faite au hasard à la probabilité de défaillance. Par exemple, plus la valeur du facteur est grande, plus la cotisation à la probabilité de défaillance est haute.

Dans le cas de ce travail, nous avons déterminé les facteurs de sensibilisé influençant les fiabilité des trois types de contraintes existant dans l'engrenage en question (figure.III.10, III.11 et III.12).. Les résultats numériques obtenus pour le facteur de sensibilité et les coordonnées du MPP par la méthode d'HL utilisant l'algorithme de calcul (Annexe F), sont illustrés dans l'Annexe I.





De ces figures, on voit clairement les distributions des facteurs de sensibilité obtenue par la méthode de Hasofer et Lind. Elles montrent les variables les plus influençant sur la fonction de performance des contraintes de contact, de flexion pignon et flexion roue.

Le signe positif des facteurs de sensibilité montre que la fonction de performance diminue avec l'augmentation des variables.

Le signe négatif des facteurs de sensibilité signifie que la fonction de performance augmente avec l'augmentation des variables.

Il est évident des figures ci-dessus que les paramètres les plus influents sur la fiabilité de l'engrenage traité dans ce travail sont les contraintes admissibles des matériaux de l'engrenage (32% pour la contrainte de contact et 48% pour la contrainte de flexion). Si on désire par exemple améliorer encore la fiabilité de cet engrenage, on devra particulièrement soit augmenter les contraintes par le choix des matériaux plus résistants soit améliorer la qualité du matériau par un contrôle rigoureux durant son élaboration (Fig.III.13).

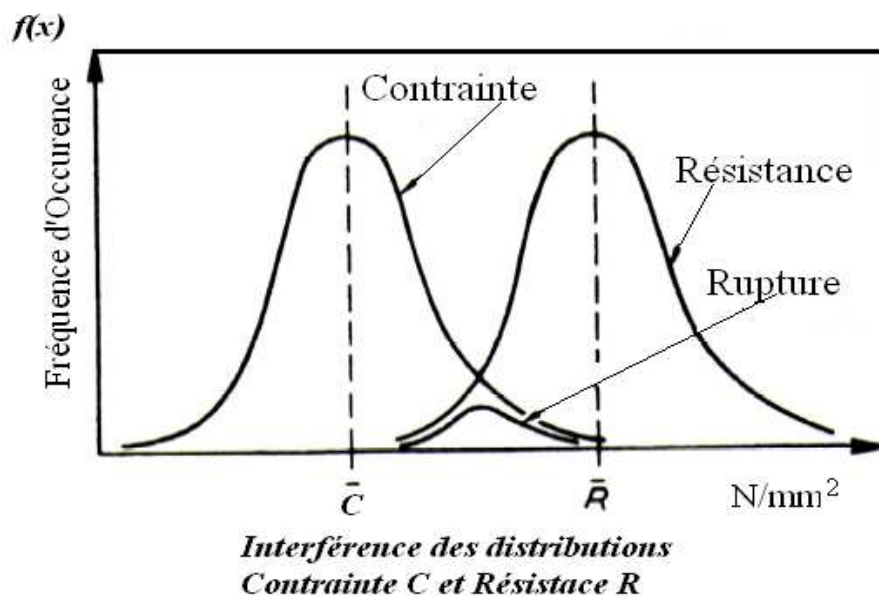


Figure.III.13 : Présentation d'un modèle d'interférence des distributions contrainte et résistance

III.5 Conclusion :

L'objectif principal de ce chapitre est d'évaluer et de valider des méthodes d'estimation de la fiabilité du système à engrenages étudié dans ce travail ainsi par comparaison avec les méthodes déjà présentées dans les sources bibliographiques. Cependant, les conclusions générales suivantes ont été obtenues de ce chapitre :

L'application de la méthode classique de Monte Carlo (MCS) pour le calcul de la fiabilité donne des résultats très satisfaisants mais elle est longue de solution et consomme beaucoup de temps informatique et d'espace.

- L'application de la méthode analytique (Taylor) est simple et très pratique mais elle est seulement précise pour les fonctions d'états limites linéaires dont les paramètres sont indépendants et dans les cas où les dispersions des paramètres sont petites relativement à leurs moyennes.
- L'application de la méthode HL ou de celle développée par Matlab via la sub-routine fminc donne des résultats très proches de ceux de la méthode MCS.
- L'application de la méthode HL ou de celle développée par Matlab via la sub-routine fminc donne des résultats meilleurs que ceux de la méthode proposée par Y.M.Zhang et al [1]
- La détermination des influences des facteurs de sensibilités est très bénéfique durant l'étape de conception car elle offre les renseignements nécessaires pour l'amélioration de la fiabilité des systèmes.

Bibliographie

- [1] Y.M Zhang., et al., “Practical Reliability-Based Design of Gear Pairs”, J.Mechanism and Machine Theory, Vol.38, pp.1363-1370, Elsevier, 2003.
- [2] Practical reliability-based design of gear pairs Y.M. Zhang a,*, Qiaoling Liua, Bangchun Wenb.
- [3] R.E.Melshers., “Structural Reliability Analysis and Prediction”, New York. John Wiley and Sons, 1999.
- [4] E.M.Mansoor., The Application of Probability to Tolerances used in Engineering Design”, Proc. Inst.Mech.Engrs, 178 Part I, pp29-39,Discussion pp 39-51, 1964.

| | |
|---|-----------|
| Figure. I.1 : Phénomène de piqures et écaillage | 7 |
| Figure I.2 : La rupture des dents | 8 |
| Figure I.3 Notation pour la Contrainte de Contact entre Deux Cylindres | 9 |
| Figure I.4 Notation pour la contrainte de Flexion | 11 |
| Figure. I.5 : Limites d'Endurances de contact..... | 15 |
| Figure. I.6: Limites d'Endurances de Flexion | 16 |
| Figure I.7. Facteur de Fiabilité KR | 18 |
| Figure. I.8 : Mauvaise Distribution de la Charge dans les Engrenages Réels | 22 |
| Figure. I.9: Facteur de distribution de charge Longitudinale | 23 |
| Figure II.1 : Méthodes de fiabilité..... | 32 |
| Figure II.2 représentation de Cornel..... | 39 |
| Figure II.3Densité de probabilité de la fonction d'état-limite..... | 41 |
| Figure II.4 Illustration géométrique d'index Sûreté | 42 |
| Figure II.5Tracer de la surface de défaillance d'espace du X au l'espace U | 43 |
| Figure II.6 Facteurs de sensibilité | 44 |
| Figure II.7 Approximation premier ordre de la surface de réponse dans l'espace de Y..... | 51 |
| Figure II.8 approximation du seconde ordre de la surface de réponse dans l'espace Y | 52 |
| Figure III.1 indice de fiabilité en fonction des quatre méthodes utilisées... .. | 76 |
| Figure III.2 indice de fiabilité en fonction des quatre méthodes (pression de contact)... .. | 76 |
| Figure III.3 indice de fiabilité en fonction des quatre méthodes (Flexion pignon)..... | 77 |
| Figure III.4 indice de fiabilité en fonction des quatre méthodes (Flexion Roue)..... | 77 |
| Figure III.5 La fiabilité en fonction des quatre méthodes..... | 77 |
| Figure III.6 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode HL | 78 |
| Figure III.7 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode MCS | 80 |

| | |
|---|-----------|
| Figure III.8 : Variation de l'indice de fiabilité de la méthode analytique en fonction de l'écart-type | 80 |
| Figure III.9 : Variation de l'indice de fiabilité de la méthode Matlab en fonction de l'écart-type. | 81 |
| Figure III.10 facteur de sensibilité contrainte de Pression..... | 82 |
| Figure III.11 facteur de sensibilité contrainte de flexion Pignon..... | 83 |
| Figure III.12 facteur de sensibilité contrainte de flexion Roue..... | 83 |
| Figure.III.13 : Présentation d'un modèle d'interférence des distributions contrainte et résistance..... | 84 |

| | |
|----------------------------|---|
| σ_F | Contrainte de flexion du pied de la dent pour un engrenage réel |
| σ_{Flim} | Endurance limite pour la flexion au niveau du pied de la dent |
| σ_{FP} | Contrainte de pied de dent (flexion) admissible |
| σ_H | Contrainte de contact (pression de Hertz) pour engrenage réel |
| σ_{Hlim} | Endurance limite pour la contrainte de contact |
| σ_{HP} | Contrainte de contact admissible |
| F_r | Force radiale au niveau du cercle primitif |
| F | effort de contact. |
| b | largeur de contact. |
| m_n | Module normale |
| L | longueur de contact (longueur de dent). |
| $\rho_1 \rho_2$ | diamètres des deux cylindres respectivement. |
| $E_1 E_2$ | modules d'élasticité longitudinale des matériaux. |
| P_{max} | La pression de contact |
| u | Rapport de transmission |
| α_n | Angle de pression normale au cylindre primitif |
| β | Angle d'hélice au cercle primitif ou indice de fiabilité |
| S_F | Facteur de sécurité pour la contrainte de flexion |
| S_H | Facteur de sécurité pour la contrainte de contact |
| β_H, β_F | Indice de fiabilité de contact, rupture |
| K_A | Facteur d'application |
| K_V | Facteur Dynamique |
| K_R | Facteur de fiabilité |
| $K_{F\alpha}, K_{H\alpha}$ | Facteurs de distribution transversale |
| $K_{F\beta}, K_{H\beta}$ | Facteurs de distribution longitudinale |
| Y_F | Facteur de forme |
| Y_{NT} | Facteur de durée pour la résistance au pied de la dent |

| | |
|-------------------------|--|
| Y_{Relt} | Facteur de rugosité relatif |
| Y_X | Facteur de dimensions (similaire à Z_X) |
| Y_{ST} | Facteur de concentration de contrainte de l'engrenage d'essai |
| $Y_{\delta\text{relt}}$ | Facteur de sensibilité relative à l'entaille |
| Z_{β} | Facteur de l'inclinaison de l'hélice |
| Z_E | Facteur d'élasticité |
| Z_H | Facteur géométrique au point primitif |
| Z_i | Variable standard |
| Z_L | Facteur lubrifiant |
| Z_N | Facteur de durée |
| Z_R | Facteur de rugosité pour la contrainte de contact |
| Z_X | Facteur de dimensions |
| Z_V | Facteur de vitesse |
| Z_W | Facteur de rapport de dureté entre pignon et roue |
| $Z_{1,2}$ | Nombre de dents du pignon (roue) |
| Z_{ϵ} | Facteur de conduite |
| C' | Rigidité de denture simple par unité de largeur (N/mm/ μm) |
| C_{γ} | Rigidité de l'engrènement par unité de largeur (N/mm/ μm) |
| $G(x)$ | Fonction d'état limite |
| R | Résistance |
| S | Sollicitation |
| i, j | Notations d'indexation |
| $\sigma_{(X_i)}$ | Ecart type de la variable X_i |
| $\mu_{(X_i)}$ | Ecart type de la variable X_i |
| P_F | Probabilité de défaillance |
| $\Phi(x_i)$ | Fonction de distribution normale cumulative standard |
| $\Phi^{-1}(x_i)$ | Fonction inverse de distribution normale cumulative standard |

α_i facteur de sensibilité

| | |
|--|-----------|
| Tableau. I.1 : Valeurs Recommandées pour les Facteurs de Sécurité..... | 17 |
| Tableau. I.2 : Valeurs Recommandées pour KA..... | 19 |
| Tableau .II.1 : Incertitudes d'estimations des Facteurs des Standards ISO et AGMA . | 61 |
| Tableau III.1 :Données numériques de l'engrenage étudié..... | 70 |
| Tableau III.2 : Données numériques des variables aléatoires de la pression de contact.. | 71 |
| Tableau III.3 : Données numériques de la contrainte de flexion du pignon..... | 72 |
| Tableau III.4 : Données numériques de la contrainte de flexion de la roue..... | 73 |
| Tableau III.5 : Résultats d'indice de fiabilité par les quatre méthodes..... | 74 |
| Tableau III.6 : Résultats des fiabilités en %..... | 75 |

Conclusion générale

Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail était de développer des méthodes analytiques et numériques pour l'analyse de la fiabilité des systèmes et par conséquent de donner le support de calcul nécessaire pour la conception fiable des structures. Dans ce contexte, l'analyse de fiabilité des systèmes mécaniques prévoit de trouver le meilleur compromis entre coût et sécurité pour l'élaboration des projets fiables et économiques, en considérant la variabilité statistique des paramètres de conception

L'analyse de fiabilité abordée dans cette thèse est invariable par rapport au temps, c'est-à-dire, les variables prises en compte dans l'analyse sont aléatoires mais leur variabilité ne dépend pas du temps. Il est aussi important de souligner que le choix entre les analyses dépendantes et indépendantes du temps n'est pas forcément lié à la nature du problème physique traité. Ainsi, on peut effectuer des analyses de fiabilité dépendante du temps basées sur la réponse statique du système ou des analyses indépendantes du temps basées sur la réponse dynamique.

L'application des méthodes de calcul de fiabilité de ce travail ont été faites sur une transmission mécanique par engrenages tirée des sources bibliographiques dont les données statistiques sont bien définies. Généralement, les paramètres (variables aléatoires) peuvent suivre des distributions normales, log normales, Weibull, ou autres. Pour notre cas les variables aléatoires avaient des distributions normales. Les résultats trouvés montrent que les méthodes développées dans ce travail estiment la fiabilité mieux que celle proposée dans la bibliographie.

Au vu de ces résultats, il serait facile de classer les méthodes utilisées par ordre de priorité pour leur assigner une maintenance adaptée à la défaillance. La maintenance doit être préventive pour améliorer la sécurité des transmissions par engrenages.

Pour effectuer l'analyse de fiabilité, la méthode de Monte Carlo (MCS) évalue la fonction de performance en utilisant les techniques de génération de variables aléatoires. Ces techniques permettent de créer des échantillons des variables aléatoires selon une fonction densité de probabilité. Ainsi, la probabilité de défaillance est obtenue par rapport au nombre d'évaluations de la fonction de performance et le nombre de vérifications de la défaillance

dans cette fonction. De ce fait, la MCS utilise une évaluation déterministe des critères de défaillance dans les échantillons des variables aléatoires des structures.

La Simulation de Monte Carlo est considérée comme l'une des techniques les plus utilisées pour l'évaluation de la sécurité et du risque. Elle est reconnue comme une méthode d'ordre zéro puisqu'elle ne nécessite pas de calcul de dérivées. Néanmoins, c'est le moyen le plus coûteux mais certainement le plus fiable pour l'évaluation de la probabilité de défaillance. La mise en œuvre de la MCS est facile par rapport aux autres méthodes de fiabilité des structures. Par contre le coût de calcul de la MCS est haut lorsque l'évaluation de la fonction de performance dépend de modèles numériques puisque cette évaluation est faite pour chaque échantillon des variables aléatoires. La plupart des cas, ces modèles sont basés sur une analyse par éléments finis.

Comme toutes les méthodes numériques, la SMC a des avantages et désavantages. Parmi l'un de leurs principaux avantages, la SMC permet de travailler avec des variables explicites et implicites dans la fonction de performance. Par rapport à sa précision, la SMC est considérée comme une méthode de référence par le plus part des chercheurs en fiabilité structurale

L'adoption d'une approximation peut éviter ces inconvénients. Dans ce contexte la méthodes HL , Matlab (fminc) et Série de Taylor évitent à surmonter les inconvénients de la SMC.

Les méthodes HL et Matlab (fminc) sont basée sur le concept du point de défaillance le plus probable et sur la linéarisation de la fonction de performance au point de défaillance le plus probable.

L'approximation par la série de Taylor peut être considérée comme méthode adéquate pour combiner les variables aléatoires. C'est une procédure analytique rigoureuse pour calculer les moyennes et les écarts types des fonctions générales de n variables aléatoires. Un inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle est seulement valide pour les applications ou la fonction de performance est linéaire et dont les dispersions des paramètres sont petites relativement à leurs moyennes.

Le fait que le calcul itératif de l'indice de fiabilité à travers HL ou Matlab (fminc) requière le choix d'une estimation initiale du vecteur des variables de conception, ainsi que le calcul des dérivées partielles des fonctions d'état limite par rapport aux variables de

conception constituent les principaux inconvénients de ces méthodes. En effet, dans la pratique une solution initiale convenable des variables de conception n'est pas toujours facile à estimer, d'autant plus que ce choix peut avoir un effet sur la convergence du processus de calcul et l'obtention des solutions finales correspondant à des minima locaux ou au minimum global. En plus, le besoin de calculer les dérivées partielles (gradients) augmente le coût de calcul et peut aussi engendrer des erreurs d'approximation.

La détermination des influences des facteurs de sensibilités est très bénéfique durant l'étape de conception des structures car elle offre les renseignements nécessaires pour l'amélioration de la fiabilité des systèmes.

Enfin, en visant à surmonter les difficultés des méthodes mentionnées ci-dessus et en prenant en considération tous les résultats obtenus dans ce manuel, les remarques suivantes sont jugées utiles pour des futurs travaux de recherche :

- 1/ Etude détaillée sur les facteurs variables et plus particulièrement ceux affectant les limites d'endurance des matériaux. Ceci peut améliorer la prédiction des contraintes admissibles.
- 2/ Application de ces méthodes sur des systèmes dont les paramètres présentant des distributions autres que normales.
- 3/ Etude plus détaillée sur la sensibilité de paramètres influençant la performance des systèmes mécaniques.

| | |
|--|-----------|
| Introduction générale : | 1 |
| Chapitre I : Aperçu sur Les Engrenages | |
| I.1.Introduction : | 5 |
| I.2. Les engrenages : | 5 |
| I.2.1 Type des engrenages : | 6 |
| I.2.2. Conception des engrenages : | 6 |
| I.2.3. Mécanismes de défaillances des engrenages : | 7 |
| I.3. Contraintes dans les engrenages parfaits (<i>contact</i> σ_{Ho} , <i>flexion</i> σ_{Fo}) : | 8 |
| I.3.1. Contraintes de Contact σ_{Ho}: | 8 |
| I.3.2. Contraintes de Flexion : | 11 |
| I.4 Contraintes dans les Engrenages réels : | 12 |
| I.4.1 Resistance à la pression superficielle (contrainte de contact) : | 12 |
| I.4.2 Contrainte de flexion : | 13 |
| I.5 Contraintes Admissibles : | 14 |
| I.5.1 Contrainte Admissible de Contact σ_{HP}: | 14 |
| I.5.2 Contrainte Admissible de Flexion σ_{FP}: | 15 |
| I.5.3 Facteurs de Sécurité S_H et S_F : | 17 |
| I.6 Etude Détaillée des Facteurs survenant lors du Service de l'Engrenage : | 19 |
| I.6.1 Facteur d'Application K_A : | 19 |
| I.6.2 Facteur dynamique K_V: | 20 |
| I.6.3 Facteurs de Distribution de Charge Longitudinale $K_{H\beta}$, $K_{F\beta}$: | 21 |
| 1.6.3.1 Facteur de Distribution de Charge Longitudinale $K_{H\beta}$: | 21 |
| 1.6.3.2. Facteur de Distribution de Charge Longitudinale $K_{F\beta}$: | 26 |
| I.6.4.Facteurs de Distribution de Charge Transversale $K_{H\alpha}$, $K_{F\alpha}$: | 26 |
| I.7.Conclusion : | 27 |

| | |
|--|-----------|
| Bibliographie :..... | 28 |
| Chapitre II : Méthodes Structurale de Fiabilité | |
| II .1.Introduction :..... | 31 |
| II.2. Définition :..... | 31 |
| II.3. Principaux types de fiabilité :..... | 32 |
| II.3.1 Fiabilité prévisionnelle :..... | 32 |
| II.3.2 Fiabilité estimée :..... | 32 |
| II.3.3 Fiabilité opérationnelle :..... | 32 |
| II.4. Défaillance :..... | 32 |
| II .5. Fiabilité à la conception :..... | 33 |
| II.6. Intérêt de l'analyse fiabiliste :..... | 34 |
| II.7. Analyse de fiabilité :..... | 34 |
| II .8. L'approche contrainte/résistance :..... | 35 |
| II.9. Méthodes structurale de fiabilité :..... | 36 |
| II.9.1. Méthode de premier ordre de fiabilité (FORM) :..... | 36 |
| II.9.2. Méthode de premier ordre deuxième moment (FOSM) :..... | 37 |
| II.9.3. Méthode par indice de fiabilité :..... | 39 |
| II.9.3.1. Indice de Rjanifzyne – Cornell :..... | 39 |
| II.9.3.2. Critique de l'indice β_c :..... | 40 |
| II.9.3.3. Indice de Sûreté d'Hasofer et Lind (HL) :..... | 40 |
| II.9.3.4. Facteurs de sensibilité :..... | 43 |
| II.9.4. FORM avec des approximations adaptatives :..... | 45 |
| II.9.5. Méthode de second ordre de fiabilité (SORM) :..... | 48 |
| II.9.6. Approximation premier et second ordre de la fonction d'état-limite :..... | 49 |
| II.10. Méthodes iteratives :..... | 53 |
| II.10.1. Méthode d'itération de Hasofer et de Lind :..... | 53 |
| II.10.2. Méthode Monte Carlo (MCS) :..... | 56 |
| II.10.2.1. Principe de la méthode Monte Carlo :..... | 57 |
| II.10.2.2. Estimateurs statiques :..... | 57 |
| II.10.2.3. Loi de l'estimateur :..... | 58 |
| II.10.2.4. Estimateur de l'indice de fiabilité :..... | 59 |

| | |
|--|-----------|
| II.11. Méthode Analytique : | 60 |
| II.11.1.Méthode Taylor : | 60 |
| II.12. Méthode de quasi-Newton (Matlab 7.0 (fminc)) : | 62 |
| Conclusion : | 63 |
| Bibliographie : | 66 |
| Chapitre III : Application des méthodes de fiabilité sur une transmission par engrenages | |
| III.1 Calcul de l'indice de fiabilité par les différentes méthodes développées dans ce travail : | 71 |
| III.1.1 Présentation et notation des variables aléatoires : | 71 |
| III.2 Indices de Fiabilité : | 73 |
| III.2.1 Méthode HL : | 73 |
| III.2.2 Méthode MCS : | 73 |
| III.2.3 Méthode Analytique de Taylor : | 74 |
| III.2.4 Méthode Matlab fminc : | 74 |
| III.3 Comportement de l'Indice de fiabilité en fonction de l'écart-type : | 78 |
| III.3.1 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode d'HL en fonction de l'écart-type : | 78 |
| III.3.2 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode MCS en fonction de l'écart-type : | 79 |
| III.3.3 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode analytique en fonction de l'écart-type : | 80 |
| III.3.4 Variation de l'indice de fiabilité de la méthode Matlab (fminc) : | 81 |
| III.4 Facteurs de sensibilité et les coordonnées du MPP : | 82 |
| III.5. Conclusion : | 85 |
| Bibliographie : | 86 |
| Conclusion générale : | 87 |
| Liste des Figures..... | 91 |
| Liste des tableaux..... | 93 |

| | |
|--|------------|
| Annexe A.1 : Algorithme de calcul de la méthode Hasofer et Lind (HL)..... | 94 |
| Annexe A.2 : Algorithme de calcul de la méthode MCS..... | 95 |
| Annexe A.3 : Algorithme de calcul de la méthode Taylor..... | 96 |
| Annexe B : Indice de fiabilité (HL) $\beta=f(\sigma)$..... | 97 |
| Annexe C : Indice de fiabilité (MCS) $\beta=f(\sigma)$..... | 98 |
| Annexe D : Indice de fiabilité $\beta=f(\sigma)$ par la méthode analytique (Taylor)..... | 99 |
| Annexe E : Indice de fiabilité $\beta=f(\sigma)$ par la méthode de Matlab (fminc)..... | 100 |
| Annexe F : Facteurs de sensibilité et les coordonnées du MMP par la méthode HL... | 101 |
| Liste des Symboles... | 102 |