

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET

DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF 1

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série:

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité:

PHYSIQUE THEORIQUE

Par

Betrouche Malika

Thème

**Mécanique quantique relativiste en présence d'une longueur
minimale**

Soutenue le: .../02/2014

Devant le jury :

Président	:	A. Boucena	Prof. Université Ferhat Abbas Setif
Rapporteur	:	M. Maamache	Prof. Université Ferhat Abbas Setif
Examineurs	:	N. Mebarki	Prof. Université Constantine 1
		L. Chetouani	Prof. Université Constantine 1
		J. R. Choi	Dr. Daegu Health College Korea
		A. Benslama	Prof. Université Constantine 1

Remerciements

Toute ma gratitude et ma connaissance vont à Mr Maamache Mustapha, Professeur à l'université de Setif, qui m'a donné la chance de préparer cette thèse sous sa direction. C'est grâce à ses encouragements, sa patience et ses conseils que j'ai pu réaliser ce travail.

Je remercie Mr. Kheireddine Nouicer, Professeur à l'université de Gijel, de m'avoir proposé ce thème ainsi que pour l'aide et les longues discussions que nous avons eu.

Je tiens à remercier également le Docteur Jeong Ryeol Choi, Department of Radiologic Technology, Daegu Health College, Republic of Korea, pour sa collaboration efficace afin de finaliser cette thèse.

Je remercie Mr Boucena Ahmed, Professeur à l'université de Setif pour l'honneur qui me fait en présidant ce jury.

Mes vifs remerciements vont à :

Mr Mebarki Nouredine, Professeur à l'université de Constantine.

Mr Chetouani Lyazid, Professeur à l'université de Constantine.

Mr Benslama Achour, Professeur à l'université de Constantine et à Mr Jeong Ryeol Choi pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et de m'avoir honoré en acceptant de le juger.

Je remercie également tous ceux qui m'ont encouragé !!

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes chers parents,

à mes deux chères filles,

à tous mes frères et sœurs

et à tous ceux qui m'ont encouragé sincèrement !!!

Table des matières

1 Introduction générale.....	1
2 Principe de l'Incertitude d'Heisenberg Généralisé	6
2.1 Le choix de la représentation en présence de distance minimale	6
2.2 Relation d'incertitude minimale	7
2.3 Exemples de nouvelle limite pour des quantités relativistes	9
3 Relations de commutation généralisées	12
3.1 Algèbre déformée non-covariante de Kempf à 3 dimensions	12
3.2 Algèbre déformée covariante de Lorentz à (3+1) dimensions	14
3.2.1 Les transformations déformées de Poincaré	16
3.2.1.1 Les transformations infinitésimales de Lorentz	17
3.2.1.2 Les translations infinitésimales	18
4 L'oscillateur de Dirac à 3 dimensions en présence de distance minimale	20
4.1 L'oscillateur de Dirac à 3 dimensions en mécanique quantique ordinaire	21
4.2 Solution exacte de l'oscillateur de Dirac à 3 dimensions par l'algèbre déformée de Kempf	23
4.2.1 Les fonctions propres	25
4.2.2 Le spectre d'énergie.....	35
4.2.2.1 Le cas sans déformaion	36
4.2.2.2 La limite non-relativiste	37
4.3 Conclusion.....	39
5 L'oscillateur de Dirac à (3+1) dimensions en présence de distance minimale	41
5.1 Solution exacte de l'oscillateur de Dirac à (3+1) dimensions par l'algèbre déformée	
covariante de Lorentz	42
5.1.1 Les fonctions d'ondes	44
5.1.2 Le spectre d'énergie	53
5.2.1.1 Les caractéristiques du spectre	54
5.2.1.2 Définitions de nouvelles limites	56
5.3 Conclusion.....	57
6 L'équation de Dirac à (3+1) dimensions dans un champs magnétique constant en	
présence de distance minimale	59
6.1 Résolution de l'équation de Dirac en (3+1) dimensions en présence de distance minimale ..	59
6.1.1 Les niveaux d'énergie.....	65

6.1.1.1 Le cas non-déformé.....	67
6.1.1.2 Le cas non-relativiste.....	67
6.1.2 Propriétés thermodynamiques.....	68
6.1.2.1 La densité d'états d'une particule.....	69
6.1.2.2 Le potentiel thermodynamique	71
6.2 Conclusion.....	74
7 Conclusion générale.....	76
Annexe.....	80
Bibliographie.....	85

0.1 Introduction générale

La mécanique dans sa version classique suppose qu'il est possible de concevoir à chaque instant des valeurs précises des coordonnées et des composantes de quantité de mouvement d'une particule. Par contre la mécanique quantique basée sur le principe d'incertitude d'Heisenberg $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$ montre clairement que les deux opérateurs de position X et d'impulsion P ne peuvent pas avoir un ensemble commun de vecteurs propres donc ne sont pas simultanément mesurables avec précision. L'introduction de la géométrie non-commutative à travers la généralisation du principe d'incertitude d'Heisenberg $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \dots)$ mène à une précision non arbitraire en mesures des opérateurs X et P , ce qui a été à l'origine de la définition de l'incertitude minimale non-nulle. La géométrie non-commutative en théorie quantique conduit à une profonde compréhension de la géométrie de l'espace-temps et ainsi à une nouvelle connection entre la gravité et la théorie quantique. Cependant, pour la mesure de grande distance, la courbure de l'espace-temps devient significative et la notion d'onde plane est perdue ce qui impose une limite de précision de mesure en impulsion ΔP . En outre, la mesure de petites distances (de l'ordre de l'échelle de Planck $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-35}m$) nécessite des hautes énergies ce qui perturbe l'effet gravitationnel d'où une limite de précision de mesure en position est indispensable ΔX , donc c'est un cutoff effectif en petite distance (l'incertitude de mesure d'une observable A dans l'état propre $|a\rangle$ est $(\Delta A)^2 = \langle a | (\mathbf{A} - \langle a | \mathbf{A} | a \rangle)^2 | a \rangle$). D'où provient une régularisation de l'infrarouge et de l'ultraviolet aux deux extrémités des échelles. La limite à la résolution en petites distances a été prouvée par les expériences de gedanken

[1, 2]. La gravité quantique et la théorie des cordes expliquent profondément ce qui se manifeste à cette échelle. Par exemple en théorie des cordes [3, 4], les particules utilisées pour résoudre les petites distances ayant une énergie de l'ordre de l'échelle de masse de Planck $\sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{19} GeV$, possèdent une petite longueur d'onde comparée à l'échelle de l'espace ce qui va le perturber. Et le fait d'augmenter l'énergie ne fait qu'élargir les dimensions de la corde même (qui représente une particule). La distance minimale peut être considérée ainsi comme la partie floue de l'espace où une conséquence du caractère non ponctuel des particules élémentaires c-a-d que la physique devient inaccessible au dessous de cette longueur.

Le concept de distance minimale joue un rôle important pour décrire complètement des domaines de recherche comme la théorie des cordes [3, 4, 5, 6, 7], la gravité quantique (loop gravity) [8], la géométrie non-commutative [9], la théorie des champs non-commutative [10, 11, 12] et la physique des trous noirs [13, 14]. Une formulation standard de la mécanique quantique en présence de distance minimale commence avec l'algèbre modifiée d'Heisenberg basée sur des relations de commutations déformées entre les opérateurs de position et d'impulsion, qui résultent de la non-commutativité intrinsèque des géométries [15, 16]. Sans pour cela écarter d'autres champs de recherche [17, 18, 19, 20, 21] où se manifeste la notion de distance minimale à l'échelle de Planck. L'introduction de la mécanique quantique déformée basée sur des relations de commutation modifiées entre les opérateurs de position et d'impulsion a été réalisée d'une manière remarquable par Kempf et ses collaborateurs dans plusieurs travaux. Citons par exemple [22, 23, 24, 25] où se manifeste l'incertitude non-nulle en position qui provient de la généralisation du principe d'incertitude d'Heisenberg, qui n'est autre

que le principe d'Heisenberg ordinaire plus des corrections dues à la déformation de l'espace. Plusieurs problèmes quantiques relativistes ou non-relativistes ont été solutionnés dans le cadre de l'application de l'algèbre déformée de Kempf en présence de distance minimale comme la résolution de l'équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions. Pour l'oscillateur harmonique en D dimensions [23, 24, 26], le potentiel coulombien a été aussi traité en une et trois dimensions dans les références [27] et [28, 29, 30] respectivement. L'idée de quantifier l'énergie en présence de distance minimale a été appliquée pour le problème de la force de Casimir pour un champ électromagnétique [31, 32], la magnétisation de l'électron [33], le problème de la constante cosmologique [34, 35] et la résolution de l'équation de Pauli pour une particule chargée de spin $1/2$ soumise à un champ magnétique constant avec la détermination de ses propriétés thermodynamiques à hautes températures [36]. Dans le cas relativiste, le problème de l'oscillateur de Dirac a connu énormément d'applications en physique des particules et en gravité quantique. De ce fait il a été traité dans l'espace des impulsions par la technique des fonctions de Green [37, 38] et par l'approche des états cohérents [39]. En parallèle à ces travaux, l'introduction de l'algèbre déformée de Kempf pour l'étude de ce système relativiste révèle des modifications qui sont des corrections concernant le spectre d'énergie et les fonctions propres à une dimension dans [40] avec l'étude de certaines propriétés thermodynamiques en présence de distance minimale. Dans le même contexte et en trois dimensions le problème était solutionné dans le cadre de la mécanique quantique supersymétrique (SUSYQM) [16]. On s'est intéressé également à résoudre le problème de l'oscillateur de Dirac en $(1+1)$ dimensions par Quesne et Tkachuk [41, 42] en introduisant une algèbre déformée covariante

qui préserve la symétrie de Lorentz, et issue de l'algèbre déformée de Kempf.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à traiter le problème de l'oscillateur de Dirac à 3 et $(3+1)$ dimensions via l'algèbre déformée de Kempf et via l'algèbre déformée covariante de Lorentz respectivement dont la représentation est dans l'espace des impulsions. La technique standard utilisée est basée sur des transformations de variables appropriées qui nous a conduit vers de nouvelles données concernant le spectre comparées à celles fournies par la littérature. En effet, le premier travail a produit un spectre d'une forme plus générale que celui établit par [16] coïncidant avec des résultats déjà fixés dans certaines limites. Dans le deuxième problème, on a introduit une nouvelle algèbre déformée dite covariante de Lorentz pour le même cas généralisé à $(3+1)$ dimensions en soulevant ensuite les différences qui caractérisent le spectre déduit et celui déterminé via l'algèbre de Kempf à 3 dimensions. Dans un troisième problème, l'extension de l'application de l'algèbre covariante de Lorentz a touché le problème de l'équation de Dirac en présence d'un champ magnétique constant ou on a tenté de déterminer quelques propriétés thermodynamiques en présence de distance minimale.

Le deuxième chapitre sera consacré à présenter le principe d'incertitude d'Heisenberg généralisée à travers l'introduction du concept de distance minimale. Alors qu'au troisième chapitre, on a exposé la représentation de l'algèbre déformée de Kempf et l'algèbre déformée covariante de Lorentz dans l'espace des impulsions. Le quatrième chapitre, traite le problème de l'oscillateur de Dirac à 3 dimensions via l'algèbre déformée de Kempf suivi d'un cinquième chapitre concernant le même problème résolu par l'algèbre déformée covariante de Lorentz à $(3+1)$ dimensions ou les paramètres

de déformations $\beta' = \gamma = 0$. Le sixième chapitre comprend la résolution de l'équation de Dirac pour une particule de spin $1/2$ soumise à un champ magnétique constant à travers l'algèbre déformée covariante de Lorentz à $(3+1)$ dimensions et enfin un septième chapitre où on conclut par nos résultats les plus importants.

0.2 Principe de l'Incertitude d'Heisenberg Généralisé (GUP)

0.2.1 Le choix de la représentation en présence de distance minimale

L'algèbre ordinaire d'Heisenberg obéissant à la relation de commutation $[x, p] = i\hbar$ est représentée dans l'espace de vecteurs d'états dont les états propres des opérateurs x et p sont les fonctions δ de Dirac et les ondes planes ($\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ et $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$) qui ne sont pas de carré sommable. Donc elles n'appartiennent pas à l'espace de Hilbert, c-a-d qu'il n'existe pas de particules dans des états propres d'opérateurs de position et d'impulsion, ils ne représentent pas des états physiques, ou les mesures en x et p sont de précision arbitraire. Ce problème est plus au moins surmonté en théorie des groupes quantiques actuelle [43] en interaction avec le principe d'Heisenberg généralisé, ou en plus de la non-commutativité des opérateurs de position et d'impulsion, ces derniers ne commutent pas avec eux mêmes, par le fait d'abandonner la représentation de l'espace de configuration et d'impulsion pour une représentation de l'espace de base adéquate comme la base des fonctions de Bargmann Fock (espace de Hilbert) ou la précision de mesure des X et P n'est plus arbitraire. Il s'est confirmé que pour des raisons techniques, la régularisation de l'ultraviolet ne peut être réalisé par cette approche et par conséquent plusieurs travaux [22, 23, 24, 25] ont considéré seulement le cas d'existence de l'incertitude minimale en position ΔX_{\min}

qui en plus présente une réalité physique comme la nature non-punctuelle des particules [43] en utilisant la représentation de l'espace des impulsions marqué par sa continuité.

0.2.2 Relation d'incertitude minimale

Pour simplifier la représentation de la relation d'incertitude minimale généralisée qui va mener à ΔX_0 l'incertitude minimale en position, on considérera le cas d'une dimension pour les deux opérateurs position et impulsion, alors:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma) \quad (2.1)$$

ou β et γ sont deux paramètres positifs indépendants de ΔX et ΔP mais qui peuvent dépendre de la valeur moyenne des opérateurs X et P (paramètres de déformation), on peut noter que dans le cas ou ces quantités sont nulles on retombe sur la relation d'incertitude d'Heisenberg de la mécanique quantique ordinaire ou commutative:

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.2)$$

qui explique le caractère arbitraire de la variation de ΔX et ΔP (l'augmentation de ΔX implique la diminution de ΔP). Par contre, la dépendance de la relation (2.1) en $\beta (\Delta P)^2$ montre que ΔX ne peut prendre n'importe quelle petite valeur d'une façon arbitraire d'où l'apparition de l'incertitude minimale en mesure de position ΔX_0 .

En se basant sur la relation générale d'incertitude entre deux observables A et B symétriques dans le domaine de A^2 et B^2

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad (2.3)$$

on peut déduire la relation de commutation généralisée entre les opérateurs de position et d'impulsion

$$[X, P] = i\hbar (1 + \beta P^2) \quad (2.4)$$

avec $\gamma = \beta \langle P^2 \rangle$.

D'après la référence [23] et aux limites de la courbe $\Delta X = f(\Delta P)$ de la relation d'incertitude minimale généralisée d'Heisenberg (2.1),

$$\Delta P = \frac{\Delta X}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{1}{\beta} - \langle P \rangle^2} \quad (2.5)$$

il se trouve qu'une proportionnalité existe entre l'incertitude en impulsion ΔP et l'incertitude en position ΔX qui se concrétise dans la correspondance UV/IR. Cette interaction apparaît dans différents contextes comme à la correspondance ADS/CFT [44], à la théorie des champs non-commutative [10] et dans l'application de la physique à courte distance pour des problèmes en cosmologie [45, 46, 47].

De ce fait, l'incertitude minimale en position serait

$$\Delta X_{\min}(\langle P \rangle) = \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1 + \beta \langle P \rangle^2} \quad (2.6)$$

et par conséquent la plus petite valeur de ΔX_{\min} est non nulle

$$\Delta X_0 = \hbar\sqrt{\beta} \quad (2.7)$$

c'est la limite à la résolution possible de distances à l'échelle de Planck, au dessous de laquelle l'espace est décrit de flou, ce qui prouve la non localisation des particules élémentaires dans l'espace de position et encourage à l'abandonner vers l'espace d'impulsions. La manière théorique d'exploiter cette longueur a été introduite par Kempf et ses collaborateurs dans plusieurs travaux récents [22, 23, 24, 25] .

0.2.3 Exemples de nouvelle limite pour des quantités relativistes

Incertitude minimale ou distance minimale, qui est de l'ordre de la longueur de Planck $10^{-35}m$, est une conséquence du caractère "flou" (fuzzy) de l'espace-temps ou aussi elle peut être décrite d'une limite exprimant la nature non- ponctuelle des particules élémentaires. L'introduction de cette longueur élémentaire a apporté des corrections aux résultats de problèmes traités déjà en mécanique quantique ordinaire. Ainsi et selon la relativité restreinte la longueur X d'une particule qui se déplace a une vitesse V par rapport à un repère d'inertie (tel que X_0 est sa longueur propre et c est la vitesse de la lumière) se contracte en

$$X = X_0\sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} \quad (2.8)$$

A partir de ce qui découle de l'introduction du concept de la longueur minimale [48], on acceptera que toute longueur doit être supérieure ou égale à ΔX_{\min} , donc

$$X_0 \sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} \geq \Delta X_{\min} \quad (2.9)$$

si on se met dans le cas ou la valeur $\Delta X_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$ ($D = 1, \beta' = 0$), la vitesse de la particule se limitera à

$$V_{\lim} \leq c \sqrt{\left(1 - \frac{\hbar^2 \beta}{X_0^2}\right)} \quad (2.10)$$

La nouvelle limite à la vitesse d'une particule relativiste induit une limite à l'impulsion de cette dernière qui sera donnée par l'expression suivante

$$P_{\lim} = \frac{mV_{\lim}}{\sqrt{1 - \frac{V_{\lim}^2}{c^2}}} = m^2 c^2 \left(\left(\frac{X_0}{\hbar\sqrt{\beta}} \right)^2 - 1 \right) \quad (2.11)$$

Et par conséquent l'énergie de la particule sera bornée également et égale à

$$E_{\lim} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V_{\lim}^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left(\frac{X_0}{\hbar\sqrt{\beta}} \right) \quad (2.12)$$

ce qui est équivalent à cette condition

$$\left(\frac{E_{\lim}}{c} \right)^2 \prec \frac{1}{\beta} \quad (2.13)$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, la relation entre l'énergie cinétique de la particule et son impulsion

$$E_{\text{cin}} = \frac{P_{\lim}^2}{2m_0} = E_{\lim} - m_0 c^2 \quad (2.14)$$

produit une autre limite concernant la quantité d'impulsion qui est donnée par

$$P_{\text{lim}}^2 = 2m_0c^2 \left(\frac{1}{c\sqrt{\beta}} - m_0 \right) \quad (2.15)$$

d'où l'apparition d'une condition sur le paramètre de déformation β

$$\sqrt{\beta} \prec \frac{1}{m_0c} \quad (2.16)$$

ce résultat est en bon accord avec ce qui a été donné par [41, 42] pour justifier l'existence des états physiques en mécanique quantique relativiste non-commutative.

0.3 Relations de commutation généralisées

0.3.1 Algèbre déformée non-covariante de Kempf à 3 dimensions

L'extension du domaine de recherche lié au problème de l'incertitude minimale pour des systèmes quantiques relativistes et non-relativistes a été surtout réalisée par [16, 22, 23, 24, 25, 26] qui ont établi des relations de commutations généralisées selon les dimensions de l'espace de représentation des impulsions. Ainsi, la généralisation en 3D de la relation de commutation de l'algèbre déformée de Kempf (2.4) prend la forme tensorielle suivante:

$$\begin{aligned}
 [X_i, P_j] &= i\hbar [\delta_{i,j} (1 + \beta P^2) + \beta' P_i P_j] \\
 [P_i, P_j] &= 0 \\
 [X_i, X_j] &= -i\hbar [2\beta - \beta' + (2\beta + \beta') \beta P^2] \epsilon_{i,j,k} L_k
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

X_i, P_i sont les composantes des opérateurs vecteurs de position et d'impulsion respectivement avec $i = 1, 2, 3$ et

$$L_i = \frac{1}{1 + \beta P^2} \epsilon_{i,j,k} X_j P_k \tag{3.2}$$

qui sont les composantes du vecteur moment angulaire orbital. Les relations (3.1) ne brisent pas la symétrie par rapport aux rotations, ainsi le générateur de rotation L_i et les opérateurs vecteurs de position et d'impulsion satisfont aux relations de

commutations usuelles

$$\begin{aligned}
 [L_i, X_j] &= i\epsilon_{i,j,k}X_k \\
 [L_i, P_j] &= i\epsilon_{i,j,k}P_k \\
 [L_i, L_j] &= i\epsilon_{i,j,k}L_k
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

β et β' sont des paramètres de déformation positives de très petite valeur.

Pour ce qui est de la relation d'incertitude minimale généralisée en 3D $\Delta X_i \Delta P_i \geq \frac{\hbar}{2} |\langle [X_i, P_i] \rangle|$, l'incertitude minimale

en position est isotropique

$$\Delta X_0 = \Delta X_{0i} = \hbar \sqrt{3\beta + \beta'}
 \tag{3.4}$$

prise dans le cas des états vérifiant $\langle P_i \rangle = 0$ et ΔP_i indépendant de i .

A partir des relations de commutation généralisées (3.1), les opérateurs de position et d'impulsion dans l'espace des impulsions se mettent sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 P_i &= p_i \\
 X_i &= i\hbar \left[(1 + \beta P^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' P_i P_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i \right] \\
 L_i &= i\epsilon_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial p_j} p_k = -i\epsilon_{i,j,k} p_j \frac{\partial}{\partial p_k}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

ou γ est une constante arbitraire qui affecte la mesure du produit scalaire déformé dans l'espace des impulsions afin d'assurer l'hermiticité de l'opérateur de position par rapport à ce dernier [16, 26] :

$$\langle \varphi' | \varphi \rangle = \int \frac{d^3 p}{[1 + (\beta + \beta') p^2]^{1-\alpha}} \varphi'^*(p) \varphi(p) \quad (3.6)$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\gamma - \beta'}{\beta + \beta'}$$

0.3.2 Algèbre déformée covariante de Lorentz à (3+1) dimensions

L'algèbre déformée non-commutative de Kempf n'est pas une algèbre relativiste, elle n'est pas invariante par les transformations de Lorentz. Une généralisation de l'idée fut initialement introduite par Snyder [49] qui a suggéré d'abandonner la continuité de l'espace-temps dans un cas particulier où $D = 3$ et $\beta = \gamma = 0$.

Pour convertir l'algèbre déformée non-covariante de Kempf en algèbre déformée covariante de Lorentz, les remplacements suivants sont effectués dans les travaux [41, 42]

$$\mathbf{p}^2 \rightarrow \mathbf{p}^2 - (p^0)^2 = -p_\nu p^\nu \quad (3.7)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - p^0 x^0 = -p_\nu x^\nu$$

p^ν, x^ν et p_ν, x_ν sont des vecteurs contravariants et covariants respectivement dans l'espace-temps de (3+1) dimensions avec $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

Ainsi l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion dans l'algèbre de Kempf (3.5) se convertissent par l'algèbre covariante de Lorentz à:

$$\mathbf{X}^\mu = (1 - \beta p_\nu p^\nu) x^\mu - \beta' p^\mu p_\nu x^\nu + i\hbar \gamma p^\mu, \quad \mathbf{P}^\mu = p^\mu \quad (3.8)$$

et les relations de commutation (3.1) aux relations covariantes suivantes

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}^\mu, \mathbf{P}^\nu] &= -i\hbar [(1 - \beta P_\eta P^\eta g^{\mu\nu} - \beta' \mathbf{P}^\mu \mathbf{P}^\nu)] \\
[\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\nu] &= i\hbar \frac{2\beta - \beta' - (2\beta + \beta') \beta P_\eta P^\eta}{1 - \beta P_\eta P^\eta} (\mathbf{P}^\mu \mathbf{X}^\nu - \mathbf{P}^\nu \mathbf{X}^\mu) \\
[\mathbf{P}^\mu, \mathbf{P}^\nu] &= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

où la métrique $g^{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$. En effet, l'opérateur moment angulaire déformé, générateur de rotation correspond à

$$\mathbf{L}^{\mu\nu} = [1 - \beta P^\eta P_\eta]^{-1} (\mathbf{P}^\mu \mathbf{X}^\nu - \mathbf{P}^\nu \mathbf{X}^\mu) \tag{3.10}$$

Les relations de commutations de l'algèbre déformée covariante (3.9) ne peuvent prendre la forme de celles réalisées dans le cadre de l'application de l'algèbre non-covariante déformée de Kempf (3.1) dans la limite non-relativiste mais cela se fait seulement en supprimant p^0 dans les relations (3.7) ce qui révèle la nouveauté de cette algèbre.

Le produit scalaire dans l'espace des impulsions (3.6) se transforme par l'algèbre déformée covariante de Lorentz en:

$$\langle \varphi' | \varphi \rangle = \int \frac{d^3 p}{[1 - (\beta + \beta') p_\nu p^\nu]^\alpha} \varphi'^*(p^\mu) \varphi(p^\mu) \tag{3.11}$$

$$\text{ou } \alpha = [2(\beta + \beta')]^{-1} [2\beta + 5\beta' - 2\gamma].$$

Il est important de noter que la fonction poids ou la mesure ne représente pas de singularités si les états physiques satisfont la condition:

$$(\beta + \hat{\beta}) (p^0)^2 \prec 1 \quad (3.12)$$

et par conséquent l'énergie E peut prendre une valeur en fonction de p^0 qui obéit à la condition physique précédente (3.12).

L'algèbre covariante de Lorentz implique une modification au principe d'incertitude généralisé déformé suite au remplacement $\mathbf{p}^2 \rightarrow \mathbf{p}^2 - (p^0)^2 = -p_\nu p^\nu$ qui affecte les opérateurs de position et d'impulsion X^i, P^i ($i = 0, 1, 2, 3$), ainsi

$$\begin{aligned} \Delta X^i \Delta P^i \geq & \frac{\hbar}{2} \left\{ 1 - \beta \left(\langle (P^0)^2 \rangle - \sum_{j=1}^3 [(\Delta P^j)^2 + \langle P^j \rangle^2] \right) \right. \\ & \left. + \beta' [(\Delta P^i)^2 + \langle P^i \rangle^2] \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si on admet que les incertitudes $\Delta P^i = \Delta P$ et si on prend les états physiques avec $\langle P^i \rangle = 0$, nous arriverons à la plus petite valeur d'incertitude en position

$$(\Delta X)_0 = (\Delta X^i)_0 = \hbar \sqrt{(3\beta + \beta') [1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle]} \quad (3.14)$$

Comparé au résultat trouvé par l'algèbre non-covariante de Kempf dans l'équation (3.4), il y a un terme additionnel $[1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle]$ qui réduit encore cette longueur minimale dans le formalisme de l'algèbre déformée covariante de Lorentz.

Les transformations déformées de Poincaré

Il est important de confirmer l'invariance de l'algèbre déformée covariante (3.9) sous l'effet des transformations propres de Lorentz et de la translation à l'échelle de Planck et de déterminer les nouveaux générateurs déformés de ces transformations

Les transformations infinitésimales de Lorentz Les transformations infinitésimales standards de Lorentz données par [41, 42] des vecteurs de position et d'impulsion et qui conservent l'invariance de l'algèbre (3.9) s'écrivent

$$X^\lambda = X^\lambda + \delta X^\lambda \quad (3.15)$$

$$P^\lambda = P^\lambda + \delta P^\lambda$$

avec

$$\delta X^\lambda = \delta\omega_\mu^\lambda X^\mu \quad (3.16)$$

$$\delta P^\lambda = \delta\omega_\mu^\lambda P^\mu$$

et $\omega_{\lambda\mu} = -\omega_{\mu\lambda} \in R$, tel que l'opérateur moment angulaire générateur de ces transformations est donné par

$$L^{\mu\nu} = [1 - \beta P^\rho P_\rho]^{-1} (P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu) \quad (3.17)$$

qui satisfait avec les opérateurs de position et d'impulsion dans l'espace déformé des P l'algèbre suivante

$$\delta X^\lambda = \frac{i}{2\hbar} \delta\omega^{\mu\nu} [L_{\mu\nu}, X^\lambda] \quad (3.18)$$

$$\delta P^\lambda = \frac{i}{2\hbar} \delta\omega^{\mu\nu} [L_{\mu\nu}, P^\lambda]$$

et des relations de commutation standards $\text{so}(D, 1)$, tel que

$$[L^{\mu\nu}, L^{\alpha\beta}] = i\hbar (g^{\mu\beta} L^{\nu\alpha} + g^{\nu\alpha} L^{\mu\beta} - g^{\nu\beta} L^{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha} L^{\nu\beta}) \quad (3.19)$$

Les translations infinitésimales Les translations infinitésimales conservent aussi l'invariance de l'algèbre (3.9) représentées par l'expression

$$X^\lambda = X^\lambda + \delta X^\lambda \quad (3.20)$$

$$P^\lambda = P^\lambda$$

et comme les opérateurs X^λ et P^λ s'écrivent en fonction des anciens opérateurs x^λ et p^λ de l'espace-temps non déformé, il est utile de voir que

$$x^\lambda = x^\lambda - \delta l^\lambda \quad (3.21)$$

$$p^\lambda = p^\lambda$$

alors

$$\delta X^\lambda = -\delta l^\lambda - f(P^\rho P_\rho) \delta l_\nu P^\nu P^\lambda \quad (3.22)$$

avec $\delta l^\lambda \in R$ et

$$f(P^\rho P_\rho) = \frac{2\beta - \hat{\beta} - (2\beta + \hat{\beta}) \beta P^\rho P_\rho}{[1 - \beta P^\rho P_\rho]^2} \quad (3.23)$$

Et par conséquent l'opérateur générateur de translation donné par

$$\hat{P}_\mu = [1 - \beta P^\rho P_\rho]^{-1} P_\mu \quad (3.24)$$

vérifie avec les opérateurs de position et d'impulsion les relations de commutation déformées suivantes

$$\begin{aligned}\delta X^\lambda &= \frac{i}{\hbar} \delta l^\nu [\widehat{P}_\nu, X^\lambda] \\ \delta P^\lambda &= \frac{i}{\hbar} \delta l^\nu [\widehat{P}_\nu, P^\lambda]\end{aligned}\tag{3.25}$$

Les opérateurs déformés générateurs de rotation $L^{\alpha\beta}$ et de translation \widehat{P}^λ , obtenus par la réalisation de l'algèbre conventionnelle de Poincaré $\text{iso}(D, 1)$, satisfont les relations de commutation standards données par

$$\begin{aligned}[L^{\alpha\beta}, \widehat{P}^\lambda] &= i\hbar \{g^{\beta\lambda} \widehat{P}^\alpha - g^{\alpha\lambda} \widehat{P}^\beta\} \\ [\widehat{P}^\alpha, \widehat{P}^\beta] &= 0\end{aligned}\tag{3.26}$$

0.4 L'oscillateur de Dirac à 3 dimensions en présence de distance minimale

L'idée de la quantification en présence de distance minimale en mécanique quantique a connu une extension vers des problèmes purement relativistes étant donné que le problème de l'oscillateur de Dirac était solutionné à une dimension [40] et à trois dimensions [16] dans l'espace des impulsions en présence de distance minimale. L'intérêt porté à ce sujet revient au rôle que joue dans la description des problèmes à plusieurs corps relativistes, en mécanique quantique relativiste supersymétrique [50, 51, 52, 53, 54] et en chromodynamique quantique en lien avec des modèles de confinement de quark pour les mésons et les baryons [55]. Dans ce travail on va résoudre exactement l'équation de l'oscillateur de Dirac à trois dimensions dans le cadre de la mécanique quantique relativiste en présence de distance minimale en utilisant une technique standard alors que le formalisme (SUSYQM) était appliqué par [16] pour le même problème. De nouvelles données concernant le spectre d'énergie ont été obtenues par rapport à la dépendance en nombre quantique principal n et à la dégénérescence des états quantiques. Ces nouveaux résultats ont fait l'objet d'une publication [56]. De ce fait, nous allons étudier les corrections qu'apporteraient l'algèbre de Kempf à trois dimensions représentée dans l'espace des impulsions et donnée par les équations (3.1) au spectre d'énergie et aux fonctions d'ondes et nous allons tester nos résultats spectraux dans la limite non-relativiste et ou non-déformée. Et par conséquent, nous allons commencer ce chapitre par exposer l'oscillateur de Dirac

à 3 dimensions en mécanique quantique ordinaire.

0.4.1 L'oscillateur de Dirac à 3 dimensions en mécanique quantique ordinaire

Si en plus de sa linéarité en vecteur d'impulsion, cette équation est linéaire en vecteur de position comme cela a été introduit par Ito et all [55], elle est décrite d'Oscillateur de Dirac en effectuant la substitution $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - i\beta m\omega \mathbf{r}$ dans l'équation de Dirac pour obtenir

$$(c \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{p} - i\beta m\omega \mathbf{r}) + \beta mc^2) \psi(\mathbf{r}, t) = W \psi(\mathbf{r}, t) \quad (4.1)$$

où ω est la fréquence classique de l'oscillateur.

Si ψ_1, ψ_2 sont la grande et la petite composante de la fonction d'onde de Dirac ψ respectivement, la décomposition de l'équation (4.1) en deux autres devrait être

$$\begin{aligned} (W - mc^2) \psi_1 &= c \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + i\beta m\omega \mathbf{r}) \psi_2 \\ (W + mc^2) \psi_2 &= c \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - i\beta m\omega \mathbf{r}) \psi_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

En utilisant ce couple d'équations et quelques propriétés des matrices de Dirac, nous arriverons à formuler une seule équation en fonction de la composante ψ_1

$$(W^2 - m^2 c^4) \psi_1 = c^2 (\mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 - 3m\omega \hbar - 2m\omega \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}) \psi_1 \quad (4.3)$$

A la limite non-relativiste, deux approximations sont prises en considération $W \sim E + mc^2$ et $E \ll mc^2$ et leurs applications à (4.3) donne

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 - \frac{3}{2}\omega\hbar - \frac{2\omega}{\hbar}\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \right) \psi_1 = E\psi_1 \quad (4.4)$$

ou $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$.

Les deux premiers termes représentent le même hamiltonien que celui de l'oscillateur harmonique, ce qui donne le nom d'Oscillateur de Dirac à ce genre de potentiel. Le troisième terme est une constante shift à tous les états d'énergie sans influence sur les fonctions d'ondes. Alors que le dernier terme exprime un très fort couplage spin-orbite [57].

Revenons à la détermination des fonctions d'onde et du spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac. Selon [57] l'opérateur du côté droit de l'équation (4.3) commute avec le moment cinétique total $J = L + S$ donc les fonctions propres sont données dans le système de coordonnées sphériques par le ket

$$\left| N \left(l \frac{1}{2} \right) jm \right\rangle = \sum_{\mu, \sigma} \left\langle l \mu, \frac{1}{2} \sigma \left| jm \right\rangle R_{Nl}(r) Y_{l\mu}(\theta, \phi) \chi_{\sigma} \quad (4.5)$$

$\langle \rangle$: le coefficient de Clebsch-Gordan.

$R_{Nl}(r)$: la partie radiale de la fonction d'onde de l'oscillateur de Dirac à trois dimensions

$Y_{l\mu}(\theta, \phi)$: la fonction harmonique sphérique.

χ_{σ} : la fonction spin des deux projections $\sigma = \pm \frac{1}{2}$.

alors que les valeurs propres correspondantes sont:

$$W^2 - m^2 c^4 = \begin{cases} \hbar\omega m c^2 [2N - 2j + 1] & l = j - \frac{1}{2} \\ \hbar\omega m c^2 [2N + 2j + 3] & l = j + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.6)$$

0.4.2 Solution exacte de l'oscillateur de Dirac à 3 dimensions par l'algèbre déformée de Kempf

La substitution de l'opérateur d'impulsion $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{i}\tilde{\beta}m\omega\mathbf{r}$ dans l'équation de Dirac pour une particule libre dans l'espace des impulsions donne l'équation de l'oscillateur de Dirac [35]

$$\left(c \tilde{\alpha} \left(\mathbf{p} - \mathbf{i}\tilde{\beta}m\omega\mathbf{r} \right) + \tilde{\beta}mc^2 \right) \psi(\mathbf{p}) = W\psi(\mathbf{p}) \quad (4.7)$$

m est la masse au repos et ω est la fréquence de l'oscillateur de Dirac. $\psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \psi_a(\mathbf{p}) \\ \psi_b(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ sont les deux composantes spinorielles de la fonction d'onde $\psi(\mathbf{p})$ et $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ représentent les matrices de Dirac suivantes

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

qui permet de découpler l'équation (4.7) en deux autres données par les expressions

$$W \psi_a(\mathbf{p}) = c \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}) \psi_b(\mathbf{p}) + mc^2 \psi_a(\mathbf{p}) \quad (4.9)$$

$$W \psi_b(\mathbf{p}) = c \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) \psi_a(\mathbf{p}) - mc^2 \psi_b(\mathbf{p}) \quad (4.10)$$

La substitution de la formule de $\psi_b(\mathbf{p})$ tirée de l'équation (4.10) dans l'équation (4.9) nous mène à écrire une seule équation en fonction de la composante $\psi_a(\mathbf{P})$.

$$(W^2 - m^2 c^4) \psi_a(\mathbf{p}) = c^2 \{ \mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 + im\omega [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}] + i m^2 \omega^2 \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) \} \psi_a(\mathbf{p}) \quad (4.11)$$

- Dans ce qui suit, $\psi_a(\mathbf{P})$ est la grande composante de la fonction d'onde [57] alors que $\psi_b(\mathbf{p})$ est la petite composante car à la limite non-relativiste (la vitesse de la particule $v \ll c$) la composante $\psi_b(\mathbf{p})$ devra tendre vers zéro.

L'introduction de l'algèbre déformée de Kempf à travers les relations de commutation modifiées tirées des équations (3.1) est nécessaire pour avoir le résultat du calcul suivant

$$[\boldsymbol{\sigma} \mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}] = i\hbar (1 + (\beta + \beta') p^2) \left(\frac{2\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}}{\hbar} + 3 \right) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{r} = -i\hbar (2\beta - \beta' + (2\beta + \beta') \beta p^2) \mathbf{L} \quad (4.13)$$

Si on revient et on remplace ces deux dernières expressions dans l'équation (4.11), on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{(W^2 - m^2 c^4)}{c^2} \psi_a(\mathbf{p}) &= \{ \mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 + [-2m\omega (1 + (\beta + \beta') p^2) \\ &+ +m^2 \omega^2 \hbar (2\beta - \beta' + (2\beta + \beta') \beta p^2)] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L} \\ &- 3m\omega \hbar (1 + (\beta + \beta') p^2) \} \psi_a(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ce qu'on peut remarquer c'est que les deux premiers termes représentent l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique en 3 dimensions, alors que le troisième terme exprime la

contribution du couplage spin-orbite dépendante de l'impulsion et pour ce qui est du quatrième terme, il est une fonction shift dépendante de l'impulsion aussi qui affecte les niveaux d'énergie. Il est possible de reproduire l'écriture de l'équation usuelle (4.3) de l'oscillateur de Dirac en 3D dans le cas sans déformation $\beta = \beta' = 0$.

Les fonctions propres

Dans le but d'alléger les étapes du calcul afin de déterminer les fonctions propres de l'oscillateur de Dirac en présence de distance minimale, on décompose ces dernières en partie radiale et en partie angulaire dans l'espace des impulsions comme

$$\psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \psi_a(\mathbf{p}) \\ \psi_b(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p) \mathcal{Y}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) \\ G(p) \mathcal{Y}_{-\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

avec le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$. L'expression du carré de l'opérateur vecteur de position doit être calculé dans l'espace déformé en utilisant l'équation (3.5)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^2 &= -\hbar^2 \left\{ \left[\left((1 + (\beta + \beta') p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{p} + 2(\beta + \gamma) p \right] \right. \\ &\quad \times \left[\left((1 + (\beta + \beta') p^2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \right] - \frac{L^2}{p^2} - (2\beta L^2 - 3\gamma) \\ &\quad \left. + [\gamma(3\beta + \beta' + \gamma) - \beta^2 L^2] p^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'action de l'opérateur $(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L})$ sur les fonctions spin-angulaires $\mathcal{Y}_\kappa^{m_j}(\mathbf{p})$ est donnée par [57]

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L} \mathcal{Y}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) = \hbar \kappa \mathcal{Y}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) \quad (4.17)$$

tel que le nombre quantique κ sera égale à $[s(2j + 1) - 1]$

La substitution des équations (4.15), (4.16) et (4.17) dans l'équation (4.14) permet de la réécrire en fonction de l'impulsion p et de la composante radial $F(p)$ dans la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} (W^2 - m^2 c^4 + 2m\omega\hbar\kappa c^2 + 3m\omega\hbar c^2 - m^2\omega^2\hbar^2\kappa c^2 (2\beta - \beta)) F(p) = \quad (4.18) \\ -m^2\omega^2\hbar^2 \left\{ \left[(1 + (\beta + \beta) p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right]^2 + \left[\frac{2}{p} + 2(\beta + \gamma) p \right] \right. \\ \times \left[(1 + (\beta + \beta) p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right] - \frac{L^2}{p^2} - (2\beta L^2 - 3\gamma) \\ \left. + \left[\frac{-1}{m^2\omega^2\hbar^2} + \gamma (3\beta + \beta + \gamma) - \beta^2 L^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{m\omega\hbar} (2\kappa + 3) (\beta + \beta) - (2\beta + \beta) \beta\kappa \right] p^2 \right\} F(p) \end{aligned}$$

Des remplacements et des changements de variables ont été effectués afin de résoudre cette équation via une procédure standard. Ainsi commençons par introduire les paramètres

$$\xi = \frac{\rho}{\sqrt{m\omega\hbar}} \text{ et } \rho = \frac{1}{\sqrt{\beta + \beta}} \arctan p\sqrt{\beta + \beta} \quad (4.19)$$

et effectuer les changements de variables $p \in (0, \infty)$ en $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2\sqrt{k}}\right)$ tel que

$$\xi = \frac{1}{k} \arctan \left(p\sqrt{\beta + \beta} \right) \text{ et } k = \sqrt{m\omega\hbar (\beta + \beta)} \quad (4.20)$$

dans ce cas l'équation (4.18) devient

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta}{k^2}F(p) &= \left\{ \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[\frac{2m\omega\hbar\sqrt{\beta+\beta'}}{k^2 tg(\rho\sqrt{\beta+\beta'})} + \frac{2m\omega\hbar}{k^2\sqrt{\beta+\beta'}} tg(\rho\sqrt{\beta+\beta'}) \right] \frac{\partial}{\partial \rho} \right. \\
&\quad - \frac{m\omega\hbar}{k^2} (\beta+\beta') L^2 \cot g^2(\rho\sqrt{\beta+\beta'}) - \frac{m\omega\hbar}{k^2} (2\beta L^2 - 3\gamma) \\
&\quad + \frac{m\omega\hbar}{k^2 (\beta+\beta')} \left[\frac{-1}{m^2\omega^2\hbar^2} + \gamma (3\beta+\beta'+\gamma) - \beta^2 L^2 \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{m\omega\hbar} (2\kappa+3)(\beta+\beta') - (2\beta+\beta')\beta\kappa \right] tg^2(\rho\sqrt{\beta+\beta'}) \right\} F(p) \tag{4.21}
\end{aligned}$$

avec

$$\zeta = \frac{W^2 - m^2 c^4}{m\omega\hbar c^2} + 2\kappa + 3 - m\omega\hbar\kappa (2\beta - \beta') \tag{4.22}$$

Pour simplifier encore le calcul, on prendra

$$F = C^{\lambda+\delta} f(S) \tag{4.23}$$

ou S et C sont définis par

$$S = \sin(k\xi) \ , \ C = \cos(k\xi) \tag{4.24}$$

alors que λ est une constante qui sera déterminée ultérieurement mais $\delta = \frac{\gamma}{\beta+\beta'}$.

Maintenant le remplacement des équations (4.23) et (4.24) dans l'équation (4.21)

donne

$$\begin{aligned}
(1 - S^2) f' - \left[(2\lambda + 1 + 2(1 - \eta)) S - \frac{2}{S} \right] f & \\
+ \left\{ \left(\frac{\zeta}{k^2} - (2\eta - 1) L^2 - 3\lambda \right) - \frac{L^2}{S^2} + \right. & \tag{4.25}
\end{aligned}$$

$$+ \left(\lambda^2 - \lambda(1 + 2\eta) - \eta^2 L^2 + \frac{(2\kappa + 3)}{k^2} - \eta(\eta + 1)\kappa - \frac{1}{k^4} \right) \frac{S^2}{C^2} \Big\} f = 0$$

avec $\eta = \frac{\beta}{\beta + \beta}$. Si on impose une condition sur la constante λ on pourra éliminer la barrière centrifuge tel que l'équation suivante sera vérifiée

$$\lambda^2 - \lambda(1 + 2\eta) - \eta^2 L^2 + \frac{(2\kappa + 3)}{k^2} - \eta(\eta + 1)\kappa - \frac{1}{k^4} = 0 \quad (4.26)$$

Les deux racines correspondantes obtenues sont alors

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 + 2\eta}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 + 2\eta)^2}{4} + \eta^2 L^2 - \frac{(2\kappa + 3)}{k^2} + \eta(\eta + 1)\kappa + \frac{1}{k^4}} \quad (4.27)$$

Pour pouvoir faire avancer encore les calculs, un changement de variable est nécessaire défini par la relation $z = 2s^2 - 1$ en ayant le choix de prendre $f(s) = s^l g(s)$, alors l'équation (4.25) s'écrira comme

$$(1 - z^2) g'(z) + [(b - a) - (a + b + 2)z] g'(z) + \frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k^2} - 2\eta L^2 - (2l + 3)\lambda + l(2\eta - 1) \right] g(z) = 0 \quad (4.28)$$

Afin de résoudre cette équation différentielle en solution polynômiale, il faut prendre

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k^2} - 2\eta L^2 - (2l + 3)\lambda + l(2\eta - 1) \right] = n'(n' + a + b + 1) \quad (4.29)$$

où les paramètres a , b et n' sont définis par

$$a = \lambda_+ - \eta - \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} + l \quad \text{et} \quad n' = \frac{n-l}{2}. \quad (4.30)$$

L'équation (4.29) est une condition spectrale d'où on peut tirer le spectre d'énergie alors que a est en fonction de λ_+ , ce qui sera justifié dans les étapes suivantes.

Revenons à l'équation (4.28) qui s'écrira

$$\begin{aligned} (1 - z^2) \dot{g}(z) + [(b - a) - (a + b + 2)z] g'(z) \\ + n'(n' + a + b + 1) g(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

dont la solution est donnée en terme de polynômes de Jacobi

$$g(z) = N P_n^{(a,b)}(z) \quad (4.32)$$

avec N est la constante de normalisation

Compte tenu de quelques changements de variables réalisés auparavant, la grande composante radiale de la fonction d'onde de l'oscillateur de Dirac en fonction de la variable z est alors

$$F(z) = N 2^{-\frac{a+b+\eta+\delta}{2}} (1-z)^{\frac{a+\eta+\delta+\frac{1}{2}}{2}} (1+z)^{\frac{(b-\frac{1}{2})}{2}} P_n^{(a,b)}(z) \quad (4.33)$$

écrite en fonction de l'ancienne variable d'impulsion p comme

$$F(p) = N (1 + (\beta + \beta) p^2)^{-\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \eta + \delta}{2}} \left(\sqrt{\beta + \beta p} \right)^{b - \frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

$$P_n^{(a,b)} \left(\frac{(\beta + \beta) p^2 - 1}{(\beta + \beta) p^2 + 1} \right),$$

et enfin on arrivera à déterminer la grande composante de la fonction d'onde de l'oscillateur de Dirac

$$\psi_a(\mathbf{p}) = N (1 + (\beta + \beta) p^2)^{-\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \eta + \delta}{2}} \left(\sqrt{\beta + \beta p} \right)^{b - \frac{1}{2}} \quad (4.35)$$

$$P_n^{(a,b)} \left(\frac{(\beta + \beta) p^2 - 1}{(\beta + \beta) p^2 + 1} \right) \chi_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}).$$

Pour calculer la petite composante de la fonction d'onde $\psi_b(\mathbf{p})$ à partir de l'équation (4.10) qui donne

$$\psi_b(\mathbf{p}) = \frac{c \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})}{W + mc^2} \psi_a(\mathbf{p}) \quad (4.36)$$

il faut se servir de quelques relations importantes entre la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ et les opérateurs de position \mathbf{r} et d'impulsion \mathbf{p} [16] en présence de distance minimale dans l'espace des impulsion

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{r} &= i\hbar \sigma_i \left((1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i \right) \quad (4.37) \\ \sigma_i \frac{\partial}{\partial p_i} &= \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L} + 2}{p} \right) \sigma_p = \sigma_p \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}}{p} \right) \\ \sigma_i p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) = \sigma_p p^2 \frac{\partial}{\partial p} = p^2 \frac{\partial}{\partial p} \sigma_p \\ \frac{\partial}{\partial p} \sigma_p &= \sigma_p \frac{\partial}{\partial p} \end{aligned}$$

ou $\sigma_p = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{p}$, alors on aboutit à l'expression suivante de $\psi_b(\mathbf{p})$

$$\begin{aligned} \psi_b(\mathbf{p}) &= \frac{c}{W + mc^2} \sigma_p [p + m\omega\hbar \\ &\times \left((1 + (\beta + \beta') p^2) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\hbar\kappa}{p} + (\gamma - \beta \hbar \kappa) p \right)] \psi_a(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Afin de parvenir à calculer la petite composante radiale de la fonction d'onde $G(p)$, on a à utiliser cette propriété:

$$\sigma_p \mathcal{K}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) = -\mathcal{K}_{-\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) \quad (4.39)$$

et cela ramène à avoir l'expression de $G(p)$

$$G(p) = \frac{-m\omega\hbar c}{W + mc^2} \left[\left(\frac{1}{m\omega\hbar} + \gamma - \beta\hbar\kappa \right) p + (1 + (\beta + \beta') p^2) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\hbar\kappa}{p} \right] F(p) \quad (4.40)$$

A cette étape de la manipulation du calcul, nous avons à considérer les transformations suivantes

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p} f^{-\frac{\delta+\eta-1}{2}} R_1(p), \\ G(p) &= \frac{1}{p} f^{-\frac{\delta+\eta-1}{2}} R_2(p) \end{aligned} \quad (4.41)$$

qui permettent de déterminer exactement $G(p)$ et ensuite la constante de normalisation N avec la mesure $f(p) = 1 + (\beta + \beta') p^2$.

En comparant l'équation (4.34) à son équivalent dans (4.41), on détermine $R_1(p)$

$$R_1(p) = N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-\frac{1}{2}} p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b}{2}+1} P_n^{(a,b)}(z) \quad (4.42)$$

dans ce cas le calcul de $R_2(p)$ à partir de l'expression de $R_1(p)$ est évident et exige la distinction entre les états à spin contraire $s = \frac{1}{2}$ et $s = -\frac{1}{2}$ à l'aide des propriétés des polynômes de Jacobi citées en [58]

i) $s = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
R_2(p) &= \frac{-m\omega\hbar c N\sqrt{\beta+\beta}^{b-\frac{1}{2}}}{W+mc^2} \left[f \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \beta\hbar\kappa \right) p - \frac{\hbar\kappa}{p} \right] \quad (4.43) \\
& p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b}{2}+1} P_n^{(a,b)}(z) \\
&= \frac{-2m\omega\hbar c N\sqrt{\beta+\beta}^{b-\frac{1}{2}}}{W+mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b}{2}+1} (1+z) \frac{d}{dz} P_n^{(a,b)}(z) \\
&= \frac{-2m\omega\hbar c (\beta+\hat{\beta}) (a+b+n+1) N\sqrt{\beta+\beta}^{b-\frac{1}{2}}}{W+mc^2} \\
& \times p^{b+\frac{3}{2}} f^{-\frac{a+b}{2}+3} P_{n-1}^{(a+1,b+1)}(z)
\end{aligned}$$

ii) $s = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
R_2(p) &= \frac{-m\omega\hbar c N\sqrt{\beta+\beta}^{b-\frac{1}{2}}}{W+mc^2} \left[f \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \beta\hbar(\kappa+1) \right) p \right. \quad (4.44) \\
& \left. - \frac{\hbar(\kappa+1)}{p} \right] p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b}{2}+1} P_n^{(a,b)}(z) \\
&= \frac{-2m\omega\hbar c N\sqrt{\beta+\beta}^{b-\frac{1}{2}}}{W+mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b}{2}+1} \left[(1+z) \frac{d}{dz} + b \right] P_n^{(a,b)}(z) \\
&= \frac{-2m\omega\hbar c (b+n) N\sqrt{\beta+\beta}^{b-\frac{1}{2}}}{W+mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b}{2}+1} P_n^{(a+1,b-1)}(z)
\end{aligned}$$

Si on revient maintenant au calcul de la constante de normalisation N , la relation de fermeture doit être modifiée dans l'espace des impulsions en présence de distance minimale

$$\int_0^\infty \frac{dp}{f(p)} (|R_1(p)|^2 + |R_2(p)|^2) = 1 \quad (4.45)$$

et son utilisation avec les expressions de $R_1(p)$ et $R_2(p)$ tirées des équations (4.42) et (4.43), (4.44) détermine exactement la grande et petite composante radiale de la fonction d'onde en fonction du polynôme de Jacobi

$$\begin{aligned} F(p) &= \left(\frac{W + mc^2}{2W} \right)^{\frac{1}{2}} A^{(n)}(a, b) p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}(a+b+\eta+\delta)} P_n^{(a,b)}(z) \\ G(p) &= -\varepsilon \left(\frac{W - mc^2}{2W} \right)^{\frac{1}{2}} A^{(\tilde{n})}(\tilde{a}, \tilde{b}) p^{\tilde{b}-\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}(\tilde{a}+\tilde{b}+\eta+\delta)} P_{\tilde{n}}^{(\tilde{a},\tilde{b})}(z) \end{aligned} \quad (4.46)$$

avec

$$\begin{aligned} A^{(n)}(a, b) &= \left(\frac{2(\beta + \beta')^{b+1} (a + b + 2n' + 1) n! \Gamma(a + b + n' + 1)}{\Gamma(a + n' + 1) \Gamma(b + n' + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \tilde{a} &= a + 1 \quad \tilde{b} = b + 2s \quad \tilde{n} = n' - s - \frac{1}{2} \quad \varepsilon = \frac{W}{|W|} \end{aligned} \quad (4.47)$$

ou $n' = 0, 1, 2, \dots$, à l'exception ou $s = \frac{1}{2}$ et $\varepsilon = -1$ on a $n' = 1, 2, 3, \dots$

- Pour justifier maintenant le choix de λ_+ , on se base sur l'explication donnée dans la référence [23] qui confirme que la condition de normalisation seule ne garantit pas l'existence des états physiquement acceptables mais en plus de cela il faut qu'ils soient dans le domaine de p , autrement dit, c'est avoir une incertitude en impulsion Δp finie. Donc c'est la vérification de cette la condition

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{f(p)} (|R_1(p)|^2 + |R_2(p)|^2) < \infty \quad (4.48)$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{p^2 dp}{f(p)} |R_1(p)|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{f(p)} |R_2(p)|^2 < \infty \quad (4.49)$$

A partir de ces dernières conditions, on voit que l'intégrale de la petite composante radiale se comporte comme

$p^{-(2\lambda-2\eta-1)}$ pour $p \rightarrow \infty$, ce qui vérifie que $\lambda > \eta + \frac{1}{2}$ et cela est possible avec le choix de λ_+ issue de l'équation (4.27). En contre partie, si $\lambda = \lambda_+$, l'intégrale de la grande composante radiale se comporte comme $p^{-(2\lambda_+-2\eta+1)}$, ainsi le critère de convergence exige que $\lambda_+ > \eta - \frac{1}{2}$ et c'est satisfait automatiquement dans notre travail.

- Si on revient maintenant à la limite non-relativiste de l'équation de l'oscillateur de Dirac (4.14), on impose que $W = mc^2 + E$ avec $E \ll mc^2$ et par division en $2m$, on arrive à

$$E \psi_a(\mathbf{p}) = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{r}^2 - \mu_{SL}(p) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L} - \frac{3}{2}\hbar\omega (1 + (\beta + \beta') p^2) \right] \psi_a(\mathbf{p}) \quad (4.50)$$

avec

$$\mu_{SL}(p) = \frac{\omega}{\hbar} (1 + (\beta + \beta') p^2) - \frac{\omega^2}{4} (2\beta - \beta' + (2\beta + \beta') \beta p^2) \quad (4.51)$$

On remarque que les deux premiers termes représentent l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique en 3D en plus d'un terme aditionnel qui dépend maintenant de la déformation de l'espace, alors que dans le cas non-déformé vu dans l'équation (4.3), il était constant. Dans le troisième terme apparait la force du couplage spin-orbite dépendante de l'impulsion donnée par $\mu_{SL}(p)$ (4.51). Cette interaction spin-orbite dépendante des paramètres de déformation β et β' est produite par un potentiel scalaire qui

peut provenir d'un champ gravitationnel créé lors de la perturbation de l'espace en présence de distance minimale.

Le spectre d'énergie

La substitution des expressions des paramètres n, a, b, λ_+ et ζ données par les équations (4.30), (4.27) et (4.22) dans l'équation (4.29) permet d'obtenir le spectre d'énergie W de l'oscillateur de Dirac en 3D et en présence de distance minimale

$$W^2 - m^2 c^4 = m\omega\hbar c^2 \left\{ 2 \left(n + \frac{3}{2} \right) \sqrt{1 + (m\omega\hbar)^2 \left[\frac{(\beta + 3\beta)^2}{4} + \beta^2 L^2 \right]} - \epsilon_{\kappa 1} \right. \quad (4.52)$$

$$\left. + m\omega\hbar \left[(\beta + \beta) \left(n + \frac{3}{2} \right)^2 + (\beta - \beta) \left(L^2 + \frac{9}{4} \right) + \frac{3}{2} \beta \right] - \epsilon_{\kappa 2} \right\}$$

avec

$$\epsilon_{\kappa 1} = 3 \left(1 + \frac{2}{3} \kappa \right) m\omega\hbar (\beta + \beta) - m^2 \omega^2 \hbar^2 \beta (2\beta + \beta) \kappa \quad (4.53)$$

$$\epsilon_{\kappa 2} = 3 \left(1 + \frac{2}{3} \kappa \right) - m\omega\hbar \kappa (2\beta - \beta)$$

qui représentent à nouveau le couplage spin-orbite en présence de distance minimale.

Le spectre d'énergie dépend quadratiquement du nombre quantique principal n . Cette propriété exprimant un confinement dur est due à ce que le problème s'est convertit dans une étape du calcul à un problème de mouvement d'une particule ponctuelle autour de la surface d'une sphère qui est un mouvement dans un puits de potentiel dont les barrières sont localisées à 0 et $\pi/2\sqrt{m\omega\hbar(\beta + \beta')}$.

Le cas sans déformation Le développement du premier ordre en β et β' du spectre d'énergie donné par l'équation (4.52) se met sous la forme suivante

$$W^2 = m^2c^4 + m\omega\hbar c^2 \left\{ 2 \left(n - j + \frac{1}{2} \right) \left[1 + \frac{m\omega\hbar\beta}{2} \left(n - j + \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{m\omega\hbar\beta'}{2} \left(n + j + \frac{9}{2} \right) + m\omega\hbar\beta'(-4n - 2nj - 3) \right\} \quad (4.54)$$

pour $j = l + \frac{1}{2}$

$$W^2 = m^2c^4 + m\omega\hbar c^2 \left\{ 2 \left(n + j + \frac{3}{2} \right) \left[1 + \frac{m\omega\hbar\beta}{2} \left(n + j + \frac{3}{2} \right) \right] + \frac{m\omega\hbar\beta'}{2} \left(n - j + \frac{7}{2} \right) + m\omega\hbar\beta'(-2n + 2nj - 3) \right\} \quad (4.55)$$

et $j = l - \frac{1}{2}$

On remarque que dans le cas où $\beta' = 0$, les expressions données par les équations (4.54) et (4.55) respectivement coïncident exactement avec celles obtenues par [16] dans le cadre du formalisme (SUSYQM). La différence qui se présente lorsque $\beta' \neq 0$ est considérée liée à la technique utilisée où on distinguait entre grande et petite valeurs de j .

- Si on supprime la déformation de l'espace $\beta, \beta' \rightarrow 0$ et on se met dans l'espace ordinaire avec la représentation des impulsions, on retrouve le spectre de l'oscillateur de Dirac habituel [57]

$$\begin{aligned} W^2 - m^2c^4 &= 2m\omega\hbar c^2 \left[n - j + \frac{1}{2} \right], & j = l + \frac{1}{2} \\ W^2 - m^2c^4 &= 2m\omega\hbar c^2 \left[n + j + \frac{3}{2} \right], & j = l - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

qui révèle la dégénérescence des états pour $j = l + \frac{1}{2}$ avec $n \pm q$ et $j \pm q$ où q est un entier, et aussi les états pour $j = l - \frac{1}{2}$ avec $n \pm q$ et $j \mp q$. Cette caractéristique a complètement disparue en introduisant le concept de distance minimale avec $\beta \neq 0$ et $\beta' \neq 0$ comme le montre d'ailleurs l'expression du spectre d'énergie dans l'équation (4.52) et le confirme la figure 1 où les niveaux d'énergie dégénérés en absence de β' sont séparés en présence de ce paramètre de déformation, et l'écart de séparation croît avec la croissance de la valeur de β' .

La limite non-relativiste - Afin de tester notre résultat concernant le spectre d'énergie en présence de la distance minimale donné par l'équation (4.52) pour la limite non-relativiste, on admet qu'il vérifie la supposition $W = mc^2 + W_{nr}$ avec $W_{nr} \ll mc^2$. Et après un calcul simple nous obtenons cette expression de l'énergie

$$W_{nr} = \hbar\omega \left\{ \left(n + \frac{3}{2} \right) \sqrt{1 + (m\omega\hbar)^2 \left[\frac{(\beta' + 3\beta)^2}{4} + \beta^2 L^2 \right]} - \epsilon_{\kappa 1} \right. \\ \left. + \frac{m\omega\hbar}{2} \left[(\beta + \beta) \left(n + \frac{3}{2} \right)^2 + (\beta - \beta) \left(L^2 + \frac{9}{4} \right) + \frac{3}{2}\beta' \right] - \frac{\epsilon_{\kappa 2}}{2} \right\} \quad (4.57)$$

- Il est intéressant d'ignorer la contribution des termes du couplage spin-orbite $\epsilon_{\kappa 1}$ et $\epsilon_{\kappa 2}$ pour pouvoir découvrir qu'on retrouve le même spectre d'énergie que celui de l'oscillateur harmonique en 3D en présence de distance minimale établit par [26]. C'est un autre résultat qui confirme l'exactitude du calcul du spectre d'énergie en plus de celui trouvé pour le cas non-déformé donné par le couple d'équations (4.56).

- Dans le but de visualiser exactement le comportement du spectre d'énergie dans une limite non-relativiste et dans le cas non-déformé, on procède par un développe-

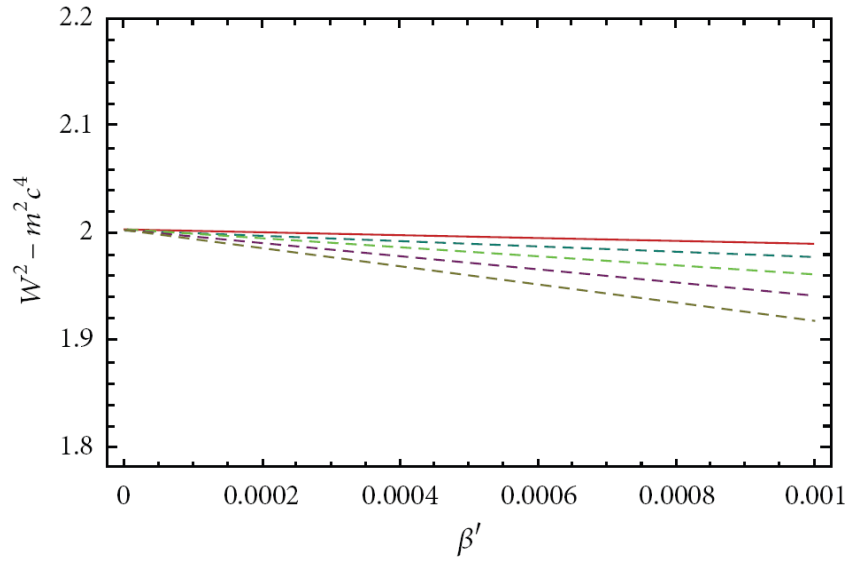


Figure 1 : Rupture de la dégénérescence des énergies en présence de $\hat{\beta}$. Les valeurs de (n,l) considérées sont (2,1), (3,2), (4,3), (5,4) et (6,5) à partir de la première ligne en haut avec $j = l + \frac{1}{2}$, $\beta = 0,001$ et $c = m = \omega = \hbar = 1$ (Des quantités prises sans dimensions).

ment du premier ordre en β and β'

$$W_{nr} = \hbar\omega \left\{ \left(n - j + \frac{1}{2} \right) \left[1 + \frac{m\omega\hbar\beta}{2} \left(n - j + \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{m\omega\hbar\beta'}{4} \left(n + j + \frac{9}{2} \right) - m\omega\hbar\beta' \left(2n + nj + \frac{3}{2} \right) \right\}, \quad j = l + \frac{1}{2} \quad (4.58)$$

et

$$W_{nr} = \hbar\omega \left\{ \left(n + j + \frac{3}{2} \right) \left[1 + \frac{m\omega\hbar\beta}{2} \left(n + j + \frac{3}{2} \right) \right] + \frac{m\omega\hbar\beta'}{4} \left(n - j + \frac{7}{2} \right) - m\omega\hbar\beta' \left(n - nj + \frac{3}{2} \right) \right\}, \quad j = l - \frac{1}{2} \quad (4.59)$$

Si on supprime la déformation $\beta' = 0$ and $\beta = 0$ dans les équations (4.58) et (4.59), on retrouve la quantification standard de l'oscillateur de Dirac dans la limite non-relativiste.

$$W_n = \hbar\omega \left(n - j + \frac{1}{2} \right), \quad j = l + \frac{1}{2} \quad (4.60)$$

$$W_n = \hbar\omega \left(n + j + \frac{3}{2} \right), \quad j = l - \frac{1}{2}$$

Ainsi la valeur moyenne entre l'énergie des deux états à spin down et spin up est donnée par

$$\widetilde{W}_n = \hbar\omega \left(2n' + l + \frac{1}{2} \right) \quad (4.61)$$

avec $n = 2n' + l$, qui est différente de celle qui caractérise l'oscillateur harmonique en 3D par la valeur $\hbar\omega$ ce qui revient au couplage spin-orbite. En présence de distance minimale, cette valeur propre moyenne sera

$$\widetilde{W}_n = \hbar\omega \left\{ \left(2n' + l + \frac{1}{2}\right) \left[1 + \frac{m\omega\hbar\beta}{2} \left(2n' + l + \frac{1}{2}\right) \right] - \frac{m\omega\hbar\beta'}{2} \left(2n' + l - \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (4.62)$$

et des termes additionnels en fonction de β and β' dus au couplage spin-orbite apparaissent après le terme de l'énergie moyenne de l'oscillateur de Dirac en 3D dans une limite non-relativiste (4.61).

0.4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu exactement le problème de l'oscillateur de Dirac en 3D dans le cadre de la mécanique quantique non-commutative par l'application de l'algèbre déformée de Kempf [22, 23, 24, 25] dans l'espace des impulsions. On a déterminé les fonctions propres et le spectre d'énergie par des techniques standard à travers des transformations de variables particulières. Les fonctions propres coïncident exactement avec celles obtenues par [16]. Alors que le spectre d'énergie présente une forme plus générale que celle obtenue dans [16], qu'on retrouve après un développement du premier ordre en β et β' et spécialement dans le cas $\beta' = 0$.

La présence de distance minimale avec $\beta \neq 0$ et $\beta' \neq 0$ pour ce problème révèle un confinement dur exprimé par la dépendance quadratique en nombre quantique n du spectre d'énergie contrairement à sa linearité dans le cas ordinaire. Parmi les fortes conséquences de l'introduction de ce concept, c'est la suppression de la dégénérescence des états quantiques qui existait pour ce problème traité par la mécanique quantique dans sa version commutative. Il était intéressant de voir aussi qu'à la limite non-

relativiste, si on ignorait les termes de couplage spin-orbite, on retrouve le même spectre d'énergie que celui de l'oscillateur harmonique en 3D en présence d'une distance minimale donné par [26]. De ce fait, et dans le cas non-déformé $\beta, \beta' \rightarrow 0$, on a pu retrouver le spectre d'énergie habituel de l'oscillateur de Dirac en 3D.

0.5 L'oscillateur de Dirac à (3+1) dimensions en présence de distance minimale

Durant ces dernières années, un intérêt significatif s'est porté sur l'étude de l'impact de la non-commutativité des coordonnées spatiales en D dimensions concernant les propriétés des systèmes quantiques. Ainsi, plusieurs travaux ont suggérés l'existence d'un cut-off naturel à l'ultraviolet à l'échelle de Planck [16, 22, 23, 24, 25, 26], défini par une incertitude non-nulle d'impulsion ou de position selon le principe d'incertitude d'Heisenberg généralisé. Le problème de l'oscillateur de Dirac qui a connu beaucoup d'applications en physique comme dans le domaine des semiconducteurs [59], a été traité dans ce contexte par l'algèbre déformée de Kempf, établit dans plusieurs travaux. Dans cette section, nous avons à considérer la résolution de l'oscillateur de Dirac en (3+1) dimensions dans l'espace des impulsions par l'introduction de l'algèbre déformée covariante de Lorentz. Cette algèbre covariante déformée est globalement nouvelle car elle ne peut se transformer en l'algèbre déformée de Kempf dans une limite non-relativiste et elle préserve la symétrie de Lorentz. La première tentative pour la résolution de ce système en (1+1) dimensions était réalisée par Quesne et al [41, 42] dans le cas où les paramètres de déformation $\beta' = \gamma = 0$, et alors, on a pu déterminer les fonctions propres et le spectre d'énergie de ce système. Il se trouve qu'il est important de citer qu'en 1940, Snyder établit cette algèbre [49] avec les paramètres $\beta = \gamma = 0$ et en $3D$ où il a proposé d'abandonner l'idée de la continuité de l'espace temps. De ce fait, on va déterminer les fonctions propres et le spectre d'énergie et faire

une étude comparative entre ces résultats et ceux fournis par la section précédente, de nouvelles données émergent et feront l'objet d'une publication [60]

0.5.1 Solution exacte de l'oscillateur de Dirac à (3+1) dimensions par l'algèbre déformée covariante de Lorentz

Commençons par introduire l'algèbre déformée covariante de Lorentz en (1+3) dimensions [41, 42] dans la mesure où les paramètres $\beta' = \gamma = 0$, qui est le cas considéré dans ce travail, et cela à partir des équations (3.8) qui permettent d'avoir l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion écrits comme

$$X^\mu = (1 - \beta p_\nu p^\nu) x^\mu, \quad P^\mu = p^\mu \quad (5.1)$$

Les substitutions $p^2 \rightarrow p_0^2 - p^2 = p_\nu p^\nu$, $p_i x_i \rightarrow p_0 x_0 - p_i x^i = p_\nu x^\nu$ doivent être effectuées dans les relations de commutations déformées covariantes (3.9), où les quadrivecteurs d'impulsion et de position sont représentés par $p_\nu = (p_0, p_i)$ et $x_\nu = (x_0, x_i)$ avec $i = 1, 2, 3$, et on obtient donc

$$\begin{aligned} [X^\mu, P^\nu] &= -i\hbar \left[\left(1 - \beta \left((P^0)^2 - P^2 \right) \right) g^{\mu\nu} \right] \\ [X^\mu, X^\nu] &= i\hbar \left[2\beta (1 - \beta) \left((P^0)^2 - P^2 \right) \right] L^{\mu\nu} \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

où la métrique $g^{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$ et l'opérateur moment angulaire déformé dans l'espace des impulsions devient.

$$L^{\mu\nu} = \left[1 - \beta \left((P^0)^2 - P^2 \right)\right]^{-1} (P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu) \quad (5.3)$$

Il est important de vérifier quelle algèbre peut le moment angulaire déformée satisfaire, dont les détails des calculs sont fournis en Annexe (1)

$$[X^\lambda, L^{\mu\nu}] = 2i\hbar\beta' p^\lambda L^{\mu\nu} \quad (5.4)$$

$$[P^\lambda, L^{\mu\nu}] = i\hbar P^\nu g^{\lambda\mu} - i\hbar P^\mu g^{\lambda\nu}$$

$$[L^{\mu\nu}, L^{\alpha\lambda}] = i\hbar g^{\mu\lambda} L^{\nu\alpha} + i\hbar g^{\nu\alpha} L^{\mu\lambda} + i\hbar g^{\mu\alpha} L^{\lambda\nu} + i\hbar g^{\nu\lambda} L^{\alpha\mu}$$

En introduisant l'algèbre covariante déformée de Lorentz, le produit scalaire assurant l'orthogonalité des états quantiques s'écrit alors comme

$$\int \frac{d^3 p}{[1 - \beta p_\nu p^\nu]} |p\rangle \langle p| = 1 \quad (5.5)$$

La forme covariante de l'équation de Dirac en (1+3) dimensions pour un spineur libre [61] s'écrit comme

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi = 0 \quad (5.6)$$

avec m est la masse au repos de la particule et ψ est la fonction d'onde spinorielle à quatre composantes.

- γ^μ sont quatre matrices 4×4 tel que $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ et $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$ ou $\boldsymbol{\sigma}$ sont les matrices hermitiques de Pauli (2×2) et \mathbf{I} est la matrice unité (2×2).

En effectuant le couplage non-minimal $\mathbf{P} - im\omega\mathbf{X}$ dans l'équation (5.5) où ω est la fréquence de l'oscillateur de Dirac dont l'équation s'écrit

$$(c \gamma (\mathbf{P} - \mathbf{i} \gamma^0 m \omega \mathbf{X}) + \gamma^0 m c^2) \psi = W \psi \quad (5.7)$$

La substitution de $\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$ dans l'équation (5.6), permet de la découpler en deux autres

$$W \psi_a = c \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{P} + i m \omega \mathbf{X}) \psi_b + m c^2 \psi_a \quad (5.8)$$

$$W \psi_b = c \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{P} - i m \omega \mathbf{X}) \psi_a - m c^2 \psi_b$$

En se servant de ces deux dernières expressions (5.8), on a pu déduire une seule équation en fonction de la grande composante ψ_a

$$(W^2 - m^2 c^4) \psi_a = c^2 \{ \mathbf{P}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{X}^2 + i m \omega [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}] + i m^2 \omega^2 \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{X} \wedge \mathbf{X}) \} \psi_a \quad (5.9)$$

Les fonctions d'ondes

A cette étape, en effectuant la décomposition de la fonction d'onde en partie radiale et en partie angulaire, on obtient

$$\psi(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} F(p) \mathcal{Y}_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \\ G(p) \mathcal{Y}_{-\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

avec $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|}$ est le vecteur unitaire. Les relations de commutations tirées des équations (4.12) et (4.13) s'écrivent dans le cadre de l'algèbre covariante déformée de Lorentz comme

$$[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}] = i\hbar \left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2\right)\right) \left(\frac{2\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}}{\hbar} + 3\right) \quad (5.11)$$

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{X} = -i \hbar \alpha \mathbf{L} \quad (5.12)$$

avec le terme $\alpha = 2\beta(1 - \beta) \left((p^0)^2 - p^2\right)$ et \mathbf{L} est l'opérateur moment angulaire orbital. L'action de $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}$ sur la fonction spin-angulaire $\chi_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}})$ est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}\chi_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) = \hbar\kappa\chi_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \quad (5.13)$$

où le nombre quantique κ est égal à $s(2j + 1) - 1$.

L'utilisation des équations (5.11), (5.12) et (5.13) dans l'équation (5.9) permet d'avoir

$$\frac{\left(c^2(p^0)^2 - m^2c^4\right)}{c^2} F(p, p^0) = \left\{ \mathbf{P}^2 + m^2\omega^2\mathbf{X}^2 \right. \quad (5.14)$$

$$\left. + \left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2\right)\right) (2\hbar m^2\omega^2\beta - 2m\omega) \hbar\kappa - 3m\omega\hbar \left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2\right)\right) \right\} F(p, p^0)$$

avec le terme qui représente l'énergie $W = cp^0$.

La représentation de l'opérateur \mathbf{X}^2 dans l'espace d'impulsions se détermine à partir de l'équation (5.1) comme

$$\begin{aligned}
X^2 &= -\hbar^2 \left\{ \left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial p} \right\}^2 \\
&\quad - \hbar^2 \left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right)^2 \times \left\{ \frac{2}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2} \right\}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

une fois remplacée dans l'équation (5.14), on obtient l'expression

$$\begin{aligned}
&\left[m\omega\hbar(2\kappa+3) - 2m^2\omega^2\hbar^2\beta\kappa \right] \left(1 - \beta (p^0)^2 \right) - m^2c^2 + (p^0)^2 \Big] F(p, p^0) \\
&= -m^2\omega^2\hbar^2 \left\{ \left[\left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial p} \right]^2 + \left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right)^2 \frac{2}{p} \frac{\partial}{\partial p} \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \beta (p^0)^2 \right)^2 \frac{L^2}{p^2} - 2\beta \left(1 - \beta (p^0)^2 \right) L^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{-1}{m^2\omega^2\hbar^2} - \beta^2 L^2 + \frac{(2\kappa+3)\beta - 2\beta^2 m\omega\hbar\kappa}{m\omega\hbar} \right] p^2 \right\} F(p, p^0)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Afin de simplifier ultérieurement les étapes du calcul pour se baser sur les techniques utilisées déjà dans le traitement du problème via l'algèbre déformée de Kempf dans la section (5), on définit un nouveau paramètre de déformation

$$\theta = \frac{\beta}{1 - \beta (p^0)^2} \tag{5.17}$$

Alors l'équation (5.16) peut être présentée en fonction de θ comme

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{m\omega\hbar(2\kappa+3) - 2m^2\omega^2\hbar^2\beta\kappa}{1 - \beta (p^0)^2} + \frac{(p^0)^2 - m^2c^2}{(1 - \beta (p^0)^2)^2} \right] F(p, p^0) = \\
&-m^2\omega^2\hbar^2 \left\{ \left[(1 + \theta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right]^2 + (1 + \theta p^2)^2 \frac{2}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2} - \frac{2\beta}{1 - \beta (p^0)^2} L^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(1 - \beta (p^0)^2)^2} \left[\frac{-1}{m^2\omega^2\hbar^2} - \beta^2 L^2 + \frac{(2\kappa+3)\beta - 2\beta^2 m\omega\hbar\kappa}{m\omega\hbar} \right] p^2 \right\} F(p, p^0)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

L'introduction de nouvelles variables se fait par les changements suivants

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \arctan p\sqrt{\theta}, \quad k_c = \sqrt{m\omega\hbar\theta} \tag{5.19}$$

$$\zeta_c = - \left[\frac{2m\omega\hbar\beta\kappa - (2\kappa + 3)}{1 - \beta(p^0)^2} - \frac{1}{m\omega\hbar} \frac{(p^0)^2 - m^2c^2}{(1 - \beta(p^0)^2)^2} \right] \quad (5.20)$$

et permet de donner à l'équation (5.18) la forme suivante

$$\frac{-\zeta_c}{k_c^2} F(p, p^0) = \left\{ \frac{m\omega\hbar}{k_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left[\frac{2m\omega\hbar\sqrt{\theta}}{k_c^2 \operatorname{tg}(\rho\sqrt{\theta})} + \frac{2m\omega\hbar\sqrt{\theta}}{k_c^2} \operatorname{tg}(\rho\sqrt{\theta}) \right] \frac{\partial}{\partial \rho} \right. \quad (5.21)$$

$$\left. - \frac{m\omega\hbar\theta}{k_c^2} L^2 \cot g^2(\rho\sqrt{\theta}) - \frac{2m\omega\hbar}{k_c^2} \theta L^2 + \frac{m\omega\hbar}{k_c^2} \frac{\theta}{\beta^2} \right. \\ \left. \times \left[\frac{-1}{m^2\omega^2\hbar^2} - \beta^2 L^2 + \frac{(2\kappa + 3)\beta - 2\beta^2 m\omega\hbar\kappa}{m\omega\hbar} \right] \operatorname{tg}^2(\rho\sqrt{\theta}) \right\} F(p, p^0)$$

Dans le but de simplifier encore l'écriture de l'expression (5.21), on utilise d'autres transformations de variables tel que $S = \sin\left(\frac{K_c\rho}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)$, $C = \cos\left(\frac{K_c\rho}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)$ et $F = C^{\lambda_c} f(S)$, pour avoir enfin

$$(1 - S^2) f' - \left[2\lambda_c + 1 - \frac{2}{S} \right] f' + \left\{ \left(\frac{\zeta_c}{k_c^2} - L^2 - 3\lambda_c \right) - \frac{L^2}{S^2} \right. \quad (5.22) \\ \left. + \left(\lambda_c^2 - 3\lambda_c - L^2 + \frac{\theta(2\kappa + 3)}{\beta k_c^2} - 2\kappa - \frac{\theta^2}{\beta^2} \frac{1}{k_c^4} \right) \frac{S^2}{C^2} \right\} f = 0$$

Pour éliminer la barrière centrifuge, on néglige le terme proportionnel à $\frac{S^2}{C^2}$

$$\lambda_c^2 - 3\lambda_c - L^2 + \frac{\theta(2\kappa + 3)}{\beta k_c^2} - 2\kappa - \frac{\theta^2}{\beta^2} \frac{1}{k_c^4} = 0 \quad (5.23)$$

ce qui mène aux solutions présentant des valeurs particulières de λ_c

$$\lambda_{c,\pm} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + L^2 - \frac{\theta(2\kappa + 3)}{\beta k_c^2} + 2\kappa + \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 \frac{1}{k_c^4}} \quad (5.24)$$

Pour avoir des états quantiques physiquement acceptables, on doit suivre le même raisonnement que celui considéré en section (4) basé sur le principe d'incertitude d'Heisenberg généralisé ce qui implique le choix de la valeur $\lambda_{c,+}$.

Une équation différentielle équivalente à (5.22) et plus simple encore pourra être obtenue en effectuant ces transformations $f(S) = S^l g(S)$ et $z = 2S^2 - 1$, pour arriver à

$$(1 - z^2) g'(z) + [(b - a) - (a + b + 2)z] g'(z) \quad (5.25)$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k_c^2} - 2L^2 - (2l + 3)\lambda_c + l \right] g(z) = 0$$

où on définit de nouveaux paramètres donnés par

$$a = \lambda_{+,c} - \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2} + l \text{ et } n' = \frac{n - l}{2} \quad (5.26)$$

où n' est un entier positif. Maintenant si on impose cette condition

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k_c^2} - 2L^2 - (2l + 3)\lambda_{+,c} + l \right] = n'(n' + a + b + 1) \quad (5.27)$$

on peut réécrire l'équation (5.25) sous la forme suivante

$$(1 - z^2) g'(z) + [(b - a) - (a + b + 2)z] g'(z) \\ + n'(n' + a + b + 1) g(z) = 0 \quad (5.28)$$

qui admet enfin une solution en terme de polynôme de Jacobi $P_n^{(a,b)}(z)$

$$g(z) = NP_n^{(a,b)}(z) \quad (5.29)$$

on N représente la constante de normalisation.

Dans ce cas on pourra donner l'expression de la grande composante radiale $F(z)$ si on effectue un chemin inverse avec nos transformations de variables

$$F(z) = N 2^{-\frac{a+b+1}{2}} (1-z)^{\frac{a+\frac{3}{2}}{2}} (1+z)^{\frac{(b-\frac{1}{2})}{2}} P_n^{(a,b)}(z) \quad (5.30)$$

et le retour à l'ancienne variable p , nous fournit

$$F(p,p^0) = N\sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}} (1+\theta p^2)^{-\frac{a+b+1}{2}} p^{b-\frac{1}{2}} P_n^{(a,b)}\left(\frac{\theta p^2 - 1}{\theta p^2 + 1}\right) \quad (5.31)$$

Si on revient à la petite composante de la fonction d'onde $\psi_b(p,p^0)$ et selon l'équation (5.8), on a

$$\psi_b(p,p^0) = \frac{c \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{P} - im\omega \mathbf{X})}{W + mc^2} \psi_a(p,p^0) \quad (5.32)$$

En se servant des relations données par [16] dans le cadre de l'algèbre covariante déformée de Lorentz, on déduit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{X} &= i\hbar \sigma_i \left(\left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\ \sigma_i \frac{\partial}{\partial p_i} &= \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L} + 2}{p} \right) \sigma_p = \sigma_p \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}}{p} \right) \\ \frac{\partial}{\partial p} \sigma_p &= \sigma_p \frac{\partial}{\partial p} \end{aligned} \quad (5.33)$$

avec $\sigma_p = \frac{\sigma \mathbf{p}}{p}$, pour les insérer dans l'équation (5.32) et avoir l'expression

$$\psi_b(p, p^0) = \frac{c}{W + mc^2} \sigma_p \quad (5.34)$$

$$\left[p + m\omega\hbar \left(\left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sigma \mathbf{L}}{p} \right) \right) \right] \psi_a(p, p^0)$$

avec

$$\sigma_p \mathcal{Z}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) = -\mathcal{Z}_{-\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \quad (5.35)$$

Des simplifications réalisées dans la formule de $\psi_b(p, p^0)$, déterminent la petite composante radiale $G(p, p^0)$ comme

$$\begin{aligned} G(p, p^0) = & \frac{-m\omega\hbar c}{W + mc^2} \left[\left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \beta\hbar\kappa \right) p \right. \\ & \left. + \left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\left(1 - \beta (p^0)^2 \right) \hbar\kappa}{p} \right] F(p, p^0) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Cette dernière forme est équivalente à celle obtenue pour le problème de l'oscillateur de Dirac en 3D via l'algèbre déformée de Kempf [56], si on effectue le remplacement $\omega \longrightarrow \omega'$ de sorte que

$$\omega' = \frac{\beta}{\theta} \omega = \left(1 - \beta (p^0)^2 \right) \omega \quad (5.37)$$

ce qui mène à

$$\begin{aligned}
G(p, p^0) &= \frac{-m\omega\hbar c}{W + mc^2} \left[\left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \theta\hbar\kappa \right) p \right. \\
&\quad \left. + (1 + \theta p^2) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\hbar\kappa}{p} + (1 + \theta p^2) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\hbar\kappa}{p} \right] F(p, p^0)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Il sera facile de normaliser les fonctions propres de l'oscillateur de Dirac avec l'inclusion de ces décompositions

$$\begin{aligned}
F(p, p^0) &= \frac{1}{p} R_1(p, p^0) \\
G(p, p^0) &= \frac{1}{p} R_2(p, p^0)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

d'où l'expression de $R_1(p, p^0)$ est évidente

$$R_1(p, p^0) = N\sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}} p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} P_n^{(a,b)}(z) \tag{5.40}$$

avec $f(p) = 1 + \theta p^2$

Le retour à la petite composante radiale $R_2(p, p^0)$ exige la séparation entre les deux états du spin suivant [16, 56], ainsi on aura

Pour $s = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
R_2(p, p^0) &= \frac{-m\omega\hbar c N\sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} \left[f \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \theta\hbar\kappa \right) p - \frac{\hbar\kappa}{p} \right] \\
&\quad p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} P_n^{(a,b)}(z) \\
&= \frac{-2m\omega\hbar c N\sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} (1+z) \frac{d}{dz} P_n^{(a,b)}(z) \\
&= \frac{-2m\omega\hbar c \theta (a+b+n+1) N\sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b+\frac{3}{2}} f^{-\frac{a+b+3}{2}} \\
&\quad P_{n-1}^{(a+1, b+1)}(z)
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Pour $s = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
R_2(p, p^0) &= \frac{-m\omega\hbar c N\sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} \left[f \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \theta\hbar(\kappa + 1) \right) p \right. \\
&\quad \left. - \frac{\hbar(\kappa + 1)}{p} \right] p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b}{2}+1} P_n^{(a,b)}(z) \\
&= \frac{-2m\omega\hbar c N\sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b}{2}+1} \left[(1+z) \frac{d}{dz} + b \right] P_n^{(a,b)}(z) \\
&= \frac{-2m\omega\hbar c (b+n) N\sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b}{2}+1} P_n^{(a+1,b-1)}(z)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Les expressions obtenues dans les équations (5.41) et (5.42) sont basées sur quelques propriétés que satisfont les polynômes de Jacobi tirées de la référence [58]

Afin de déterminer la constante de normalisation N , la relation de fermeture déformée doit être donnée par

$$\frac{\theta}{\beta} \int_0^\infty \frac{d^3p}{f(p, p^0)} \left(|R_1(p, p^0)|^2 + |R_2(p, p^0)|^2 \right) = 1 \tag{5.43}$$

ou les composantes radiales de la fonction d'onde de l'oscillateur de Dirac en (1 + 3) dimensions traitées par l'algèbre covariante déformée de Lorentz $F(p, p^0)$ et $G(p, p^0)$ sont enfin déterminées

$$\begin{aligned}
F(p, p^0) &= \left(\frac{W_c + mc^2}{2W_c} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad A^{(n)}(a, b) p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}(a+b+1)} P_n^{(a,b)}(z)
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
G(p, p^0) &= -\sigma \left(\frac{W_c - mc^2}{2W_c} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad A^{(N)}(\tilde{a}, \tilde{b}) p^{\tilde{b}-\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}(\tilde{a}+\tilde{b}+1)} P_N^{(\tilde{a}, \tilde{b})}(z)
\end{aligned}$$

avec

$$A^{(n)}(a, b) = \left(\frac{2\theta^{b+1} (a + b + 2n' + 1) n'! \Gamma(a + b + n' + 1)}{\Gamma(a + n' + 1) \Gamma(b + n' + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.45)$$

$$\tilde{a} = a + 1 \quad \tilde{b} = b + 2s \quad N = n' - s - \frac{1}{2} \quad \sigma = \frac{W_c}{|W_c|} \quad (5.46)$$

et $n' = 0, 1, 2, \dots$, à l'exception des états où $s = \frac{1}{2}$ and $\sigma = -1$ on a $n' = 1, 2, 3, \dots$.

Le spectre d'énergie

La substitution de l'expression des paramètres $n', a, b, \lambda_{+,c}$ et ζ dans l'équation (5.27) permet de déterminer le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac en $(3 + 1)$ dimensions traité par l'algèbre covariante déformée de Lorentz, donné par

$$W_c^2 = c^2 (p^0)^2 = m^2 c^4 \left(\frac{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2} \Delta}{1 + \hbar\omega m \beta \Delta} \right) \quad (5.47)$$

où

$$\Delta = 2 \left(n + \frac{3}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} & \times \sqrt{(\hbar\omega m \beta)^2 \left[L^2 + \frac{9}{4} \right] - (3 + 2\kappa) \hbar\omega m \beta + 2\hbar^2 \omega^2 m^2 \beta^2 \kappa + 1} \\ & + \hbar\omega m \beta \left[n^2 + L^2 + 3n + \frac{9}{2} \right] + 2\kappa (\hbar\omega m \beta - 1) - 3 \end{aligned} \quad (5.48)$$

Les caractéristiques du spectre: - La comparaison de ce résultat W_c avec celui qui correspond au spectre d'énergie W_{nc} , équation (4.52), de l'oscillateur de Dirac

en $3D$ traité par l'algèbre non-covariante déformée de Kempf [56] pour le cas où les paramètres de déformation $\beta = \gamma = 0$, nous permet d'établir un lien intéressant entre les deux spectres

$$W_c^2 = \frac{W_{nc}^2}{1 + \hbar\omega m\beta\Delta} \quad (5.49)$$

d'où

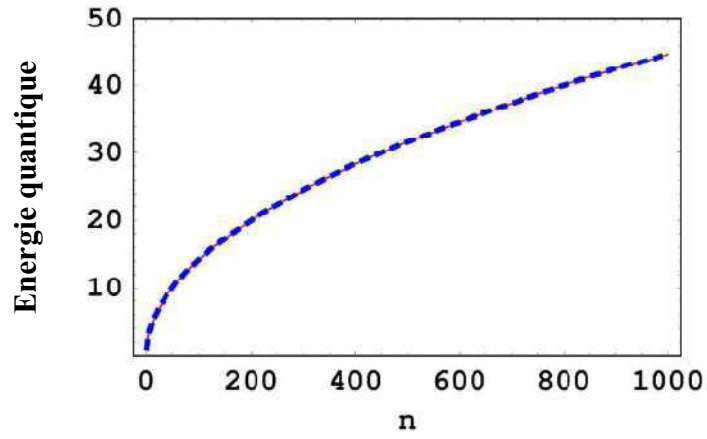
$$W_{nc}^2 = m^2 c^4 \left(1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2} \Delta \right) \quad (5.50)$$

- D'après la figure (2), on constate que les deux courbes représentant l'énergie W_c et l'énergie W_{nc} se confondent pour le cas $\beta = 0$, et leur séparation croit par la croissance du paramètre de déformation β d'un graphe à l'autre ou par la croissance du nombre quantique n dans le même graphe.

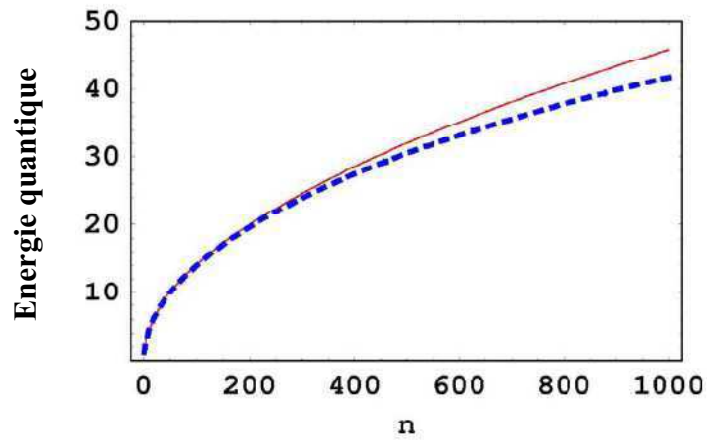
- Le spectre d'énergie obtenu W_c est borné, qui est une caractéristique importante, elle est induite par la présence du terme $(1 + \hbar\omega m\beta\Delta)^{-1}$ au dénominateur de l'expression (5.47), à cette limite $\Delta \rightarrow \hbar\omega m\beta n^2$, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_c = \frac{c}{\sqrt{\beta}} \quad (5.51)$$

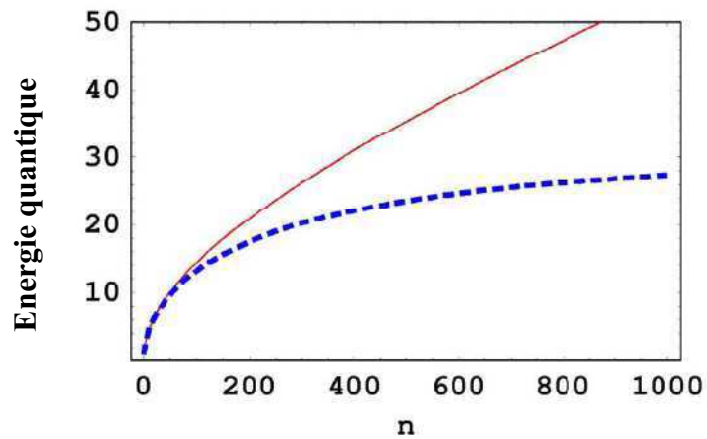
- La supposition admettant l'augmentation de la valeur de l'énergie W_c avec l'augmentation de la valeur du nombre quantique n , implique que $1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2} \Delta \succ 1 + \hbar\omega m\beta\Delta$, d'où résulte une autre caractéristique importante donnant une limite au paramètre de déformation β , qui représente le même résultat de la référence [41, 42],



(a)



(b)



(c)

Figure 2 : Comparaison entre W_c (ligne discrète) et W_{nc} (ligne continue) dans le cas où $\beta = 0$ (a), $\beta = 0,0001$ (b) et $\beta = 0,001$ (c) avec $c = m = \omega = L = \kappa = \hbar = 1$ (Des quantités prises sans dimensions).

en vérifiant la relation

$$\beta m^2 c^2 \prec 1 \quad (5.52)$$

- Dans la limite *non-déformée* ou le paramètre $\beta = 0$, et selon l'équation (5.49), on trouve que les deux spectres traités par l'algèbre déformée de Kempf ou celle de Lorentz sont égaux, $W_c = W_{nc}$, un résultat confirmé par la figure (1a). Ainsi on obtient

$$W_c^2 - m^2 c^4 = 2\hbar\omega m c^2 (n - \kappa) \quad (5.53)$$

tel que

$$\begin{aligned} W_c^2 - m^2 c^4 &= 2m\omega\hbar c^2 \left[n - j + \frac{1}{2} \right], s = \frac{1}{2} \\ W_c^2 - m^2 c^4 &= 2m\omega\hbar c^2 \left[n + j + \frac{3}{2} \right], s = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5.54)$$

qui représentent exactement les niveaux d'énergie habituels de l'oscillateur de Dirac en $3D$.

- Dans la limite *non-relativiste*, obtenue en supposant que $W_c = mc^2 + E_c$ tel que $E_c \ll mc^2$, ou E_c représente le spectre d'énergie non-relativiste, on déduira que

$$E_c = \frac{(1 - \beta m^2 c^2)}{(1 + \beta m\omega\hbar\Delta)} E_{nc} \quad (5.55)$$

Cette relation prouve que l'algèbre déformée non-covariante de Kempf n'est pas une limite non-relativiste à l'algèbre déformée covariante de Lorentz, E_{nc} représente le spectre d'énergie non-relativiste issu par l'algèbre déformée de Kempf (4.57) . On

pourra aussi déduire la condition imposée sur le paramètre de déformation β (5.52) de la limite non-relativiste (5.55).

Définitions de nouvelles limites: A partir de l'équation (5.17), on pourra déduire la dépendance du paramètre de déformation β du paramètre θ

$$\beta = \frac{\theta}{1 + \theta (p^0)^2} \quad (5.56)$$

En utilisant la condition $\beta m^2 c^2 \prec 1$ donnée par (5.52) et l'expression de l'énergie totale relativiste

$W^2 = c^2 (p^0)^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$, on arrivera à déterminer deux limites:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \prec \frac{1}{\theta} \quad (5.57)$$

tel que \mathbf{p} est la norme de l'opérateur vecteur d'impulsion tridimensionnel, suivie du quadrivecteur d'impulsion

$$p^\mu p_\mu \prec \frac{1}{\beta} \quad (5.58)$$

ce qui exprime que le cutt-off de l'UV est naturellement fournit par l'algèbre déformée covariante de Lorentz.

L'exploitation de la borne supérieure de l'énergie de l'oscillateur de Dirac $\frac{c}{\sqrt{\beta}}$ donnée par l'équation (5.51), nous permet d'établir la condition

$$\beta (p^0)^2 \prec 1 \quad (5.59)$$

que doit satisfaire les états quantiques physiquement acceptables. On pourra obtenir aussi la même chose par le produit scalaire déformé (5.43) dans le cas sans singularités.

0.5.2 Conclusion

Dans ce travail, on a solutionné le problème de l'oscillateur de Dirac dans l'espace-temps à (3+1) dimensions par l'utilisation d'une nouvelle algèbre introduite par [41, 42] qui est l'algèbre déformée covariante de Lorentz dans le cas où les paramètres de déformation $\beta = \gamma = 0$. Les fonctions propres et les valeurs propres de l'oscillateur ont été déterminées par des techniques standards basées sur des transformations de variables particulières. Il est important de mentionner que le spectre d'énergie obtenu est différent à celui issu déjà par l'algèbre déformée de Kempf [56] par la présence du terme $(1 + \beta m \omega \hbar \Delta)^{-1}$ ce qui confirme l'aspect nouveau de l'algèbre covariante de Lorentz. On a trouvé que le spectre d'énergie est borné $\lim_{c_n \rightarrow \infty} W_{c_n \rightarrow \infty} = \frac{c}{\sqrt{\beta}}$ contrairement à celui qui est fournit par l'algèbre déformée de Kempf. Ce résultat est surprenant comparé au spectre de l'oscillateur de Dirac usuel ou les niveaux d'énergie sont distants. Donc on peut prévoir l'effet de la déformation de l'espace sur la valeur de l'énergie totale relativiste qui sera une dépendance inverse c-a-d lorsque la déformation caractérisée par le paramètre β augmente, l'énergie d'un mode d'oscillation diminue. En exploitant la limite non-relativiste, on a pu prouver que l'algèbre déformée de Kempf ne peut représenter l'algèbre covariante de Lorentz. A la limite non-déformée $\beta \rightarrow 0$, on a reproduit les niveaux d'énergie de l'oscillateur de Dirac ordinaire. Les composantes de la fonction d'onde déterminées prennent la même forme

que celles fournit via l'algèbre déformée de Kempf [56] en $3D$ sauf que la constante de normalisation N et les paramètres a, b sont dépendants de p^0 qui se manifeste dans le paramètre de déformation θ .

0.6 L'équation de Dirac à (3+1) dimensions dans un champs magnétique constant en présence de distance minimale

La prise en considération des effets gravitationnels quantiques à l'échelle de Planck mise en évidence par la présence de la distance minimale ΔX_{\min} , nous a poussé dans cette partie à s'intéresser à la résolution de l'équation de Dirac en (3+1) dimensions dans l'espace des impulsions et dans le cadre de l'algèbre déformée covariante de Lorentz [62], dont l'origine et la représentation ont été déjà discutés dans la section (3) et (5) [41, 42] pour une particule de spin $\frac{1}{2}$ soumise à un champ magnétique constant B . A hautes températures, on a essayé de tester l'impact de la présence de distance minimale sur quelques propriétés thermodynamiques.

0.6.1 Résolution de l'équation de Dirac à (3+1) dimensions en présence de distance minimale

La substitution de $\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ dans l'équation de Dirac pour une particule libre nous donne

$$\left(c \boldsymbol{\alpha} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) + \beta M c^2 \right) \psi = W \psi \quad (6.1)$$

ou les matrices de Dirac $\boldsymbol{\alpha}$ et β sont présentées par

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

et $\psi(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \psi_a(\mathbf{P}) \\ \psi_b(\mathbf{P}) \end{pmatrix}$ est la fonction d'onde décomposée en grande $\psi_a(\mathbf{P})$ et petite composante $\psi_b(\mathbf{P})$.

Alors l'équation de Dirac (6.1) peut s'écrire en fonction de la grande composante $\psi_a(\mathbf{P})$ comme

$$c^2 \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi_a(\mathbf{P}) = (W^2 - M^2 c^4) \psi_a(\mathbf{P}) \quad (6.3)$$

et en se servant de l'une des propriétés des matrices de Pauli $\boldsymbol{\sigma} A \boldsymbol{\sigma} B = A \cdot B + i \boldsymbol{\sigma} (A \times B)$, on obtient

$$c^2 \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi_a(\mathbf{P}) = c^2 \left[\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + i \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \wedge \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] \psi_a(\mathbf{P}) \quad (6.4)$$

- Le potentiel vecteur \mathbf{A} est pris dans la gauge symétrique:

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2} (-y, x, 0) \quad (6.5)$$

ou B est l'amplitude du champ magnétique avec $rot \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Dans une première étape, une manipulation des calculs basée sur l'algèbre déformée de Kempf donnée par les relations (3.1) et (3.5), dans le cas où les paramètres de déformations $\beta' = \gamma = 0$, nous conduit au développement suivant:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 &= P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + \frac{e^2 B^2}{c^2} \frac{B^2}{4} (X^2 + Y^2) \\ &\quad - \frac{e}{c} B (1 + \beta P^2) L_z \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \Lambda \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) &= i\hbar \left[\frac{e}{c} (1 + \beta P^2) B \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{e^2}{c^2} \beta (1 + \beta P^2) \left(\frac{B}{2}\right)^2 L_z \right] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (6.7)$$

L_z est la troisième composante de l'opérateur moment angulaire.

En effet, on pourra avoir une expression de l'équation de Dirac à 3 dimensions et en présence de distance minimale avec un potentiel vecteur dans la gauge symétrique (6.5) présentée par

$$c^2 \left\{ P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + \frac{e^2 B^2}{c^2} \frac{B^2}{4} \mathbf{r}^2 - \frac{e}{c} B (1 + \beta P^2) (L_z + \hbar \sigma_z) \right. \quad (6.8)$$

$$\left. + \frac{e^2 B^2}{c^2} \frac{B^2}{2} \hbar \beta (1 + \beta P^2) L_z \sigma_z \right\} \psi_a(\mathbf{P}) = (W^2 - M^2 c^4) \psi_a(\mathbf{P})$$

avec l'opérateur $\mathbf{r}^2 = X_i^2, i = 1, 2$.

- Dans le cas sans déformation $\beta = 0$, on retrouve l'équation de Dirac ordinaire en 3D en présence d'un potentiel vecteur $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$ en fonction de la grande composante $\psi_a(\mathbf{P})$ [57]

$$c^2 \left\{ P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + \frac{e^2 B^2}{c^2} \frac{B^2}{4} \mathbf{r}^2 - \frac{e}{c} B (L_z + \hbar \sigma_z) \right\} \psi_a(\mathbf{P}) = (W^2 - M^2 c^4) \psi_a(\mathbf{P}) \quad (6.9)$$

En prenant l'expression du vecteur de position \mathbf{r} qui est à deux dimensions tirée de la référence [26] et par l'introduction de l'algèbre déformée covariante de Lorentz présentée par les relations déjà établis en (5.1), on aura la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^2 = & -\hbar^2 \left\{ \left(1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 - \mathbf{p}^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\}^2 \\ & -\hbar^2 \left(1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 - \mathbf{p}^2 \right) \right)^2 \times \left\{ \frac{1}{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{L^2}{\mathbf{p}^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Il est important de décomposer la fonction d'onde en partie radiale et en partie angulaire

$$\psi(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \psi_a(\mathbf{P}) \\ \psi_b(\mathbf{P}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p) \mathcal{X}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \\ G(p) \mathcal{X}_{-\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

avec le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|}$, et de définir l'action de l'opérateur de spin σ_z , l'opérateur moment angulaire L_z et l'opérateur du couplage $\sigma_z L_z$ sur la fonction spinorielle $\mathcal{X}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}})$ par leurs valeurs propres correspondantes ϵ, l et κ respectivement

$$\begin{aligned} \sigma_z \mathcal{X}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) &= \epsilon \mathcal{X}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \\ L_z \mathcal{X}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) &= \hbar m \mathcal{X}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \\ \sigma_z L_z \mathcal{X}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) &= \hbar \kappa \mathcal{X}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

ou $\epsilon = \pm 1$ et $\kappa = s(2j+1) - 1$ alors que $|m| = l$ avec $l = 0, 1, 2, \dots$ puisqu'on est à deux dimensions selon la référence [36].

Le remplacement de la formule de \mathbf{r}^2 (6.10) et le résultat des équations (6.12) dans l'équation (6.9) permet d'avoir

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 \hbar^2 \left\{ \left[\left(1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 - \mathbf{p}^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right]^2 \right. \\
& + \left(1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 - \mathbf{p}^2 \right) \right)^2 \frac{1}{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \left(1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 \right) \right)^2 \frac{\mathbf{L}^2}{\mathbf{p}^2} - 2\beta \left(1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 \right) \right) L^2 \\
& \left. + \left[\frac{-1}{\omega^2 \hbar^2} - \beta^2 L^2 + \frac{2\beta(m+\epsilon) - 2\beta^2 \omega \hbar \kappa}{\omega \hbar} \right] \mathbf{p}^2 \right\} F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^0) = \\
& \left[(2\omega \hbar (m + \epsilon) - 2\omega^2 \hbar^2 \beta \kappa) \left(1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 \right) \right) \right. \\
& \left. - M^2 c^2 + (\mathbf{p}^0)^2 - \mathbf{p}_z^2 \right] F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^0)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Pour profiter de la technique utilisée auparavant dans la section (5), on va remplacer le terme $\frac{eB}{2c}$ par ω et naturellement l'énergie relativiste $W = c\mathbf{p}^0$ et en effectuant maintenant le changement de variable suivant:

$$\alpha = \frac{\beta}{1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 \right)} \tag{6.14}$$

l'équation (6.13) s'écrira dans une autre forme qui est:

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 \hbar^2 \left\{ \left[(1 + \alpha \mathbf{p}^2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right]^2 + (1 + \alpha \mathbf{p}^2)^2 \frac{1}{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\mathbf{L}^2}{\mathbf{p}^2} \right. \\
& \left. - \frac{2\beta}{1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 \right)} L^2 + \frac{1}{\left(1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 \right) \right)^2} \right. \\
& \left. \times \left[\frac{-1}{\omega^2 \hbar^2} - \beta^2 L^2 + \frac{2\beta(m+\epsilon) - 2\beta^2 \omega \hbar \kappa}{\omega \hbar} \right] \mathbf{p}^2 \right\} F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^0) = \\
& \left[\frac{2\omega \hbar (m + \epsilon) - 2\omega^2 \hbar^2 \beta \kappa}{1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 \right)} + \frac{\left((\mathbf{p}^0)^2 - \mathbf{p}_z^2 - M^2 c^2 \right)}{\left(1 - \beta \left((\mathbf{p}^0)^2 \right) \right)^2} \right] F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^0)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

A cette étape, le problème s'est convertit à un traitement à deux dimensions pour l'oscillateur de Dirac de fréquence $\omega = \frac{eB}{2c}$ traité par l'algèbre covariante déformée de Lorentz à l'exception de la présence explicite de la composante \mathbf{p}_z à travers son carré \mathbf{p}_z^2 qui est constant devant les anciens termes d'énergie.

- Une simplification de la dernière équation se fait par les changements suivants

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan p\sqrt{\alpha}, \quad k = \sqrt{\omega\hbar\alpha}, \quad \xi = \frac{\rho}{\sqrt{\omega\hbar}} \quad (6.16)$$

et aussi par

$$\zeta = - \left[\frac{2\omega\hbar\beta\kappa - 2(m + \epsilon)}{1 - \beta(\mathbf{p}^0)^2} - \frac{1}{\omega\hbar} \frac{(\mathbf{p}^0)^2 - \mathbf{p}_z^2 - M^2c^2}{(1 - \beta(\mathbf{p}^0)^2)^2} \right] \quad (6.17)$$

et sa multiplication par $\frac{-1}{k^2}$ mène à

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta}{k^2} F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^0) &= \left\{ \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[\frac{\omega\hbar\sqrt{\alpha}}{k^2 tg(\rho\sqrt{\alpha})} + \frac{\omega\hbar\sqrt{\alpha}}{k^2} tg(\rho\sqrt{\alpha}) \right] \frac{\partial}{\partial \rho} \right. \\ &\quad - \frac{\omega\hbar\alpha}{k^2} L^2 \cot g^2(\rho\sqrt{\alpha}) - \frac{2\omega\hbar}{k^2} \alpha L^2 \\ &\quad \left. + \frac{\omega\hbar}{k^2} \frac{\alpha}{\beta^2} \left[\frac{-1}{\omega^2\hbar^2} - \beta^2 L^2 + \frac{2\beta(m + \epsilon) - 2\beta^2\omega\hbar\kappa}{\omega\hbar} \right] \right. \\ &\quad \left. \times tg^2(\rho\sqrt{\theta}) \right\} F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^0) \quad (6.18) \end{aligned}$$

Alors l'équation (6.18) devient

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{k} \left[\frac{c}{s} + \frac{s}{c} \right] \frac{\partial F}{\partial \xi} + \quad (6.19)$$

$$\left\{ \left(\frac{\zeta}{k^2} - L^2 \right) - \frac{L^2}{s^2} + \left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2} \frac{1}{k^4} - L^2 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{2(m + \epsilon)}{k^2} - 2\kappa \right) \frac{s^2}{c^2} \right\} F = 0$$

en effectuant les transformations $S = \sin(k\xi)$, $C = \cos(k\xi)$ et en plus si le changement

$$F = C^\lambda f(s) \quad (6.20)$$

est réalisé, on obtient cette forme

$$(1 - S^2) f' + \left[- (2\lambda + 1) S + \frac{1}{S} \right] f + \left\{ \left(\frac{\zeta}{k^2} - L^2 - 2\lambda \right) - \frac{L^2}{S^2} + \left(\lambda^2 - 2\lambda - L^2 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{2(m + \epsilon)}{k^2} - 2\kappa - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \frac{1}{k^4} \right) \frac{S^2}{C^2} \right\} f = 0 \quad (6.21)$$

La détermination de la valeur de λ se fait à partir de la suppression du terme devant $\frac{S^2}{C^2}$

$$\lambda^2 - 2\lambda - L^2 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{2(m + \epsilon)}{k^2} - 2\kappa - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \frac{1}{k^4} = 0 \quad (6.22)$$

Ainsi, les racines correspondantes sont données par

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1 + L^2 - \frac{\alpha}{\beta} \frac{2(m + \epsilon)}{k^2} + 2\kappa + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \frac{1}{k^4}} \quad (6.23)$$

Le choix du signe de la valeur de λ se fixera d'une manière identique à celle traitée dans la section (4) en respectant le critère des états quantiques physiquement acceptables, se qui mène à prendre $\lambda = \lambda_+$.

Les niveaux d'énergie

Pour avancer encore dans les étapes du calcul, on réalise les remplacements:

$$f(S) = S^l g(S) \quad (6.24)$$

et

$$z = 2S^2 - 1 \quad (6.25)$$

L'équation (6.21) devient alors:

$$(1 - z^2) g'(z) + [(b - a) - (a + b + 2)z] g'(z) + \quad (6.26)$$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k^2} - 2l^2 - 2\lambda(l + 1) \right] g(z) = 0$$

Une solution polynômiale de cette dernière implique que

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k^2} - 2l^2 - 2\lambda(l + 1) \right] = n'(n' + a + b + 1) \quad (6.27)$$

avec

$$a = \lambda - 1, b = l - \frac{1}{2} \text{ et } n' = \frac{n - l}{2} \quad (6.28)$$

En substituant l'expression de n', a, b (6.28) et de λ (6.23) ainsi que celle de ζ (6.17) dans l'équation (6.27), on arrivera à la forme générale du spectre d'énergie

$$E^2 = c^2 (\mathbf{p}^0)^2 = \frac{c^2 \hbar \omega \{A\} + M^2 c^4 + c^2 p_z^2}{1 + \beta \omega \hbar \{A\}} \quad (6.29)$$

tel que:

$$A = 2(n + 1) \sqrt{1 + (\hbar \omega \beta)^2 (1 + l^2) + 2\hbar \omega \beta (-l - \epsilon + \hbar \omega \beta l \epsilon)} \quad (6.30)$$

$$+ 2 \left[\frac{\hbar \omega \beta}{2} (n^2 + l^2 + n + l + 2) + (-l - \epsilon + \hbar \omega \beta l \epsilon) \right]$$

- Il est important de noter que la forme globale du spectre d'énergie est celle d'un oscillateur de Dirac de fréquence ω traité dans l'espace des impulsions par l'algèbre covariante déformée de Lorentz en $(3 + 1)$ dimensions , sauf qu'il existe un terme additionnel constant $c^2 p_z^2$ présenté par la composante de l'opérateur impulsion suivant l'axe z . La différence dans l'expression de A par rapport à celle de Δ dans l'équation (5.48) est due au potentiel vecteur pris dans la gauge symétrique donnée.

Le cas non-déformé - Si on supprime la déformation de l'espace en prenant la limite $\beta = 0$, le spectre d'énergie obtenu sera

$$E^2 - M^2 c^4 = 2c^2 \hbar \omega \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) - (l + \epsilon) \right] + c^2 p_z^2 \quad (6.31)$$

et on retrouve ainsi les niveaux d'énergie de l'oscillateur de Dirac usuels devant le terme $c^2 p_z^2$ [57] provenant du potentiel vecteur considéré dans ce problème.

Le cas non-relativiste - A la limite non-relativiste, on suppose que $E = mc^2 + E_{nr}$ tel que $E_{nr} \ll mc^2$ ou E_{nr} représente le spectre d'énergie

non-relativiste déduit en

$$E_{nr} = (1 + \hbar \omega \beta \{A\})^{-1} \left[\frac{p_z^2}{2M} + (1 - \beta M^2 c^2) \frac{\hbar \omega}{2} \{A\} \right] \quad (6.32)$$

Devant le terme $\frac{p_z^2}{2M}$ on retrouve toujours la forme du spectre d'énergie à la limite non-relativiste de l'oscillateur de Dirac traité par l'algèbre covariante déformée en section (5). Ce résultat prouve encore une fois que l'algèbre déformée non-covariante de Kempf n'est pas une limite non-relativiste à l'algèbre déformée covariante de Lorentz

car on n'est pas exactement sur le spectre déterminé en [36] par la résolution de l'équation de Pauli, qui est une limite non-relativiste à l'équation de Dirac, dans le cadre de l'algèbre déformée de Kempf.

- Sauf que, si on supprime la déformation à cette limite $\beta = 0$, on retombe sur l'énergie d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ chargée dans un champ magnétique constant dans le cas non déformé déjà traitée par Nouicer en [36].

$$E = \frac{p_z^2}{2M} + \hbar\omega [(n+1) - (l+\epsilon)] \quad (6.33)$$

Propriétés thermodynamiques

Avant d'entamer l'étude de quelques propriétés thermodynamiques du système à hautes températures, en présence de distance minimale, on prend certaines considérations:

- On va ignorer la contribution du spin dans l'expression de l'énergie (6.30) ce qui donne

$$A = 2(n+1) \sqrt{1 + (\hbar\omega\beta)^2 (1+l^2) - 2\hbar\omega\beta l} + 2 \left[\frac{\hbar\omega\beta}{2} (n^2 + l^2 + n + l + 2) - l \right] \quad (6.34)$$

Tel que le terme $\hbar\omega\beta \ll 1$, cela revient au rapport entre la distance minimale induite par le Principe d'Incertitude d'Heisenberg Généralisé et la longueur caractéristique de l'oscillateur l_c exprimé par $\left(\frac{\Delta X_{\min}}{l_c}\right)^2 = \hbar\omega\beta$, qui est une petite valeur

[36], et par conséquent on pourra développer en premier ordre en $\hbar\omega\beta$ l'expression de l'énergie donnée par (6.29) et (6.34)

$$E^2 = M^2c^4 + c^2p_z^2 + c^2\hbar\omega \{2(n-l+1) \quad (6.35)$$

$$+ \hbar\omega\beta \left[-3n^2 - 3l^2 + 6nl - 7n + 7l - 2 - \frac{2}{\hbar\omega} (n-l+1) (M^2c^2 + p_z^2) \right] \}$$

- On réécrit l'énergie en terme du nombre quantique n_g défini par: $n_g = n' + \frac{|l-l|}{2}$
tel que $n' = \frac{n-|l|}{2}$

On obtient donc la nouvelle forme du spectre d'énergie

$$E^2 = M^2c^4 + c^2p_z^2 + 4c^2\hbar\omega \left(n_g + \frac{1}{2} \right) \quad (6.36)$$

$$+ c^2\hbar\omega \left(\frac{\Delta X_{\min}}{l_c} \right)^2 \left[-12n_g^2 - 14n_g - 2 - \frac{4}{\hbar\omega} \left(n_g + \frac{1}{2} \right) (M^2c^2 + p_z^2) \right]$$

- Et aussi, on se servira des notations suivantes $z = e^{\tilde{\beta}\mu}$ avec $\tilde{\beta} = 1/KT$ ou μ est le potentiel chimique.

La densité d'états d'une particule Commençons par donner l'expression de la densité d'état d'une particule $g(n_g)$ définie en [36]:

$$g(n_g) = \frac{V^{\frac{2}{3}}}{4\pi^2\hbar^2} \frac{1}{1 + \beta p_z^2} \int_{En_g \prec E \prec E_{n_g+1}} \frac{dp_x dp_y}{1 + \theta p^2} \quad (6.37)$$

tel que $V^{\frac{2}{3}}$ est une surface et

$$\theta = \frac{\beta}{1 + \beta p_z^2}, p^2 = p_x^2 + p_y^2 \quad (6.38)$$

En utilisant les coordonnées polaires, la densité d'états d'une particule devient

$$g(n_g) = \frac{V^{\frac{2}{3}}}{4\pi\hbar^2\beta} \int_{P_{n_g}}^{p_{n_g+1}} \frac{2\theta p dp}{1 + \theta p^2} = \frac{V^{\frac{2}{3}}}{4\pi\hbar^2\beta} \ln \left[\frac{1 + \theta p_{n_g+1}^2}{1 + \theta p_{n_g}^2} \right] \quad (6.39)$$

et comme $p^2 = \frac{E^2}{c^2} - M^2c^2$ et à partir de l'expression de l'énergie donnée en (6.36), on a

$$p_{n_g}^2 = \left[p_z^2 + 4\hbar\omega \left(n_g + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (6.40)$$

$$+ 2\hbar\omega y \left[-6n_g^2 - 7n_g - 1 - \frac{2}{\hbar\omega} \left(n_g + \frac{1}{2} \right) (M^2c^2 + p_z^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

où $y = \left(\frac{\Delta X_{\min}}{l_c} \right)^2 = \hbar\omega\beta = \beta M\mu_B B$ tel que $\mu_B = \frac{\hbar e}{2Mc}$ est le magnéton de Bohr.

Ainsi $g(n_g)$ s'écrira

$$g(n_g) = \frac{V^{\frac{2}{3}}}{4\pi\hbar^2\beta} \ln \left\{ 1 + 4y \left[1 - \beta (M^2c^2 + p_z^2) - y \left(6n_g + \frac{13}{2} \right) \right] \right\} \quad (6.41)$$

Pour obtenir cette dernière expression, nous avons utilisé des approximations basées sur l'hypotèse $y + 1 \sim 1$.

On pourra aussi mentionner la dépendance de la densité d'états $g(n_g)$ du nombre quantique n_g , contrairement au cas sans déformation. Il est intéressant de voir que la densité d'états atteint un maximum pour une valeur critique de ΔX_{\min} , ensuite elle décroît rapidement pour des valeurs de distance minimale croissantes, ce qui revient aux déformations fortes de l'espace correspondant à un champ magnétique puissant..

Le potentiel thermodynamique L'expression du potentiel thermodynamique grand

canonique est définie par [36]:

$$\phi = -\frac{V^{\frac{1}{3}}}{2\pi\tilde{\beta}\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{1 + \beta p_z^2} \sum_{ng=0} g(ng) \ln \left[1 + z \exp \left(-\tilde{\beta} E_{ng} \right) \right] \quad (6.42)$$

Afin de simplifier l'intégrale, on met l'équation (6.36) sous la forme

$$E_{ng} = +\delta \sqrt{1 - \left[\frac{12c^2\hbar\omega y}{\delta^2} \right] ng^2 + \left[\frac{2c^2}{\delta^2} [2\hbar\omega - (7\hbar\omega + 2(M^2c^2 + p_z^2)) y] \right] ng} \quad (6.43)$$

$$\text{avec } \delta = [(M^2c^4 + c^2p_z^2)(1 - 2y) + 2c^2\hbar\omega(1 - y)]^{\frac{1}{2}}$$

En utilisant la dernière équation (6.43) et l'expression (6.41) de la densité d'états dans la forme (6.42) du potentiel thermodynamique ϕ , on obtient

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{V}{8\pi^2\hbar^3\tilde{\beta}\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{1 + \beta p_z^2} \\ & \times \sum_{ng=0} \ln \left\{ 1 + 4y \left[1 - \beta(M^2c^2 + p_z^2) - y \left(6ng + \frac{13}{2} \right) \right] \right\} \\ & \times \ln \left[1 + z \exp \left\{ -\tilde{\beta}\delta \left(1 - \left[\frac{12c^2\hbar\omega y}{\delta^2} \right] ng^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[\frac{2c^2}{\delta^2} [2\hbar\omega - (7\hbar\omega + 2(M^2c^2 + p_z^2)) y] \right] ng \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (6.44)$$

A cette étape, il est important de mentionner qu'au régime de hautes températures, la supposition $|\mu - \mu_B| \gg \tilde{\beta}$ est fiable. Donc l'équation (6.44) se convertit en

$$\begin{aligned}
\phi = & -\frac{zVM\mu_B B}{2\pi^2\hbar^3\tilde{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{1+\beta p_z^2} \sum_{ng=0} [1 - \beta(M^2c^2 + p_z^2) \\
& -y \left(6ng + \frac{13}{2}\right)] \times \exp -\tilde{\beta}\delta \left(1 - \left[\frac{12c^2\hbar\omega y}{\delta^2}\right] ng^2 \right. \\
& \left. + \left[\frac{2c^2}{\delta^2} [2\hbar\omega - (7\hbar\omega + 2(M^2c^2 + p_z^2)) y]\right] ng\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

en utilisant l'approximation $\ln(1+ua) \approx ua$.

La sommation sur ng de cette dernière expression est calculée par la formule d'Euler donnée par

$$\sum_{ng=0}^{\infty} f(ng) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} B_{2p} f^{(2p-1)}(0) \tag{6.46}$$

ou B_{2p} sont les nombres de Bernoulli et $f^{(2p-1)}(0)$ sont les dérivées de $f(x)$ à $x=0$.

Effectuons le remplacement:

$$Y = \sqrt{1 - \left[\frac{12c^2\hbar\omega y}{\delta^2}\right] ng^2 + \left[\frac{2c^2}{\delta^2} [2\hbar\omega - (7\hbar\omega + 2(M^2c^2 + p_z^2)) y]\right] ng}, \tag{6.47}$$

en:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(x) dx = & C_1 \frac{2}{\sqrt{B^2 - 4A}} \int_1^{\infty} Y dY \left(1 + \frac{4A}{B^2 - 4A} Y^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\tilde{\beta}\delta Y} + \\
& C_2 \frac{2}{\sqrt{B^2 - 4A}} \left(\frac{-B}{2A}\right) \int_1^{\infty} Y dY \left(1 + \frac{4A}{B^2 - 4A} Y^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\tilde{\beta}\delta Y} \\
& + C_2 \left(\frac{1}{A}\right) \int_1^{\infty} Y dY e^{-\tilde{\beta}\delta Y}
\end{aligned} \tag{6.48}$$

Le résultat de cette intégrale suivant la référence [40] est

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x) dx &= \left[\left(C_1 - \frac{B}{2A} C_2 \right) \frac{2}{\sqrt{B^2 - 4A}} \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \frac{(2N-1)!!}{2N!!} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{4A}{B^2 - 4A} \right)^N \right] \times \left[\frac{\Gamma(2N+2)}{(\tilde{\beta}\delta)^{2N+2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-\tilde{\beta}\delta}}{2N+2} \Phi(1, 2N+2, \tilde{\beta}\delta) \right] \\
&\quad + \frac{C_2}{A} e^{-\tilde{\beta}\delta} \left(\frac{1}{\tilde{\beta}^2 \delta^2} + \frac{1}{\tilde{\beta}\delta} \right)
\end{aligned} \tag{6.49}$$

où

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1 - \beta (M^2 c^2 + p_z^2) - \frac{13}{2} \left(\frac{\Delta X_{\min}}{l_c} \right)^2 \\
C_2 &= -6 \left(\frac{\Delta X_{\min}}{l_c} \right)^2 \\
A &= \frac{-12c^2 \hbar \omega \left(\frac{\Delta X_{\min}}{l_c} \right)^2}{\delta^2} \\
B &= \frac{2c^2}{\delta^2} \left[2\hbar\omega - (7\hbar\omega + 2(M^2 c^2 + p_z^2)) \left(\frac{\Delta X_{\min}}{l_c} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.50}$$

En utilisant l'approximation $y = \left(\frac{\Delta X_{\min}}{l_c} \right)^2 \rightarrow 0$ dans les équations (6.50), on aura le résultat de l'intégrale suivant:

$$\int_0^\infty f(x) dx \sim \frac{1}{2} \frac{1}{c^2 \hbar \omega} \frac{e^{-\tilde{\beta}\delta}}{\tilde{\beta}^2} \tag{6.51}$$

avec $\delta \rightarrow [(M^2 c^4 + c^2 p_z^2) + 2c^2 \hbar \omega]^{\frac{1}{2}}$

De ce fait, on pourra obtenir l'expression (6.46) dans la forme

$$\sum_{ng=0}^{\infty} f(ng) \sim \frac{1}{2} \left\{ [1 - \beta (M^2 c^2 + p_z^2)] e^{-\tilde{\beta}\delta} + \frac{1}{c^2 \hbar \omega} \frac{e^{-\tilde{\beta}\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right\} \tag{6.52}$$

Au régime de hautes températures [36] la somme $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} B_{2p} f^{(2p-1)}(0) = 0$, ainsi on déduit la forme du potentiel thermodynamique ϕ

$$\phi \sim -\frac{zVM\mu_B B}{4\pi^2\hbar^3\tilde{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{1+\beta p_z^2} \left\{ [1 - \beta(M^2c^2 + p_z^2)] e^{-\tilde{\beta}\delta} + \frac{1}{c^2\hbar\omega} \frac{e^{-\tilde{\beta}\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right\} \quad (6.53)$$

L'intégrale effectuée sur p_z , se donnera par le résultat suivant

$$I = \left[\frac{e^{-\tilde{\beta}\delta}}{\sqrt{\beta}} \left(2 - \beta M^2 c^2 + \frac{1}{c^2 \hbar \omega \tilde{\beta}^2} \right) \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\beta} p_z \right) - e^{-\tilde{\beta}\delta} p_z \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (5.54)$$

Le potentiel thermodynamique calculé suivant des approximations établit en [36], par l'algèbre déformé de Kempf, dans le cadre de l'application de l'algèbre covariante déformée de Lorentz se montre infini. Ce comportement peut être attribuer à la technique utilisée pour le calcul de ϕ ? L'énigme qui entoure ce problème fera l'objet d'un travail de recherche !

0.6.2 Conclusion

Dans cette partie, on a solutionné l'équation relativiste de Dirac à $(3+1)$ dimensions dans le cadre de l'algèbre déformée covariante de Lorentz dans l'espace des impulsions, pour une particule de spin $\frac{1}{2}$ soumise à un champ magnétique constant B . Notre problème s'est réduit à un oscillateur de Dirac de fréquence $\omega = \frac{eB}{2c}$, ce qui revient à la gauge symétrique choisie. En utilisant des techniques standards de calcul, on s'est intéressé au spectre d'énergie par ses caractéristiques et son utilité dans le domaine thermodynamique. Il prend la même forme que celui attribué à l'oscillateur de Dirac

dans la section (5) et en revenant au cas ordinaire c-a-d $\beta \rightarrow 0$, il couvre le spectre de l'oscillateur de Dirac usuel. A la limite non-relativiste, notre résultat ne coïncide pas avec le spectre de l'équation de Pauli traité par l'algèbre déformée de Kempf [36] ce qui est normal car l'algèbre appliquée est déformée covariante de Lorentz. Dans le cas sans déformation introduit à cette limite, on reproduit le spectre ordinaire de l'équation de Pauli [36]. A hautes températures et en présence de distance minimale, la densité d'états d'une particule a été calculée en montrant un maximum pour une valeur critique de ΔX_{\min} et une décroissance $g(ng) \searrow$ pour une croissance continue des distances minimales $\Delta X_{\min} \nearrow$ c-a-d pour des déformations de l'espace beaucoup plus importantes attribuées aux champs gravitationnels forts.

0.7 Conclusion générale

L'introduction de la mécanique quantique déformée basée sur des relations de commutation modifiées entre les opérateurs de position et d'impulsion, qui résultent de la généralisation du principe d'incertitude d'Heisenberg

$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \dots)$, donne naissance au concept de distance minimale qui décrit l'incertitude non nulle en position ΔX_{\min} et estimé de l'ordre de l'échelle de Planck $l_p \sim 10^{-35}m$. Cette longueur servant de limite à la résolution de l'espace induit des corrections ou des modifications aux résultats des problèmes déjà traités en mécanique quantique ordinaire. Dans ce cas nous nous sommes orientés vers le domaine relativiste par deux principaux axes qui sont la résolution de l'équation de l'oscillateur de Dirac à 3 et à (3+1) dimensions via l'algèbre déformée de Kempf et l'algèbre déformée covariante de Lorentz respectivement suivi d'un troisième axe visant la résolution de l'équation de Dirac à (3+1) dimensions pour une particule chargée de spin 1/2 soumise à un champ magnétique constant. Le caractère standard de la technique de calcul utilisée basée sur des transformations de variables particulières nous a permis de généraliser son application pour les trois problèmes en question.

L'oscillateur de Dirac à 3 dimensions a été traité dans l'espace des impulsions via l'algèbre non-commutative de Kempf. En effet, les fonctions propres coïncident exactement avec celles obtenues par [16], alors que le spectre d'énergie présente une forme plus générale, ou la dégénérescence des états habituellement trouvée dans le cas ordinaire $\beta, \beta' \rightarrow 0$ est complètement levée. Alors qu'il présente un dur con-

finement par sa dépendance quadratique en nombre quantique n contrairement à sa linéarité dans l'espace commutatif, dont le spectre a pu être extrait à partir d'un développement en premier ordre en β et β' suivi de la suppression de la déformation. A la limite non-relativiste, et en ignorant les termes de couplage spin-orbite, on a retrouvé le même spectre d'énergie que celui de l'oscillateur harmonique à 3 dimensions en présence d'une distance minimale donné par [26]. De ce fait, et dans le cas non-déformé $\beta, \beta' \rightarrow 0$, on a pu établir le spectre d'énergie habituel de l'oscillateur de Dirac à 3 dimensions.

En introduisant l'algèbre déformée covariante de Lorentz dans le cas où les paramètres de déformation $\beta' = \gamma = 0$, nous avons traité le même problème de l'oscillateur de Dirac à (3+1) dimensions dans l'espace des impulsions. Les composantes de la fonction d'ondes déterminées prennent la même forme que celles fournis via l'algèbre déformée de Kempf [56] sauf que la composante temporelle p^0 se manifeste dans le nouveau paramètre de déformation θ . Pour ce qui est du spectre d'énergie, il diffère de celui issu déjà par l'algèbre déformée de Kempf [56] par le terme $(1 + \beta m \omega \hbar \Delta)^{-1}$, en confirmant ainsi la nouveauté de l'algèbre déformée covariante de Lorentz. On a pu obtenir un résultat important, qui se concrétise dans la borne supérieure de l'énergie $\lim_{c_n \rightarrow \infty} W_{c_n \rightarrow \infty} = \frac{c}{\sqrt{\beta}}$ contrairement à celui qui est fournit par l'algèbre déformée de Kempf où l'énergie peut être infinie aux très grandes valeurs du nombre quantique n . Ce résultat est surprenant comparé au spectre de l'oscillateur de Dirac usuel où les niveaux d'énergie sont distants, ce qui revient à une relation inverse entre la déformation caractérisée par le paramètre β et l'énergie d'un mode d'oscillation. A la limite non-déformée $\beta \rightarrow 0$, on a reproduit les niveaux d'énergie de l'oscillateur de

Dirac ordinaire. Il est primordial de mentionner que les limites établis concernnant le carré des vecteurs d'impulsions expriment que le cutt-off de l'UV est naturellement inclut dans l'algèbre covariant déformée de Lorentz.

On a choisit encore le même formalisme d'algèbre que le précédent pour effectuer l'étude de l'équation de Dirac à (3+1) dimensions pour une particule de spin 1/2 soumise à un champ magnétique constant B , où le problème s'est transformé en un oscillateur de Dirac de fréquence $\omega = \frac{eB}{2c}$ suite à la gauge symétrique choisie. Notre intérêt s'est porté sur le spectre d'énergie qui couvre le spectre de l'oscillateur de Dirac usuel à $\beta \rightarrow 0$, et ne coincide pas avec le spectre de l'équation de Pauli traité par l'algèbre déformée de Kempf [36] à la limite non-relativiste sauf dans le cas sans déformation introduit à cette limite. Au régime de hautes températures et en présence de distance minimale, on a pu détecter le comportement de la densité d'états d'une particule suivant qu'elle est maximale pour une valeur critique de ΔX_{\min} et décroissante pour des déformations de l'espace intenses.

Ce travail est une contribution modeste à la résolution analytique des problèmes en mécanique quantique relativiste par l'inclusion du concept de distance minimale. La non-commutativité des coordonnées de l'espace éloigne comme même le mystère régnant autour de ce qui se passe à l'échelle de Planck et permet de comprendre en mieux la structure de l'espace-temps. La limite à la validité de la notion de localité conventionnelle permet d'établir une classifications de catégories de structures de distance minimale que peut posséder l'espace-temps selon qu'un opérateur de position linéaire X soit symétrique et est son propre adjoint ($X = X^*$) dans l'espace de Hilbert [63]. Cette richesse physique aux distances de l'ordre de l'échelle de Planck ouvrent

la voie vers d'autres travaux de recherche.

Annexe

1) L'opérateur moment angulaire déformé via l'algèbre covariante de Lorentz est donné par:

$$L^{\mu\nu} = [1 - \beta P_\rho P^\rho]^{-1} (X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu) = [1 - \beta P_\rho P^\rho]^{-1} (P^\nu X^\mu - P^\mu X^\nu).$$

Les relations de commutation entre les opérateurs de position x^μ et d'impulsion $P^\nu = p^\nu$ via l'algèbre commutative covariante de Lorentz s'écrivent comme

$$\begin{aligned} [x^\mu, P^\nu = p^\nu] &= -i\hbar g^{\mu\nu}, & [x^\mu, P_\nu = p_\nu] &= -i\hbar \delta_\nu^\mu, \\ P^\mu &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ x^\mu &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial p_\mu} = -i\hbar g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\nu} \end{aligned}$$

a) Le commutateur $[X^\lambda, L^{\mu\nu}]$

$$\begin{aligned} [X^\lambda, L^{\mu\nu}] &= [X^\lambda, (1 - \beta p_\rho p^\rho)^{-1} (p^\nu X^\mu - p^\mu X^\nu)] \\ [X^\mu, X^\nu] &= i\hbar \frac{2\beta - \beta' - (2\beta + \beta') \beta p_\rho p^\rho}{(1 - \beta p_\rho p^\rho)} [p^\mu X^\nu - p^\nu X^\mu] \\ &= i\hbar \{2\beta - \beta' - (2\beta + \beta') \beta p_\rho p^\rho\} [p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu] \\ &\Rightarrow (1 - \beta p_\rho p^\rho)^{-1} [p^\mu X^\nu - p^\nu X^\mu] = [p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu] \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
[X^\lambda, L^{\mu\nu}] &= [X^\lambda, (1 - \beta p_\rho p^\rho)^{-1} (p^\nu X^\mu - p^\mu X^\nu)] \\
&= [X^\lambda, p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu] \\
&= p^\mu [X^\lambda, x^\nu] + [X^\lambda, p^\mu] x^\nu - p^\nu [X^\lambda, x^\mu] - [X^\lambda, p^\nu] x^\mu \\
[X^\lambda, L^{\mu\nu}] &= p^\mu [(1 - \beta p_\rho p^\rho) x^\lambda - \beta' p^\lambda p_\alpha x^\alpha + i\hbar\gamma p^\lambda, x^\nu] \\
&\quad + [(1 - \beta p_\rho p^\rho) x^\lambda - \beta' p^\lambda p_\alpha x^\alpha + i\hbar\gamma p^\lambda, p^\mu] x^\nu \\
&\quad - p^\nu [(1 - \beta p_\rho p^\rho) x^\lambda - \beta' p^\lambda p_\alpha x^\alpha + i\hbar\gamma p^\lambda, x^\mu] \\
&\quad - [(1 - \beta p_\rho p^\rho) x^\lambda - \beta' p^\lambda p_\alpha x^\alpha + i\hbar\gamma p^\lambda, p^\nu] x^\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X^\lambda, L^{\mu\nu}] &= -\beta p^\mu \{p_\rho [p^\rho, x^\nu] + [p_\rho, x^\nu] p^\rho\} x^\lambda - \beta' p^\mu \{p^\lambda [p_\alpha, x^\nu] + [p^\lambda, x^\nu] p_\alpha\} x^\alpha \\
&\quad + i\hbar\gamma p^\mu [p^\lambda, x^\nu] + (1 - \beta p_\rho p^\rho) [x^\lambda, p^\mu] x^\nu - \beta' p^\lambda p_\alpha [x^\alpha, p^\mu] x^\nu \\
&\quad + \beta p^\nu \{p_\rho [p^\rho, x^\mu] + [p_\rho, x^\mu] p^\rho\} x^\lambda + \beta' p^\nu \{p^\lambda [p_\alpha, x^\mu] + [p^\lambda, x^\mu] p_\alpha\} x^\alpha \\
&\quad - i\hbar\gamma p^\nu [p^\lambda, x^\mu] - (1 - \beta p_\rho p^\rho) [x^\lambda, p^\nu] x^\mu + \beta' p^\lambda p_\alpha [x^\alpha, p^\nu] x^\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X^\lambda, L^{\mu\nu}] &= -\beta p^\mu \{i\hbar p_\rho g^{\rho\nu} + i\hbar\delta_\rho^\nu p^\rho\} x^\lambda - \beta' p^\mu \{i\hbar p^\lambda \delta_\alpha^\nu + i\hbar g^{\lambda\nu} p_\alpha\} x^\alpha \\
&\quad + i\hbar\gamma p^\mu (i\hbar g^{\lambda\nu}) + (1 - \beta p_\rho p^\rho) [-i\hbar g^{\lambda\mu}] x^\nu - \beta' p^\lambda p_\alpha [-i\hbar g^{\alpha\mu}] x^\nu \\
&\quad + \beta p^\nu \{i\hbar p_\rho g^{\rho\mu} + i\hbar\delta_\rho^\mu p^\rho\} x^\lambda + \beta' p^\nu \{i\hbar p^\lambda \delta_\alpha^\mu + i\hbar g^{\lambda\mu} p_\alpha\} x^\alpha \\
&\quad - i\hbar\gamma p^\nu (i\hbar g^{\lambda\mu}) - (1 - \beta p_\rho p^\rho) [-i\hbar g^{\lambda\nu}] x^\mu + \beta' p^\lambda p_\alpha [i\hbar g^{\alpha\nu}] x^\mu
\end{aligned}$$

cependant

$$\begin{aligned}
[X^\lambda, L^{\mu\nu}] &= -2i\hbar\beta p^\mu p^\nu x^\lambda - i\hbar\beta' p^\mu p^\lambda x^\nu - i\hbar\beta' p^\mu g^{\lambda\nu} p_\alpha x^\alpha \\
&\quad - \hbar^2 \gamma p^\mu g^{\lambda\nu} - i\hbar(1 - \beta p_\rho p^\rho) g^{\lambda\mu} x^\nu + i\hbar\beta' p^\lambda p^\mu x^\nu \\
&\quad + 2i\hbar\beta p^\nu p^\mu x^\lambda + i\hbar\beta' p^\nu p^\lambda x^\mu + i\hbar\beta' p^\nu g^{\lambda\mu} p_\alpha x^\alpha \\
&\quad + \hbar^2 \gamma p^\nu g^{\lambda\mu} + i\hbar(1 - \beta p_\rho p^\rho) g^{\lambda\nu} x^\mu + i\hbar\beta' p^\lambda p^\nu x^\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X^\lambda, L^{\mu\nu}] &= 2i\hbar\beta' p^\lambda [p^\nu x^\mu - p^\mu x^\nu] \\
&\quad - i\hbar\beta' p^\mu g^{\lambda\nu} p_\alpha x^\alpha + i\hbar\beta' p^\nu g^{\lambda\mu} p_\alpha x^\alpha \\
&\quad - \hbar^2 \gamma p^\mu g^{\lambda\nu} + \hbar^2 \gamma p^\nu g^{\lambda\mu} \\
&\quad - i\hbar(1 - \beta p_\rho p^\rho) g^{\lambda\mu} x^\nu + i\hbar(1 - \beta p_\rho p^\rho) g^{\lambda\nu} x^\mu
\end{aligned}$$

et on obtient enfin

$$\begin{aligned}
[X^\lambda, L^{\mu\nu}] &= -2i\hbar\beta' p^\lambda [p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu] \\
&= -2i\hbar\beta' p^\lambda (1 - \beta p_\rho p^\rho)^{-1} [p^\mu X^\nu - p^\nu X^\mu] \\
[X^\lambda, L^{\mu\nu}] &= 2i\hbar\beta' p^\lambda L^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

b) Le commutateur $[p^\lambda, L^{\mu\nu}]$

$$\begin{aligned}
[p^\lambda, L^{\mu\nu}] &= [p^\lambda, (1 - \beta p_\rho p^\rho)^{-1} (p^\nu X^\mu - p^\mu X^\nu)] \\
&= [p^\lambda, (p^\nu x^\mu - p^\mu x^\nu)] \\
&= p^\nu [p^\lambda, x^\mu] - p^\mu [p^\lambda, x^\nu] \\
&= i\hbar p^\nu g^{\lambda\mu} - i\hbar p^\mu g^{\lambda\nu}
\end{aligned}$$

c) Le commutateur $[L^{\mu\nu}, L^{\alpha\lambda}]$

$$\begin{aligned}
[L^{\mu\nu}, L^{\alpha\lambda}] &= [(1 - \beta p_\rho p^\rho)^{-1} (p^\nu X^\mu - p^\mu X^\nu), (1 - \beta p_\sigma p^\sigma)^{-1} (p^\lambda X^\alpha - p^\alpha X^\lambda)] \\
&= [p^\nu x^\mu - p^\mu x^\nu, p^\lambda x^\alpha - p^\alpha x^\lambda] \\
&= [p^\nu x^\mu, p^\lambda x^\alpha] - [p^\nu x^\mu, p^\alpha x^\lambda] - [p^\mu x^\nu, p^\lambda x^\alpha] + [p^\mu x^\nu, p^\alpha x^\lambda] \\
[L^{\mu\nu}, L^{\alpha\lambda}] &= p^\nu [x^\mu, p^\lambda] x^\alpha + p^\lambda [p^\nu, x^\alpha] x^\mu - p^\nu [x^\mu, p^\alpha] x^\lambda - p^\alpha [p^\nu, x^\lambda] x^\mu \\
&\quad - p^\mu [x^\nu, p^\lambda] x^\alpha - p^\lambda [p^\mu, x^\alpha] x^\nu + p^\mu [x^\nu, p^\alpha] x^\lambda + p^\alpha [p^\mu, x^\lambda] x^\nu \\
[L^{\mu\nu}, L^{\alpha\lambda}] &= p^\nu [-i\hbar g^{\mu\lambda}] x^\alpha + p^\lambda [i\hbar g^{\nu\alpha}] x^\mu - p^\nu [-i\hbar g^{\mu\alpha}] x^\lambda - p^\alpha [i\hbar g^{\nu\lambda}] x^\mu \\
&\quad - p^\mu [-i\hbar g^{\nu\lambda}] x^\alpha - p^\lambda [i\hbar g^{\mu\alpha}] x^\nu + p^\mu [-i\hbar g^{\nu\alpha}] x^\lambda + p^\alpha [i\hbar g^{\mu\lambda}] x^\nu \\
&= i\hbar g^{\mu\lambda} [p^\alpha x^\nu - p^\nu x^\alpha] + i\hbar g^{\nu\alpha} [p^\lambda x^\mu - p^\mu x^\lambda] \\
&\quad + i\hbar g^{\mu\alpha} [p^\nu x^\lambda - p^\lambda x^\nu] + i\hbar g^{\nu\lambda} [p^\mu x^\alpha - p^\alpha x^\mu] \\
&= i\hbar g^{\mu\lambda} L^{\nu\alpha} + i\hbar g^{\nu\alpha} L^{\mu\lambda} + i\hbar g^{\mu\alpha} L^{\lambda\nu} + i\hbar g^{\nu\lambda} L^{\alpha\mu}
\end{aligned}$$

2) On pourra retrouver les solutions de l'oscillateur de Dirac en (3+1) dimensions [60] à partir des solutions du même problème solutionné en 3 dimensions [56] selon les transformations suivantes:

$$k_{cov} = \sqrt{\frac{\theta}{\beta}} k_{ncov}, \quad \lambda_{cov} \iff \lambda_{ncov}, \quad \zeta_{cov} = \zeta_{ncov} \frac{\theta}{\beta}$$

Le remplacement de ces quantités covariantes dans l'expression de l'énergie non-covariante donnée par l'équation (4.52), nous mène à la même expression de l'énergie covariante calculée en (5.47)

$$W_c^2 = \frac{W_{nc}^2}{1 + \hbar\omega m\beta\Delta}$$

Pour ce qui est des fonctions d'ondes covariantes (5.44), on peut les déterminer à partir de celles établies dans le cas non-covariant (4.46) en tenant en considération aussi que $p_{ncov} = \sqrt{\frac{\theta}{\beta}}p$ et un facteur en plus dans la constante de normalisation $\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Bibliographie

1. M. Maggiore, Phys. Lett. B 304, 65 (1993).
2. M. Maggiore, Phys. Rev. D 49, 5182 (1994).
3. D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, Phys. Lett. B 213, 41 (1989).
4. K. Konoshi, G. Paffuti and P. Provero, Phys. Lett. B 234, 276 (1990).
5. G. Veneziano, Europhys. Lett. 2, 199 (1986).
6. M. Kato, Phys. Lett. B 245, 43 (1990).
7. R. Guida, K. Konishi and P. Provero, Mod. Phys. Lett. A 6, 1487 (1991).
8. L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A 10, 145 (1995).
9. S. Capozziello, G. Lambiase, G. Scarpetta, Int. J. Theor. Phys. 39, 15 (2000).
10. M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. 73, 977 (2001).
11. S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, J. Higher Energy Phys. JHEP 02, 020 (2000).
12. R. J. Szabo, Phys. Rep. 378, 207 (2003).
13. F. Scardigli, Phys. Lett. B 452, 39 (1999).
14. F. Scardigli and R. Casadio, Class. Quant. Grav. 20, 3915 (2003).
15. Y. Chargui, A. Trabetsi, L. Chetouani, Phys. Lett. A 374, 531 (2010).

16. C. Quesne and V. M. Tkachuk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 1747 (2005).
17. S. Hossenfelder, *Mod. Phys. Lett. A* **19**, 2727 (2004).
18. S. Hossenfelder, *Phys. Rev. D* **70**, 105003 (2004).
19. S. Hossenfelder, *Phys. Lett. B* **598**, 92 (2004).
20. R. R. Sastry, *J. Phys. A: Math. Gen. A* **33**, 8305 (2000).
21. M. Maggiore, *Phys. Lett. B* **319**, 83 (1993).
22. A. Kempf, *J. Math. Phys.* **35**, 4483 (1994).
23. A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, *Phys. Rev. D* **52**, 1108 (1995).
24. A. Kempf, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 2093 (1997).
25. H. Hinrichsen and A. Kempf, *J. Math. Phys.* **37**, 2121 (1996).
26. L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* **65**, 125027 (2002).
27. T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk and V. M. Tkachuk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 2143 (2006).
28. F. Brau, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 7691 (1999).
29. R. Akhoury and Y-P.Yao, *Phys. Lett. B* **572**, 37 (2003).
30. S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic and T. Takeuchi, *Phys. Rev. A* **72**, 012104 (2005).

31. Kh. Nouicer, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38, 10027 (2005).
32. U. Harbach and S. Hossenfelder, *Phys. Lett. B* 632, 379 (2006).
33. Kh. Nouicer, *J. Phys. A: Math. Theor.* 40, 2125 (2007).
34. L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 65, 125028 (2002).
35. S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, S. Rayyan and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 66, 026003 (2001).
36. Kh. Nouicer, *J. Math. Phys.* 47, 122102 (2006).
37. E. C. Titchmarsh, *Proc. R. Soc. Ser. A* 266, 33-46 (1962).
38. E. C. Titchmarsh, *Quart. J. Math.* 15, 193-207 (1964).
39. Y. Nogami and F. M. Toyama, *Can. J. Phys.* 74, 114-121 (1996).
40. Kh. Nouicer, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 5125 (2006).
41. C. Quesne and V. M. Tkachuk, *J. Phys. A* 39, 10909 (2006).
42. C. Quesne and V. M. Tkachuk, *Czech. Phys.* 56, 1269 (2006).
43. Dj. Bouaziz, thèse de Doctorat en sciences, Université de Liège, Juin (2009).
44. A. W. Peet and J. Polchinski, *Phys. Rev. D* 59, 065011 (1999).
45. A. Kempf, *Phys. Rev. D* 63, 083514 (2001).
46. A. Kempf and J. C. Niemeyer, *Phys. Rev. D* 64, 103501 (2001).

47. R. Easther, B. R. Greene, W. H. Kinney and G. Shiu, *Phys. Rev. D* 64, 103502 (2001).
48. O. Belibel, thèse de Magister, Université de Jijel, Avril (2007).
49. H. S. Snyder, *Phys. Rev.* 71, 38-41 (1947).
50. M. Moshinsky and Y. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics* (Harwood, Amsterdam, (1996).
51. R. P. Martinez-y-Romero, H. N. Nunez-Yepey and A. L. Salas-Brito, *Eur. J. Phys.* 16, 135 (1995).
52. J. Bentez, R. P. Martinez-y-Romero, H. N. Nunez-Yepey and A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett.* 64, 1643 (1990); *Phys. Rev. Lett.* 65, 2085 (1990).
53. R. P. Martrinez-y-Romero, M. Moreno and A. Zentalla. *Phys. Rev. D* 43, 2036 (1991).
54. F. Dominguez-Adame and M. A. Gonzalez, *Europhys. Lett.* 13, 193 (1990).
55. D. Ito and E. Carrieri, *Nuovo Cimento* 51 A, 1119 (1967).
56. M. Betrouche, M. Maamache and J. R. Choi, *Adv.High Energy Phys.* 2013, 383957, 1 (2013).
57. P. Strange, *Relativistic Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, (1998).
58. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G Triconi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, McGraw-Hill, New York (1953).

59. R. Renan, M. H. Pacheco and C. A. Almeida, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, L 509 (2000).
60. M. Betrouche, M. Maamache and J. R. Choi, *Sci. Rep.* **3**, 3221 (2013).
61. A. Messiah, *Mécanique Quantique*, Tome 2, Dunod, Paris (1995).
62. M. Betrouche, M. Maamache and Kh. Nouicer, The 8th ICPTP, AIP. Conf. Proc. 1444, 281 (2012).
63. A. Kempf, *Europhys. Lett.* **40** (3), 257 (1997).

Résumé

Nous étudions le problème de l'oscillateur de Dirac où les opérateurs de position et d'impulsion obéissent aux relations de commutation généralisées menant à l'apparition de la longueur minimale, qui est de l'ordre de la longueur de Planck $\Delta x_{\min} = \hbar\sqrt{3\beta + \beta'}$ où β et β' sont deux petits paramètres positifs. Les fonctions d'ondes et le spectre d'énergie correspondant sont déterminés. La présence de la longueur minimale induit une dépendance quadratique du spectre d'énergie en nombre quantique n , présentant la propriété du confinement dur du système. Il est montré que la dégénérescence infinie des niveaux d'énergie de l'oscillateur de Dirac habituel disparaît en présence de distance minimale où $\beta \neq 0$. Non seulement à la limite non-relativiste mais aussi à la limite du cas standard, nos résultats coïncident avec les résultats usuelles.

Nous examinons l'algèbre covariante déformée de Lorentz pour le problème de l'oscillateur de Dirac, qui est une généralisation de l'algèbre déformée de Kempf dans l'espace-temps à 3+1 dimensions, dans le cas ($\beta' = \gamma = 0$). Le spectre d'énergie du système et les fonctions d'ondes correspondantes pour des états de spin explicites sont déduites. Nous avons obtenu de nouveaux résultats suite à l'application de l'algèbre de Kempf par comparaison à ceux trouvés à partir de l'algèbre covariante de Lorentz. L'énergie relativiste quantifiée du système en présence de distance minimale ne peut croître infiniment avec l'accroissance infinie du nombre quantique n , mais converge vers une valeur finie $c/\sqrt{\beta}$. L'écart entre les niveaux d'énergie tend asymptotiquement vers zéro pour de grandes valeurs de n . On peut conclure que la déformation de

l'espace réduit l'énergie quantique totale (relativiste) pour un mode.

Nous appliquons l'algèbre covariante déformée de Lorentz pour l'équation de Dirac à 3+1 dimensions pour une particule de spin un demi soumise à l'action d'un champ magnétique constant. Le spectre d'énergie est exactement déterminé et coïncide avec le spectre d'énergie de l'équation de Pauli pour une limite non-relativiste et non-déformée. Nous avons aussi étudié le comportement magnétique du système à hautes températures où on a montré que la densité des états atteint un maximum pour une valeur critique de la longueur minimale et décroît pour de grandes valeurs de ΔX_{\min} correspondant à un champ magnétique intense.

Abstract

We study the Dirac oscillator where the coordinates and momentum operators obey generalized commutation relations leading to the appearance of minimal length of the order of the Planck length $\Delta x_{\min} = \hbar\sqrt{3\beta + \beta'}$ where β and β' are two positive small parameters. Wave functions and the corresponding energy spectrum are derived. The presence of the minimal length accompanies a quadratic dependence of the energy spectrum on quantum number n , implying the property of hard confinement of the system. It is shown that the infinite degeneracy of the usual Dirac oscillator energy levels is vanished by the presence of the minimal length as far as $\beta \neq 0$. Not only in the non-relativistic limit but also in the limit of the standard case ($\beta = \beta' = 0$), our results are recovered to well known usual ones.

We investigate the Lorentz-covariant deformed algebra for Dirac oscillator problem, which is a generalization of Kempf deformed algebra in 3+1 dimension of space-time in the case ($\beta' = \gamma = 0$). The energy spectrum of the system and the corresponding wave functions with explicit spin state are derived. We obtained entirely new results from our development based on Kempf algebra in comparison to the studies carried out with the Lorentz-covariant deformed one. The quantized relativistic energy of the system in the presence of minimal length cannot grow indefinitely as quantum number n increases, but converges to a finite value $c/\sqrt{\beta}$. The spacing of the energy levels asymptotically approaches to zero for sufficiently large n . We can conclude that the deformation of space restricts the total (relativistic) quantum energy for a mode.

We apply the Lorentz-covariant deformed algebra for Dirac equation in 3+1 dimension with a particle of spin half moving under the action of a constant magnetic field. The energy spectrum is exactly determined and recovered to Pauli equation energy spectrum in the nonrelativistic limit without deformation. We have also investigated the magnetic behavior of the system at high temperatures where we have shown that the density of states reaches a maximum for a critical value of the minimal length and decreases for higher values of ΔX_{\min} corresponding to strong gravitational field.

ملخص:

قمنا بدراسة مشكل هزاز ديراك من أجل مؤثري الموقع و الإندفاع اللذان يخضعان لعلاقات التبديل المعممة التي أدت إلى ظهور البعد الأصغري الذي هو من رتبة بعد بلانك $\Delta X_{min} = h\sqrt{3\beta + \beta'}$ من أجل β و β' وسيطين ذا قيمة صغيرة و موجبة. الدوال الموجية و طيف الطاقة تم تحديدهما. البعد الأصغري يؤدي إلى علاقة تربيعية بين الطاقة و العدد الكمي η ، التي تمثل خاصية الحصر القوية للجملة. تم توضيح أن توالد مستويات الطاقة لهزاز ديراك المألوفة حذفت في وجود البعد الأصغري عند $\beta \neq 0$ كذلك ليس فقط عند النهاية الغير نسبية و لكن من أجل النهاية للحالة العامة نتائجا تتوافق مع النتائج المألوفة.

درسنا كذلك جبر موافق للتغيير مشوه للورانز من أجل هزاز ديراك الذي هو تعميم الجبر المشوه لكانف في الفضاء الزمكاني ذي 1+3 بعد و في حالة $(\beta' = \gamma = 0)$. طيف الطاقة للجملة و الدوال الموجية الموافقة لحالتي السبين تم تحديدهما. تحصلنا على نتائج مختلفة بالمقارنة مع تطبيق جبر كانف و الجبر الموافق للتغيير للورانز. الطاقة النسبية المكمة للجملة في وجود البعد الأصغري لانتزاد بصفة لا نهائية مع تزايد العدد الكمي η ، و لكن تتقارب لقيمة منتهية $c/\sqrt{\beta}$. الفرق بين مستويات الطاقة يؤول بالتقريب نحو صفر من أجل قيم كبيرة لـ η ، نستطيع تلخيص ذلك في أن تشوه الفضاء يقلص من الطاقة الكلية (النسبية) من أجل نمط.

طبقتنا الجبر الموافق للتغيير المشوه للورانز لمعادلة ديراك من أجل 1+3 بعد لجسيمة ذات سبين نصف خاضعة لفعل حقل مغناطيسي ثابت. طيف الطاقة تم تحديده و يوافق طيف معادلة باولي في الحالة الغير نسبية و الغير مشوهة. درسنا كذلك التأثير المغناطيسي للجملة عند درجات حرارة عالية أين بينا أن كثافة الحالة تبلغ قيمة عظمى عند قيمة حرجة للبعد الأصغري و تتناقص من أجل قيم كبيرة لـ ΔX_{min} الموافقة لحقل مغناطيسي قوي.

Research Article

Three-Dimensional Dirac Oscillator with Minimal Length: Novel Phenomena for Quantized Energy

Malika Betrouche,¹ Mustapha Maamache,² and Jeong Ryeol Choi³

¹ *Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique (lpmps), Département de Physique, Faculté des Sciences Exactes, Université Constantine1, 25000 Constantine, Algeria*

² *Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif1, 19000 Setif, Algeria*

³ *Department of Radiologic Technology, Daegu Health College, Yeongsong-ro 15, Daegu 702-722, Republic of Korea*

Correspondence should be addressed to Jeong Ryeol Choi; choiardor@hanmail.net

Received 3 July 2013; Accepted 17 August 2013

Academic Editor: Gongnan Xie

Copyright © 2013 Malika Betrouche et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

We study quantum features of the Dirac oscillator under the condition that the position and the momentum operators obey generalized commutation relations that lead to the appearance of minimal length with the order of the Planck length, $\Delta x_{\min} = \hbar\sqrt{3\beta + \beta'}$, where β and β' are two positive small parameters. Wave functions of the system and the corresponding energy spectrum are derived rigorously. The presence of the minimal length accompanies a quadratic dependence of the energy spectrum on quantum number n , implying the property of hard confinement of the system. It is shown that the infinite degeneracy of energy levels appearing in the usual Dirac oscillator is vanished by the presence of the minimal length so long as $\beta \neq 0$. Not only in the nonrelativistic limit but also in the limit of the standard case ($\beta = \beta' = 0$), our results reduce to well known usual ones.

1. Introduction

It is widely accepted that the consideration of a minimal length scale in nature, which is usually expected to be of the order of the Planck length, $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-35}$ m, is necessary for a consistent formulation of quantum theory of gravity. According to this, the development of mathematical manipulation to handle the minimal length became a central issue in modern quantum gravity. The several research fields in which the concept of an observable minimal length plays an important role in their complete description are string theory [1–5], loop quantum gravity [6], noncommutative geometry [7], noncommutative field theories [8–10], and black-hole physics [11, 12]. Standard formulation of quantum mechanics with minimal length for these systems has been carried out starting from the modified Heisenberg algebra with a deformed commutation relation between position and momentum operators, which arises from intrinsic noncommutativity in geometries [13, 14]. Other similar constructions that accompanies the concept of minimal length scale have

also been initiated by some authors [15–18]. The introduction of minimal length scale leads to a generalization of the Heisenberg uncertainty principle in a way that it incorporates gravitationally induced uncertainty [19]. Kempf et al. introduced, through a series of their papers [20–23], a deformed quantum mechanics on the basis of modified commutation relations between position and momentum operators. These commutation relations are characterized with non-zero minimal length and lead to a generalized uncertainty principle (GUP) which includes some corrections from the ordinary Heisenberg uncertainty relation. There are plentiful reports for the consequences of the GUP. Among them, we quote the works of Kempf et al. [21, 22] and Chang et al. [24] that are relevant to the study for solving the Schrödinger equation in momentum space for the harmonic oscillator in D-dimensions. Besides, the effects of the minimal length on the energy spectrum and momentum wave functions of the Coulomb potential in one dimension and three dimensions have been studied, respectively, in [25] and [26–28]. The quantization scheme in the presence of a minimal length

is also applied to the problem of the Casimir force for the electromagnetic field [29, 30], the magnetization of electron [31], the Pauli equation for a charged particle in a magnetic field [32], and the cosmological constant problem [33, 34]. Further noteworthy studies in this direction include the high temperature properties of the one-dimensional Dirac oscillator (DO) [35] and supersymmetric quantum mechanics of the three-dimensional Dirac oscillator [14]. The Dirac oscillator plays an important role in the description of relativistic many-body problems and supersymmetric relativistic quantum mechanics [36–41]. Dirac oscillator representation is also proposed in quantum chromodynamics, particularly, in connection with quark confinement models in mesons and baryons [42].

The purpose of this work is to investigate the mathematical formulation of the Dirac oscillator problem and its consequences by solving fundamental equations in the framework of relativistic quantum mechanics with minimal length. In Section 2, we give a brief summary of the main features of quantum mechanics with generalized commutation relations. We solve, in Section 3, the three-dimensional Dirac oscillator equation in momentum space completely and derive the corresponding wave functions and the spectrum of quantized energy for $s = 1/2$ (spin up) and $s = -1/2$ (spin down). The main consequences in the nonrelativistic limit are discussed and it is shown that our results reduce to the standard ones when we remove the scale of the minimal length. The concluding remarks are given in Section 4 which is the last section.

2. Quantum Mechanics with Minimal Length

The presence of a minimal length as a reflection of dynamical phenomenon stems from the fundamental fluctuations of the background metric at the Planck scales. The Planck length should be taken into account when we want to describe gravitational fields with its quantum fluctuations. Let us start this section with a brief review of deformed quantum mechanics in 3D. Indeed, following [14, 21], we have

$$[\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar [\delta_{ij} (1 + \beta \mathbf{p}^2) + \beta' \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j], \quad (1)$$

$$[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j] = -i\hbar (2\beta - \beta' + (2\beta + \beta') \beta \mathbf{p}^2) \epsilon_{ijk} \mathbf{L}_k, \quad (2)$$

$$[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = 0, \quad (3)$$

where β and β' are two very small nonnegative parameters. The components of the angular momentum are given by

$$\mathbf{L}_i = (1 + \beta \mathbf{p}^2)^{-1} \epsilon_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{p}_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

These satisfy the usual commutation relations of the form

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{x}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \mathbf{x}_k, \quad [\mathbf{L}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \mathbf{p}_k. \quad (5)$$

The GUP can be established in this context if we take into account the presence of the minimal length scale. Considering physical states with $\langle \mathbf{p} \rangle = 0$ and the fact that the momentum uncertainties $\Delta \mathbf{p}_i$ are isotropic, we see from

(1) and (2) that the Heisenberg uncertainty principle takes a modified form (GUP) that is given by

$$\Delta \mathbf{x}_i \Delta \mathbf{p}_i \geq \frac{\hbar}{2} (1 + 3\beta (\Delta \mathbf{p}_i)^2 + \beta' (\Delta \mathbf{p}_i)^2). \quad (6)$$

Hence, the specific correction of the quantum commutation relations between \mathbf{x}_i and \mathbf{p}_i leads to the extension of the usual uncertainty relations clarifying a lower bound. The additional terms in this principle are the consequence of the modification of ordinary space of position and momentum, which is nonnegligible especially in the high energy quantum regime with the energy comparable to the Planck mass $\sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{19}$ GeV. Such GUP is also obtained by analyzing the Gedanken experiment [43, 44].

By minimizing position uncertainty with respect to $\Delta \mathbf{p}_i$ in the limit that GUP is saturated, we obtain an isotropic minimal length such that

$$\Delta \mathbf{x}_{\min} = \hbar \sqrt{3\beta + \beta'}. \quad (7)$$

This relation implies that there is a loss of the notion of localization in the position space. Since we are going to work in momentum space, it is convenient to use the following representation of the position and momentum operators:

$$\mathbf{x}_i = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i \right], \quad (8)$$

$$\mathbf{p}_i = p_i,$$

$$\mathbf{L}_i = -i\hbar \epsilon_{ijk} p_j \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

The parameter γ can be taken arbitrarily, and it just modifies the squeezing factor of the momentum space measure without affecting the commutation relations. In fact, the inner product is now defined as

$$\int \frac{d^3 p}{[1 + (\beta + \beta') p^2]^{1 - ((\gamma - \beta')/(\beta + \beta'))}} |p\rangle \langle p| = 1. \quad (9)$$

3. The Dirac Oscillator with Minimal Length

The modification of the wave function and the quantum energy that has taken place due to the existence of minimal length will be investigated here by a rigorous procedure for their evaluation. To do this, we consider momentum space problem which is more easier than that in position space due to the fact that position operators do not commute each other [see, (2)]. The replacement $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - i\tilde{\beta} m \omega \mathbf{r}$ in the Dirac equation for a free particle gives the Dirac oscillator equation [42] such that

$$[c\tilde{\alpha} (\mathbf{p} - i\tilde{\beta} m \omega \mathbf{r}) + \tilde{\beta} m c^2] \psi = W \psi, \quad (10)$$

where m is the rest mass, ω is the frequency of the Dirac oscillator, $\tilde{\alpha}$ and $\tilde{\beta}$ are the Dirac matrices, and $\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$ is a two-component spinor.

Using the following representation of $\tilde{\alpha}$ and $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

we get the following two simultaneous equations:

$$\begin{aligned} W\psi_a(\mathbf{p}) &= c\sigma(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})\psi_b(\mathbf{p}) + mc^2\psi_a(\mathbf{p}), \\ W\psi_b(\mathbf{p}) &= c\sigma(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})\psi_a(\mathbf{p}) - mc^2\psi_b(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (12)$$

This system gives the following factorized equation for the large component $\psi_a(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} (W^2 - m^2c^4)\psi_a(\mathbf{p}) \\ = c^2 \{ \mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{r}^2 + im\omega[\sigma\mathbf{r}, \sigma\mathbf{p}] + im^2\omega^2\sigma(\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) \} \psi_a(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (13)$$

Using (1) and (2), we easily show that

$$\begin{aligned} [\sigma\mathbf{r}, \sigma\mathbf{p}] &= i\hbar(1 + (\beta + \beta')p^2) \left(\frac{2\sigma\mathbf{L}}{\hbar} + 3 \right), \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{r} &= -i\hbar(2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta p^2)\mathbf{L}. \end{aligned} \quad (14)$$

The substitution of the above equations into (13) gives

$$\begin{aligned} \frac{(W^2 - m^2c^4)}{c^2}\psi_a(\mathbf{p}) \\ = \{ \mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{r}^2 \\ + [-2m\omega(1 + (\beta + \beta')p^2) \\ + m^2\omega^2\hbar(2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta p^2)]\sigma\mathbf{L} \\ - 3m\omega\hbar(1 + (\beta + \beta')p^2) \} \psi_a(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (15)$$

The first two terms in the right-hand side constitute the Hamiltonian of the 3-dimensional harmonic oscillator. The third term is the spin-orbit contribution with a momentum dependent coupling strength. The fourth term is a momentum-dependent shift function which affects both the energy levels and wave functions. It is obvious that the usual Dirac oscillator equation is reproduced in the limit $\beta = \beta' = 0$.

3.1. Wave Functions. Let us now derive wave functions of the Dirac oscillator in momentum space by solving (15). We make the decomposition of the wave function into radial part and a spin-angular part as

$$\psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \psi_a(\mathbf{p}) \\ \psi_b(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p)\chi_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) \\ G(p)\chi_{-\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

where $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ is a unit vector. For further evaluation, we need the square of the position operator:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^2 &= -\hbar^2 \left\{ \left[(1 + (\beta + \beta')p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right]^2 \right. \\ &\quad + \left[\frac{2}{p} + 2(\beta + \gamma)p \right] \times \left[(1 + (\beta + \beta')p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right] \\ &\quad - \frac{L^2}{p^2} - (2\beta L^2 - 3\gamma) \\ &\quad \left. + [\gamma(3\beta + \beta' + \gamma) - \beta^2 L^2] p^2 \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

The action of $(\sigma\mathbf{L})$ on the spin-angular function $\chi_{\kappa}^{m_j}(\mathbf{p})$ results in [45]:

$$\sigma\mathbf{L}\chi_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) = \hbar\kappa\chi_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}), \quad (18)$$

where the quantum number κ is equal to $[s(2j + 1) - 1]$.

By substituting (17) and (18) into (15), we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} (W^2 - m^2c^4 + 2m\omega\hbar\kappa c^2 \\ + 3m\omega\hbar c^2 - m^2\omega^2\hbar^2\kappa c^2(2\beta - \beta')) F(p) \\ = -m^2\omega^2\hbar^2 \\ \times \left\{ \left[(1 + (\beta + \beta')p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right]^2 + \left[\frac{2}{p} + 2(\beta + \gamma)p \right] \right. \\ \times \left[(1 + (\beta + \beta')p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right] - \frac{L^2}{p^2} - (2\beta L^2 - 3\gamma) \\ + \left[\frac{-1}{m^2\omega^2\hbar^2} + \gamma(3\beta + \beta' + \gamma) - \beta^2 L^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{m\omega\hbar}(2\kappa + 3)(\beta + \beta') \right. \\ \left. - (2\beta + \beta')\beta\kappa \right] p^2 \left. \right\} F(p). \end{aligned} \quad (19)$$

Although this is a very complicated equation at a glance, we can simplify it via the following standard procedure. Let us first introduce a useful parameter ξ in the form

$$\xi = \frac{\rho}{\sqrt{m\omega\hbar}}, \quad (20)$$

where

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\beta + \beta'}} \arctan p\sqrt{\beta + \beta'}. \quad (21)$$

Then, it is able to change the variable from $p \in (0, \infty)$ to $\xi \in (0, \pi/(2\sqrt{k}))$ where

$$k = \sqrt{m\omega\hbar(\beta + \beta')}. \quad (22)$$

Notice that the relation between ξ and k is as follows:

$$\xi = \frac{1}{k} \arctan \left(p \sqrt{\beta + \beta'} \right). \quad (23)$$

Now, (19) can be rewritten as

$$\begin{aligned} & -\frac{\zeta}{k^2} F(p) \\ & = \left\{ \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[\frac{2m\omega\hbar\sqrt{\beta + \beta'}}{k^2 \tan(\rho\sqrt{\beta + \beta'})} + \frac{2m\omega\hbar}{k^2\sqrt{\beta + \beta'}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \tan(\rho\sqrt{\beta + \beta'}) \right] \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m\omega\hbar}{k^2} (\beta + \beta') L^2 \right. \\ & \quad \times \left[\cot(\rho\sqrt{\beta + \beta'}) \right]^2 \\ & \quad - \frac{m\omega\hbar}{k^2} (2\beta L^2 - 3\gamma) + \frac{m\omega\hbar}{k^2(\beta + \beta')} \\ & \quad \times \left[\frac{-1}{m^2\omega^2\hbar^2} + \gamma(3\beta + \beta' + \gamma) - \beta^2 L^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{m\omega\hbar} (2\kappa + 3)(\beta + \beta') - (2\beta + \beta')\beta\kappa \right] \\ & \quad \left. \times \left[\tan(\rho\sqrt{\beta + \beta'}) \right]^2 \right\} F(p), \end{aligned} \quad (24)$$

where

$$\zeta = \frac{W^2 - m^2 c^4}{m\omega\hbar c^2} + 2\kappa + 3 - m\omega\hbar\kappa(2\beta - \beta'). \quad (25)$$

For further simplifications, we put

$$F = C^{\lambda+\delta} f(S), \quad (26)$$

where S and C are given by

$$S = \sin(k\xi), \quad C = \cos(k\xi), \quad (27)$$

and λ is a constant that will be determined later, while $\delta = \gamma/(\beta + \beta')$. From substitution of (26) into (24), we get

$$\begin{aligned} & (1 - S^2) f'' - \left[(2\lambda + 1 + 2(1 - \eta))S - \frac{2}{S} \right] f' \\ & + \left\{ \left(\frac{\zeta}{k^2} - (2\eta - 1) \times L^2 - 3\lambda \right) \right. \\ & \quad - \frac{L^2}{S^2} + \left(\lambda^2 - \lambda(1 + 2\eta) - \eta^2 L^2 + \frac{(2\kappa + 3)}{k^2} \right. \\ & \quad \left. \left. - \eta(\eta + 1)\kappa - \frac{1}{k^4} \right) \frac{S^2}{C^2} \right\} f = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

where $\eta = \beta/(\beta + \beta')$. At this stage, we eliminate the centrifugal barrier by imposing a condition that λ satisfies equation

$$\lambda^2 - \lambda(1 + 2\eta) - \eta^2 L^2 + \frac{(2\kappa + 3)}{k^2} - \eta(\eta + 1)\kappa - \frac{1}{k^4} = 0. \quad (29)$$

The corresponding solutions are

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} & = \frac{1 + 2\eta}{2} \\ & \pm \sqrt{\frac{(1 + 2\eta)^2}{4} + \eta^2 L^2 - \frac{(2\kappa + 3)}{k^2} + \eta(\eta + 1)\kappa + \frac{1}{k^4}}. \end{aligned} \quad (30)$$

To proceed further, it is convenient to introduce a parameter as $z = 2S^2 - 1$ and to choose $f(S) = S^l g(z)$. Then (28) becomes

$$\begin{aligned} & (1 - z^2) g''(z) + [(b - a) - (a + b + 2)z] g'(z) \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k^2} - 2\eta L^2 - (2l + 3)\lambda + l(2\eta - 1) \right] g(z) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

where the parameters a and b are defined by

$$a = \lambda_+ - \eta - \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} + l. \quad (32)$$

Notice that a is written in terms of λ_+ given in (30), and it will be justified later. To solve this differential equation, we set

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k^2} - 2\eta L^2 - (2l + 3)\lambda + l(2\eta - 1) \right] \\ & = n'(n' + a + b + 1), \end{aligned} \quad (33)$$

where $n' = (n - l)/2$. This is the spectral condition from which we can extract the energy spectrum. Thus, we obtain

$$\begin{aligned} & (1 - z^2) g''(z) + [(b - a) - (a + b + 2)z] g'(z) \\ & + n'(n' + a + b + 1) g(z) = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

whose corresponding solution is given in terms of the Jacobi polynomials:

$$g(z) = N P_{n'}^{(a,b)}(z), \quad (35)$$

with a normalization constant N .

Then, the large radial component momentum wave function is given by

$$\begin{aligned} & F(z) \\ & = N 2^{-(a+b+\eta+\delta)/2} (1-z)^{(a+\eta+\delta+1/2)/2} (1+z)^{(b-1/2)/2} P_{n'}^{(a,b)}(z). \end{aligned} \quad (36)$$

Upon returning to the old variable p , we have

$$F(p) = N \left[1 + (\beta + \beta') p^2 \right]^{-(a+b+\eta+\delta)/2} \left(\sqrt{\beta + \beta'} p \right)^{b-(1/2)} \\ \times P_{n'}^{(a,b)} \left(\frac{(\beta + \beta') p^2 - 1}{(\beta + \beta') p^2 + 1} \right), \quad (37)$$

which leads to the large component of the DO wave function:

$$\psi_a(\mathbf{p}) = N \left[1 + (\beta + \beta') p^2 \right]^{-(a+b+\eta+\delta)/2} \left(\sqrt{\beta + \beta'} p \right)^{b-(1/2)} \\ \times P_{n'}^{(a,b)} \left(\frac{(\beta + \beta') p^2 - 1}{(\beta + \beta') p^2 + 1} \right) \chi_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}). \quad (38)$$

Let us now turn to the calculation of the small component of the DO wave function $\psi_b(\mathbf{p})$ given by

$$\psi_b(\mathbf{p}) = \frac{c\sigma(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})}{W + mc^2} \psi_a(\mathbf{p}). \quad (39)$$

With the aid of the following relations [14]:

$$\sigma\mathbf{r} = i\hbar\sigma_i \left((1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i \right), \\ \sigma_i \frac{\partial}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\sigma\mathbf{L} + 2}{p} \right) \sigma_p = \sigma_p \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sigma\mathbf{L}}{p} \right), \\ \sigma_i p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} = (\sigma \cdot \mathbf{p}) \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) = \sigma_p p^2 \frac{\partial}{\partial p} = p^2 \frac{\partial}{\partial p} \sigma_p, \\ \frac{\partial}{\partial p} \sigma_p = \sigma_p \frac{\partial}{\partial p}, \quad (40)$$

where $\sigma_p = (\sigma \cdot \mathbf{p})/p$, and using (18), one finds

$$\psi_b(\mathbf{p}) = \frac{c}{W + mc^2} \sigma_p \\ \times \left[p + m\omega\hbar \left((1 + (\beta + \beta') p^2) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\hbar\kappa}{p} + (\gamma - \beta\hbar\kappa) p \right) \right] \psi_a(\mathbf{p}). \quad (41)$$

Through the introduction of the following property:

$$\sigma_p \chi_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) = -\chi_{-\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}), \quad (42)$$

the small radial wave function $G(p)$ is represented as follows:

$$G(p) = \frac{-m\omega\hbar c}{W + mc^2} \\ \times \left[\left(\frac{1}{m\omega\hbar} + \gamma - \beta\hbar\kappa \right) p + (1 + (\beta + \beta') p^2) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\hbar\kappa}{p} \right] F(p). \quad (43)$$

At this stage we use the following decomposition, which will be useful in the calculation of both $G(p)$ and the normalization constant:

$$F(p) = \frac{1}{p} f^{-(\delta+\eta-1)/2} R_1(p), \quad (44)$$

$$G(p) = \frac{1}{p} f^{-(\delta+\eta-1)/2} R_2(p), \quad (45)$$

where $f(p) = 1 + (\beta + \beta') p^2$. By comparing (44) with (37), one immediately gets

$$R_1(p) = N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-1/2} p^{b+1/2} f^{-(a+b+1)/2} P_{n'}^{(a,b)}(z). \quad (46)$$

In the meantime, $R_2(p)$ is different depending on spin. Using the properties of the Jacobi polynomials given in [46], we have the following results for each spin:

(i) $s = 1/2$

$$R_2(p) = \frac{-m\omega\hbar c N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-1/2}}{W + mc^2} \\ \times \left[f \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \beta\hbar\kappa \right) p - \frac{\hbar\kappa}{p} \right] \\ \times p^{b+1/2} f^{-(a+b+1)/2} P_{n'}^{(a,b)}(z) \\ = \frac{-2m\omega\hbar c N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-1/2}}{W + mc^2} \\ \times p^{b-1/2} f^{-(a+b+1)/2} (1+z) \frac{d}{dz} P_{n'}^{(a,b)}(z) \\ = \frac{-2m\omega\hbar c (\beta + \beta') (a+b+n'+1) N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-1/2}}{W + mc^2} \\ \times p^{b+3/2} f^{-(a+b+3)/2} P_{n'-1}^{(a+1,b+1)}(z), \quad (47)$$

(ii) $s = -1/2$

$$R_2(p) = \frac{-m\omega\hbar c N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-1/2}}{W + mc^2} \\ \times \left[f \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \beta\hbar(\kappa + 1) \right) p - \frac{\hbar(\kappa + 1)}{p} \right] \\ \times p^{b+1/2} f^{-(a+b+1)/2} P_{n'}^{(a,b)}(z) \\ = \frac{-2m\omega\hbar c N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-1/2}}{W + mc^2} p^{b-1/2} f^{-(a+b+1)/2}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[(1+z) \frac{d}{dz} + b \right] P_{n'}^{(a,b)}(z) \\
& = \frac{-2m\omega\hbar c (b+n') N \sqrt{\beta+\beta'}^{b-1/2}}{W+mc^2} \\
& \times P^{b-1/2} f^{-(a+b+1)/2} P_{n'}^{(a+1,b-1)}(z). \tag{48}
\end{aligned}$$

Now, the normalization constant N can be calculated using the modified closure relation

$$\int_0^\infty \frac{dp}{f(p)} (|R_1(p)|^2 + |R_2(p)|^2) = 1. \tag{49}$$

If we substitute (46)–(48) into (44) and (45), the final expressions of the radial components of normalized wave functions are obtained as follows:

$$\begin{aligned}
F(p) & = \left(\frac{W+mc^2}{2W} \right)^{1/2} \\
& \times A^{(n')} (a, b) p^{b-1/2} f^{-(1/2)(a+b+\eta+\delta)} P_{n'}^{(a,b)}(z), \tag{50} \\
G(p) & = -\epsilon \left(\frac{W-mc^2}{2W} \right)^{1/2} \\
& \times A^{(\tilde{n}')} (\tilde{a}, \tilde{b}) p^{\tilde{b}-1/2} f^{-(1/2)(\tilde{a}+\tilde{b}+\eta+\delta)} P_{\tilde{n}'}^{(\tilde{a},\tilde{b})}(z),
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
& A^{(n')} (a, b) \\
& = \left(\frac{2(\beta+\beta')^{b+1} (a+b+2n'+1) n'! \Gamma(a+b+n'+1)}{\Gamma(a+n'+1) \Gamma(b+n'+1)} \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

$$\tilde{a} = a+1, \quad \tilde{b} = b+2s, \quad \tilde{n}' = n' - s - \frac{1}{2}, \quad \epsilon = \frac{W}{|W|}, \tag{51}$$

and $n' = 0, 1, 2, \dots$, except when $s = 1/2$ and $\epsilon = -1$, in which case $n' = 1, 2, 3, \dots$

At this stage, we turn back to the problem of justifying that a is expressed in terms of λ_+ as shown in (32). It was pointed in [21] that the normalization condition alone does not always guarantee physically relevant wave functions for the case considered the existence of minimal length. However, the physical wave functions of our system must be recognizable in the domain of momentum since \mathbf{p}_i and \mathbf{p}_j commutes mutually as shown in (3). This physically means that there is a finite uncertainty in momentum, leading to the following condition:

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{f(p)} (|R_1(p)|^2 + |R_2(p)|^2) < \infty, \tag{52}$$

or

$$\int_0^\infty \frac{p^2 dp}{f(p)} |R_1(p)|^2 < \infty, \quad \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{f(p)} |R_2(p)|^2 < \infty. \tag{53}$$

It is easy to see that the integrand with the small radial wave function behaves like $p^{-(2\lambda-2\eta-1)}$ for $p \rightarrow \infty$, which requires $\lambda > \eta + (1/2)$. This condition can only be fulfilled by choosing the upper sign in (30). For the case $\lambda = \lambda_+$, the integrand with the large radial wave function behaves like $p^{-(2\lambda_+-2\eta+1)}$, and then the convergence criterion requires $\lambda_+ > \eta - (1/2)$ which is automatically satisfied in our treatment.

Let us derive the nonrelativistic limit of the Dirac oscillator equation with minimal length by setting $W = mc^2 + E$ with $E \ll mc^2$ and dividing by $2m$ from (13). Then, one finds

$$\begin{aligned}
& E\psi_a(\mathbf{p}) \\
& = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{r}^2 - \mu_{SL}(p) \sigma \mathbf{L} - \frac{3}{2} \hbar\omega (1 + (\beta + \beta') p^2) \right] \psi_a(\mathbf{p}), \tag{54}
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\mu_{SL}(p) & = \frac{\omega}{\hbar} (1 + (\beta + \beta') p^2) \\
& - \frac{\omega^2}{4} (2\beta - \beta' + (2\beta + \beta') \beta p^2). \tag{55}
\end{aligned}$$

We observe that, besides the usual shifted 3D harmonic oscillator, the Hamiltonian contains an additional interaction term that is originated from the presence of the minimal length. Unlike the usual Dirac oscillator, the second term in (54) exhibits a momentum-dependent spin-orbit coupling strength given by $\mu_{SL}(p)$. As it is well known, the spin-orbit interaction is generated by the scalar potential in the usual case. In our setup such a scalar potential can be attributed to a gravitation-like field generated by the perturbation of the space in the presence of the minimal length.

3.2. Energy Spectrum. The existence of a nonvanishing minimal length implies the modification of energy level for the usual treatment of the Dirac oscillator. In order to derive the energy spectrum of the Dirac oscillator with minimal length, we substitute the expressions of n' , a , b , λ_+ , and ζ into (33) and solve for W . Indeed, after a straightforward calculations, we obtain

$$\begin{aligned}
& W^2 - m^2 c^4 \\
& = m\omega\hbar c^2 \left\{ 2 \left(n + \frac{3}{2} \right) \right. \\
& \times \left[1 + (m\omega\hbar)^2 \left(\frac{(\beta' + 3\beta)^2}{4} + \beta^2 L^2 \right) - \epsilon_{\kappa 1} \right]^{1/2} \\
& + m\omega\hbar \left[(\beta + \beta') \left(n + \frac{3}{2} \right)^2 + (\beta - \beta') \right. \\
& \left. \left. \times \left(L^2 + \frac{9}{4} \right) + \frac{3}{2} \beta' \right] - \epsilon_{\kappa 2} \right\}, \tag{56}
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\epsilon_{\kappa 1} &= 3 \left(1 + \frac{2}{3}\kappa\right) m\omega\hbar(\beta + \beta') - m^2\omega^2\hbar^2\beta(2\beta + \beta')\kappa, \\ \epsilon_{\kappa 2} &= 3 \left(1 + \frac{2}{3}\kappa\right) - m\omega\hbar\kappa(2\beta - \beta'),\end{aligned}\quad (57)$$

which are the terms expressing the spin-orbit coupling. Notice that (56) does not depend on the parameter γ , it but depends on β and β' . By expanding (56) up to first order in β and β' , we get

$$\begin{aligned}W^2 &= m^2c^4 + m\omega\hbar c^2 \\ &\times \left\{ 2 \left(n - j + \frac{1}{2}\right) \left[1 + \frac{m\omega\hbar\beta}{2} \left(n - j + \frac{1}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad + \frac{m\omega\hbar\beta'}{2} \left(n + j + \frac{9}{2}\right) \\ &\quad \left. + m\omega\hbar\beta'(-4n - 2nj - 3) \right\},\end{aligned}\quad (58)$$

for $j = l + (1/2)$, and

$$\begin{aligned}W^2 &= m^2c^4 + m\omega\hbar c^2 \\ &\times \left\{ 2 \left(n + j + \frac{3}{2}\right) \left[1 + \frac{m\omega\hbar\beta}{2} \left(n + j + \frac{3}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad + \frac{m\omega\hbar\beta'}{2} \left(n - j + \frac{7}{2}\right) \\ &\quad \left. + m\omega\hbar\beta'(-2n + 2nj - 3) \right\},\end{aligned}\quad (59)$$

for $j = l - (1/2)$.

In the standard setup where $\beta, \beta' \rightarrow 0$, we can easily show that the following equations recover the usual energy spectrum of the Dirac oscillator [45]:

$$\begin{aligned}W^2 - m^2c^4 &= 2m\omega\hbar c^2 \left[n - j + \frac{1}{2}\right], \quad j = l + \frac{1}{2}, \\ W^2 - m^2c^4 &= 2m\omega\hbar c^2 \left[n + j + \frac{3}{2}\right], \quad j = l - \frac{1}{2},\end{aligned}\quad (60)$$

which shows a degeneracy of all the states with $n \pm q$ and $j \pm q$ for $j = l + (1/2)$, where q is an integer, and of all the states with $n \pm q$ and $j \mp q$ for $j = l - (1/2)$. As we can see from (58) and (59), a remarkable feature of the incorporation of the minimal length in the DO equation is that these degeneracy is completely removed when $\beta' \neq 0$. From Figure 1, we see that the intervals between adjacent energy levels that are degenerated under $\beta' = 0$ become large as β' grows.

It is important to note that the energy spectrum contains additional terms proportional to n^2 , which indicates hard confinement. This behavior is expected since the original

problem has been mapped into the motion of a point particle near the surface of a sphere which is in essence a motion in potential wells. In our setup the boundaries of the well are localized at 0 and $\pi/(2\sqrt{m\omega\hbar(\beta + \beta')})$.

The nonrelativistic limit of the energy spectrum in the presence of minimal length is obtained from (56) by setting $W = mc^2 + W_{nr}$ with the assumption that $W_{nr} \ll mc^2$. From a little calculation, we get

$$\begin{aligned}W_{nr} &= \hbar\omega \left\{ \left(n + \frac{3}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \left[1 + (m\omega\hbar)^2 \left(\frac{(\beta' + 3\beta)^2}{4} + \beta^2 L^2 \right) - \epsilon_{\kappa 1} \right]^{1/2} \\ &\quad + \frac{m\omega\hbar}{2} \left[(\beta + \beta') \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 + (\beta - \beta') \right. \\ &\quad \left. \times \left(L^2 + \frac{9}{4} \right) + \frac{3}{2}\beta' \right] - \frac{\epsilon_{\kappa 2}}{2} \left. \right\}.\end{aligned}\quad (61)$$

If we ignore the contribution of the spin-orbit coupling $\epsilon_{\kappa 1}$ and $\epsilon_{\kappa 2}$, this exactly coincides with the 3D harmonic oscillator energy in deformed space with minimal length [24].

In order to compare our results with the ones considered up to the first order in β , that is obtained in [14], using supersymmetric quantum mechanical methods, let us expand (61) to the first order in β and β' such that

$$\begin{aligned}W_{nr} &= \hbar\omega \left\{ \left(n - j + \frac{1}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \left[1 + \frac{m\omega\hbar\beta}{2} \left(n - j + \frac{1}{2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{m\omega\hbar\beta'}{4} \left(n + j + \frac{9}{2}\right) - m\omega\hbar\beta' \\ &\quad \left. \times \left(2n + nj + \frac{3}{2} \right) \right\}, \quad j = l + \frac{1}{2},\end{aligned}\quad (62)$$

$$\begin{aligned}W_{nr} &= \hbar\omega \left\{ \left(n + j + \frac{3}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \left[1 + \frac{m\omega\hbar\beta}{2} \left(n + j + \frac{3}{2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{m\omega\hbar\beta'}{4} \left(n - j + \frac{7}{2}\right) - m\omega\hbar\beta' \\ &\quad \left. \times \left(n - nj + \frac{3}{2} \right) \right\}, \quad j = l - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

respectively. Clearly, in the limit $\beta' = 0$, these equations become identical with the ones obtained in [14]. The discrepancy when $\beta' \neq 0$ can be attributed to the method used by the

authors of [14] where there is a manifest distinction between large and small values of j .

Now, by setting $\beta' = 0$ and $\beta = 0$ from (62), one obtains the energy levels of the standard Dirac oscillator in the nonrelativistic limit as follows:

$$\begin{aligned} W_n &= \hbar\omega \left(n - j + \frac{1}{2} \right), & j &= l + \frac{1}{2}, \\ W_n &= \hbar\omega \left(n + j + \frac{3}{2} \right), & j &= l - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Using $n = 2n' + l$, we confirm that the average energy between the up-spin and the down-spin states is $\bar{W}_n = \hbar\omega(2n' + l + (1/2))$ which differs from the usual nonrelativistic harmonic oscillator eigenvalue by $\hbar\omega$, which is attributed to the spin-orbit coupling. In the presence of the minimal length, the following can be shown:

$$\begin{aligned} \bar{W}_n &= \hbar\omega \left\{ \left(2n' + l + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \times \left[1 + \frac{m\omega\hbar\beta}{2} \left(2n' + l + \frac{1}{2} \right) \right] \\ &\quad \left. - \frac{m\omega\hbar\beta'}{2} \left(2n' + l - \frac{1}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (64)$$

where additional spin-orbit-like contribution proportional to β and β' appears.

4. Conclusion

In this paper, we have exactly solved the Dirac oscillator equation in 3 dimensions in the framework of relativistic quantum mechanics with minimal length. Quantum features of the system such as wave functions and the energy spectrum are investigated using common techniques for noncommutative geometry algebra.

Although our wave functions for $\beta \neq 0$ and $\beta' \neq 0$ exactly coincide with the ones obtained in [14] using supersymmetric quantum mechanical (SUSYQM) formalism, it is shown that the energy spectrum we have obtained here is different from theirs. An important point of our result, that distinguishes it from previous works, is that the presence of the minimal length reveals a quadratic dependence of the energy spectrum on quantum number n , as well as the appearance of the usual term that is linearly dependent on n , implying the property of hard confinement of the system. However, for $\beta' = 0$, the energy spectrum to the first order in β becomes the same as the one obtained in [14].

An interesting feature that we have shown in this work is that the well-known usual infinite degeneracy of the usual Dirac oscillator energy levels is completely removed by the presence of the minimal length in the case $\beta' \neq 0$. We see from Figure 1 that all of degenerated energies under $\beta' = 0$ are splitting in the presence of β' , and the interval between split energies becomes large as β' increases. It is also confirmed that, when we ignore the spin-orbit coupling, the

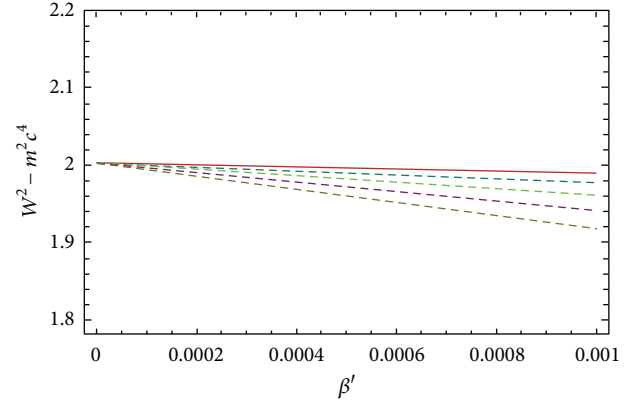


FIGURE 1: Splitting of degenerated energies in the presence of β' . The value of (n, l) , in turn from upper line, are (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), and (6,5). We have taken $j = l + 1/2$, $\beta = 0.001$, $c = 1$, $m = 1$, $\omega = 1$, and $\hbar = 1$ and all these values are chosen dimensionlessly for convenience.

nonrelativistic expression of the energy levels exactly reduces to that for the energy of 3D harmonic oscillator with the minimal length scale [24].

Finally, it is important to note that our results were obtained using a noncovariant deformed algebra given by (1)–(3), and it is legitimate to ask whether the different properties of the energy spectrum obtained in this work remain valid if one uses a covariant deformed algebra like the one introduced in [47, 48]. This issue will be addressed in our forthcoming contribution on the subject of this context. Indeed, the concept of minimal length became one of common factors for many different formulations of quantum mechanics with general relativity, due to the fact that minimal length is an intrinsic scale characterizing the physically meaningful finite minimal size in string theory.

Acknowledgments

Malika Betrouche is indebted to Professor Khireddine Nouicer (Laboratory of Theoretical Physics and the Department of Physics, University of Jijel, Algeria) for his interest his generous assistance and fruitful discussions during this work. The work of M. Maamache was supported by the Agence Thématique de Recherche en Sciences et Technologie (ATRST) contract of May 2, 2011 (code pnr: 8/u19/882). The work of J. R. Choi was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (Grant no. 2013RIA1A2062907).

References

- [1] G. Veneziano, “A stringy nature needs just two constants,” *European Physics Letters*, vol. 2, no. 3, pp. 199–204, 1986.
- [2] D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano, “Can spacetime be probed below the string size?” *Physics Letters B*, vol. 216, no. 1-2, pp. 41–47, 1989.

- [3] K. Konishi, G. Paffuti, and P. Provero, "Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory," *Physics Letters B*, vol. 234, no. 3, pp. 276–284, 1990.
- [4] M. Kato, "Particle theories with minimum observable length and open string theory," *Physics Letters B*, vol. 245, no. 1, pp. 43–47, 1990.
- [5] R. Guida, K. Konishi, and P. Provero, "On the short distance behavior of string theories," *Modern Physics Letters A*, vol. 6, no. 16, pp. 1487–1504, 1991.
- [6] L. J. Garay, "Quantum gravity and minimal length," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 10, no. 2, pp. 145–166, 1995.
- [7] S. Capozziello, G. Lambiase, and G. Scarpetta, "Generalized uncertainty principle from quantum geometry," *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 39, no. 1, pp. 15–22, 2000.
- [8] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, "Noncommutative field theory," *Reviews of Modern Physics*, vol. 73, no. 4, pp. 977–1029, 2001.
- [9] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk, and N. Seiberg, "Noncommutative perturbative dynamics," *The Journal of High Energy Physics*, vol. 2, article 020, 30 pages, 2000.
- [10] R. J. Szabo, "Quantum field theory on noncommutative spaces," *Physics Reports*, vol. 378, no. 4, pp. 207–299, 2003.
- [11] F. Scardigli, "Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment," *Physics Letters B*, vol. 452, no. 1-2, pp. 39–44, 1999.
- [12] F. Scardigli and R. Casadio, "Generalized uncertainty principle, extra dimensions and holography," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 20, no. 18, pp. 3915–3926, 2003.
- [13] Y. Chargui, A. Trabelsi, and L. Chetouani, "Exact solution of the (1+1)-dimensional Dirac equation with vector and scalar linear potentials in the presence of a minimal length," *Physics Letters A*, vol. 374, no. 4, pp. 531–534, 2010.
- [14] C. Quesne and V. M. Tkachuk, "Dirac oscillator with nonzero minimal uncertainty in position," *Journal of Physics A*, vol. 38, no. 8, pp. 1747–1766, 2005.
- [15] S. Hossenfelder, "The minimal length and large extra dimensions," *Modern Physics Letters A*, vol. 19, no. 37, pp. 2727–2744, 2004.
- [16] S. Hossenfelder, "Running coupling with minimal length," *Physical Review D*, vol. 70, no. 10, Article ID 105003, 11 pages, 2004.
- [17] Hossenfelder, "Suppressed black hole production from minimal length," *Physics Letters B*, vol. 598, no. 1-2, pp. 92–98, 2004.
- [18] R. R. Sastry, "Quantum mechanics of smeared particles," *Journal of Physics A*, vol. 33, no. 46, pp. 8305–8318, 2000.
- [19] M. Maggiore, "The algebraic structure of the generalized uncertainty principle," *Physics Letters B*, vol. 319, no. 1–3, pp. 83–86, 1993.
- [20] A. Kempf, "Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 35, no. 9, pp. 4483–4495, 1994.
- [21] A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, "Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation," *Physical Review D*, vol. 52, no. 2, pp. 1108–1118, 1995.
- [22] A. Kempf, "Non-pointlike particles in harmonic oscillators," *Journal of Physics A*, vol. 30, no. 6, pp. 2093–2102, 1997.
- [23] H. Hinrichsen and A. Kempf, "Maximal localization in the presence of minimal uncertainties in positions and in momenta," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 37, no. 5, pp. 2121–2137, 1996.
- [24] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, "Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations," *Physical Review D*, vol. 65, no. 12, Article ID 125027, 8 pages, 2002.
- [25] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk, and V. M. Tkachuk, "One-dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length," *Journal of Physics A*, vol. 39, no. 9, pp. 2143–2150, 2006.
- [26] F. Brau, "Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom," *Journal of Physics A*, vol. 32, no. 44, pp. 7691–7696, 1999.
- [27] R. Akhoury and Y. -P. Yao, "Minimal length uncertainty relation and the hydrogen spectrum," *Physics Letters B*, vol. 572, no. 1-2, pp. 37–42, 2003.
- [28] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, and T. Takeuchi, "Hydrogenatom spectrum under a minimal-length hypothesis," *Physical Review A*, vol. 72, no. 1, Article ID 012104, 4 pages, 2005.
- [29] Kh. Nouicer, "Casimir effect in the presence of minimal lengths," *Journal of Physics A*, vol. 38, no. 46, pp. 10027–10035, 2005.
- [30] U. Harbach and S. Hossenfelder, "The Casimir effect in the presence of a minimal length," *Physics Letters B*, vol. 632, no. 2-3, pp. 379–383, 2006.
- [31] Kh. Nouicer, "Effect of minimal lengths on electron magnetism," *Journal of Physics A*, vol. 40, no. 9, pp. 2125–2135, 2007.
- [32] Kh. Nouicer, "Pauli-Hamiltonian in the presence of minimal lengths," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 47, no. 12, Article ID 122102, 11 pages, 2006.
- [33] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, "Effect of the minimal length uncertainty relation on the density of states and the cosmological constant problem," *Physical Review D*, vol. 65, no. 12, Article ID 125028, 7 pages, 2002.
- [34] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, S. Rayyan, and T. Takeuchi, "Short distance versus long distance physics: the classical limit of the minimal length uncertainty relation," *Physical Review D*, vol. 66, no. 2, Article ID 026003, 11 pages, 2002.
- [35] Kh. Nouicer, "An exact solution of the one-dimensional Dirac oscillator in the presence of minimal lengths," *Journal of Physics A*, vol. 39, no. 18, pp. 5125–5134, 2006.
- [36] M. Moshinsky and Y. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood, Amsterdam, 1996.
- [37] R. P. Martínez-y-Romero, H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas-Brito, "Relativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator," *European Journal of Physics*, vol. 16, no. 3, pp. 135–141, 1995.
- [38] J. Benítez, R. P. Martínez y Romero, H. N. Núñez Yépez, and A. L. Salas-Brito, "Solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator," *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 14, pp. 1643–1645, 1990.
- [39] J. Benítez, R. P. Martínez y Romero, H. N. Núñez Yépez, and A. L. Salas-Brito, "Erratum: solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator," *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 1643–1645, 1990," *Physical Review Letters*, vol. 65, no. 16, pp. 2085–2085, 1990.
- [40] R. P. Martínez-y-Romero, M. Moreno, and A. Zentalla, "Supersymmetric properties and stability of the Dirac sea," *Physical Review D*, vol. 43, no. 6, pp. 2036–2040, 1991.
- [41] F. Dominguez-Adame and M. A. Gonzalez, "Solvable linear potentials in the Dirac equation," *Europhysics Letters*, vol. 13, no. 3, pp. 193–198, 1990.
- [42] D. Ito and E. Carrieri, "An example of dynamical systems with linear trajectory," *Nuovo Cimento A*, vol. 51, no. 4, pp. 1119–1121, 1967.

- [43] M. Maggiore, "A generalized uncertainty principle in quantum gravity," *Physics Letters B*, vol. 304, no. 1-2, pp. 65–69, 1993.
- [44] M. Maggiore, "Quantum groups, gravity, and the generalized uncertainty principle," *Physical Review D*, vol. 49, no. 10, pp. 5182–5187, 1994.
- [45] P. Strange, *Relativistic Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- [46] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, vol. 2, McGraw-Hill, NY, USA, 1953.
- [47] C. Quesne and V. M. Tkachuk, "Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length and application to the (1 + 1)-dimensional Dirac oscillator," *Journal of Physics A*, vol. 39, no. 34, pp. 10909–10922, 2006.
- [48] C. Quesne and V. M. Tkachuk, "Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length," *Czechoslovak Journal of Physics*, vol. 56, no. 10-11, pp. 1269–1274, 2006.



OPEN

Novel characteristics of energy spectrum for 3D Dirac oscillator analyzed via Lorentz covariant deformed algebra

Malika Betrouche¹, Mustapha Maamache² & Jeong Ryeol Choi³

SUBJECT AREAS:
THEORETICAL PHYSICS
QUANTUM MECHANICS

Received
16 July 2013

Accepted
25 October 2013

Published
14 November 2013

Correspondence and
requests for materials
should be addressed to
J.R.C. (choiardor@
hanmail.net)

¹Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique (lpmps), Département de Physique, Faculté des Sciences Exactes, Université Constantine 1, Constantine 25000, Algeria, ²Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Setif 1, Setif 19000, Algeria, ³Department of Radiologic Technology, Daegu Health College, Yeongsong-ro 15, Daegu 702-722, Republic of Korea.

We investigate the Lorentz-covariant deformed algebra for Dirac oscillator problem, which is a generalization of Kempf deformed algebra in $3 + 1$ dimension of space-time, where Lorentz symmetry are preserved. The energy spectrum of the system is analyzed by taking advantage of the corresponding wave functions with explicit spin state. We obtained entirely new results from our development based on Kempf algebra in comparison to the studies carried out with the non-Lorentz-covariant deformed one. A novel result of this research is that the quantized relativistic energy of the system in the presence of minimal length cannot grow indefinitely as quantum number n increases, but converges to a finite value, $c/\sqrt{\beta}$ where c is the speed of light and β is a parameter that determines the scale of noncommutativity in space. If we consider the fact that the energy levels of ordinary oscillator is equally spaced, which leads to monotonic growth of quantized energy with the increment of n , this result is very interesting. The physical meaning of this consequence is discussed in detail.

Large momenta tied to large spatial dimensions, that appears in string theoretic considerations, may shed light to the existence of a minimal length scale. The coordinates in D -dimensional space no longer commutable with one another under the presence of minimal length scale. The interest for studying the effects of noncommutativity on characteristics of quantum systems has been gradually increasing over the past decade. Several works in this direction suggest the existence of natural ultra violet (UV) cut-off at the planck scale. This reflects the existence of non-zero uncertainties in position and/or in momentum, giving the concept of the generalized uncertainty principal (GUP) that involves some correction terms in its expression. Of course, the consideration of GUP in a certain quantum system leads to a modification of both wave functions and the corresponding energy spectrum¹⁻⁴.

Perturbative string theory in sufficiently high energy regime such as black hole may give rise to disturbance of space-time implying the appearance of non-negligible effects of the minimal length⁵. The consideration of minimal length concept is crucial for precise description of broad physical fields such as non-commutative geometry⁶, non-commutative field theories⁷⁻⁹, black hole physics^{10,11}, loop quantum gravity¹², string theory¹³⁻¹⁷, and others¹⁸⁻²¹. For nonrelativistic case, the solution of Schrödinger equation in momentum space and the corresponding energy spectrum has been studied in arbitrary dimensions considering minimal length, mainly for basic systems involving harmonic oscillator^{19,20,22}, coulomb potential system²³⁻²⁶, and one-dimensional box problems²⁷. By the way, the only relativistic problem that can be solved without approximation is Dirac oscillator (DO) established via the substitution $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} - i\beta m\omega\mathbf{X}$ in relativistic Dirac equation²⁸. Dirac oscillator has attracted great attention thanks to its essential applicability in particle physics and quantum gravity.

Dirac oscillator has been investigated in momentum space representation by Green's function technique^{29,30} and by coherent states approach³¹. It turned out that Kempf algebra³² is useful for determining wave functions and energy spectrum in 1D with consideration of its thermodynamic properties in the presence of minimal length. This approach has been extended to 3D by Quesne and Tkachuk³³ using supersymmetric quantum mechanics based on shape-invariance methods.

In this work, we plan to solve the DO problem in a somewhat different context, suggesting a new covariant deformed algebra in $3 + 1$ space-time, which preserves Lorentz symmetry. Due to several difference of our research from Kempf's one based on his deformed algebra, our result is somewhat different and cannot be reduced



to a simple one in nonrelativistic limit. In particular, we are interested in investigating the effects of space deformation, characterized by the presence of minimal length scale, on quantized energy spectrum for a relativistic Dirac oscillator. The behavior of energy spectrum in high quantum number limit ($n \rightarrow \infty$) will be analyzed in order to promote deep understanding for intrinsic quantum nature of the system.

We introduce the Lorentz covariant deformed algebra and it will be used to solve the quantum problem of Dirac oscillator with minimal length in momentum representation. Dirac wave functions will be derived and the DO energy spectrum will be determined. Its asymptotic behavior will be estimated in both non-relativistic and non-deformed cases. An interesting discrepancy between our energy spectrum and the one obtained by Kempf deformed algebra³⁴ will be addressed.

Results

Let us start with a brief review of deformed quantum mechanics in 3 dimensions. According to Refs. 22, 33, we introduce deformed formula of position and momentum operators represented in terms of momentum variable such that

$$X_i = i\hbar \left[(1 + \beta P^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i \right], \quad (1)$$

$$P_i = p_i, \quad (2)$$

where β , β' , and γ are some non-negative parameters which are very small. These operators yield non-covariant Kempf algebra that reads to

$$[X_i, P_j] = i\hbar [\delta_{ij} (1 + \beta P^2) + \beta' p_i p_j], \quad (3)$$

$$[X_i, X_j] = -i\hbar [2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta P^2] \epsilon_{ijk} L_k, \quad (4)$$

$$[P_i, P_j] = 0. \quad (5)$$

This algebra with the parameters $\beta = \gamma = 0$ in 3D is initiated by Snyder³⁵ in 1940's. After on, the attempt for investigating Dirac oscillator with this algebraic formulation was realized by Quesne et al.^{36,37} in 1 + 1 dimensions in the case $\beta' = \gamma = 0$. They derived wave functions of the system and estimated the bound-state energy.

The components of the angular momentum are given by

$$L_i = (1 + \beta P^2)^{-1} \epsilon_{ijk} X_j P_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

These satisfy the usual commutation relations of the form

$$[L_i, X_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} X_k, \quad [L_i, P_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} P_j. \quad (7)$$

If we consider physical states with $\langle \mathbf{P} \rangle = 0$ and the fact that the momentum uncertainties ΔP_i are isotropic, canonical variables represented in Eqs. (1) and (2) no longer gives the Heisenberg uncertainty principle. Instead, we can express its modified form (GUP) as

$$\Delta X_i \Delta P_i \geq \frac{\hbar}{2} [1 + 3\beta (\Delta P_i)^2 + \beta' (\Delta P_i)^2]. \quad (8)$$

By taking the saturation of GUP and minimizing it with respect to ΔP_i , we have an isotropic minimal length which is

$$\Delta X_{\min} = \hbar \sqrt{3\beta + \beta'}. \quad (9)$$

The parameter γ in Eq. (1) does not affect the commutation relations and only modify the squeezing factor of the momentum space measure. In fact, the inner product is now defined by

$$\int \frac{d^3 p}{[1 + (\beta + \beta') p^2]^{1 - \frac{\gamma - \beta'}{\beta + \beta'}}} |p\rangle \langle p| = 1. \quad (10)$$

Now, let us introduce the (3 + 1) dimensional Lorentz-covariant algebra^{33,34}. In this case we have to make the following substitution in Eqs. (3)–(5): $p^2 \rightarrow p_0^2 - p^2 = p_\nu p^\nu$, $p_i x_i \rightarrow p_0 x_0 - p_i x^i = p_\nu x^\nu$, where $p_\nu = (p_0, p_i)$ and $x_\nu = (x_0, x_i)$. If we consider in this scheme that

$$X^\mu = (1 - \beta p_\nu p^\nu) x^\mu - \beta' p^\mu p_\nu x^\nu + i\hbar \gamma p^\mu, \quad P^\mu = p^\mu, \quad (11)$$

we easily show that the Lorentz covariant commutation relations can be deduced to be

$$[X^\mu, P^\nu] = -i\hbar \left[(1 - \beta ((P^0)^2 - P^2)) g^{\mu\nu} - \beta' P^\mu P^\nu \right], \quad (12)$$

$$[X^\mu, X^\nu] = -i\hbar [2\beta - \beta' - (2\beta + \beta')\beta ((P^0)^2 - P^2)] L^{\mu\nu}, \quad (13)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (14)$$

where $g^{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$ and

$$L^{\mu\nu} = \left[1 - \beta ((P^0)^2 - P^2) \right]^{-1} (P^\nu X^\mu - P^\mu X^\nu). \quad (15)$$

Notice that this algebra collapses to the Snyder's algebra³⁵ for $D = 3$, $\beta = \gamma = 0$ and $\beta' = (a/\hbar)^2$. Some algebras that can be fulfilled with $L^{\mu\nu}$ are given by

$$[X^\lambda, L^{\mu\nu}] = 2i\hbar \beta' P^\lambda L^{\mu\nu}, \quad (16)$$

$$[P^\lambda, L^{\mu\nu}] = i\hbar (P^\nu g^{\lambda\mu} - P^\mu g^{\lambda\nu}), \quad (17)$$

$$[L^{\mu\nu}, L^{\alpha\lambda}] = i\hbar (g^{\mu\lambda} L^{\nu\alpha} + g^{\nu\alpha} L^{\mu\lambda} + g^{\mu\alpha} L^{\lambda\nu} + g^{\nu\lambda} L^{\alpha\mu}). \quad (18)$$

Finally the inner product in momentum space, Eq. (10), becomes

$$\int \frac{d^3 p}{[1 - (\beta + \beta') p_\nu p^\nu]^{1 - \frac{2\gamma - 3\beta'}{2(\beta + \beta')}}} |p\rangle \langle p| = 1. \quad (19)$$

The Dirac equation in (3 + 1) dimensions for a free spinor reads $(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0$, where m is the rest mass of the particle and ψ is the four component spinor wave function and γ^μ are four square matrices. In general, the standard representation of γ^μ has the form

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{(2 \times 2)} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_{(2 \times 2)} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

where σ is (2×2) hermitian Pauli matrix and \mathbf{I} is the (2×2) unit matrix. The relativistic Dirac oscillator introduced by other researchers²⁸ can now be obtained using the non-minimal coupling $\mathbf{P} - im\omega\mathbf{X}$ in the free particle Dirac equation, where ω is the frequency of the oscillator. This coupling gives

$$(c\gamma(\mathbf{P} - i\gamma^0 m\omega\mathbf{X}) + \gamma^0 mc^2)\psi = W\psi. \quad (21)$$

From the substitution of $\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$ in Eq. (21), we obtain the following coupled differential equations

$$W\psi_a = c\sigma(\mathbf{P} + im\omega\mathbf{X})\psi_b + mc^2\psi_a, \quad (22)$$

$$W\psi_b = c\sigma(\mathbf{P} - im\omega\mathbf{X})\psi_a - mc^2\psi_b. \quad (23)$$

Because $\psi_b(p, p^0)$ approaches zero as the system become nonrelativistic case ($v \ll c$), $\psi_b(p, p^0)$ is usually called the small wave function³⁸. However, $\psi_a(p, p^0)$ is relatively large in most cases so that we can call it as the large wave function. Let us rearrange Eq. (23) in terms of ψ_b . Then, by inserting it in Eq. (22), we obtain the operator equation for the large component such that



$$(W^2 - m^2 c^4) \psi_a = c^2 \{ \mathbf{P}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{X}^2 + im\omega [\sigma \mathbf{X}, \sigma \mathbf{P}] + im^2 \omega^2 \sigma (\mathbf{X} \wedge \mathbf{X}) \} \psi_a. \quad (24)$$

Wave functions. At this stage, let us decompose the wave function into a radial part and spin angular part as

$$\psi(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} F(p) \mathcal{Y}_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \\ G(p) \mathcal{Y}_{-\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

where $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|}$ is a unit vector.

For the case of a simple situation $\beta' = \gamma = 0$, the use of the algebra of Eq. (12) leads to

$$[\sigma \mathbf{X}, \sigma \mathbf{P}] = i\hbar \left[1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right] \left(\frac{2\sigma \mathbf{L}}{\hbar} + 3 \right), \quad (26)$$

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{X} = -i\hbar \alpha \mathbf{L}, \quad (27)$$

where $\alpha = 2\beta(1 - \beta)((p^0)^2 - p^2)$ and \mathbf{L} is the orbital angular momentum. Now we consider the action of $\sigma \mathbf{L}$ on the spin-angular function $\mathcal{Y}_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}})$:

$$\sigma \mathbf{L} \mathcal{Y}_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) = \hbar \kappa \mathcal{Y}_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}), \quad (28)$$

Here, the quantum number κ is equal to $s(2j + 1) - 1$ where s is the spin, $j = l + s$, and l is the angular momentum. Then, using the first of Eq. (25) with Eqs. (26)–(28), Eq. (24) becomes

$$\begin{aligned} \frac{(c^2(p^0)^2 - m^2 c^4)}{c^2} F(p, p^0) &= \{ \mathbf{P}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{X}^2 \\ &+ [1 - \beta((p^0)^2 - p^2)] (2\hbar m^2 \omega^2 \beta - 2m\omega) \hbar \kappa \\ &- 3m\omega \hbar [1 - \beta((p^0)^2 - p^2)] \} F(p, p^0). \end{aligned} \quad (29)$$

Here, we used the relation $W = cp^0$. If we consider Eq. (11), the momentum space representation of \mathbf{X}^2 is given by

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^2 &= -\hbar^2 \left([1 - \beta((p^0)^2 - p^2)] \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 - \hbar^2 [1 - \beta((p^0)^2 - p^2)]^2 \\ &\times \left(\frac{2}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

From the use of this relation in Eq. (29), we obtain the following differential equation

$$\begin{aligned} &\{ [m\omega \hbar (2\kappa + 3) - 2m^2 \omega^2 \hbar^2 \beta \kappa] (1 - \beta(p^0)^2) - m^2 c^2 + (p^0)^2 \} F(p, p^0) \\ &= -m^2 \omega^2 \hbar^2 \left\{ \left[[1 - \beta((p^0)^2 - p^2)] \frac{\partial}{\partial p} \right]^2 + [1 - \beta((p^0)^2 - p^2)]^2 \frac{2}{p} \frac{\partial}{\partial p} \right. \\ &- (1 - \beta(p^0)^2)^2 \frac{L^2}{p^2} - 2\beta(1 - \beta(p^0)^2) L^2 \\ &\left. + \left[\frac{-1}{m^2 \omega^2 \hbar^2} - \beta^2 L^2 + \frac{(2\kappa + 3)\beta - 2\beta^2 m\omega \hbar \kappa}{m\omega \hbar} \right] p^2 \right\} F(p, p^0). \end{aligned} \quad (31)$$

To simplify this equation, we define a new deformation parameter of the form

$$\theta = \frac{\beta}{1 - \beta(p^0)^2}. \quad (32)$$

This allows us to rewrite Eq. (31) as

$$\begin{aligned} &\left[\frac{m\omega \hbar (2\kappa + 3) - 2m^2 \omega^2 \hbar^2 \beta \kappa}{1 - \beta(p^0)^2} + \frac{(p^0)^2 - m^2 c^2}{(1 - \beta(p^0)^2)^2} \right] F(p, p^0) \\ &= -m^2 \omega^2 \hbar^2 \left\{ \left[(1 + \theta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right]^2 + (1 + \theta p^2)^2 \frac{2}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2} \right. \\ &- \frac{2\beta}{1 - \beta(p^0)^2} L^2 + \frac{1}{(1 - \beta(p^0)^2)^2} \left[\frac{-1}{m^2 \omega^2 \hbar^2} - \beta^2 L^2 \right. \\ &\left. \left. + \frac{(2\kappa + 3)\beta - 2\beta^2 m\omega \hbar \kappa}{m\omega \hbar} \right] p^2 \right\} F(p, p^0). \end{aligned} \quad (33)$$

Introducing new variables such that

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \arctan p \sqrt{\theta}, \quad k_c = \sqrt{m\omega \hbar \theta}, \quad (34)$$

we cast Eq. (33) in the form

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta_c}{k_c^2} F(p, p^0) &= \left\{ \frac{m\omega \hbar}{k_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left[\frac{2m\omega \hbar \sqrt{\theta}}{k_c^2 \tan(\rho \sqrt{\theta})} + \frac{2m\omega \hbar \sqrt{\theta}}{k_c^2} \tan(\rho \sqrt{\theta}) \right] \frac{\partial}{\partial \rho} \right. \\ &- \frac{m\omega \hbar \theta}{k_c^2} L^2 \left[\cot(\rho \sqrt{\theta}) \right]^2 - \frac{2m\omega \hbar}{k_c^2} \theta L^2 + \frac{m\omega \hbar}{k_c^2} \frac{\theta}{\beta^2} \\ &\times \left[\frac{-1}{m^2 \omega^2 \hbar^2} - \beta^2 L^2 + \frac{(2\kappa + 3)\beta - 2\beta^2 m\omega \hbar \kappa}{m\omega \hbar} \right] \\ &\left. \times \left[\tan(\rho \sqrt{\theta}) \right]^2 \right\} F(p, p^0), \end{aligned} \quad (35)$$

where

$$\zeta_c = - \left[\frac{2m\omega \hbar \beta \kappa - (2\kappa + 3)}{1 - \beta(p^0)^2} - \frac{1}{m\omega \hbar} \frac{(p^0)^2 - m^2 c^2}{(1 - \beta(p^0)^2)^2} \right]. \quad (36)$$

Let us make further change of variables, $S = \sin\left(\frac{k_c \rho}{\sqrt{m\omega \hbar}}\right)$ and $C = \cos\left(\frac{k_c \rho}{\sqrt{m\omega \hbar}}\right)$, along with

$$F = C^{\lambda_c} f(C), \quad (37)$$

where λ_c is a constant that will be determined later. Then, we have

$$\begin{aligned} (1 - S^2) f'' - \left(2\lambda_c + 1 - \frac{2}{S} \right) f' + \left[\left(\frac{\zeta_c}{k_c^2} - L^2 - 3\lambda_c \right) - \frac{L^2}{S^2} \right. \\ \left. + \left(\lambda_c^2 - 3\lambda_c - L^2 + \frac{\theta(2\kappa + 3)}{\beta k_c^2} - 2\kappa - \frac{\theta^2}{\beta^2} \frac{1}{k_c^4} \right) \frac{S^2}{C^2} \right] f = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

At this stage we eliminate the term proportional to $\frac{S^2}{C^2}$ by choosing λ_c to be the solution of the following differential equation

$$\lambda_c^2 - 3\lambda_c - L^2 + \frac{\theta(2\kappa + 3)}{\beta k_c^2} - 2\kappa - \frac{\theta^2}{\beta^2} \frac{1}{k_c^4} = 0. \quad (39)$$

Through a straightforward calculation, we easily have

$$\lambda_{c,\pm} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + L^2 - \frac{\theta(2\kappa + 3)}{\beta k_c^2} + 2\kappa + \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{k_c^4}}. \quad (40)$$

Among these two solutions, the physically acceptable one is only $\lambda_{c,+}$. This can be verified by examining them with reference of the GUP using the same method given in Ref. 34 for a similar problem.

A further simplification can be fulfilled by eliminating the centrifugal barrier term in Eq. (38) by setting $f(S) = S^l g(S)$ and $z = 2S^2 - 1$:



$$(1-z^2)g''(z) + [(b-a) - (a+b+2)z]g'(z) + \frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k_c^2} - 2L^2 - (2l+3)\lambda_c + l \right] g(z) = 0. \quad (41)$$

We now introduce the following new parameters

$$a = \lambda_{c,+} - \frac{3}{2}, \quad b = \frac{1}{2} + l, \quad n' = \frac{n-l}{2}, \quad (42)$$

where n' is non-negative integer. Then, by imposing the following constraint

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k_c^2} - 2L^2 - (2l+3)\lambda_{c,+} + l \right] = n'(n' + a + b + 1), \quad (43)$$

we can rewrite Eq. (41) in the form

$$(1-z^2)g''(z) + [(b-a) - (a+b+2)z]g'(z) + n'(n' + a + b + 1)g(z) = 0. \quad (44)$$

We see that the solutions of this equation are expressed in terms of Jacobi polynomials

$$g(z) = N P_{n'}^{(a,b)}(z), \quad (45)$$

where N is a normalization constant. Then, the large radial component $F(z)$ is given by

$$F(z) = N 2^{-\frac{a+b+1}{2}} (1-z)^{\frac{a+3/2}{2}} (1+z)^{\frac{b-1/2}{2}} P_{n'}^{(a,b)}(z). \quad (46)$$

By returning to the old variable p , we immediately have

$$F(p, p^0) = N \sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}} (1+\theta p^2)^{-\frac{a+b+1}{2}} p^{b-\frac{1}{2}} P_{n'}^{(a,b)} \left(\frac{\theta p^2 - 1}{\theta p^2 + 1} \right). \quad (47)$$

We now calculate the small component of the DO wave function $\psi_b(p, p^0)$ using

$$\psi_b(p, p^0) = \frac{c \sigma(\mathbf{P} - im\omega\mathbf{X})}{W + mc^2} \psi_a(p, p^0). \quad (48)$$

Using the Lorentz-covariant operator algebra (see **Methods** section), we confirm that this equation yields

$$\psi_b(p, p^0) = \frac{c}{W + mc^2} \sigma_p \times \left[p + m\omega\hbar \left[1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right] \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sigma\mathbf{L}}{p} \right) \right] \psi_a(p, p^0), \quad (49)$$

where $\sigma_p = \frac{\sigma\mathbf{P}}{p}$.

It is important to use the action of $\sigma\mathbf{L}$ and σ_p on $\mathcal{Y}_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}})$ function, where

$$\sigma_p \mathcal{Y}_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}) = -\mathcal{Y}_{-\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{u}}), \quad (50)$$

and after some simplifications on $\psi_b(p, p^0)$ formula, we can express the small radial wave function $G(p, p^0)$ as

$$G(p, p^0) = \frac{-m\omega\hbar c}{W + mc^2} \left[\left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \beta\hbar\kappa \right) p + \left(1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\left(1 - \beta \left((p^0)^2 \right) \right) \hbar\kappa}{p} \right] F(p, p^0). \quad (51)$$

Notice that this is equivalent to the one that appears in Kempf non-covariant deformed algebra³⁴. By using ω' instead of ω , where

$$\omega' = \left(1 - \beta \left(p^0 \right)^2 \right) \omega = \frac{\beta}{\theta} \omega, \quad (52)$$

Eq. (51) can be rewritten as

$$G(p, p^0) = \frac{-m\omega'\hbar c}{W + mc^2} \left[\left(\frac{1}{m\omega'\hbar} - \theta\hbar\kappa \right) p + \left(1 + \theta p^2 \right) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\hbar\kappa}{p} \right] F(p, p^0). \quad (53)$$

This change makes it easy to normalize the wave function of the relativistic Dirac oscillator on large and small radial components:

$$F(p, p^0) = \frac{1}{p} R_1(p, p^0), \quad (54)$$

$$G(p, p^0) = \frac{1}{p} R_2(p, p^0). \quad (55)$$

The large radial component $R_1(p, p^0)$ is given by

$$R_1(p, p^0) = N \sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}} p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} P_{n'}^{(a,b)}(z), \quad (56)$$

where $f(p)$ is defined as $f(p) = 1 + \theta p^2$.

For the case of the small component $R_2(p, p^0)$, it is necessary to distinguish spin up and spin down states. For $s = \frac{1}{2}$, we have

$$\begin{aligned} R_2(p, p^0) &= \frac{-m\omega'\hbar c N \sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} \left[f \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{m\omega'\hbar} - \theta\hbar\kappa \right) p - \frac{\hbar\kappa}{p} \right] \\ &\times p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} P_{n'}^{(a,b)}(z) \\ &= \frac{-2m\omega'\hbar c N \sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} (1+z) \frac{d}{dz} P_{n'}^{(a,b)}(z) \\ &= \frac{-2m\omega'\hbar c \theta (a+b+n'+1) N \sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b+\frac{3}{2}} f^{-\frac{a+b+3}{2}} \\ &\times P_{n'-1}^{(a+1, b+1)}(z), \end{aligned} \quad (57)$$

whereas, for $s = -\frac{1}{2}$, it yields

$$\begin{aligned} R_2(p, p^0) &= \frac{-m\omega'\hbar c N \sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} \left[f \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \theta\hbar(\kappa+1) \right) p - \frac{\hbar(\kappa+1)}{p} \right] \\ &\times p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} P_{n'}^{(a,b)}(z) \\ &= \frac{-2m\omega'\hbar c N \sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} \left[(1+z) \frac{d}{dz} + b \right] P_{n'}^{(a,b)}(z) \\ &= \frac{-2m\omega'\hbar c (b+n') N \sqrt{\theta}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} P_{n'}^{(a+1, b-1)}(z). \end{aligned} \quad (58)$$

When we derive these two equations, some properties relevant to the Jacobi polynomials, which have appeared in Ref. 39, are used.

Now, let us determine the normalization constant N via the relation

$$\frac{\theta}{\beta} \int_0^\infty \frac{d^3 p}{f(p, p^0)} \left(|R_1(p, p^0)|^2 + |R_2(p, p^0)|^2 \right) = 1. \quad (59)$$

If we consider this, the normalized components of the wave function $F(p, p^0)$ and $G(p, p^0)$ deduced from Eqs. (54) and (55) become



$$F(p, p^0) = \left(\frac{W_c + mc^2}{2W_c} \right)^{\frac{1}{2}} A^{(n')}(a, b) p^{b - \frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}(a+b+1)} P_n^{(a, b)}(z), \quad (60)$$

$$G(p, p^0) = -\sigma \left(\frac{W_c - mc^2}{2W_c} \right)^{\frac{1}{2}} \times A^{(N)}(\tilde{a}, \tilde{b}) p^{\tilde{b} - \frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}(\tilde{a} + \tilde{b} + 1)} P_N^{(\tilde{a}, \tilde{b})}(z), \quad (61)$$

where

$$A^{(n')}(a, b) = \left(\frac{2\theta^{b+1}(a+b+2n'+1)n'\Gamma(a+b+n'+1)}{\Gamma(a+n'+1)\Gamma(b+n'+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (62)$$

$$\tilde{a} = a + 1 \quad \tilde{b} = b + 2s \quad N = n' - s - \frac{1}{2} \quad \sigma = \frac{W_c}{|W_c|},$$

with

$$\begin{cases} n' = 1, 2, 3, \dots & \text{for } s = \frac{1}{2} \text{ and } \sigma = -1 \\ n' = 0, 1, 2, \dots & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (63)$$

Energy spectrum. Using the expressions of n' , a , b , $\lambda_{c,+}$ and ζ given in Eq. (43), it is possible to find the energy spectrum of Dirac oscillator with Lorentz-covariant deformed algebra. A straightforward calculation leads to.

$$W_c^2 = c^2 (p^0)^2 = m^2 c^4 \left(\frac{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2} \Delta}{1 + \hbar\omega m \beta \Delta} \right), \quad (64)$$

where we have set

$$\begin{aligned} \Delta = & 2 \left(n + \frac{3}{2} \right) [(\hbar\omega m \beta)^2 (L^2 + 9/4) - (3 + 2\kappa)\hbar\omega m \beta \\ & + 2\hbar^2 \omega^2 m^2 \beta^2 \kappa + 1]^{1/2} + \hbar\omega m \beta \left(n^2 + L^2 + 3n + \frac{9}{4} \right) \\ & + 2\kappa(\hbar\omega m \beta - 1) - 3. \end{aligned} \quad (65)$$

It is interesting to link Eq. (64) with the energy spectrum of 3D Dirac oscillator obtained with the non-covariant Kempf deformed algebra³⁴. In fact, by inspection, we easily see that Eq. (64) can be rewritten as

$$W_c^2 = \frac{W_{nc}^2}{1 + \hbar\omega m \beta \Delta}, \quad (66)$$

where W_{nc} is the energy spectrum of Dirac oscillator developed with non-covariant deformed algebra³⁴:

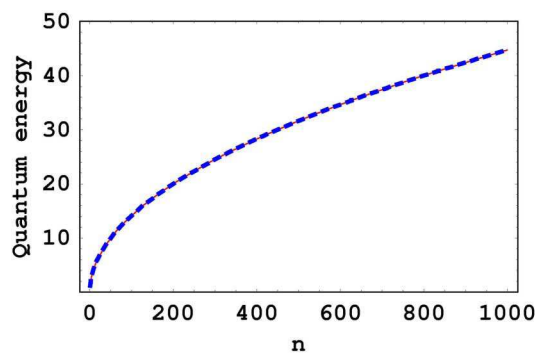
$$W_{nc}^2 = m^2 c^4 \left(1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2} \Delta \right). \quad (67)$$

From Fig. 1, we see that W_c is lower than W_{nc} except when $\beta = 0$. The difference between them becomes large as quantum number n and parameter β increase.

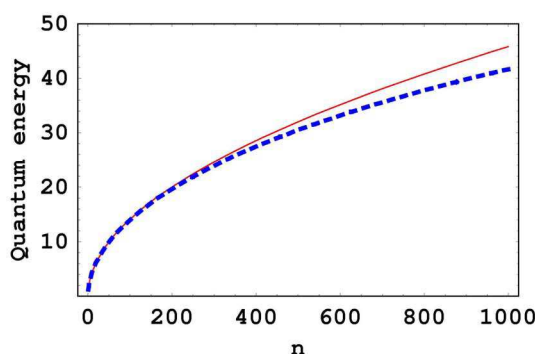
The presence of the additional factor $(1 + \hbar\omega m \beta \Delta)^{-1}$ makes the energy spectrum bounded. In fact, by considering $\Delta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hbar\omega m \beta n^2$, we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_c = \frac{c}{\sqrt{\beta}}. \quad (68)$$

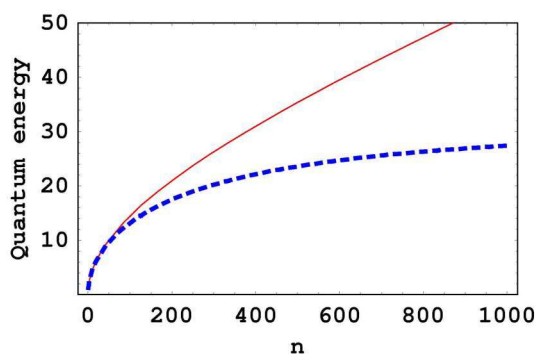
Thus, the energy of the relativistic Dirac oscillator in deformed space is not allowed to increase indefinitely, but approaches to a finite value. This is the main result of our report. However, if we remove the deformation of the space by setting $\beta \rightarrow 0$, the energy in the large n



(a)



(b)



(c)

Figure 1 | Comparison of W_c (dotted line) with W_{nc} (solid line), where $\beta = 0$ (a), $\beta = 0.0001$ (b), and $\beta = 0.001$ (c). We have taken $c = 1$, $m = 1$, $\omega = 1$, $L = 1$, $\kappa = 1$, and $\hbar = 1$ and all these values are chosen dimensionlessly for convenience.

limit becomes $\lim_{n \rightarrow \infty} W_c = \infty$, as expected. In more detail, in order to get increasing values of the energy without upper bound when n increases, we see from Eq. (64) that a necessary condition is $1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2} \Delta > 1 + \hbar\omega m \beta \Delta$, yielding the following constraint

$$\beta m^2 c^2 < 1. \quad (69)$$

It is shown in second part of **Methods** section that how to map the solution of Dirac oscillator with Lorentz-covariant deformed algebra to the solution with the non-covariant deformed algebra of Kempf et al.¹⁻⁴ through (alternative) derivation of the energy spectrum. Now, let's analyze the results in some limiting cases.

i) *The case $\beta = 0$*



In this case we have $W_c = W_{nc}$ and one obtains

$$W_c^2 - m^2 c^4 = 2\hbar\omega mc^2(n - \kappa), \tag{70}$$

or

$$W_c^2 - m^2 c^4 = 2m\omega\hbar c^2 \left(n - j + \frac{1}{2} \right) \quad \text{for } s = \frac{1}{2}, \tag{71}$$

$$W_c^2 - m^2 c^4 = 2m\omega\hbar c^2 \left(n + j + \frac{3}{2} \right) \quad \text{for } s = -\frac{1}{2}. \tag{72}$$

These are exactly the energy levels of the usual Dirac oscillator.

ii) *The non-relativistic limit*

The non-relativistic limit is obtained by setting $W_c = mc^2 + E_c$ with the assumption that $E_c \ll mc^2$, where E_c being the non-relativistic energy. Indeed, from Eq. (66), we obtain the following formula

$$E_c = \frac{(1 - \beta m^2 c^2)}{(1 + \beta m\omega\hbar\Delta)} E_{nc}, \tag{73}$$

where E_{nc} is the non-relativistic energy of the system analyzed with non-covariant algebra. This relation shows that the non-covariant deformed algebra does not equivalent to the non-relativistic limit of the Lorentz-covariant deformed algebra. This conclusion coincide with the previous reports^{36,37} developed for the case of the one-dimensional Dirac oscillator with Lorentz covariant deformed algebra. We see from Eq. (73) that the non-bound condition, Eq. (69), also holds for the non-relativistic case.

Before closing this section, let us see the allowed condition associated with the parameter θ . By rewriting Eq. (32) as a function of θ , we have

$$\beta = \frac{\theta}{1 + \theta(p^0)^2}. \tag{74}$$

Using Eq. (69) one easily get the following bound condition for the norm of 3D momentum

$$|\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}| < \frac{1}{\theta}. \tag{75}$$

Using again Eq. (69) we further obtain

$$p^\mu p_\mu < \frac{1}{\beta}, \tag{76}$$

which means that an UV cut-off naturally implemented in the Lorentz-covariant deformed algebra. By combining Eqs. (75) and (76), one obtains the condition

$$\beta(p^0)^2 < 1, \tag{77}$$

for the physically acceptable states. This can also be obtained from the deformed inner product, by demanding that the weight function in Eq. (19) is free from singularities^{36,37}.

Discussion

In this paper, we have investigated the problem of relativistic Dirac oscillator with minimal length in 3 + 1 dimensional space-time on the basis of Lorentz-covariant algebra introduced using particular variable transformations (in the case $\beta' = \gamma = 0$). The wave functions of the system and the corresponding energy spectrum are derived considering the Lorentz covariant commutation relations given in Eqs. (12)–(14). We confirmed that the energy spectrum is different from the one obtained from Kempf non-covariant algebra³⁴ by the

presence of the factor $(1 + \beta m\omega\hbar\Delta)^{-1}$ [see Eq. (66)], which proves the novelty of the algebra used.

It was important to remark that the energy spectrum we obtained is bounded as shown in Eq. (68) whereas the energy spectrum for the DO problem based on the Kempf algebra is not. If we compare this with the familiar result that the energy levels of the ordinary oscillator is equally spaced leading monotonic growth of the energy with the increment of the quantum number n^{40} , this result is very surprising. Apparently, Eq. (68) implies that the spacing of the energy levels asymptotically approaches to zero for sufficiently large n . We can conclude that the deformation of space restricts the total (relativistic) quantum energy for a mode and the allowed energy become small with the increase of deformation factor β . In the meantime, in case that the deformation of the space disappears, this effect vanishes and the energy spectrum recovers to previously known one as expected.

We have found that Kempf deformed algebra is not a non-relativistic limit of Lorentz-covariant deformed algebra. This outcome is in good agreement with the discussions in Refs. 36, 37. In the limit $\beta \rightarrow 0$, the usual relativistic DO eigenvalues are recovered. The two components of wave function take the form of DO wave functions with Kempf algebra in 3 dimensions^{33,34}, but the normalization constant and the quantities a and b are dependent on p^0 which manifest themselves in the small parameter θ .

Methods

Lorentz-covariant operator algebra. To manage Eq. (48) in the text, it is useful to consider some relations of Ref. 33 with appropriate modifications considering the Lorentz-covariant algebra, which are

$$\sigma \mathbf{X} = i\hbar\sigma_i \left(\left[1 - \beta \left((p^0)^2 - p^2 \right) \right] \frac{\partial}{\partial p_i} \right), \tag{78}$$

$$\sigma_i \frac{\partial}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\sigma \mathbf{L} + 2}{p} \right) \sigma_p = \sigma_p \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sigma \mathbf{L}}{p} \right), \tag{79}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \sigma_p = \sigma_p \frac{\partial}{\partial p}, \tag{80}$$

where $\sigma_p = \frac{\sigma \mathbf{p}}{p}$.

Derivation of the energy spectrum. We show how to map the solution of Dirac oscillator with Lorentz-covariant deformed algebra to the solution with the non-covariant deformed algebra of Kempf et al.¹⁻⁴. The key quantities are k_c and ζ_c , and the corresponding ones in the case of the non-covariant deformed algebra are given by³⁴

$$k_{nc} = \sqrt{\hbar\omega m\beta}, \tag{81}$$

$$\zeta_{nc} = \frac{W^2 - m^2 c^4 + 2\hbar\omega mc^2 \kappa + 3\hbar\omega mc^2 - 2m^2 \hbar^2 \omega^2 c^2 \beta \kappa}{\hbar\omega mc^2}. \tag{82}$$

It is easy to show that

$$k_c = \sqrt{\frac{\theta}{\beta}} k_{nc}, \tag{83}$$

$$\zeta_c = \zeta_{nc} \frac{\theta}{\beta}, \tag{84}$$

$$\lambda_c = \lambda_{nc}. \tag{85}$$

Now, by comparing Eqs. (81) and (82) with Eqs. (83) and (84), and using Eq. (43), we obtain

$$W_c^2 = \frac{W_{nc}^2}{1 + \hbar\omega m\beta\Delta}, \tag{86}$$

which is exactly the same as Eq. (66). On the other hand the wave functions given in Eqs. (60) and (61) can be obtained from the ones obtained in the setup with non-covariant deformed algebra by using Eq. (32) and $p_{nc} = \sqrt{\frac{\theta}{\beta}} p$ and taking into account an extra factor $(\theta/\beta)^{3/2}$ in the normalization constant.



1. Kempf, A. Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry. *J. Math. Phys.* **35**, 4483–4496 (1994).
2. Kempf, A., Mangano, G. & Mann, R. B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Phys. Rev. D* **52**, 1108–1118 (1995).
3. Kempf, A. Non-pointlike particles in harmonic oscillators. *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 2093–2102 (1997).
4. Hinrichsen, H. & Kempf, A. Maximal localization in the presence of minimal uncertainties in positions and in momenta. *J. Math. Phys.* **37**, 2121–2137 (1996).
5. Gross, D. J. & Mende, P. F. String theory beyond the Planck scale. *Nucl. Phys. B* **303**, 407–454 (1988).
6. Capozziello, S., Lambiase, G. & Scarpetta, G. Generalized uncertainty principle from quantum geometry. *Int. J. Theor. Phys.* **39**, 15–22 (2000).
7. Douglas, M. R. & Nekrasov, N. A. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.* **73**, 977–1029 (2001).
8. Minwalla, S., Van Raamsdonk, M. & Seiberg, N. Noncommutative perturbative dynamics. *J. High Energy Phys.* **JHEP02**, 020(1–30) (2000).
9. Szabo, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Phys. Rep.* **378**, 207–299 (2003).
10. Scardigli, F. Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment. *Phys. Lett. B* **452**, 39–44 (1999).
11. Scardigli, F. & Casadio, R. Generalized uncertainty principle, extra dimensions and holography. *Class. Quant. Grav.* **20**, 3915–3926 (2003).
12. Garay, L. J. Quantum gravity and minimal length. *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 145–166 (1995).
13. Veneziano, G. A stringy nature needs just two constants. *Europhys. Lett.* **2**, 199–204 (1986).
14. Amati, D., Ciafaloni, M. & Veneziano, G. On BRST quantization of second class constraint algebras. *Phys. Lett. B* **213**, 41–47 (1989).
15. Konoshi, K., Paffuti, G. & Provero, P. Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory. *Phys. Lett. B* **234**, 276–284 (1990).
16. Kato, M. Particle theories with minimum observable length and open string theory. *Phys. Lett. B* **245**, 43–47 (1990).
17. Guida, R., Konishi, K. & Provero, P. On the short distance behavior of string theories. *Mod. Phys. Lett. A* **6**, 1487–1504 (1991).
18. Hossenfelder, S. The minimal length and large extra dimensions. *Mod. Phys. Lett. A* **19**, 2727–2744 (2004).
19. Hossenfelder, S. Running coupling with minimal length. *Phys. Rev. D* **70**, 105003(1–11) (2004).
20. Hossenfelder, S. Suppressed black hole production from minimal length. *Phys. Lett. B* **598**, 92–98 (2004).
21. Sastry, R. R. Quantum mechanics of smeared particles. *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 8305–8318 (2000).
22. Chang, L. N., Minic, D., Okamura, N. & Takeuchi, T. Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations. *Phys. Rev. D* **65**, 125027(1–8) (2002).
23. Fityo, T. V., Vakarchuk, I. O. & Tkachuk, V. M. One-dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 2143–2150 (2006).
24. Brau, F. Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom. *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 7691–7696 (1999).
25. Akhoury, R. & Yao, Y.-P. Minimal length uncertainty relation and the hydrogen spectrum. *Phys. Lett. B* **572**, 37–42 (2003).
26. Benczik, S., Chang, L. N., Minic, D. & Takeuchi, T. Hydrogen-atom spectrum under a minimal-length hypothesis. *Phys. Rev. A* **72**, 012104(1–4) (2005).
27. Nozari, K. & Azizi, T. Some aspects of gravitational quantum mechanics. *Gen. Rel. Grav.* **38**, 735–742 (2006).
28. Ito, D., Mori, K. & Carriere, E. An example of dynamical systems with linear trajectory. *Nuovo Cimento A* **51**, 1119–1121 (1967).
29. Titchmarsh, E. C. On the relation between the eigenvalues in relativistic and non-relativistic quantum mechanics. *Proc. R. Soc. Ser. A* **266**, 33–46 (1962).
30. Titchmarsh, E. C. On the relation between the eigenvalues in relativistic and nonrelativistic quantum mechanics (II). *Quart. J. Math.* **15**, 193–207 (1964).
31. Nogami, Y. & Toyama, F. M. Coherent state of the Dirac oscillator. *Can. J. Phys.* **74**, 114–121 (1996).
32. Nouicer, Kh. An exact solution of the one-dimensional Dirac oscillator in the presence of minimal lengths. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 5125–5134 (2006).
33. Quesne, C. & Tkachuk, V. M. An exact solution of the one-dimensional Dirac oscillator in the presence of minimal lengths. *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 1747–1766 (2005).
34. Betrouche, M., Maamache, M. & Choi, J. R. Three dimensional Dirac oscillator with minimal length: Novel phenomena for quantized energy. *Adv. High Energy Phys.* **2013**, 383957(1–10) (2013).
35. Snyder, H. S. Quantized space-time. *Phys. Rev.* **71**, 38–41 (1947).
36. Quesne, C. & Tkachuk, V. M. Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length and application to the $(1 + 1)$ -dimensional Dirac oscillator. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 10909–10922 (2006).
37. Quesne, C. & Tkachuk, V. M. Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length. *Czech. J. Phys.* **56**, 1269–1274 (2006).
38. Strange, P. *Relativistic Quantum Mechanics*, Cambridge: Cambridge University Press (1998).
39. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. & Tricomi, F. *Higher transcendental functions*, New York: McGraw-Hill, Vol. **II** (1953).
40. Royer, A. Why are the energy levels of the quantum harmonic oscillator equally spaced. *Am. J. Phys.* **64**, 1393–1399 (1996).

Acknowledgments

One of the authors (M.B.) is indebted to Prof. Kh. Nouicer for his interest and his generous assistance throughout this study. Many thanks to him for fruitful discussions and for remarks and suggestions which are helpful for our future research. The work of M. Maamache was supported by the Agence Thématique de Recherche en Sciences et Technologie(ATRST) contract of May 2, 2011 (code pnr: 8/u19/882). The work of J. R. Choi was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (Grant No.: 2013R1A1A2062907).

Author contributions

M.B. performed scientific calculation. M.B., M.M. and J.R.C. wrote the paper.

Additional information

Competing financial interests: The authors declare no competing financial interests.

How to cite this article: Betrouche, M., Maamache, M. & Choi, J.R. Novel characteristics of energy spectrum for 3D Dirac oscillator analyzed via Lorentz covariant deformed algebra. *Sci. Rep.* **3**, 3221; DOI:10.1038/srep03221 (2013).



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported license. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0>